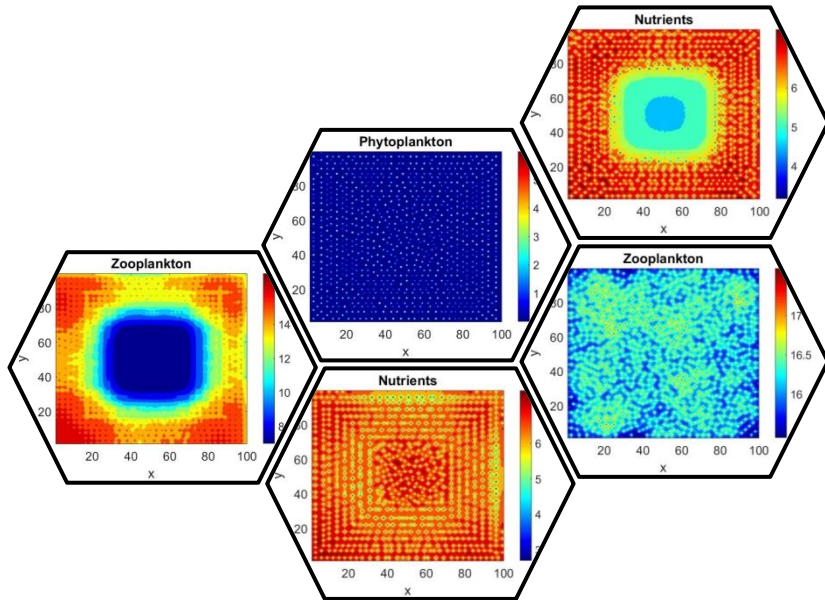


# MODEL MATEMATIKA DINAMIKA ANTARA NUTRISI, FITOPLANKTON DAN ZOOPLANKTON DENGAN EFEK TOKSIN DAN PEMANENAN PADA FITOPLANKTON



ALFIANDHANI SUCI MUTIARA  
H022201001



PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2024

**Model Matematika Dinamika antara Nutrisi, Fitoplankton dan  
Zooplankton dengan Efek Toksin dan Pemanenan pada Fitoplankton**

*Mathematical Model of Dynamics between Nutrients, Phytoplankton and  
Zooplankton with the Effects of Toxins and Harvesting on Phytoplankton*

**ALFIANDHANI SUCI MUTIARA  
H022201001**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2024**

**MODEL MATEMATIKA DINAMIKA ANTARA NUTRISI, FITOPLANKTON  
DAN ZOOPLANKTON DENGAN EFEK TOKSIN DAN PEMANENAN  
PADA FITOPLANKTON**

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Megister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

ALFIANDHANI SUCI MUTIARA

NIM: H022201001

Kepada

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2024**

# TESIS

MODEL MATEMATIKA DINAMIKA ANTARA NUTRISI, FITOPLANKTON DAN  
ZOOPLANKTON DENGAN EFEK TOKSIN DAN PEMANENAN PADA  
FITOPLANKTON

**ALFIANDHANI SUCI MUTIARA**

**NIM : H022201001**

telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Magister pada tanggal 24 bulan Juli tahun  
2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Pada

Program Studi Magister Matematika  
Departemen Matematika  
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Hasanuddin

Makassar

Mengesahkan:

Pembimbing Utama



Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.  
NIP. 19800904 200312 2 001

Pembimbing Pendamping,



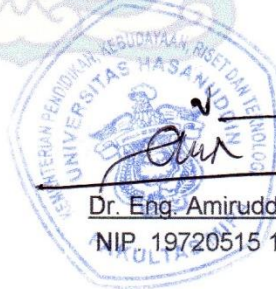
Dr. Agustinus Ribal S.Si., M.Sc.  
NIP. 19750816 199903 1 001

Ketua Program Studi  
Megister Matematika



Dr. Muhammad Zakir, M.Si.  
NIP. 19640207 199103 1 013

Dekan Fakultas Matematika dan  
Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas Hasanuddin



Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.  
NIP. 19720515 199702 1 002

## LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Model Matematika Dinamika antara Nutrisi, Fitoplankton dan Zooplankton dengan Efek Toksin dan Pemanenan pada Fitoplankton" adalah benar karya saya dengan arahan dari tim pembimbing Prof. Dr. Kasbawati., S.Si., M.Si dan Dr. Agustinus Ribal S.Si, M.Sc. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 24 Juli 2024



Alfiandhani Suci Mutiara  
NIM H022201001

## UCAPAN TERIMA KASIH

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamin, saya panjatkan kepada-Nya sebagai rasa syukur yang dalam atas berkat dan rahmat-nya. Shalawat dan salam pun tak lupa dipanjatkan kepada baginda Nabi Muhammad saw yang membimbing umatnya menuju kebaikan dan kebenaran.

Penulisan tesis yang berjudul "Model Matematika Dinamika antara Nutrisi, Fitoplankton dan Zooplankton dengan Efek Toksin dan Pemanenan pada Fitoplankton", memiliki tujuan untuk memenuhi persyaratan akademik dalam rangka memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan serta dukungan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, penulis menyampaikan terima kasih yang setulusnya kepada keempat orang tua tercinta **Bapak Mufti Hendrawan** dan **Ibu Suriani** serta **Ayah Hamsu Abdul Gani** dan **Ibu Hermita Gani** atas setiap bait doa yang tidak pernah putus serta kasih sayang yang tiada henti mengalir dalam merawat dan mendidik penulis dengan penuh sabar dan keikhlasan hati. Ucapan terimakasih juga kepada suami terkasih **Haekal Febriansyah Ramadhan** yang telah menemani dan menyemangati setiap langkah penulis dengan doa dan restunya. Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya juga penulis ucapkan kepada:

1. Ibu **Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.**, selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Si.**, selaku pembimbing pertama untuk segala ilmu, nasehat, waktu beserta kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis.
2. Bapak **Prof. Dr. Jeffry Kusuma**, Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.**, dan Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku anggota tim penguji yang telah bersedia untuk meluangkan waktu dan pikiran dalam memberikan saran sekaligus arahan dalam penyusunan tesis ini.
3. Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, selaku Ketua Program Studi Magister Matematika yang senantiasa memberi bimbingan dan arahan dalam menyelesaikan studi magister ini.
4. Terima kasih kepada kakak-adik, keponakan serta teman-teman program studi magister matematika yang telah menemani, membantu dan menyemangati penulis untuk menyelesaikan penelitian.

Semoga segala bantuan beserta kebaikan kepada penulis mendapatkan balasan yang terbaik dari Allah SWT. Mudah-mudahan tulisan ini memberi manfaat kepada para pembaca dan seluruh pihak yang membutuhkan terutama untuk penulis sendiri.

Makassar, 24 Juli 2024

Penulis



Alfiandhani Suci Mutiara

## ABSTRAK

**ALFIANDHANI SUCI MUTIARA.** Model Matematika Dinamika antara Nutrisi, Fitoplankton dan Zooplankton dengan Efek Toksin dan Pemanenan pada Fitoplankton (Dibimbing oleh Prof. Dr. Kasbawati., M. Si. dan Dr. Agustinus Ribal S.Si, M.Sc)

Penelitian ini membahas model matematika sistem dinamika interaksi fitoplankton-zooplankton dengan nutrisi sebagai makanan dari fitoplankton, dan interaksi fitoplankton terhadap zooplankton menggunakan fungsi respons Holling Tipe II begitu pula efek toksin pada fitoplankton. Pemanenan fitoplankton yang digunakan merupakan pemanenan nonlinier. Model yang dikembangkan menghasilkan tiga titik ekuilibrium: dua titik ekuilibrium menunjukkan konsentrasi kepunahan, yang sebenarnya tidak diinginkan, sedangkan titik ekuilibrium lainnya menunjukkan bahwa ketiga konsentrasi mempertahankan keberadaannya. Koefisien difusi ditambahkan ke model dan dikaji untuk menentukan kondisi ketidakstabilan Turing. Melalui simulasi numerik, pola spasial yang terbentuk dalam model menunjukkan bahwa sebaran konsentrasi yang dihasilkan berubah dari waktu awal ke waktu tertentu, yang memperlihatkan pola spasial yang bervariasi. Pola spasial yang disebut pola Turing yang dihasilkan menunjukkan bahwa efek toksin dan pemanenan fitoplankton memengaruhi model interaksi.

**Kata Kunci:** Interaksi Fitoplankton-Zooplankton; Pemanenan; Ketidakstabilan Turing.

## ABSTRACT

**ALFIANDHANI SUCI MUTIARA.** Mathematical Model of Dynamics between Nutrients, Phytoplankton and Zooplankton with the Effects of Toxins and Harvesting on Phytoplankton (Supervised by Prof. Dr. Kasbawati., M. Si. and Dr. Agustinus Ribal S.Si, M.Sc)

This study discusses the mathematical model of the dynamic system of phytoplankton-zooplankton interactions with nutrients as food for phytoplankton, and the interaction of phytoplankton with zooplankton using the Holling Type II response function as well as the effects of toxins on phytoplankton. The phytoplankton harvesting used is a nonlinear harvesting. The resulting model develops three equilibrium points: two equilibrium points indicate extinction concentrations, which are actually undesirable, while the other equilibrium points indicate that all three concentrations maintain their existence. Diffusion coefficients are added to the model and studied to determine the Turing instability conditions. Through numerical simulations, the spatial patterns formed in the model show that the distribution of the resulting concentrations changes from the initial time to a certain time, which displays a varied spatial pattern. The resulting spatial pattern called the Turing pattern shows that the effects of toxins and phytoplankton harvesting affect the interaction model.

**Keywords:** Phytoplankton-Zooplankton Interaction; Harvesting; Turing Instability.



## DAFTAR ISI

	<b>Halaman</b>
SAMPUL .....	i
HALAMAN JUDUL .....	ii
PERNYATAAN PENGAJUAN .....	iii
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS .....	iv
UCAPAN TERIMA KASIH .....	v
ABSTRAK .....	vi
ABSTRACT .....	vii
DAFTAR ISI .....	viii
DAFTAR GAMBAR .....	x
DAFTAR TABEL .....	xi
BAB I. PENDAHULUAN .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	2
1.3. Tujuan Penelitian .....	3
1.4. Manfaat Penelitian .....	3
1.5. Batasan Masalah .....	3
1.6. Kajian Teori .....	3
1.6.1. Studi Review Model Matematika Dinamika Plankton .....	3
1.6.2. Sistem Diferensial Parsial .....	6
1.6.3. Linierisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan .....	7
1.6.4. Aturan Tanda Descartes .....	8
1.6.5. Kriteria Routh Hurwitz .....	9
1.6.6. Persamaan Reaksi-Difusi .....	10
1.6.7. Ketidakstabilan Turing .....	11
1.6.8. Metode Beda Hingga .....	13
BAB II. METODE PENELITIAN .....	16
BAB III. HASIL DAN PEMBAHASAN .....	17
3.1. Hasil .....	17
3.1.1. Model Matematika Dinamika antara Nutrisi, Fitoplankton dan Zooplankton dengan Efek Toksin dan Pemanenan .....	17
3.1.2. Analisis Titik Keseimbangan dan Kestabilan Sistem tanpa Difusi .....	19

3.1.3. Analisis Kestabilan Sistem dengan Difusi .....	23
3.1.4. Simulasi Numerik .....	29
3.2. Pembahasan .....	45
BAB IV. PENUTUP .....	49
4.1. Kesimpulan .....	49
4.2. Saran .....	49
DAFTAR PUSTAKA .....	50
LAMPIRAN .....	53
Lampiran 1. Kode Program Simulasi Menggunakan Matlab .....	53

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Diagram transmisi dinamika nutrisi ( $N$ ), fitoplankton ( $P$ ) dan zooplankton ( $Z$ ).....	17
Gambar 3.2 Sebaran awal konsentrasi Nutrisi, Fitoplankton dan Zooplankton dengan $E3 = (4.94,0.27,9.54)$ .....	36
Gambar 3.3 Pola spasial dari konsentrasi nutrisi, fitoplankton dan zooplankton untuk waktu (a) $t = 10$ hari, (b) $t = 100$ hari dan (c) $t = 500$ hari.....	37
Gambar 3.4 Pola spasial dari konsentrasi nutrisi, fitoplankton dan zooplankton untuk (a) $\theta = 0.075$ , (b) $\theta = 0.095$ , (c) $\theta = 0.115$ dan (d) $\theta = 0.2$ pada waktu $t = 500$ hari.....	38
Gambar 3.5 Pola spasial dari konsentrasi nutrisi, fitoplankton dan zooplankton untuk (a) $c = 0.58$ , (b) $c = 0.48$ , (c) $c = 0.98$ dan (d) $c = 1.08$ pada waktu $t = 500$ hari .....	39
Gambar 3.6 Pola spasial dari konsentrasi nutrisi, fitoplankton dan zooplankton untuk (a) $c = 1.08$ dan $\theta = 0.075$ (b) $c = 0.48$ dan $\theta = 0.2$ pada waktu $t = 500$ hari .....	40
Gambar 3.7 Pola spasial dari konsentrasi nutrisi, fitoplankton dan zooplankton untuk waktu (a) $t = 1000$ hari, (b) $t = 3000$ hari dan (c) $t = 5000$ hari.....	41
Gambar 3.8 Pola spasial dari konsentrasi nutrisi, fitoplankton dan zooplankton untuk (a) $\theta = 0.075$ , (b) $\theta = 0.095$ , (c) $\theta = 0.115$ dan (d) $\theta = 0.2$ pada waktu $t = 3000$ hari.....	42
Gambar 3.9 Pola spasial dari kepadatan konsentrasi nutrisi, fitoplankton dan zooplankton untuk (a) $c = 0.58$ , (b) $c = 0.48$ , (c) $c = 0.98$ dan (d) $c = 1.08$ pada waktu $t = 3000$ hari.....	44
Gambar 3.10 Pola spasial dari konsentrasi nutrisi, fitoplankton dan zooplankton untuk (a) $c = 1.08$ dan $\theta = 0.075$ (b) $c = 0.48$ dan $\theta = 0.2$ pada waktu $t = 3000$ hari.....	44

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Daftar variabel dan parameter model.....	19
Tabel 3.2 Daftar Nilai Parameter Model.....	29
Tabel 3.3 Keterpenuhan Syarat Ketidakstabilan Turing pada titik $E_3$ .....	30

## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

#### **1.1. Latar Belakang**

Plankton merupakan salah satu organisme terpenting di Bumi yang berukuran kecil dan hidupnya hanyut atau mengambang pada bagian atas samudera, laut, dan permukaan air tawar (Mulyono, et al. 2018). Diketahui plankton terdapat dua jenis, yakni fitoplankton merupakan plankton jenis tumbuhan dan zooplankton merupakan plankton jenis hewan (Nontji 2008). Fitoplankton memiliki klorofil sehingga mampu melakukan fotosintesis. Pertumbuhan fotosintesis fitoplankton menghasilkan setengah dari oksigen yang dibutuhkan makhluk hidup. Fitoplankton juga berperan dalam menyerap setengah dari karbon dioksida yang berkontribusi terhadap pemanasan global. Bukan hanya itu, fitoplankton juga mendaur ulang zat dan gas lain, misalnya senyawa fosfor, nitrogen, dan belerang (Asl dan Javidi 2019). Zooplankton memakan fitoplankton dan dimakan oleh predator yang lebih besar seperti ikan-ikan kecil atau kerang (Malchow, et al. 2008). Beberapa jenis fitoplankton juga dapat dipanen sebagai umpan untuk budidaya perairan dan zooplankton berukuran besar dapat dipanen untuk makanan manusia. Hal tersebut menunjukkan bahwa pemanenan plankton berperan dalam konservasi laut, pengelolaan perikanan dan salah satu sumber ekonomi manusia (Meng, et al. 2018).

Rao (2013) menyatakan penyebaran fitoplankton bervariasi, baik secara horizontal, vertikal, maupun musiman. Hal ini terutama disebabkan oleh ketersediaan cahaya, zat hara (nutrisi) dan pergerakan massa maupun arus air. Sedangkan zooplankton yang merupakan pemangsa fitoplankton yang pertumbuhannya dipengaruhi oleh ketersediaan fitoplankton. Keberadaan fitoplankton merugikan ketika fitoplankton jenis tertentu tumbuh secara berlebihan dan tidak terkontrol. Saha dan Bandyopadhyay (2009) mengatakan kejadian pertumbuhan fitoplankton yang tidak terkontrol ini disebut blooming pada fitoplankton atau biasa dikenal sebagai Harmful Alga Blooms (HABs). Beberapa peneliti sebelumnya, seperti Bairagi, et al., (2008) dan Anderson, et al., (2021) menunjukkan bahwa sejumlah spesies fitoplankton memiliki kemampuan untuk melepaskan toksin atau racun bagi zooplankton yang akan memakannya. Hasil penelitian tersebut menunjukkan dampak yang merugikan yang disebabkan oleh fitoplankton. Fitoplankton yang melepaskan toksin dapat mencemari makanan laut atau membunuh ikan sehingga dapat menyebabkan anoksia dan kematian biota laut.

Model adalah representasi suatu realitas. Proses penjabaran atau merepresentasikan keadaan nyata ke dalam bentuk matematis, hal ini disebut modeling atau pemodelan. Model matematika memungkinkan untuk membuat prediksi tentang interaksi suatu makhluk hidup yang ditinjau dengan berbagai jenis asumsi yang diberikan. Model matematika tentang interaksi plankton pada perairan merupakan pembahasan yang telah dibahas oleh para peneliti dari puluhan tahun yang lalu. Salah satu jurnal pertama yang ditulis oleh Riley (1965) membahas tentang model matematika pada variasi daerah plankton, selanjutnya Busenberg, et al., (1990)

membahas tentang dinamika terhadap model nutrisi dan plankton. Pada Ouedraogo, et al., (2018) membahas tentang pemodelan matematika terhadap dinamika fitoplankton dan zooplankton dengan memperhitungkan racun yang dilepaskan oleh spesies fitoplankton. Model yang dibangun diawali dengan model umum tipe reaksi difusi yang menggambarkan dinamika sistem fitoplankton-zooplankton.

Secara umum, difusi berkaitan dengan transportasi zat dari daerah berkonsentrasi tinggi ke daerah berkonsentrasi lebih rendah dengan gerakan acak. Difusi pada makhluk hidup dapat dikaitkan dengan hal-hal lain, seperti mencari makanan, melarikan diri dari risiko infeksi yang tinggi dan sebagainya. Suku difusi ditambahkan pada sistem interaksi plankton dengan pertimbangan bahwa plankton bergerak dalam perairan dan penyebaran bloom yang terjadi pada fitoplankton melepaskan racun untuk melindungi diri. Pada Wang (2021) membahas model difusi fitoplankton dan zooplankton dengan mempertimbangkan pemanenan nonlinear. Metode pemanenan dapat mengontrol keseimbangan ekosistem pada kehidupan nyata. Wang (2021) menggunakan fungsi respon Holling tipe II untuk merepresentasikan pemangsa terhadap fitoplankton oleh zooplankton dan pemanenan fitoplankton. Namun dari banyaknya referensi yang membahas hal tersebut, penelitian tentang interaksi fitoplankton dan zooplankton dengan respons fungsional Holling tipe II yang melibatkan dinamika plankton terhadap nutrisi sebagai salah faktor utama pergerakan plankton dalam perairan dengan mempertimbangkan parameter pemanenan nonlinear, tampaknya belum ada.

Persamaan terhadap dinamika plankton yang stabil dapat menjadi tidak stabil akibat penambahan difusi. Fenomena ini biasanya disebut sebagai ketidakstabilan Turing. Ketidakstabilan Turing pada model dinamika plankton terhadap nutrisinya dengan melibatkan pemanenan sangat menarik untuk diteliti. Hal ini disebabkan fenomena ini melibatkan dinamika yang kompleks antara populasi plankton dan aktivitas manusia (pemanenan). Selain itu, faktor penambahan difusi dapat dianalisa melalui perubahan waktu dan pola penyebaran. Berdasarkan penjelasan yang telah diuraikan akan dilakukan penelitian tentang "Model Matematika Dinamika antara Nutrisi, Fitoplankton dan Zooplankton dengan Efek Toksin dan Pemanenan pada Fitoplankton".

## **1.2. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang penelitian, adapun rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika yang menggambarkan dinamika antara nutrisi, fitoplankton, dan zooplankton, dengan mempertimbangkan efek pemanenan terhadap fitoplankton dan produksi toksin secara alami ketika fitoplankton dimangsa?
2. Bagaimana kestabilan sistem pada model matematika tanpa difusi dan syarat ketidakstabilan sistem pada model matematika reaksi difusi yang menggambarkan dinamika antara nutrisi, fitoplankton, dan zooplankton?
3. Bagaimana pola spasial yang terbentuk pada model matematika reaksi difusi dengan mempertimbangkan laju produksi toksin dan efek pemanenan pada fitoplankton?

### 1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan penelitian ini sebagai berikut:

1. Mengembangkan dan menganalisa model matematika dinamika nutrisi, fitoplankton dan zooplankton dengan efek toksin dan pemanenan fitoplankton
2. Menganalisa syarat kestabilan sistem dan kemungkinan terjadinya ketidakstabilan Turing terhadap dinamika nutrisi, fitoplankton dan zooplankton dengan efek toksin dan pemanenan fitoplankton
3. Menganalisa secara numerik pola spasial yang terbentuk pada model matematika dinamika nutrisi, fitoplankton dan zooplankton dengan efek toksin dan pemanenan fitoplankton menggunakan metode beda hingga FTCS (*Forward Time Centered Space*)

### 1.4. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan masukan yang baru kepada para peneliti yang mengkaji bidang pemodelan fitoplankton dan zooplankton tentang pengaruh pola penyebaran populasinya dalam dinamika populasi plankton.

### 1.5. Batasan Masalah

Dalam meneliti dinamika model matematika yang dibatasi dengan beberapa asumsi dan batasan masalah digunakan di penelitian ini sebagai berikut:

1. Model matematika yang dibangun mempertimbangkan tiga kompartemen yaitu  $N$  (nutrisi),  $P$  (fitoplankton) dan  $Z$  (zooplankton).
2. Nutrisi hanya dikonsumsi oleh fitoplankton dan fitoplankton hanya dimangsa oleh zooplankton.
3. Kematian dari fitoplankton dan zooplankton dapat didaur ulang menjadi nutrisi.

### 1.6. Kajian Teori

#### 1.6.1. Studi Review Model Matematika Dinamika Plankton

Dalam dua dekade terakhir beberapa peneliti tertarik mengkaji tentang plankton. Plankton merupakan makhluk hidup berukuran kecil dan memiliki peran penting bagi bumi, di antaranya adalah penyedia oksigen utama, menyerap karbon dioksida dari atmosfer, hingga memasok bahan bakar kendaraan. Plankton terbagi atas dua jenis, yakni fitoplankton yang merupakan organisme mirip tumbuhan dan zooplankton yang merupakan organisme pemakan fitoplankton. Walaupun plankton berperan penting bagi bumi terdapat keadaan yang merugikan jika plankton tumbuh tidak terkendali disuatu tempat.

Peristiwa populasi plankton tumbuh tidak terkendali biasa dikenal dengan blooming fitoplankton. Konsentrasi sel fitoplankton yang padat pada permukaan air mengandung pigmen yang tinggi sehingga dapat memberikan warna pada air yang mengakibatkan perairan disebut *red tides*, *brown tides*, dan sebagainya (Zohdi dan Abbaspour 2019). Fitoplankton yang tumbuh tidak terkendali mempengaruhi pertumbuhan populasi zooplankton dan berdampak pada interaksi fitoplankton zooplankton. Fitoplankton dapat melepaskan zat toksin jika populasi zooplankton yang padat berada disekitarnya. Fitoplankton yang beracun dimakan oleh zooplankton kemudian racun tersebut dapat merusak sistem saraf, menyebabkan kerusakan pada

membran sel maupun mengganggu proses metabolisme. Selain pengaruh langsung tersebut efek dari pertumbuhan tak terkendali dari fitoplankton yang beracun menghabiskan oksigen dalam air dan mengakibatkan penurunan kesehatan bagi zooplankton. Interaksi tersebut telah dibahas pada Gakkhar dan Negi (2006) yang menjelaskan tentang perilaku dinamik fitoplankton penghasil toksin dan zooplankton.

Proses pertumbuhan fitoplankton dipengaruhi oleh ketersediaan nutrisi. Beberapa rujukan pada Bairagi, et al., (2008) membahas bahwa penyebab bloom terjadi karena perubahan musim dingin ke musim semi yang membuat suhu permukaan air berubah signifikan, ketersediaan cahaya matahari dan nutrisi pada lingkungan. Nutrisi dalam perairan yang menyebabkan bloom berupa nitrogen, fosfor, zat besi, vitamin dan asam amino. Hal tersebut membuat nutrisi dianggap sebagai salah satu faktor terpenting yang memicu fenomena bloom. Sehingga pada Bairagi, et al., (2008) mengkaji tentang dinamika nutrisi, fitoplankton bukan penghasil toksin, fitoplankton penghasil toksin dan populasi zooplankton dalam sistem laut terbuka. Untuk representasi yang lebih realistis dari fenomena alam plankton laut terbuka mereka memperhitungkan aliran spasial, daur ulang nutrisi, efek toksin, kompetisi antarspesies dan pemangsaan di tingkat yang lebih tinggi.

Dari pandangan biologis, organisme individu didistribusikan dalam ruang dan biasanya berinteraksi dengan lingkungan fisik maupun organisme lain di lingkungan spasial mereka. Secara umum, difusi berkaitan dengan transportasi dari daerah konsentrasi tinggi ke salah satu konsentrasi yang lebih rendah dengan gerakan acak. Difusi individu dapat berupa mencari makanan, melarikan diri dari risiko infeksi yang tinggi dan sebagainya. Pada Rao (2013) dan referensi di dalamnya, membuktikan bahwa model plankton spasial adalah model yang tepat untuk mengkaji mekanisme dasar dinamika plankton spatiotemporal yang kompleks. Mereka membangun model dinamika kompleks spasial fitoplankton beracun-zooplankton dengan respons fungsional tipe Holling II dan menunjukkan bahwa interaksi antara fitoplankton penghasil toksin dan zooplankton di lingkungan laut mungkin sebagian didorong oleh kekuatan difusi atau daya dukung lingkungan. Pada Ouedraogo, et al., (2018) menunjukkan tipe reaksi-difusi yang menggambarkan dinamika sistem fitoplankton-zooplankton dengan menggambarkan efek toksin dimana fitoplankton yang melepaskan racun tidak hanya mengurangi biomassa zooplankton tetapi juga melemahkan kompetisi antar fitoplankton sendiri.

Selain berkontribusi sebagai penyedia oksigen utama, fitoplankton juga memainkan peran penting dalam konservasi laut dan pengelolaan perikanan. Beberapa fitoplankton seperti filum Diatom, filum Pyrrophyta, dan filum Chrysophyta dapat dipanen sebagai umpan untuk budidaya, dan beberapa zooplankton seperti ubur-ubur, krill, dan Acetes dapat dipanen untuk makanan manusia. Seperti yang diketahui, pemanenan adalah salah satu sumber ekonomi dan dapat menjadi metode untuk mengontrol keseimbangan ekosistem. Namun pada sistem fitoplankton-zooplankton dengan pemanenan menunjukkan bahwa pemanenan berlebihan dapat menyebabkan kepunahan populasi dan pemanenan yang tepat harus menjamin keberlanjutan jenis populasi dalam ekosistem perairan. Pada Meng, et al., (2018) membahas tentang model dinamika nutrisi-plankton Holling tipe IV dengan waktu tunda dan pemanenan plankton linier.



Representasi pemanenan pada dinamika plankton berbentuk linear pada Meng, et al., (2018) serta Meng dan Li (2019) tidak cukup untuk menggambarkan keadaan perairan yang lebih realistis. Pada Zhang dan Niu (2020) telah membahas model fitoplankton-zooplankton yang menggabungkan zat toksin dan pemanenan fitoplankton dalam bentuk nonlinier. Pemanenan tipe nonlinier lebih realistis dan diterima secara luas dalam model biologis yang direpresentasikan sebagai model berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= rP \left[ 1 - \frac{P}{K} \right] - \beta f(P)Z - H(P), \\ \frac{dZ}{dt} &= \beta_1 f(P)Z - \mu_3 Z - \theta g(P)Z,\end{aligned}\tag{1.1}$$

dimana  $P$  dan  $Z$  masing – masing adalah kepadatan populasi fitoplankton penghasil toksin dan zooplankton. Parameter  $r, K, \beta, \beta_1, \mu_3, \theta$  merupakan konstanta positif dan mewakili laju pertumbuhan intrinsik fitoplankton penghasil toksin, daya dukung lingkungan fitoplankton, laju predasi zooplankton terhadap fitoplankton penghasil toksin, rasio biomassa yang dikonsumsi zooplankton untuk pertumbuhan, tingkat kematian zooplankton yang disebabkan oleh kematian alami bersama dengan pemangsa yang lebih tinggi dan tingkat pelepasan toksin perfitoplankton penghasil toksin, masing-masing.  $f(P) = P$  adalah fungsi respons predator dan  $g(P) = \frac{P}{\gamma + P}$  adalah distribusi zat toksin, dimana  $\gamma$  merupakan konstanta saturasi fungsi pembebasan toksin. Proses produksi zat beracun sebaiknya direpresentasikan dengan bentuk fungsional Holling tipe II. Karena zat beracun menghambat pertumbuhan zooplankton, fitoplankton yang berbahaya menjadi sulit diakses dalam proses ini. Selain itu, kejenuhan dalam respon fungsi Holling II dapat menjelaskan fakta bahwa fitoplankton dapat melarikan diri dari penggembalaan zooplankton. Sedangkan tipe pemanenan nonlinear yang lebih realistis sebagai berikut:

$$H(P) = \frac{qeP}{m_1 e + m_2 P},\tag{1.2}$$

dimana  $q$  menunjukkan koefisien daya tangkap,  $e$  mengukur upaya yang berkontribusi pada pemanenan,  $m_1$  dan  $m_2$  adalah konstanta. Perhatikan bahwa  $\lim_{e \rightarrow +\infty} H(P) = \frac{qP}{m_1}$  dan  $\lim_{P \rightarrow +\infty} H(P) = \frac{qe}{m_2}$ . Oleh karena itu, pemanenan jenis ini akan jenuh ketika tingkat upaya pemanenan tinggi atau populasi fitoplankton melimpah, yang berguna untuk konservasi ekologis.

Sedangkan Wang (2021) membahas tentang model fitoplankton-zooplankton difusi dengan mempertimbangkan pemanenan nonlinier. Berdasarkan hasil pengamatan lapangan dan laboratorium untuk sistem plankton, mereka mengasumsikan bahwa pertumbuhan mangsa bersifat logistik dan  $f(P)$  direpresentasikan dengan fungsional respon Holling tipe II.  $f(P)$  memiliki representasi yang lebih realistis untuk pemangsa zooplankton terhadap kepadatan populasi fitoplankton. Sehingga  $f(P) = \frac{P}{\gamma_2 + P}$  dimana  $\gamma_2$  adalah kepadatan saturasi diri terhadap mangsa. Pada Rao (2013) mengasumsikan fungsi respon pemangsa fitoplankton dan distribusi zat toksin dideskripsikan memiliki tipe fungsi yang sama.

### 1.6.2. Sistem Diferensial Parsial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui (Finizo dan Ladas, 1982). Berdasarkan bentuk diferensial yang dikandungnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua macam, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. Persamaan diferensial biasa terbagi atas dua yaitu persamaan diferensial biasa linier dan nonlinier. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan-persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan tersebut haruslah melibatkan paling sedikit dua variabel bebas (Ayres dan Ault, 1995).

Orde (tingkat) suatu persamaan diferensial yaitu turunan tertinggi yang terdapat pada persamaan diferensial tersebut. Secara umum persamaan diferensial biasa orde- $n$  dinyatakan dalam:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.3)$$

dimana  $F$  merupakan fungsi dengan variabel bebas  $x$  dan variabel terikat  $y$ .

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat  $n$  buah persamaan diferensial dengan  $n$  buah fungsi yang tidak diketahui, dimana  $n$  merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar sama dengan 2. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu dengan  $n$  fungsi yang tidak diketahui adalah

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Bentuk persamaan (1.4) dapat ditulis secara singkat menjadi

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan linier apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan linier yang saling terkait. Sedangkan koefisiennya bisa berupa konstanta ataupun fungsi. Sedangkan sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinier apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan nonlinier yang saling terkait (Boyce dan DiPrima, 1999).

Persamaan diferensial parsial (PDP) merupakan sebuah persamaan yang memfokuskan pada hubungan antara sebuah fungsi yang belum diketahui  $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$  berdimensi  $n \geq 2$  dan turunan parsial fungsi terhadap variabel-variabel bebasnya. Bentuk umum PDP diberikan sebagai berikut (Gunawan 2016):

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, N, \frac{\partial N}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial N}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 x_1}, \dots, \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 x_n}, \dots\right) = 0. \quad (1.6)$$

PDP biasanya memiliki variabel bebas untuk ruang maupun waktu. Contoh PDP sederhana dengan  $N$  sebagai fungsi yang belum diketahui dan hanya memiliki dua variabel bebas seperti persamaan difusi sebagai berikut:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial^2 x} = 0. \quad (1.7)$$

### 1.6.3. Linierisasi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dapat digunakan untuk mengamati perilaku kestabilan suatu sistem. Titik kesetimbangan merupakan suatu keadaan dari sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Jika sistem dinamika dituangkan dalam bentuk persamaan diferensial maka titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan cara mengambil turunan pertama yang sama dengan nol (Guckenheimer dan Holmes, 1983). Suatu titik  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  dikatakan titik kesetimbangan dari

$$\dot{x} = f(x) \text{ untuk } x \in \mathbb{R}^n,$$

jika memenuhi

$$f(\bar{x}) = \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

dimana

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

atau dengan kata lain, jika  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  merupakan titik kesetimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$ , maka :

$$f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \mathbf{0}, \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial tak linier dilakukan melalui metode pelinieran. Untuk mencari hasil pelinieran dari sistem persamaan diferensial tak linier digunakan matriks Jacobi.

**Definisi 1.1** (Cox dan Subbarao, 2000) *Diberikan fungsi  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  pada sistem  $f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ . Maka matriks Jacobi  $J$  dari fungsi di titik  $\bar{x}$ , yaitu:*

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

Metode linearisasi merupakan metode yang umumnya digunakan untuk mendapatkan bentuk linear dari sistem nonlinear disekitar titik kesetimbangan sistem. Matriks tersebut dikatakan bentuk linear dari sistem  $\dot{x} = f(x)$  yang diaproksimasi disekitar titik  $\bar{x}$ .

**Definisi 1.2** (Cox dan Subbarao, 2000) *Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$  maka vektor tak nol  $x$  di  $\mathbb{R}^n$  dinamakan vektor eigen dari  $A$ . Jika  $Ax$  adalah kelipatan skalar dari  $x$  yakni:*

$$Ax = \lambda x, \quad (1.12)$$

untuk suatu scalar  $\lambda$  yang dinamakan *eigen value* (nilai eigen) dari  $A$  dan  $x$  dikatakan *eigen vector* (vektor eigen) yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .

Untuk mencari nilai eigen dari matriks  $A$ , dapat dituliskan kembali:

$$Ax = \lambda Ix, \quad (1.13)$$

karena  $I$  suatu matriks identitas, jadi  $Ax = \lambda x$  memiliki nilai yang sama dengan  $Ax = \lambda Ix$  dan ekuivalen dengan

$$(\lambda I - A)x = \mathbf{0}, \quad (1.14)$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik dari matriks  $A$ , yaitu:

$$\det(\lambda I - A) = \mathbf{0}. \quad (1.15)$$

Titik kesetimbangan dikatakan stabil jika solusi sistem persamaan pada saat  $t$  selalu berada pada jarak yang cukup dekat dengan titik kesetimbangan tersebut, sedangkan titik kesetimbangan dikatakan stabil asimtotik jika solusi sistem persamaan pada saat  $t$  akan menuju titik kesetimbangan dan titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil jika solusi sistem persamaan pada saat  $t$  bergerak menjauhi titik kesetimbangan tersebut.

Kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai-nilai eigen dari persamaan karakteristik matriks .

**Definisi 1.3** (Cox dan Subbarao, 2000) *Diberikan suatu matriks jacobian  $J$  dari sistem  $f(\bar{x}) = \mathbf{0}$  dengan nilai eigen  $\lambda$ . Dari nilai eigen  $\lambda$  ini akan dilihat bahwa sistem akan:*

1. *Stabil, jika dan hanya jika bagian riil dari setiap nilai eigen  $\lambda$  dari matriks Jacobian  $J$  bernilai kecil atau sama dengan nol ( $Re(\lambda) \leq 0$ ).*
2. *Stabil asimtotik, jika dan hanya jika bagian riil dari setiap nilai eigen  $\lambda$  dari matriks Jacobian  $J$  bernilai negatif ( $Re(\lambda) < 0$ ).*
3. *Tidak stabil, jika terdapat paling sedikit satu  $Re(\lambda) > 0$  di matriks  $J$ .*

#### 1.6.4. Aturan Tanda Descartes

Aturan tanda Descartes dalam aljabar adalah aturan untuk menentukan jumlah maksimum akar real positif dari persamaan polinomial dalam satu variabel berdasarkan berapa kali tanda koefisien berubah ketika suku-suku tersebut disusun dari pangkat tertinggi ke pangkat terendah.

Menurut Wang (2004), misalkan  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  adalah fungsi polinomial dengan koefisien real, berdasarkan aturan tanda Descartes maka:

1. Jumlah akar real positif dari  $f(x)$  (dihitung dengan kelipatan) sama dengan banyaknya perubahan tanda dari koefisien  $f(x)$  atau banyaknya perubahan tanda dikurangi dengan bilangan bulat genap.
2. Jumlah akar real negatif dari  $f(x)$  (dihitung dengan kelipatan) sama dengan banyaknya perubahan tanda dari koefisien  $f(-x)$  atau banyaknya perubahan tanda dikurangi dengan bilangan bulat genap.

### 1.6.5. Kriteria Routh Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz merupakan metode yang dapat digunakan untuk menunjukkan kestabilan suatu sistem. Metode ini memperhatikan koefisien persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung (Lapidus dan Seinfeld 1971).

Jika diberikan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (1.16)$$

dengan koefisien  $a_i, i = 0, 1, \dots, n$  bernilai real. Dari persamaan (1.16) dapat dibentuk matriks  $H_j$ , dengan  $H_j$  adalah matriks Hurwitz yang didefinisikan sebagai berikut :

$$H_j = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ h_{31} & h_{32} & \dots & h_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i1} & h_{i2} & \dots & h_{im} \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

dengan

$$h_{im} = \begin{cases} a_{2i-m}, & 0 < 2i - m < n \\ a_0, & 2i = m; \text{ untuk } j = 1, \dots, n \\ 0 & \text{lainnya,} \end{cases} \quad (1.18)$$

maka diperoleh matriks  $H_j$  yang baru, yaitu

$$H_j = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2j-3} & a_{2j-4} & a_{2j-5} & a_{2j-6} & \dots & a_{j-2} \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & \dots & a_j \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Berdasarkan matriks dalam persamaan (1.19), titik ekuilibrium  $\bar{x}$  dikatakan stabil jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} \Delta 1 &= a_1 > 0, \\ \Delta 2 &= \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} > 0, \\ \Delta 3 &= \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} > 0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\Delta n = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2j-3} & a_{2j-4} & a_{2j-5} & a_{2j-6} & \dots & a_{j-2} \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & \dots & a_j \end{bmatrix} > 0.$$

### 1.6.6. Persamaan Reaksi-Difusi

Persamaan reaksi-difusi yang terdiri atas dua suku yaitu suku reaksi dan suku difusi. Dalam ekologi persamaan reaksi-difusi digunakan untuk menggambarkan penyebaran dan reaksi antara satu atau lebih populasi. Secara sederhana dalam satu dimensi, misalkan  $N(x, t)$  adalah konsentrasi dari beberapa spesies yang ditempatkan, maka perubahan konsentrasi dapat dinyatakan dalam Murray (2003) sebagai berikut

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(N) + D_N \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, \quad (1.21)$$

dimana  $D_N$  adalah koefisien yang dihubungkan dengan penyebaran dari  $N$  dan  $f(N)$  adalah fungsi yang menggambarkan dinamika dari  $N$  yang bergantung pada perubahan konsentrasi.

Misalkan diberikan sebuah sistem persamaan differensial tak linier:

$$\begin{aligned} N_t &= f(N, P), \\ P_t &= g(N, P), \end{aligned} \quad (1.22)$$

dengan titik kesetimbangan  $(N_0, P_0)$ . Hasil linierisasi dari persamaan (1.22) diperoleh

$$\begin{bmatrix} N_t \\ P_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_N & f_P \\ g_N & g_P \end{bmatrix}_{N_0, P_0} \begin{bmatrix} N \\ P \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

dimana  $f_N$  dan  $f_P$  masing-masing adalah turunan  $f(N, P)$  terhadap  $N$  dan  $P$ ,  $g_N$  dan  $g_P$  masing-masing turunan  $g(N, P)$  terhadap  $N$  dan  $P$ . Persamaan karakteristik dari persamaan (1.23) diperoleh

$$\lambda^2 - (f_N + g_P)\lambda + f_N g_P - f_P g_N = 0. \quad (1.24)$$

Sifat kestabilan pada persamaan (1.22) disekitar titik kesetimbangan  $(N_0, P_0)$  bergantung dengan nilai  $\lambda$  pada persamaan (1.24). Sistem stabil saat solusi dari persamaan (1.24) bernilai negatif atau  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ . Kondisi dari  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$  diperoleh jika

$$f_N + g_P < 0 \text{ dan } f_N g_P - f_P g_N > 0. \quad (1.25)$$

Konsep difusi dapat dipandang secara sederhana sebagai kecenderungan sekelompok partikel yang awalnya terkonsentrasi di suatu titik untuk menyebar dalam waktu, secara bertahap menempati area yang semakin luas di sekitar titik awal. Di sini istilah "partikel" tidak hanya mengacu pada partikel fisik, tetapi juga populasi biologis atau unit teridentifikasi lainnya. Difusi dapat dikaitkan sebagai gerak tak beraturan secara mikroskopis dari setiap partikel namun menimbulkan keteraturan gerakan secara makroskopis.

Adolf Fick menggambarkan difusi secara matematika atau dikenal dengan Hukum Fick. Menurut Hukum Fick yang pertama, jumlah perpindahan materi kearah  $x$  melintasi satuan luas dalam satuan waktu, yaitu flux  $J_x$ , sebanding dengan gradien konsentrasi materi, yaitu

$$J_x = -D \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (1.26)$$

dimana  $D$  adalah konstanta difusi. Kombinasi antara hukum Fick pertama dan hukum konversi massa menghasilkan suatu persamaan yang mendeskripsikan proses difusi, yaitu

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (1.27)$$

Persamaan reaksi pada persamaan (1.22), jika digabungkan dengan sebuah persamaan difusi satu dimensi maka akan membentuk persamaan reaksi-difusi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= f(N, P) + D_N \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= g(N, P) + D_P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

### 1.6.7. Ketidakstabilan Turing

Sistem reaksi-difusi menunjukkan ketidakstabilan yang didorong oleh difusi atau disebut ketidakstabilan Turing. Ketidakstabilan Turing terjadi jika titik kesetimbangan homogen stabil untuk gangguan kecil tanpa adanya difusi tetapi tidak stabil untuk gangguan spasial kecil ketika difusi hadir. Turing menjelaskan bagaimana gangguan heterogen amplitudo kecil dari titik kesetimbangan homogen yang stabil dari sistem reaksi-difusi dapat menyebabkan ketidakstabilan, yang dikenal sebagai ketidakstabilan difusi, dan menghasilkan pola Turing. Kimura (2014) memberikan kondisi yang diperlukan untuk mendapatkan ketidakstabilan Turing yaitu sistem dalam keadaan stabil ketika bereaksi tanpa adanya faktor difusi dan sistem tidak stabil saat terjadi penambahan faktor difusi. Camara dan Aziz-Aloui (2009) menyampaikan bahwa syarat perlu terjadinya difusi pada sistem mangsa-pemangsa dengan faktor difusi yaitu pemangsa berdifusi lebih cepat daripada mangsanya. Perbedaan koefisien difusi adalah perlu namun tidak cukup untuk terbentuknya ketidakstabilan Turing.

Tinjau kembali persamaan (1.28). Linierisasi dilakukan disekitar titik kesetimbangan  $(N_0, P_0)$  untuk mengetahui jenis kestabilan sistem dengan faktor difusi (Murray 2003). Misalkan  $\mathbf{w} = [N \ P]^T$ , dengan

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{D} \nabla^2 \mathbf{w} + \mathbf{A} \mathbf{w}, \quad (1.29)$$

dimana

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_N & 0 \\ 0 & D_P \end{bmatrix}, \quad (1.30)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_N & f_P \\ g_N & g_P \end{bmatrix}_{N_0, P_0}. \quad (1.31)$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan ini (1.29), dimisalkan  $\mathbf{W}(\mathbf{r})$  adalah solusi tak bergantung pada waktu dari masalah nilai eigen spasial didefinisikan dengan  $\nabla^2 \mathbf{W} + k^2 \mathbf{W} = 0$  dimana kondisi batas  $(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{W} = 0$  dan  $k$  adalah nilai eigen. Jika  $\mathbf{W}_k(\mathbf{r})$  adalah fungsi eigen dari masalah nilai eigen. Setiap fungsi eigen  $\mathbf{W}_k$  memenuhi kondisi batas fluks nol, maka diperoleh solusi  $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$  dari sistem persamaan (1.29) dalam bentuk

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t} \mathbf{W}_k(\mathbf{r}), \quad (1.32)$$

dimana vektor  $\mathbf{C}_k \in \mathfrak{R}^{2 \times 1}$ , adalah konstanta Fourier untuk sistem. Substitusi solusi pada persamaan (1.32) ke dalam persamaan (1.29) dan bandingkan fungsi eigen, diperoleh

$$\sum_k \mathbf{C}_k \lambda_k e^{\lambda_k t} \mathbf{W}_k = D \nabla^2 \sum_k \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t} \mathbf{W}_k + A \sum_k \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t} \mathbf{W}_k, \quad (1.33)$$

karena  $\nabla^2 \mathbf{w} + k^2 \mathbf{w} = 0$  maka  $\nabla^2 \mathbf{w} = -k^2 \mathbf{w}$ , sehingga persamaan (1.33) dapat ditulis

$$\sum_k \mathbf{C}_k \lambda_k e^{\lambda_k t} \mathbf{W}_k = A \sum_k \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t} \mathbf{W}_k - D \nabla^2 \sum_k \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t} \mathbf{W}_k, \quad (1.34)$$

dimana  $\mathbf{W}_k$  adalah *linearly independent*. Persamaan (1.34) mengarah ke bentuk  $\lambda_k I = -k^2 D + A$  dimana  $I$  adalah matriks identitas. Selanjutnya, diperoleh matriks Jacobian untuk persamaan (1.29) sebagai berikut:

$$A_k = A - k^2 D = \begin{bmatrix} f_N - k^2 D_N & f_P \\ g_N & g_P - k^2 D_P \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Nilai eigen dari matriks Jacobian  $A_k$  ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik berikut:

$$\lambda_k^2 - \lambda_k [f_N + g_P - k^2 (D_N + D_P)] + (f_N - k^2 D_N)(g_P - k^2 D_P) - f_P g_N = 0, \quad (1.36)$$

atau dapat juga dituliskan dalam bentuk

$$\lambda_k^2 - \lambda_k [\text{trace}(A_k)] + \det(A_k) = 0, \quad (1.37)$$

dimana

$$\text{trace}(A_k) = f_N + g_P - k^2 (D_N + D_P), \quad (1.38)$$

$$\det(A_k) = k^4 D_N D_P - k^2 (D_P f_N + D_N g_P) + (f_N g_P - f_P g_N). \quad (1.39)$$

Berdasarkan Definisi 1.3, solusi kesetimbangan stabil jika  $Re(\lambda) < 0$  untuk setiap nilai eigen. Ketidakstabilan Turing mengacu terhadap situasi dimana solusi stabil tanpa adanya difusi, tetapi tidak stabil ketika ditambahkan difusi. Oleh karena itu, diperlukan  $Re(\lambda) > 0$  untuk setiap nilai eigen sedemikian hingga keadaan stabil menjadi tidak stabil dengan adanya difusi.

Terdapat dua kemungkinan untuk kasus ini, yaitu  $T_k > 0$  atau  $D_k < 0$ . Dari kondisi  $f_N + g_P < 0$  dan fakta bahwa koefisien difusi selalu bernilai positif, maka persamaan (1.33) atau  $T_k$  akan selalu bernilai negatif. Sehingga satu-satunya kemungkinan untuk  $Re(\lambda) > 0$  yaitu ketika  $D_k < 0$ . Karena  $f_N g_P - f_P g_N > 0$  pada persamaan (1.25), maka satu-satunya kemungkinan untuk  $D_k < 0$  jika  $D_P f_N + D_N g_P > 0$ .

**Definisi 1.4** (Murray, 2003) *Jika  $f_N + g_P < 0$  dan  $D_P f_N + D_N g_P > 0$  maka  $D_N \neq D_P, f_N$  dan  $g_P$  harus berlawanan tanda.*

Definisi 1.4 diperlukan tetapi tidak cukup untuk  $Re(\lambda) > 0$ . Selanjutnya dapat dilihat bahwa  $D_k$  berbentuk fungsi kuadrat dalam  $k^2$ . Hal ini menunjukkan bahwa fungsi



berbentuk parabola terbuka ke atas karena  $D_N D_P$  bernilai positif. Untuk  $D_k$  menjadi negatif, persamaan (1.39) diturunkan terhadap  $k^2$  dan diatur menjadi sama dengan nol.

Menurut Rai (2013), ketidakstabilan Turing terjadi pada sistem (1.28) jika memenuhi syarat:

1.  $T_k > 0$ ,
2.  $D_k < 0$ ,
3.  $D_P f_N + D_N g_P > 0$ ,
4.  $(D_P f_N + D_N g_P)^2 > 4D_N D_P (D_k)$

### 1.6.8. Metode Beda Hingga

Deret Taylor merupakan representasi dari fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Persamaan deret Taylor dari  $y = f(x)$  di sekitar  $(x_0)$  adalah sebagai berikut (Hoffmann dan Chiang, 2000):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \quad (1.40)$$

Secara umum persamaan (1.40) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (1.41)$$

dengan  $f(x_0)$  menyatakan nilai fungsi  $f$  dititik  $x_0$ ,  $n!$  melambangkan faktorial di  $n$  dan  $f^{(n)}(x_0)$  melambangkan nilai dari turunan ke- $n$  fungsi  $f$  di  $x_0$ .

Jika diberikan sebuah fungsi  $(x, t)$  yang kontinu, maka  $f(x + \Delta x, t)$  dapat diekspansi dalam sebuah deret Taylor disekitar titik  $x$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, t) &= f(x, t) + \Delta x \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots \\ &= f(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

dengan memanfaatkan ekspansi deret Taylor pada persamaan (1.40), diskritisasi persamaan differensial parsial dibagi menjadi tiga skema beda hingga yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*) dan beda pusat (*central difference*).

Dari Persamaan (1.42), diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} &= \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (1.43)$$

Jika suku-suku yang memuat faktor  $\Delta x$  atau yang lebih tinggi dijumlahkan dan dinotasikan dengan  $O(\Delta x)$ , maka  $\frac{\partial f}{\partial x}$  dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (1.44)$$

Persamaan (1.44) adalah sebuah hampiran turunan parsial orde pertama fungsi  $f$  terhadap variabel bebas  $x$ . Jika indeks  $i$  digunakan untuk menggambarkan titik-titik diskrit dalam sumbu  $x$ , dan indeks  $n$  digunakan untuk menggambarkan titik-titik diskrit dalam sumbu  $t$ , maka persamaan (1.44) dapat dituliskan sebagai:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^n = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (1.45)$$

Persamaan (1.45) disebut sebagai pendekatan beda maju dari  $\frac{\partial f}{\partial x}$  dengan orde  $\Delta x$ . Pertimbangkan ekspansi deret Taylor pada  $f(x - \Delta x)$  di  $x$ , yaitu

$$\begin{aligned} f(x - \Delta x, t) = f(x, t) - \Delta x \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \\ - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (1.46)$$

Penyelesaian untuk  $\frac{\partial f}{\partial x}$  adalah

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x, t) - f(x - \Delta x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (1.47)$$

atau

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^n = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (1.48)$$

Persamaan (1.48) merupakan hampiran beda mundur  $\frac{\partial f}{\partial x}$  orde  $\Delta x$ .

Lebih lanjut dengan mempertimbangkan kembali ekspansi deret Taylor pada persamaan (1.42) dan persamaan (1.46), dengan mengurangi persamaan (1.42) dengan persamaan (1.46) diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t) = 2\Delta x \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \\ 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (1.49)$$

Penyelesaian untuk  $\frac{\partial f}{\partial x}$  adalah

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2, \quad (1.50)$$

atau

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^n = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2. \quad (1.51)$$

Persamaan (1.51) dikenal dengan hampiran beda pusat dengan orde  $(\Delta x)^2$ .

Adapun hampiran turunan parsial orde dua terhadap  $x$  untuk beda pusat dapat diperoleh melalui penjumlahan persamaan (1.42) dan persamaan (1.46), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2, \quad (1.52)$$

atau

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^n = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2. \quad (1.53)$$

Salah satu metode beda hingga eksplisit untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial adalah FTCS atau *Forward Time Centered Space*. Metode FTCS merupakan metode beda hingga eksplisit yang menghampiri turunan terhadap waktu dengan skema beda maju dan menghampiri turunan terhadap ruang dengan skema beda pusat. Orde dari skema FTCS adalah  $[(\Delta t), (\Delta x)^2]$ . Persamaan (1.28) didiskritisasi menggunakan FTCS menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{N_i^{n+1} - N_i^n}{\Delta t} &= f(N_i^n, P_i^n) + \frac{N_{i+1}^n - 2N_i^n + N_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2, \\ \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} &= g(N_i^n, P_i^n) + \frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Untuk memastikan bahwa metode numerik yang digunakan dalam pemecahan persamaan diferensial parsial memberikan solusi yang stabil dan mendekati solusi eksak maka perlu untuk menganalisis kekonvergenannya (Isaacson dan Keller 1994). Analisis kekonvergenan untuk metode FTCS (*Forward Time Centered Space*) dengan menggunakan persamaan panas dua dimensi dengan diskritisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{N_i^{n+1} - N_i^n}{\Delta t} &= f(N_i^n, P_i^n) + \frac{D_N}{(\Delta x)^2} (N_{i+1}^n - 2N_i^n + N_{i-1}^n) \\ &\quad + \frac{D_N}{(\Delta y)^2} (N_{i+1}^n - 2N_i^n + N_{i-1}^n), \\ \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} &= g(N_i^n, P_i^n) + \frac{D_P}{(\Delta x)^2} (P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n) \\ &\quad + \frac{D_P}{(\Delta y)^2} (P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n). \end{aligned} \quad (1.55)$$

dimana  $D_N$  dan  $D_P$  koefisien difusi, dengan menggunakan analisis stabilitas von Neumann, metode FTCS untuk persamaan (1.55) stabil secara numerik jika dan hanya jika kondisi di bawah ini terpenuhi:

$$\begin{aligned} \Delta t \left( D_N \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right) &\leq \frac{1}{2}, \\ \Delta t \left( D_P \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right) &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

## BAB II METODE PENELITIAN

### 2.1. Model Dinamika Nutrisi, Fitoplankton dan Zooplankton

Model yang dibangun adalah pengembangan model dari Meng, et al., (2018) serta Zhang dan Niu (2020). Model yang dibahas berkaitan dengan masalah dinamika nutrisi, fitoplankton dan zooplankton dengan mempertimbangkan efek toksin dan pemanenan menggunakan fungsi tipe Holling II.

### 2.2. Penentuan Titik Keseimbangan

Pada bagian ini ditentukan titik keseimbangan model yang telah dibangun berdasarkan model dinamika nutrisi, fitoplankton dan zooplankton. Titik keseimbangan yang digunakan merupakan titik keseimbangan positif dari sistem persamaan diferensial pada model dinamika tersebut. Titik keseimbangan positif diperoleh dengan menentukan pembuat nol untuk masing – masing fungsi dari sistem persamaan diferensial pada model.

### 2.3. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan positif yang diperoleh dianalisis untuk menentukan kestabilannya. Kestabilan dapat ditentukan dengan menganalisis nilai eigen. Model sistem persamaan diferensial digunakan untuk mencari matriks Jacobian dan dievaluasi di titik keseimbangan positif. Persamaan karakteristik yang diperoleh dari matriks Jacobian digunakan untuk menentukan nilai eigen. Berdasarkan teorema Routh Hurwitz, jika semua bagian riil dari nilai eigen negatif maka sistem stabil asimtotik.

### 2.4. Analisis Kestabilan dengan Difusi

Model dinamika nutrisi, fitoplankton dan zooplankton dibangun kembali dengan menambahkan koefisien difusi pada model dinamikanya. Kondisi kestabilan titik keseimbangan yang diperoleh dipertahankan dengan menganalisa kestabilan sistem dengan pengaruh difusi, sehingga diperoleh sebuah kondisi tidak stabil dari sistem model dinamika. Syarat terjadinya ketidakstabilan dari model atau biasa disebut ketidakstabilan Turing dengan adanya pengaruh difusi yang diperoleh kemudian dianalisis.

### 2.5. Penyelesaian Numerik

Penyelesaian numerik pada model dilakukan dengan menggunakan metode pendekatan beda hingga FTCS (*Forward Time Centered Space*) dengan mendefinisikan titik-titik grid dalam ruang pengamatan dengan menentukan  $\Delta t, \Delta x$  dan  $\Delta y$  yang memenuhi syarat kestabilan dan kekonvergenan metode beda hingga FTCS. Selanjutnya, melakukan transformasi *forward time difference* untuk turunan terhadap waktu dan *centered space difference* untuk turunan terhadap ruang dan mendapatkan model diskret dari hasil transformasi serta mensubstitusi nilai setiap parameter model. Pada tahap melakukan iterasi untuk syarat awal dan iterasi menggunakan pada model untuk memperoleh nilai dan pada setiap nilai  $N_{i,j,n}, P_{i,j,n}$  dan  $v_{n,i,j}$  dari waktu ke waktu.

### 2.6. Penarikan Kesimpulan

Setelah menganalisis dan melakukan simulasi numerik terhadap model selanjutnya diambil suatu kesimpulan terhadap hasil – hasil yang diperoleh.