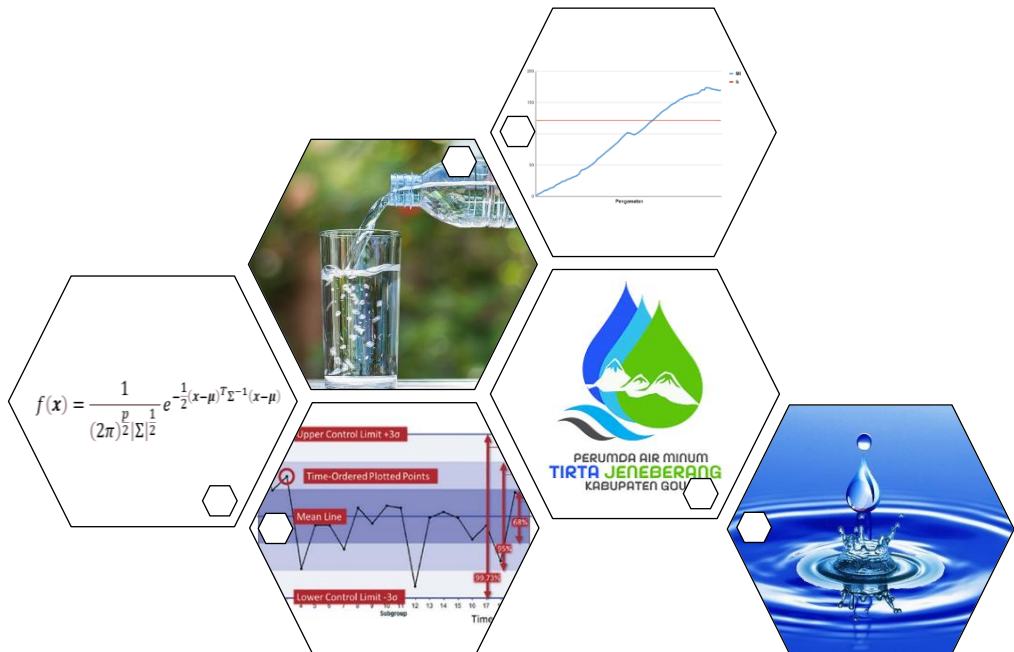


**PENGENDALIAN KUALITAS PROSES PRODUKI MELALUI PENERAPAN
PETA KENDALI *MAXIMUM MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM*
BERDASARKAN PENDEKATAN *BOOTSTRAP***



**DANIA NAFILA
H051201053**



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024**

**PENGENDALIAN KUALITAS PROSES PRODUKSI MELALUI PENERAPAN
PETA KENDALI *MAXIMUM MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM*
BERDASARKAN PENDEKATAN *BOOTSTRAP***

**DANIA NAFILA
H051201053**



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024**

**PENGENDALIAN KUALITAS PROSES PRODUKSI MELALUI PENERAPAN
PETA KENDALI *MAXIMUM MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM*
BERDASARKAN PENDEKATAN *BOOTSTRAP***

DANIA NAFILA
H051201053

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana



pada

**PROGRAM STUDI STATISTIKA
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024**

SKRIPSI

**PENGENDALIAN KUALITAS PROSES PRODUKSI MELALUI PENERAPAN
PETA KENDALI *MAXIMUM MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM*
BERDASARKAN PENDEKATAN *BOOTSTRAP***

DANIA NAFILA

H051201053

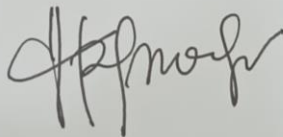
Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Statistika pada 5 Agustus 2024
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan
pada

Program Studi Statistika
Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:

Pembimbing Tugas Akhir,



Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.

NIP. 19750429 200003 2 001

Mengetahui:

Ketua Program Studi,



Dr. Inga Islamiyati, S.Si., M.Si.

NIP. 19770808 200501 2 002

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Pengendalian Kualitas Proses Produksi Melalui Penerapan Peta Kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* Berdasarkan Pendekatan *Bootstrap*" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Utama. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 5 Agustus 2024



DANIA NAFILA
NIM. H051201053

UCAPAN TERIMA KASIH

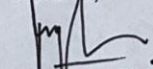
Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* atas segala limpahan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Pengendalian Kualitas Proses Produksi Melalui Penerapan Peta Kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* Berdasarkan Pendekatan *Bootstrap*" yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada baginda Rasulullah *Shallallahu 'Alaihi Wa Sallam* beserta keluarga dan para sahabatnya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada **Ibu Dr. Erna Tri Herdiani S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, bimbingan, dan motivasi kepada penulis dari awal hingga terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada **Ibu Sri Astuti Thamrin, S.Si., M.Si., Ph.D.** dan **Ibu Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan kritik dalam penyempurnaan skripsi ini. Penulis juga menyampaikan terima kasih kepada **Pimpinan Universitas Hasanuddin, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, dan Ketua Departemen Statistika** beserta jajarannya karena telah memberikan fasilitas yang baik selama menempuh pendidikan sarjana. Tidak lupa pula penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada **YBM PLN** karena telah memberikan dukungan finansial untuk pendidikan sarjana penulis.

Kepada **Ibunda Sukmawati dan Ayahanda H. Mukhtar**, terima kasih yang setulus-tulusnya karena selalu berjuang dalam mengupayakan yang terbaik untuk penulis, senantiasa memberikan dukungan penuh, limpahan cinta dan kasih sayang, serta doa dan restu. Terima kasih kepada nenek tercinta penulis, **Hj. Indotang (Alm.)** yang senantiasa membanggakan penulis serta memberi semangat dan doa di setiap langkah penulis. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada saudara tersayang, **Nadwa Dariah dan Muh. Afnan Adib Rizqi** yang senantiasa memberikan semangat, dukungan serta doa kepada penulis. Terima kasih juga kepada teman-teman **Statistika 2020** khususnya, **Aliyah, Ayu, Ira, Via, Isra, Tiwi, Nur dan Dwini** yang senantiasa kebersamai dan memberi semangat satu sama lain. Terima kasih pula kepada teman-teman **KKNT Posko 2 Desa Mappakalombo** yang telah memberikan dukungan kepada penulis. Terima kasih kepada sahabat penulis, **Puput, Nr, Irsha dan Aqni** yang selalu mendukung dan mendoakan penulis. Terakhir, terima kasih kepada pihak terkait lainnya yang tidak bisa penulis cantumkan satu per satu atas bantuan serta doanya.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam penyusunan skripsi ini, untuk itu dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat untuk berbagai pihak.

Penulis,



Dana Nafila

ABSTRAK

DANIA NAFILA. **Pengendalian Kualitas Proses Produksi Melalui Penerapan Peta Kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* Berdasarkan Pendekatan *Bootstrap*** (dibimbing oleh Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.).

Latar belakang. Pengendalian kualitas merupakan suatu hal yang sangat diperlukan guna menghasilkan produk yang memenuhi standar. Alat pengendalian kualitas yang umum digunakan ialah peta kendali. Peta kendali *Multivariate Cumulative Sum* umumnya digunakan untuk mendeteksi pergeseran rata-rata dalam proses produksi. Namun, pergeseran variabilitas juga dapat terjadi selama proses produksi. Oleh karena itu, peta kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* dikembangkan sebagai alternatif yang lebih efektif untuk mendeteksi pergeseran rata-rata dan variabilitas secara simultan. **Tujuan.** Penelitian ini bertujuan membentuk peta kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* dan memperoleh hasil kapabilitas proses produksi pada PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa tahun 2020. **Metode.** Dalam penelitian ini dibentuk peta kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* pada data kualitas PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa tahun 2020 dengan dua karakteristik kualitas air, yaitu kekeruhan dan sisa klor. Tahap analisis dilakukan dalam dua fase. Fase I merupakan tahap pembentukan peta kendali serta penentuan batas kendali atas menggunakan 148 sampel dan fase II merupakan tahap monitoring menggunakan 135 sampel. **Hasil.** Berdasarkan analisis fase I diperoleh batas kendali atas melalui metode *bootstrap* dan simulasi *Average Run Length in-control* yang bersesuaian dengan $\alpha = 0,0027$ sebesar 121,5. Pada fase II diperoleh hasil sebesar 37% dari 135 sampel monitoring berada di luar batas rata-rata yang ditetapkan. Hasil kapabilitas multivariat diperoleh nilai MP_p sebesar 0,403 dan MP_{pk} sebesar 0,120. **Kesimpulan.** Berdasarkan hasil pembentukan peta kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* diperoleh bahwa proses produksi tidak terkendali secara statistik dan hasil kapabilitas multivariat diperoleh nilai kurang dari 1,33 yang menunjukkan bahwa proses produksi PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa tahun 2020 dengan dua karakteristik kualitas yang diamati memiliki presisi dan akurasi yang rendah.

Kata kunci: Air, *Average Run Length in-control*, *Bootstrap*, *Maximum Multivariate Cumulative Sum*, Peta Kendali

ABSTRACT

DANIA NAFILA. **Quality Control of Production Process Through Application of Maximum Multivariate Cumulative Sum Control Chart Based on Bootstrap Approach** (supervised by Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.).

Background. Quality control is an essential thing to produce products that meet the standards. A commonly used quality control tool is control chart. Multivariate Cumulative Sum control chart is commonly used to detect mean shifts in the production process. However, shifts in variability can also occur during the production process. Therefore, the Maximum Multivariate Cumulative Sum control chart was developed as a more effective alternative to detect shifts in mean and variability simultaneously. **Aim.** This study aims to form a Maximum Multivariate Cumulative Sum control chart and obtain the results of the production process capability at PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa Regency in 2020. **Method.** In this study, the Maximum Maximum Multivariate Cumulative Sum control chart was formed on the quality data of PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa Regency in 2020 with two water quality characteristics, namely turbidity and residual chlorine. The analysis phase was conducted in two phases. Phase I is the stage of control chart formation and determination of upper control limit using 148 samples and phase II is the monitoring phase using 135 samples. Results. Based on phase I analysis, the upper control limit obtained through the bootstrap method and Average Run Length in-control simulation corresponds to $\alpha = 0,0027$ is 121,5. In phase II, the results obtained were 37% of 135 monitoring samples are outside the established average limit. Multivariate capability results obtained MP_p value is 0,403 and MP_{pk} is 0,120. **Conclusion.** Based on the results of the formation of the Maximum Multivariate Cumulative Sum control chart, it is found that the production process is not statistically controlled and the multivariate capability results obtained a value of less than 1,33 which indicates that the production process of PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa Regency in 2020 with two observed quality characteristics has low precision and accuracy.

Keywords: Average Run Length in-control, Bootstrap, Control Chart, Maximum Multivariate Cumulative Sum, Water

DAFTAR ISTILAH

Istilah	Arti dan Penjelasan
Akurasi	Tingkat kedekatan suatu pengukuran kuantitas terhadap nilai yang sebenarnya.
<i>Bootstrap</i>	Metode pengambilan sampel dengan pengembalian terhadap sampel asli yang digunakan untuk mengestimasi parameter.
Hipotesis	Suatu dugaan sementara terhadap masalah penelitian yang masih harus dibuktikan kebenarannya.
Kapabilitas	Kemampuan proses menghasilkan sesuai dengan spesifikasi produk yang ditentukan.
Kuantil	Nilai yang membagi data yang telah diurutkan menjadi beberapa bagian yang sama.
Korelasi	Ukuran keeratan hubungan antar dua variabel.
Kovarians	Ukuran hubungan terarah antara dua variabel acak
Jarak Mahalanobis	Jarak antara sebuah variabel dengan pusat dari semua pengamatan.
Multivariat	Metode analisis yang berfokus pada data yang memiliki dua atau lebih variabel secara bersama-sama.
Matriks	Sekumpulan bilangan yang disusun berdasarkan baris dan kolom sehingga membentuk bangun persegi panjang.
Parameter	Nilai yang menggambarkan karakteristik atau sifat dari suatu populasi.
Presisi	Tingkat konsistensi hasil pengukuran satu sama lain ketika dilakukan berulang kali dalam kondisi yang sama.
Rata-Rata	Ukuran pemusatan data yang menggambarkan nilai rata-rata dari sekelompok data.
Rasio Likelihood	Statistik yang digunakan untuk membandingkan dua model statistik.
Standar Deviasi	Ukuran seberapa jauh titik data tersebar di sekitar nilai rata-ratanya.
Statistik	Nilai yang menjelaskan karakteristik atau sifat dari sampel.
Simultan	Sesuatu yang terjadi atau dilakukan pada waktu yang bersamaan.
Tingkat Signifikansi	Probabilitas penolakan hipotesis nol (H_0) secara keliru ketika H_0 sebenarnya benar atau biasa disebut kesalahan tipe I.
Univariat	Metode analisis yang hanya berfokus pada data yang memiliki satu variabel.
Variansi	Rata-rata dari kuadrat deviasi setiap titik data dari nilai rata-rata.
Variabilitas	Suatu ukuran yang menyatakan seberapa besar nilai-nilai data berbeda atau bervariasi dengan nilai ukuran pusatnya.
Vektor	Ruas garis berarah yang memiliki besaran nilai dan arah tertentu.

DAFTAR SIMBOL DAN SINGKATAN

Simbol/Singkatan	Arti dan Penjelasan
α	Tingkat signifikansi atau kesalahan (<i>error</i>) tipe I
B	Pengamatan yang telah mengalami pergeseran rata-rata atau variansi (proses tidak terkendali)
C_i	Statistik MCUSUM untuk rata-rata
χ^2	Nilai <i>Chi-square</i>
δ	Pergeseran rata-rata proses
E	Ekspektasi
e	Bilangan euler, $e = 2,71828$
$f(x)$	Fungsi kepadatan peluang
G	Pengamatan sesuai dengan target yang tidak mengalami pergeseran rata-rata atau variansi (proses terkendali)
H_0	Hipotesis nol
H_1	Hipotesis alternatif
h	Batas kendali atas
i	Pengamatan $i = 1, 2, \dots, n$
j	Variabel $j = 1, 2, \dots, p$
k	Nilai referensi atau <i>slack</i>
L	Konstanta yang menentukan batas kendali atas
λ	Parameter non-sentralitas
\log	Logaritma natural
M_i	Statistik Max-MCUSUM
μ	Rata-rata
μ_B	Rata-rata sampel
μ_G	Rata-rata target
$M_x(t)$	Fungsi Pembangkit Momen
n	Jumlah pengamatan
p	Jumlah variabel
Φ	Fungsi distribusi kumulatif normal standar
q_i	nilai kuantil distribusi <i>Chi-Square</i>
R	Matriks korelasi
r_{jk}	Nilai korelasi antar variabel- j dan variabel- k
S	Matriks varians kovarians sampel
S_i	Statistik MCUSUM untuk variansi
Σ	Matriks varians kovarians
σ	Standar deviasi
σ_{jj}	Variansi variabel- j
x_{ij}	Pengamatan ke- i pada variabel ke- j
ARL	<i>Average Run Length</i>
CUSUM	<i>Cumulative Sum</i>
IPA	Instalasi Pengolahan Air
max	Nilai maksimum

Simbol/Singkatan	Arti dan Penjelasan
Max-MCUSUM	<i>Maximum Multivariate Cumulative Sum</i>
Max-MEWMA	<i>Maximum Multivariate Exponentially Weighted Moving Average</i>
MCUSUM	<i>Multivariate Cumulative Sum</i>
MEWMA	<i>Multivariate Exponentially Weighted Moving Average</i>
mg/L	miligram/Liter
NTU	<i>Nephelometric Turbidity Unit</i>
PDAM	Perusahaan Daerah Air Minum
SQC	<i>Statistical Quality Control</i>
UCL	<i>Upper Control Limit</i>

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI	i
UCAPAN TERIMA KASIH	iv
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISTILAH	viii
DAFTAR SIMBOL DAN SINGKATAN	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Batasan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	3
1.5 Kajian Teori	4
1.5.1 Data Multivariat	4
1.5.2 Distribusi Normal Multivariat	4
1.5.3 Uji Normalitas Multivariat	5
1.5.4 Uji Dependensi Variabel	5
1.5.5 Pengendalian Kualitas Statistika	6
1.5.6 Peta Kendali	7
1.5.7 Peta Kendali <i>Maximum Multivariate Cumulative Sum</i>	8
1.5.8 Penentuan Batas Kendali Atas	11
1.5.9 Kapabilitas Proses Multivariat	12
1.5.10 PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa	14
BAB II METODE PENELITIAN	16
2.1 Sumber Data	16
2.2 Identifikasi Variabel	16
2.3 Tahapan Analisis Data	16
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	18
3.1 Peta Kendali <i>Maximum Multivariate Cumulative Sum</i> untuk Rataan	18
3.2 Peta Kendali <i>Maximum Multivariate Cumulative Sum</i> untuk Variansi	20
3.3 Analisis Deskriptif	21
3.4 Uji Normalitas Multivariat	22
3.5 Uji Dependensi Variabel	23
3.6 Pembentukan Peta Kendali <i>Maximum Multivariate Cumulative Sum</i>	23
3.7 Penentuan Batas Kendali Atas	26
3.8 Pengendalian Kualitas Air Produksi PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa Fase I	27

3.9	Pengendalian Kualitas Air Produksi PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa Fase II	28
3.10	Analisis Kapabilitas Multivariat.....	29
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN.....		30
4.1	Kesimpulan	30
4.2	Saran	30
DAFTAR PUSTAKA		31
LAMPIRAN.....		33

DAFTAR TABEL

Nomor Urut	Halaman
1. Struktur data multivariat	4
2. Deskriptif kualitas air produksi PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa tahun 2020	22
3. Nilai d_i^2 dan q_i setiap pengamatan.....	22
4. Batas kendali atas.....	26
5. Analisis kapabilitas univariat	29

DAFTAR GAMBAR

Nomor Urut	Halaman
1. Ilustrasi peta kendali	7
2. Prosedur metode <i>bootstrap</i> dalam menghitung batas kendali peta kendali Max-MCUSUM.....	12
3. <i>Scatterplot</i> d_i^2 dan q_i	23
4. Peta kendali Max-MCUSUM fase I	27
5. Peta kendali Max-MCUSUM fase II	28

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor Urut	Halaman
1. Data PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa Tahun 2020	33
2. Hasil Pengujian Normalitas.....	37
3. Nilai $Ci+$, $Ci-$, Ci , $Si+$, $Si-$, Si dan Mi Fase I.....	41
4. Nilai $Ci+$, $Ci-$, Ci , $Si+$, $Si-$, Si dan Mi Fase II.....	45
5. Nilai Average Run Length (ARL)	48
6. Program R Peta Kendali Maximum Multivariate Cumulative Sum	49
7. Program R Penentuan Batas Kendali Atas	52
8. Program R Simulasi Average Run Length.....	55
9. Daftar Riwayat Hidup Peneliti	58

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam dunia industri, kualitas merupakan salah satu tujuan untuk memuaskan konsumen. Kualitas berarti tingkat baik buruknya sesuatu, taraf atau derajat. Kualitas adalah kesesuaian penggunaan produk dalam memenuhi kebutuhan dan kepuasan konsumen (Montgomery, 2009). Pentingnya suatu perusahaan dalam melakukan pengendalian kualitas guna mempertahankan dan meningkatkan kualitas produk serta menambah daya saing. Sehingga pengendalian kualitas merupakan kunci utama menuju kesuksesan suatu bisnis.

Pengendalian kualitas statistika atau biasa disebut *Statistical Quality Control* (SQC) merupakan metode yang digunakan untuk menemukan kesalahan produk. Pengendalian kualitas statistika adalah teknik penyelesaian masalah yang digunakan untuk memonitor, mengendalikan, menganalisis, mengelola serta memperbaiki produk dan proses menggunakan metode-metode statistika yang harus dilakukan sebelum dimulainya proses produksi, selama proses produksi, hingga berakhirnya proses produksi. Pengendalian kualitas dilakukan agar dapat menghasilkan produk berupa barang atau jasa yang memenuhi standar. Selain itu, berguna juga untuk memperbaiki kualitas produk yang belum memenuhi standar (Wirawati, 2019). Salah satu alat yang umum digunakan dalam pengendalian kualitas statistika ialah peta kendali.

Peta kendali merupakan alat yang populer untuk mendeteksi pergeseran vektor rata-rata dan matriks varians kovarians dari suatu proses dengan beberapa karakteristik kualitas (Kruba dkk., 2021). Peta kendali adalah tampilan grafis dari karakteristik kualitas yang telah diukur atau dihitung selama periode tertentu (Rosyidi, 2022). Berdasarkan jumlah variabel, peta kendali variabel terbagi atas peta kendali univariat dan peta kendali multivariat. Peta kendali univariat digunakan pada data dengan satu karakteristik kualitas sedangkan untuk dua atau lebih karakteristik kualitas menggunakan peta kendali multivariat (Susanto & Haryono, 2016). Beberapa penelitian mengenai peta kendali univariat di antaranya, Cheg, S. S. dkk. (2014), Awais M. & Haq A. (2018), dan Agustina Y dkk. (2021). Sedangkan, penelitian mengenai peta kendali multivariat, di antaranya peta kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) oleh Conerly M. D. (2014), Ihwah A. dkk. (2021), dan Salmasnia A. dkk. (2019), peta kendali T2 Hotteling oleh Awitasari D. A. (2018), Tiryaki S. & Aydin A. (2022), Sari E. & Widayarsi R. (2024), serta peta kendali *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM) oleh Hamed M. S. dkk. (2016), Sari S. P. dkk. (2020), dan Maulidiyah H. (2022).

Peta kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* (Max-MCUSUM) muncul sebagai pengembangan dari peta kendali MCUSUM karena adanya kebutuhan untuk menangani situasi yakni terdapat variabilitas yang besar atau terjadi perubahan secara cepat dalam proses produksi yang diamati. Salah satu kekurangan peta kendali MCUSUM ialah ketidakmampuan untuk mendeteksi perubahan yang signifikan dalam proses ketika variabilitas terjadi di luar batas yang telah ditetapkan. Sehingga, tidak sensitif terhadap perubahan yang terjadi secara simultan pada beberapa variabel yang

diamati. Peta kendali Max-MCUSUM adalah peta kendali yang efektif dalam penggunaannya karena dapat mendeteksi pergeseran proses baik pada rata-rata maupun variabilitas proses secara simultan dalam satu peta kendali (Cheng & Thaga, 2005). Peta kendali ini memiliki keunggulan dalam mendeteksi pergeseran proses yang kecil sehingga memungkinkan perusahaan untuk mendeteksi masalah atau perubahan dalam proses lebih awal. Selain itu, peta kendali Max-MCUSUM mudah digunakan dalam memantau proses secara terus menerus karena hanya menggunakan batas kontrol atas (UCL). Statistik Max-MCUSUM dihitung dari nilai maksimum dua variabel yang ditransformasi yang memenuhi distribusi normal baku (Khusna dkk., 2020).

Penerapan peta kendali dalam dunia industri telah banyak dilakukan, salah satunya pada pengendalian kualitas air PDAM. Air merupakan sumber daya alam yang sangat penting dan dibutuhkan oleh makhluk hidup, terutama manusia. Pasalnya tubuh manusia mengandung 70% air dan sisanya komponen lain. Salah satu kegunaan air bagi manusia adalah untuk memenuhi kebutuhan mineral dalam tubuh. Selain untuk diminum, juga digunakan dalam kehidupan sehari-hari, mulai dari memasak, mencuci, dan lainnya. Tersedianya air yang bersih dan aman sangat diperlukan bagi masyarakat. Namun, semakin hari semakin berkurangnya air bersih dikarenakan banyaknya limbah yang mencemari lingkungan. Hal ini menyebabkan masalah kesehatan akan muncul akibat air yang dikonsumsi tercemar atau tidak bersih. Berdasarkan Peraturan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomer 492 Tahun 2010 tentang Persyaratan Kualitas Air Minum, bahwa air minum adalah air yang melalui proses pengolahan atau tanpa proses pengolahan yang memenuhi syarat kesehatan dan dapat langsung diminum (Permenkes RI, 2010). Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirta Je'ne'berang merupakan perusahaan daerah Kabupaten Gowa yang bergerak dalam bidang pengolahan air baku menjadi air yang dapat dikonsumsi oleh masyarakat. Sumber air baku PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa 90% dari Bendungan Bili-bili, Sungai Jeneberang, Mata Air Patene di Kecamatan Tinggimoncong, Sungai Palleko, Sungai Cikoro dan Sungai Tassese. Proses pengolahan air di PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa melalui beberapa tahapan, yaitu pra sedimentasi, aerasi, koagulasi-flokulasi, filtrasi, serta reservoir sebagai tahapan akhir yang berfungsi sebagai tempat penampungan air bersih (PDAM Gowa, 2020).

Penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Cheng & Thaga (2005) melakukan perbandingan antara peta kendali Max-MEWMA dan Max-MCUSUM memperoleh hasil bahwa peta kendali Max-MCUSUM lebih unggul dikarenakan lebih cepat dalam mendeteksi serta memonitor rata-rata dan variabilitas secara simultan dalam satu peta kendali. Selain itu, penelitian yang dilakukan oleh Aisyah (2018) menggunakan peta kendali Max-MCUSUM dengan hasil bahwa pada proses produksi pupuk NPK pada fase I telah terkendali secara statistik, namun monitoring proses produksi pada fase II belum terkendali secara statistik yang menunjukkan bahwa terdapat pergeseran proses pada vektor rata-rata. Sehingga, proses produksi tidak memenuhi spesifikasi karena memiliki tingkat presisi dan akurasi yang rendah. Penelitian yang dilakukan oleh Oksarianti & Fitria (2022) mengaplikasikan metode *bootstrap* pada peta kendali $\bar{X} - R$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa hasil observasi berada dalam batas kendali yang diperoleh dari metode *bootstrap* dan batas kendali tersebut cocok digunakan untuk mengontrol proses produksi. Wood, dkk. (1999) menggunakan metode *bootstrap* untuk

mengestimasi batas kendali dari peta kendali. Prosedur ini dipandang lebih sederhana, transparan, dan fleksibel (Ekorini, 2014)

Dalam penelitian ini digunakan data sekunder berupa data kualitas produksi air di PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa tahun 2020 yang diperoleh dari penelitian terdahulu yang membahas peta kendali MEWMA dan MCUSUM yang ditulis oleh Ardiansyah Abubakar pada tahun 2022. Peneliti tertarik untuk menggunakan data tersebut untuk diterapkan pada peta kendali Max-MCUSUM dengan batas kendali awal yang diperoleh berdasarkan pendekatan *bootstrap* dan simulasi *Average Run Length* (ARL). *Bootstrap* merupakan metode pengambilan sampel dengan pengembalian terhadap sampel asli yang digunakan untuk mengestimasi parameter. Penggunaan peta kendali multivariat ini dapat mendeteksi pergeseran kecil sedini mungkin, sehingga dapat segera dilakukan tindakan perbaikan. Oleh karena itu, penelitian ini diharapkan dapat menjadi acuan dalam memperbaiki ataupun meningkatkan kualitas produksi air di PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa kedepannya sesuai dengan spesifikasi yang ditetapkan.

1.2 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian ini ialah sebagai berikut:

1. Data yang digunakan merupakan data air produksi IPA Pandang-Pandang di PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa pada bulan Januari hingga Desember 2020 dengan dua variabel pengukuran utama kualitas air, yakni Kekeruhan dan Sisa Klor.
2. *Average Run Length* (ARL) yang digunakan adalah ARL_0 dengan $\alpha = 0,0027$.
3. Metode yang digunakan dalam menentukan ARL adalah metode simulasi.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh hasil kualitas proses produksi air di PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa tahun 2020 menggunakan peta kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum*.
2. Memperoleh hasil kapabilitas proses produksi air di PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa tahun 2020.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini, di antaranya menambah wawasan keilmuan dan pengetahuan mengenai peta kendali Max-MCUSUM sebagai alat pengendalian kualitas produk, memberikan informasi mengenai kualitas produksi air di PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa dengan menerapkan peta kendali Max-MCUSUM sehingga dapat menjadi pedoman maupun bahan evaluasi dan perkembangan proses berkelanjutan untuk meningkatkan kualitas produksi air bagi perusahaan, serta dapat menjadi bahan pertimbangan atau acuan untuk penelitian selanjutnya.

1.5 Kajian Teori

1.5.1 Data Multivariat

Data multivariat merupakan data yang diperoleh dari pengukuran lebih dari satu variabel kriteria pada setiap individu anggota sampel. Teknik-teknik analisis statistik yang melibatkan sekelompok variabel kriteria yang saling berkorelasi sebagai suatu sistem dengan memperhitungkan korelasi antar variabel-variabel tersebut disebut metode statistika multivariat (Aprilianti dkk., 2021).

Tabel 1. Struktur data multivariat

Objek	Variabel					
	X_1	X_2	...	X_j	...	X_p
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2p}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{ip}
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nj}	...	x_{np}

Struktur data multivariat pada Tabel 1 dapat disederhanakan dalam bentuk matriks dengan ukuran $n \times p$ sebagai berikut.

$$X_{n,p} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Dapat juga dinotasikan $X = x_{ij}$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, p$.

Keterangan:

- x_{ij} : Pengamatan ke- i pada variabel ke- j
- n : Jumlah pengamatan
- p : Jumlah variabel

1.5.2 Distribusi Normal Multivariat

Distribusi normal multivariat merupakan perluasan dari distribusi normal univariat untuk $p \geq 2$. Vektor acak yang terdiri atas p komponen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ dikatakan berdistribusi normal multivariat dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks varians kovarians Σ yang definit positif, jika fungsi kepadatan peluang bersama X_1, X_2, \dots, X_p adalah:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (1)$$

dengan

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} \text{ dan } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

maka, vektor X yang berdistribusi normal p -variat diberi lambang $X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ (Husain, 2018).

1.5.3 Uji Normalitas Multivariat

Salah satu asumsi yang harus dipenuhi untuk melakukan pengendalian kualitas menggunakan peta kendali multivariat adalah data berdistribusi normal multivariat. Pengujian asumsi distribusi normal multivariat yang akan dilakukan, yaitu dengan membuat q - q plot antara jarak Mahalanobis pada setiap titik pengamatan dan nilai kuantil dari distribusi *Chi-Square*. Hipotesis yang akan digunakan, yaitu (Johnson & Wichern, 2007):

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat

H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat

Adapun tahapan untuk melakukan pengujian normal multivariat adalah sebagai berikut.

1. Menghitung jarak Mahalanobis setiap titik dengan rumus:

$$d_i^2 = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T S^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \quad (2)$$

2. Mengurutkan nilai d_i^2 dari d_i^2 terkecil sampai d_i^2 terbesar.
3. Menentukan nilai q_i melalui persamaan:

$$q_i = \chi^2_{\left(\frac{i-1}{n}\right), p} \quad (3)$$

Nilai q_i merupakan kuantil ke-100 $\left(\frac{i-1}{n}\right)$ dari distribusi *Chi-Square* dengan $i = 1, 2, \dots, n$, dan derajat bebas p .

4. Membuat *scatterplot* antara d_i^2 dan q_i dengan titik koordinat $\left(d_i^2; \chi^2_{p, \left(\frac{i-1}{n}\right)} \right)$.
5. H_0 diterima jika *scatterplot* cenderung membentuk garis lurus dan lebih dari 50% nilai $d_i^2 \leq \chi^2_{(0,5), p}$, hal ini berarti data berdistribusi normal multivariat. Sebaliknya, jika lebih kecil dari 50%, maka H_0 ditolak yang berarti data tidak berdistribusi normal multivariat.

1.5.4 Uji Dependensi Variabel

Variabel X_1, X_2, \dots, X_p dikatakan saling bebas jika matriks korelasi antar variabel membentuk matriks identitas. Adapun pengujian dependensi variabel yang akan digunakan menggunakan uji *Bartlett* sebagai berikut (Maharani dkk., 2018).

Hipotesis:

$H_0: \mathbf{R} = \mathbf{I}$ (Tidak terdapat korelasi antar variabel)

$H_1: \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ (Terdapat korelasi antar variabel)

Statistik Uji:

$$\chi_{hitung}^2 = - \left\{ n - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right\} \ln |\mathbf{R}| \sim \chi_{\alpha, \frac{1}{2}p(p-1)}^2 \quad (4)$$

Matriks korelasi dijabarkan sebagai berikut:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

dengan

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \sum_{i=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_k)^2}}$$

Keterangan:

n : Jumlah pengamatan

p : Jumlah variabel

$|\mathbf{R}|$: Determinan matriks korelasi dari masing-masing karakteristik kualitas

r_{jk} : Nilai korelasi antar variabel j dan variabel k

x_{ij} : Nilai pengamatan ke- i variabel ke- j

x_{ik} : Nilai pengamatan ke- i variabel ke- k

\bar{x}_j : Rata-rata variabel j

\bar{x}_k : Rata-rata variabel k

Sehingga keputusan tolak H_0 jika nilai $\chi_{hitung}^2 \geq \chi_{(\alpha, \frac{1}{2}p(p-1))}^2$ yang artinya terdapat korelasi antar variabel. $\chi_{(\alpha, \frac{1}{2}p(p-1))}^2$ merupakan nilai *Chi-Square* tabel dengan tingkat signifikansi α dan derajat bebas sebesar $\frac{1}{2}p(p-1)$.

1.5.5 Pengendalian Kualitas Statistika

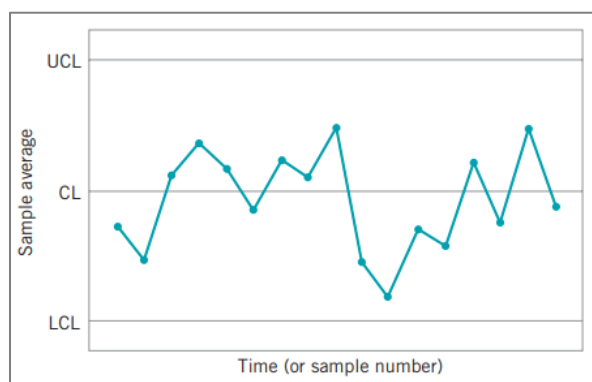
Pengendalian kualitas statistika atau biasa disebut *Statistical Quality Control* (SQC) merupakan metode yang digunakan untuk menemukan kesalahan produk (Andespa, 2020). Menurut Besterfield (1998), pengendalian kualitas statistik adalah salah satu teknik yang digunakan untuk mengendalikan dan mengelola proses baik manufaktur maupun jasa melalui penggunaan metode statistik. Pengendalian kualitas statistika adalah teknik penyelesaian masalah yang digunakan untuk memonitor, mengendalikan, menganalisis, mengelola serta memperbaiki produk dan proses menggunakan metode-metode statistika (Sekarwangi & Pramestari, 2022).

Alat bantu dalam pelaksanaan pengendalian kualitas atau teknik pengendalian mutu merupakan alat untuk mendeteksi sebab-sebab terjadinya penyimpangan diluar kendali dalam proses produksi dan cara untuk melakukan tindakan perbaikan. Menurut C. Rudy Prihantoro (2012), alat bantu pengendalian kualitas atau yang dikenal sebagai *seven tools* di antaranya, lembar pengamatan (*check sheet*), stratifikasi, histogram (*run*

chart), peta kendali (*control chart*), diagram pareto, diagram sebab akibat (*cause and effect diagram*), dan diagram sebar (*scatter diagram*) (Andespa, 2020).

1.5.6 Peta Kendali

Peta kendali merupakan jenis pengendalian kualitas statistik yang paling sederhana. Peta kendali adalah tampilan grafis dari karakteristik kualitas yang telah diukur atau dihitung selama periode tertentu. Peta kendali memplot rata-rata pengukuran karakteristik kualitas dalam sampel data yang diambil dari proses versus jumlah atau waktu sampel. Peta kendali memiliki garis-garis tengah yang mewakili nilai rata-rata karakteristik kualitas yang sesuai dengan keadaan terkendali. Selain itu, peta kendali juga memiliki dua garis horizontal lainnya yang biasa disebut batas kendali atas (UCL) dan batas kendali bawah (LCL). Batas kendali dipilih sehingga jika proses terkendali, maka hampir semua titik sampel akan berada di antara kedua garis horizontal tersebut. Sela titik-titik berada dalam batas kendali artinya proses dianggap terkendali dan tidak ada tindakan yang diperlukan. Begitupun sebaliknya, jika proses tidak terkendali maka penyelidikan dan tindakan korektif diperlukan untuk menemukan dan mengeliminasi atau menyelesaikan penyebabnya. Ilustrasi peta kendali ditampilkan pada Gambar 2.1 (Montgomery, 2009).



Gambar 1. Ilustrasi peta kendali

Secara umum peta kendali variabel dapat diklasifikasikan menjadi 2 jenis, yaitu sebagai berikut (Montgomery, 2009).

1. Peta Kendali Univariat

Peta kendali univariat merupakan peta kendali yang digunakan untuk mengontrol satu karakteristik kualitas. Contoh dari peta kendali univariat, di antaranya peta kendali R, peta kendali I-MR, peta kendali EWMA, dan peta kendali CUSUM.

2. Peta Kendali Multivariat

Peta kendali multivariat merupakan peta kendali yang digunakan untuk mengontrol dua atau lebih karakteristik kualitas. Contoh dari peta kendali multivariat seperti peta

kendali MEWMA, peta kendali MCUSUM, peta kendali MEWMV, peta kendali MEWMS, dan lainnya.

1.5.7 Peta Kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum*

Peta kendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* (Max-MCUSUM) merupakan pengembangan dari peta kendali MCUSUM yang dapat digunakan untuk mendeteksi pergeseran proses baik pada rata-rata maupun variabilitas proses dalam satu peta kendali. Peta kendali ini memiliki keunggulan dalam mendeteksi pergeseran proses yang kecil. Menurut Montgomery (2013), suatu proses dikatakan memiliki pergeseran yang kecil apabila pergeseran prosesnya berada dibawah $1,5\sigma$. Peta kendali ini hanya menggunakan batas kontrol atas (UCL) dalam memonitor proses secara multivariat. Pemantauan signifikansi proses ditinjau berdasarkan besarnya pergeseran vektor rata-rata dan matriks varians kovarians target yang telah ditentukan. Peta kendali ini disebut sebagai Max-MCUSUM karena dikembangkan dengan menggunakan nilai maksimal dari jumlah nilai kumulatif yang dihitung (Cheng & Thaga, 2005).

Peta kendali *maximum multivariate cumulative sum* untuk rata-rata. Asumsikan bahwa terdapat barisan variabel acak yang independen dan berdistribusi identik normal multivariat yaitu X_1, X_2, \dots, X_n dengan $X_1 = (X_{11}, \dots, X_{1p})^T$ merupakan vektor observasi berukuran $p \times 1$. Vektor X_1, X_2, \dots, X_{m-1} memiliki fungsi distribusi F_G , sedangkan X_m, X_{m+1}, \dots memiliki fungsi distribusi yang berbeda, F_B menunjukkan pergeseran vektor rata-rata. Diasumsikan bahwa pergeseran proses produksi pada waktu yang tidak diketahui m . Tujuannya adalah untuk mendeteksi bahwa pergeseran telah terjadi dan waktu terjadinya pergeseran. Prosedur CUSUM menunjukkan bahwa pergeseran dalam vektor rata-rata terjadi telah terjadi sesegera mungkin setelah nilai C_i lebih besar dari L sebagai berikut (Ghashghaei & Amiri, 2017).

$$C_i = \max \left[0, C_{i-1} + \log \frac{f_B(x_i)}{f_G(x_i)} \right] > L \quad (5)$$

Keterangan:

f_G : Fungsi kepadatan peluang pada saat proses terkendali

f_B : Fungsi kepadatan peluang pada saat proses tidak terkendali merupakan

L : Konstanta yang menentukan batas kendali atas.

Variabel acak X_i diasumsikan memiliki vektor rata-rata μ_G pada saat proses berada dalam kendali, dan vektor rata-rata μ_B pada saat proses berada di luar kendali, dengan $\mu_B = \mu_G + \delta$. Fungsi distribusi F_G dan F_B berasal dari distribusi normal multivariat dengan vektor rata-rata μ_G dan μ_B , dan dengan matriks varians kovarians diketahui Σ . Rasio Likelihood dari variabel acak X_i yaitu (Cheng & Thaga, 2005):

$$\begin{aligned} \frac{f_B(x_i)}{f_G(x_i)} &= \frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\{-0,5(x_i - \mu_B)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu_B)\}}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\{-0,5(x_i - \mu_G)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu_G)\}} \\ &= \frac{\exp\{-0,5(x_i - \mu_B)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu_B)\}}{\exp\{-0,5(x_i - \mu_G)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu_G)\}} \end{aligned} \quad (6)$$

Setelah mengoperasikan logaritma natural pada Rasio Likelihood, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\log \left\{ \frac{f_B(x_i)}{f_G(x_i)} \right\} = (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_i - 0,5(\boldsymbol{\mu}_B + \boldsymbol{\mu}_G)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G) \quad (7)$$

Mensubstitusi Persamaan (7) ke Persamaan (5) dan kemudian penskalaan ulang pada persamaan baru dilakukan dengan cara membagi kedua sisi persamaan dengan sebuah konstanta. Sehingga diperoleh statistik MCUSUM sebagai berikut (Ghashghaei & Amiri, 2017).

$$C_i = \max[C_{i-1} + \mathbf{a}^T \mathbf{x}_i - k, 0] > h \quad (8)$$

Diketahui,

$$\mathbf{a}^T = \frac{(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{[(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)]^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

dan

$$k = 0,5 \frac{(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)}{[(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)]^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

k merupakan nilai referensi atau nilai *slack*.

Variabel acak $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_i$ berdistribusi normal univariat. Variabel acak tersebut memiliki variansi 1 dan rata-rata $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}_G$ ketika proses terkendali. Sedangkan, memiliki rata-rata $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}_B$ untuk proses tidak terkendali.

Parameter non-sentralitas didefinisikan sebagai:

$$\lambda = [(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

dan

$$Z_i = \mathbf{a}^T (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_G) \quad (12)$$

dengan variabel acak Z_i akan mengikuti distribusi normal univariat standar jika variabel acak X_i memiliki vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}_G$. Sebaliknya, jika rata-rata variabel acak X_i memiliki vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}_B$ maka variabel acak Z_i akan mengikuti distribusi normal univariat dengan rataan λ dan variansi 1.

Statistik MCUSUM untuk mendeteksi pergeseran pada vektor rata-rata normal multivariat pada Persamaan (8) dapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$C_i = \max[0, C_{i-1} + Z_i - 0,5\lambda] > h \quad (13)$$

Maka, statistik MCUSUM pada Persamaan (13) menyederhanakan nilai referensi k pada Persamaan (10) sebagai berikut (Khusna dkk., 2020):

$$k = 0,5 [(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Peta kendali *maximum multivariate cumulative sum* untuk variansi. Peta kendali ini digunakan untuk memantau perubahan dalam matriks variansi kovarians yang tergantung pada vektor rata-rata konstan selama suatu proses. Metode ini mengasumsikan bahwa besarnya pergeseran variabilitas tertentu terjadi pada semua karakteristik kualitas. Ketika proses dalam keadaan terkendali, maka berdistribusi normal dengan rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks variansi kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$. Sebaliknya, jika variabilitas

proses mengalami pergeseran, maka rata-rata tetap μ tetapi matriks varians kovarians bergeser ke $b\Sigma$, dengan $b > \mathbf{0}$ (Ghashghaei & Amiri, 2017).

Variabel acak X_i diasumsikan memiliki matriks varians kovarians Σ saat proses berada dalam kendali, dan matriks varians kovarians $b\Sigma$ saat proses berada di luar kendali. Fungsi distribusi $F_G \sim N_p(\mu, \Sigma)$ dan $F_B \sim N_p(\mu, b\Sigma)$. Rasio Likelihood dari variabel acak X_i sebagai berikut (Khusna dkk., 2020).

$$\begin{aligned} \frac{f_B(x_i)}{f_G(x_i)} &= \frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |b\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\{-0,5(x_i - \mu)^T (b\Sigma)^{-1} (x_i - \mu)\}}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\{-0,5(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu)\}} \\ &= (b)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-0,5(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu) \left(\frac{1}{b} - 1\right)\right\} \end{aligned} \quad (15)$$

Diperoleh logaritma natural dari Rasio Likelihood, yaitu:

$$\log\left(\frac{f_B(x_i)}{f_G(x_i)}\right) = -0,5 \log(b) + 0,5(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu) \left(\frac{1}{b} - 1\right) \quad (16)$$

Statistik MCUSUM untuk memantau pergeseran pada variabilitas dari suatu proses normal multivariat dinotasikan:

$$S_i = \max[0, (x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu) - v + S_{i-1}] > h \quad (17)$$

diketahui $v = \log(b) \left(\frac{b}{b-1}\right)$. Murirhead (1982) telah membuktikan bahwa $(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu)$ mengikuti distribusi *Chi-Square* dengan derajat bebas p . Jika populasi matriks kovarians tidak diketahui, maka diestimasi menggunakan matriks varians kovarians sampel S . Sehingga $(x_i - \mu)^T S^{-1} (x_i - \mu)$ akan mengikuti distribusi F dengan derajat bebas p dan $n - p$ (Cheng & Thaga, 2005).

Dalam mengembangkan suatu peta kendali CUSUM multivariat yang dapat memonitor vektor rata-rata dan matriks varians kovarians secara bersama-sama, maka dibuat transformasi sebagai berikut.

$$Y_i = \Phi^{-1}\{H[(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu); p]\} \quad (18)$$

dengan $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, untuk $Z \sim N(0,1)$. Fungsi Φ^{-1} adalah invers dari fungsi distribusi kumulatif normal standar dan $H(w; p) = P(W \leq w|p)$ untuk $W \sim \chi_p^2$.

Variabel acak Z_i pada Persamaan (12) ditransformasi menjadi dua statistik MCUSUM untuk memantau rata-rata proses sebagai berikut.

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max [0, Z_i - 0,5\lambda + C_{i-1}^+] \\ C_i^- &= \max [0, -0,5\lambda - Z_i + C_{i-1}^-] \end{aligned} \quad (19)$$

Selain itu, variabel acak Y_i pada Persamaan (18) ditransformasikan menjadi dua statistik MCUSUM untuk memantau variabilitas proses yang diformulasikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S_i^+ &= \max [0, Y_i - k + S_{i-1}^+] \\ S_i^- &= \max [0, -k - Y_i + S_{i-1}^-] \end{aligned} \quad (20)$$

dengan $C_0 = S_0 = 0$ merupakan titik awal. Karena pada prosedur pengendalian kualitas multivariat dilakukan monitoring pada besarnya pergeseran bukan arahnya, statistik MCUSUM pada Persamaan (19) dan Persamaan (20) akan ditransformasi menjadi persamaan berikut.

$$\begin{aligned} C_i &= \max [C_i^+, C_i^-] \\ S_i &= \max [S_i^+, S_i^-] \end{aligned} \quad (21)$$

Variabel acak Z_i dan Y_i pada Persamaan (12) dan Persamaan (18) adalah independen dan mengikuti distribusi normal. Selain itu, jika rata-rata dan variabilitas suatu proses terkendali maka $\delta = 0$ dan $b = 1$, keduanya akan mengikuti distribusi normal standar dan distribusi tersebut tidak tergantung pada ukuran sampel. Oleh karena itu, dua statistik pada Persamaan (21) dapat dibentuk menjadi satu peta kendali yang disebut dengan peta kendali Max-MCUSUM yang dapat memonitor rata-rata serta variabilitas proses secara bersama-sama yang dirumuskan sebagai:

$$M_i = \max [C_i, S_i] \quad (22)$$

Keterangan:

C_i : Statistik MCUSUM rata-rata untuk pengamatan ke- i

S_i : Statistik MCUSUM variansi untuk pengamatan ke- i

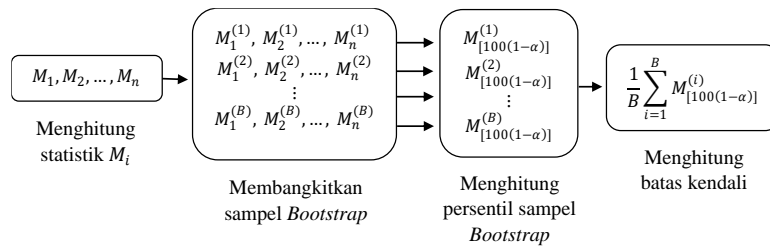
M_i : Statistik Max-MCUSUM untuk pengamatan ke- i

Statistik Max-MCUSUM hanya dibandingkan dengan batas kendali atas (h) jika $M_i \geq 0$. Statistik M_i akan bernilai besar ketika vektor rata-rata proses jauh dari nilai μ_G atau ketika variabilitas proses jauh dari nilai Σ . Selain itu, proses dikatakan terkendali jika statistik M_i tidak lebih besar dari h . Jika $M_i > h$, maka peta kendali akan memperlihatkan proses tidak terkendali, $h > 0$ dipilih untuk mendapatkan nilai terkendali melalui ARL (Khusna dkk., 2020).

1.5.8 Penentuan Batas Kendali Atas

Penentuan batas kendali atas didapatkan melalui pendekatan dengan kriteria nilai *Average Run Length* (ARL). ARL merupakan rata-rata jumlah titik yang harus diplotkan hingga didapatkan titik di luar kendali pertama (Montgomery, 2009). Tidak ada cara langsung dalam menghitung ARL untuk peta kendali Max-MCUSUM, sehingga setiap nilai ARL didapatkan melalui simulasi (Cheng & Thaga, 2005). Batas kendali atas dari peta kendali Max-MCUSUM diperoleh dengan pendekatan *bootstrap*. *Bootstrap* merupakan salah satu metode yang banyak digunakan untuk mengestimasi parameter dari distribusi yang tidak diketahui. Beberapa peneliti telah berhasil menerapkan pendekatan *bootstrap* untuk menghitung batas kendali pada berbagai peta kendali (Khusna dkk., 2020).

Batas kendali Max-MCUSUM berdasarkan *bootstrap* diperoleh dengan melakukan resampling statistik M_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sebanyak B kali dengan B adalah angka yang besar. Simulasi menentukan batas kendali atas dari peta kendali Max-MCUSUM menggunakan pendekatan *bootstrap* dilakukan dengan prosedur yang dapat dilihat pada Gambar 2 (Khusna dkk., 2020).



Gambar 2. Prosedur metode *bootstrap* dalam menghitung batas kendali peta kendali Max-MCUSUM

Setelah diperoleh batas kendali, selanjutnya melakukan perhitungan ARL terkendali dengan prosedur sebagai berikut (Afandy, 2019).

1. Membangkitkan 10.000 sampel data berdistribusi normal multivariat dengan rata-rata dan variansi yang digunakan sesuai dengan data pengamatan pada fase I.
2. Melakukan pengambilan sampel secara acak sebanyak 1.000 sampel data dari total 10.000 data.
3. Menghitung statistik M_i dengan $i = 1, 2, \dots, 1.000$.
4. Menghitung *Run Length* (RL) sebanyak 100 kali dan melakukan pencatatan terhadap jumlah titik yang harus diplotkan hingga ditemukan titik pertama yang berada di luar batas kendali atas yang telah ditentukan.
5. Menghitung nilai *Average Run Length* (ARL) berdasarkan α yang diinginkan peneliti.
6. Batas kendali atas yang terpilih didasarkan pada nilai ARL yang telah ditetapkan. Jika nilai ARL yang diperoleh kurang dari target ARL yang diinginkan, maka simulasi dilakukan kembali dengan batas kendali yang disesuaikan dengan RL yang diperoleh.

Dalam penelitian ini, ARL_0 yang digunakan adalah 370 yang bersesuaian dengan $\alpha = 0,0027$. ARL_0 diartikan sebagai rata-rata titik pengamatan yang harus diplot sampai ditemukannya pengamatan yang *out of control*, pada saat proses berada pada kondisi *in control* atau rata-rata banyak observasi yang diperlukan untuk mengetahui kondisi tidak terkendali pertama kali pada suatu proses yang terkendali (Van Delsen, 2015).

1.5.9 Kapabilitas Proses Multivariat

Analisis kapabilitas proses merupakan analisis yang dilakukan untuk mengukur kemampuan proses pada suatu produk dalam memenuhi spesifikasi yang ditentukan. Proses dikatakan kapabel apabila dalam keadaan terkendali, memenuhi batas spesifikasi, serta tingkat presisi dan akurasi tinggi. Berdasarkan standar 3σ , suatu produk dikatakan mampu apabila memiliki indeks kapabilitas lebih dari 1,33. Jika proses dalam keadaan terkendali maka indeks yang digunakan adalah C_p dan C_{pk} , sedangkan untuk proses yang tidak terkendali maka indeks kemampuan proses yang digunakan adalah P_p dan P_{pk} (Montgomery, 2009).

Indeks kapabilitas proses C_p merupakan indeks kualitas proses terhadap spesifikasi yang dirumuskan sebagai berikut.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (23)$$

Dalam pengaplikasiannya, proses standar deviasi σ hampir selalu tidak diketahui dan harus diestimasi. Untuk mengestimasi σ digunakan standar deviasi sampel s dengan rumus sebagai berikut.

$$\widehat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\widehat{\sigma}} \quad (24)$$

Spesifikasi satu arah digunakan C_{pu} dan C_{pl} dengan rumus sebagai berikut.

$$C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}, C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \quad (25)$$

Indeks C_p tidak memperhitungkan perbedaan rata-rata proses terhadap rata-rata spesifikasi. C_{pk} merupakan perbaikan dari C_p , maka rumusnya adalah sebagai berikut.

$$C_{pk} = \min(C_{pu}, C_{pl}) \quad (26)$$

Kriteria kapabilitas proses untuk C_p dan C_{pk} adalah sebagai berikut (Ratnaningsih & Lestari, 2020).

- Nilai $C_p = C_{pk}$, menunjukkan bahwa proses tersebut berada di tengah-tengah spesifikasinya.
- Nilai $C_p > 1,33$, menunjukkan kapabilitas proses sangat baik.
- Nilai $C_p < 1$, menunjukkan bahwa proses tersebut menghasilkan produk yang tidak sesuai dengan spesifikasi dan tidak kapabel.
- Nilai C_{pk} yang negatif menunjukkan rata-rata proses berada di luar batas spesifikasi.
- Nilai $C_{pk} = 1$, menunjukkan satu variasi proses berada pada salah satu batas spesifikasi.
- Nilai $C_{pk} < 1$, menunjukkan bahwa proses menghasilkan produk yang tidak sesuai dengan spesifikasi.
- Nilai $C_{pk} = 0$, menunjukkan rata-rata sama dengan batas spesifikasi.

Serupa dengan perhitungan C_p , kinerja tingkat P_p dirumuskan sebagai berikut.

$$\widehat{P}_p = \frac{USL - LSL}{6s} \quad (27)$$

dengan $s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) / (n - 1)}$ merupakan standar deviasi dari data. Sedangkan, indeks P_{pk} dihitung dengan rumus:

$$P_{pk} = \min\left(\frac{USL - \bar{x}}{3s}, \frac{\bar{x} - LSL}{3s}\right) \quad (28)$$

Perbedaan antara C_p dan C_{pk} dengan P_p dan P_{pk} adalah hasil dari metode perhitungan standar deviasi. C_p dan C_{pk} mempertimbangkan deviasi rata-rata dalam sub kelompok rasional, sedangkan P_p dan P_{pk} mengatur penyimpangan berdasarkan data yang diteliti (Montgomery, 2013).

Menurut Ariani (2004) terdapat tiga kriteria nilai P_p adalah sebagai berikut.

- Jika $P_p = 1$, maka sebaran pengamatan atau lebar proses sama dengan lebar spesifikasi. Dalam hal ini proses dikatakan sudah baik, tetapi masih dapat ditingkatkan kualitasnya.
- Jika $P_p < 1$, maka sebaran pengamatan atau lebar proses lebih besar daripada lebar spesifikasi. Sehingga dikatakan proses kurang baik, karena banyak produk yang kualitasnya diluar batas spesifikasi. Perbaikan proses harus dilakukan agar P_p minimal lebih besar dari 1.

- c. Jika $P_p > 1$, maka sebaran pengamatan atau lebar proses lebih kecil daripada lebar spesifikasi. Dalam hal ini proses dikatakan cukup baik tetapi perlu dilakukan perbaikan agar P_p minimal 1,33.

Adapun kriteria yang digunakan untuk nilai P_{pk} adalah sebagai berikut (Ariani, 2004).

- Nilai $P_{pk} < 0$, menunjukkan rata-rata dari proses berada diluar batas spesifikasi.
- Nilai $P_{pk} = 0$, menunjukkan rata-rata dari proses sama dengan salah satu dari batas spesifikasinya.
- Nilai P_{pk} terletak antara 0 dan 1, menunjukkan rata-rata dari proses dalam batas spesifikasi, tetapi sebagian dari variasi proses berada di luar batas-batas spesifikasinya.
- Nilai $P_{pk} = 1$, menunjukkan salah satu ujung dari variasi proses berada dalam batas spesifikasi.
- Nilai $P_{pk} > 1$, menunjukkan semuanya dalam batas spesifikasi.

Perhitungan indeks kapabilitas proses untuk data multivariat menggunakan persamaan sebagai berikut.

$$MC_p = \sum_{i=1}^n W_i C_p(X_i) \quad (29)$$

$$MC_{pk} = \sum_{i=1}^n W_i C_{pk}(X_i)$$

$$MP_p = \sum_{i=1}^n W_i P_p(X_i) \quad (30)$$

$$MP_{pk} = \sum_{i=1}^n W_i P_{pk}(X_i)$$

Persamaan (29) dan Persamaan (30) merupakan bentuk multivariat dari C_p , C_{pk} , P_p dan P_{pk} dengan W_i merupakan pembobot berdasarkan kepentingan dengan $\sum_{i=1}^n W_i = 1$. Nilai pembobot W_i disesuaikan dengan pembobot dari masing-masing karakteristik kualitas yang ditentukan oleh perusahaan. Jika tidak ada, maka pembobot dianggap sama (Raissi, 2009).

1.5.10 PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa

Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirta Je'ne'berang merupakan perusahaan daerah Kabupaten Gowa yang bergerak dalam bidang pengolahan air baku menjadi air yang dapat dikonsumsi oleh masyarakat. PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa memiliki dua unit produksi yaitu Instalasi Pengolahan Air (IPA) Pandang-Pandang dan Tompobalang. Sumber air baku PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa 90% dari Bendungan Bili-bili, Sungai Jeneberang, Mata Air Patene di Kecamatan Tinggimoncong, Sungai Palleko, Sungai Cikoro dan Sungai Tassese. Dalam proses pengolahan air, PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa melalui beberapa tahapan sebagai berikut (PDAM Gowa, 2020).

1. Pra Sedimentasi

Proses pengendapan untuk memisahkan benda-benda tersuspensi secara gravitasi dari air baku, seperti pasir kasar, pasir halus, dan lumpur.

2. Aerasi

Proses ini dilakukan di aerator dengan bentuk bangunan bertingkat *cascade* yang bertujuan untuk memperbanyak intensitas kontak antara air baku dengan oksigen. Hal ini berfungsi agar oksigen terlarut dalam air meningkat, kandungan bahan organik lainnya berkurang, dan menghilangkan bau, warna serta rasa.

3. Koagulasi-Flokulasi

Koagulasi merupakan proses pemberian koagulan ($Al_2(SO_4)_3$) atau tawas cair yang bertujuan untuk mengurangi gaya tolak menolak antara partikel koloid atau lumpur sehingga partikel koloid tersebut bisa bergabung menjadi flok-flok kecil. Flokulasi adalah proses pemberian flokulan dengan *polymer* anionik/dukem yang berfungsi untuk menggabungkan flok-flok kecil menjadi besar dan stabil sehingga terpisah dengan supernatannya dan pada akhirnya flok-flok tersebut mengendap di *sludge zone* sedangkan supernatannya (air yang telah diendapkan lumpurnya) mengalir ke filter.

4. Filtrasi

Proses pemisahan padatan yang tidak dapat dipisahkan pada proses sebelumnya, tetapi melalui proses penyaringan cepat dengan menggunakan media pasir silika dan batu gravel. Proses ini berfungsi menjernihkan air dari kuman agar air yang dihasilkan lebih bersih.

5. Disinfeksi

Disinfeksi adalah proses membunuh bakteri yang masih ada di air dengan menggunakan disinfektan gas klor.

6. Reservoir

Reservoir adalah tandon air yang berfungsi sebagai tempat penampungan air bersih yang berasal dari proses disinfeksi, air ini sudah menjadi air yang bersih yang siap digunakan dan harus dimasak terlebih dahulu untuk kemudian dapat dijadikan air minum.

BAB II

METODE PENELITIAN

2.1 Sumber Data

Dalam penelitian ini, data yang digunakan merupakan data sekunder yang diperoleh dari Tesis berjudul "Monitoring *Mean Process* pada Kualitas Air PDAM Tirta Je'ne'berang dengan Menggunakan Bagan Kendali MEWMA dan MCUSUM" oleh Ardiansyah Abubakar (2023). Data yang digunakan ialah data produksi air IPA Pandang-Pandang di PDAM Tirta Je'ne'berang periode Januari hingga Desember tahun 2020. Penggunaan data dibagi menjadi dua fase, yakni fase pertama periode Januari hingga Juni tahun 2020, sedangkan fase kedua periode Juli hingga Desember tahun 2020.

2.2 Identifikasi Variabel

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini merupakan parameter utama yang dijadikan sebagai penentu kualitas air adalah sebagai berikut.

1. Kekeruhan (X_1)

Kekeruhan merupakan keadaan transparansi suatu zat cair berkurang akibat terdapat zat-zat tak terlarut. Kekeruhan yang tinggi dapat melindungi mikroorganisme dari pengaruh proses desinfeksi sehingga dapat mendorong pertumbuhan bakteri. Batas maksimum dari kekeruhan air minum ialah 5 *Nephelometric Turbidity Unit* (NTU) menurut Permenkes No. 492 tahun 2010.

2. Sisa Klor (X_2)

Klor merupakan zat kimia yang pada umumnya digunakan sebagai desinfektan dalam penyediaan air minum. Dalam jumlah banyak klorida akan menimbulkan rasa asin serta korosi pada pipa sistem penyediaan air minum. Kadar sisa klor maksimum menurut Permenkes No. 492 tahun 2010 ialah 0,5 mg/L.

2.3 Tahapan Analisis Data

Adapun tahapan analisis yang dilakukan untuk mencapai tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menyiapkan data produksi air dengan parameter kualitas yang telah ditentukan sebelumnya.
2. Melakukan uji normalitas multivariat menggunakan Persamaan (2) dan Persamaan (3).
3. Melakukan uji dependensi variabel menggunakan Persamaan (4).
4. Melakukan tahap analisis fase I untuk pembentukan peta kendali menggunakan data sebanyak 148 sampel. Langkah-langkah yang dilakukan pada fase I adalah sebagai berikut:

- a. Menentukan parameter, di antaranya vektor rata-rata target μ_G , vektor rata-rata μ_B , serta nilai target matriks varians kovarians Σ .
 - b. Jika μ_B tidak diketahui, maka digunakan vektor rata-rata dari sampel p-dimensi \bar{x} . Sedangkan, jika nilai target matriks varians kovarians Σ tidak diketahui maka digunakan sampel untuk matriks varians kovarians S .
 - c. Melakukan perhitungan Z_i dan Y_i untuk setiap sampel menggunakan Persamaan (12) dan Persamaan (18).
 - d. Melakukan perhitungan nilai referensi k menggunakan Persamaan (14).
 - e. Melakukan perhitungan statistik C_i^+ dan C_i^- menggunakan Persamaan (19).
 - f. Melakukan perhitungan statistik S_i^+ dan S_i^- menggunakan Persamaan (20).
 - g. Menghitung statistik C_i dan S_i menggunakan Persamaan (21).
 - h. Menghitung statistik M_i menggunakan Persamaan (22).
 - i. Membentuk peta kendali Max-MCUSUM dengan cara memplotkan statistik M_i terhadap batas kendali atas. Batas kendali atas (h) diperoleh dari metode *bootstrap* dan simulasi ARL menggunakan algoritma pada anak-subjudul 1.6.3.
 - j. Jika pada peta kendali fase I menunjukkan keadaan tidak terkendali, maka peta kendali tersebut direvisi dengan membuang data yang tidak terkendali serta melakukan perhitungan ulang parameter μ_B , Σ , dan batas kendali atas hingga diperoleh peta kendali dalam keadaan terkendali
5. Melakukan tahap analisis fase II untuk monitoring data selanjutnya sebanyak 135 sampel menggunakan parameter pada fase I yang telah terkendali. Langkah-langkah yang dilakukan pada fase II adalah sebagai berikut:
 - a. Menghitung statistik M_i untuk data Fase II menggunakan Persamaan (22).
 - b. Membentuk peta kendali Max-MCUSUM dengan cara memplotkan statistik M_i terhadap batas kendali atas Fase I yang telah terkendali.
 - c. Melakukan perbandingan antara statistik M_i dan h . Jika salah satu statistik $M_i > h$, maka dapat dikenali pergeserannya sebagai berikut.
 - 1) Jika $C_i > h$, tandai dengan m^+ . Hal ini menunjukkan terjadi pergeseran proses pada rata-rata.
 - 2) Jika $S_i > h$, tandai dengan v^+ . Hal ini menunjukkan terjadi pergeseran proses pada variabilitas.
 - 3) Jika $C_i > h$ dan $S_i > h$, tandai dengan m^+v^+ . Hal ini menunjukkan terjadi pergeseran proses pada rata-rata maupun variabilitas.
 6. Melakukan analisis kapabilitas proses produksi untuk mengukur kinerja proses produksi air PDAM Tirta Je'ne'berang Gowa.
 7. Membuat interpretasi dan menarik kesimpulan berdasarkan dari hasil analisis yang diperoleh.