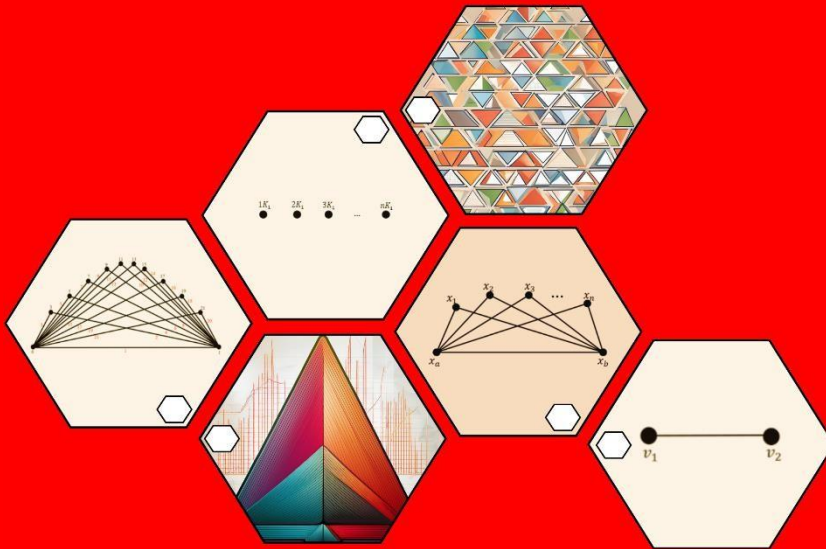


PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF BUKU SEGITIGA



FEBI LESTARI

H011201081

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024



PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF BUKU SEGITIGA

FEBI LESTARI

H011201081



PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF BUKU SEGITIGA

FEBI LESTARI

H011201081

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Matematika

pada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024**

SKRIPSI
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF BUKU SEGITIGA

FEBI LESTARI

H011201081

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.,
pada tanggal 16 Agustus 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Matematika

Departemen Matematika

Fakultas Matematika

Universitas Hasanuddin

Makassar



Mengesahkan:

Pembimbing tugas akhir,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

Mengetahui:

Ketua Program Studi,


Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 19680429 200212 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Pelabelan Graceful pada Graf Buku Segitiga" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 16 Agustus 2024



Febi Lestari
Febi Lestari
NIM H011201081

UCAPAN TERIMA KASIH

Bismillahirrahmanirrahim

Puji Syukur atas kehadiran Allah SWT. Yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya. Sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sebagai suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga skripsi dengan judul “**Pelabelan Graceful pada Graf Buku Segitiga**” ini dapat diselesaikan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin dengan rampung.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini tidak terlepas dari berbagai bantuan berbagai pihak. Maka dari itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan kepada orang tua penulis, bapak kebanggaan penulis **H. Alimuddin** dan mama kesayangan penulis **Hj. Asnahati**, yang telah membesarkan dan mendidik penulis, serta senantiasa memberikan doa, dukungan, motivasi dan materi, sehingga penulis bisa sampai di titik ini. Tak lupa juga terima kasih kepada kakak penulis, **Fitriani** dan **Fitrayani**, kakak ipar, om, tante dan seluruh keluarga penulis yang banyak membantu penulis selama proses menyelesaikan skripsi ini, memberikan doa, dukungan, motivasi dan materi kepada penulis. Pada kesempatan ini pula dengan segala kerendahan hati, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. ENG. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
2. Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, selaku ketua Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku dosen pembimbing yang dengan sabar, tulus, ikhlas banyak memberikan ilmu yang bermanfaat, meluangkan waktu untuk membimbing, memberi masukan serta arahan dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**, selaku tim penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan masukan dan kritikan yang membangun terhadap penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. Bapak dan ibu Dosen Departemen Matematika yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta bapak dan ibu Staf Departemen Matematika yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.
6. **Muhammad Ahnaf Yusuf, Muhammad Fauzan Hamdani, Muhammad Ihsan, Nurhalima, Vira Anggraeni, dan Wardah Hidayah H** yang telah banyak membantu dan mendukung penulis selama perkuliahan hingga penyelesaian skripsi ini, serta kebersamaan penulis selama perkuliahan.

Terima kasih untuk setiap kebersamaan, canda tawa dan cintanya yang akan menjadi salah satu kenangan yang tak terlupakan.

7. Teman-teman **Pasger 23** yang telah memberi bantuan dan dukungan hingga saat ini. Terima kasih untuk kebersamaan dan canda tawanya.
8. Teman-teman **Vepoince** yang telah kebersamai selama 7 tahun, terima kasih telah memberi dukungan, motivasi dan masih ada sampai sekarang untuk penulis.
9. Teman-teman seperjuangan **Matematika 2020, HORIZONTAL**, dan **MIPA 2020** yang senantiasa memberikan bantuan dan dukungan moril kepada penulis, serta memberikan momen selama masa studi penulis.
10. Teman-teman **KKN UNHAS Gelombang 110** terkhusus **PS Enrekang Desa Rossoan** yang telah mewarnai masa-masa KKN penulis ketika mengabdikan kepada masyarakat.
11. Last but not least. Terima kasih untuk **Febi Lestari**, diri saya sendiri yang telah bekerja keras dan berjuang sampai di titik ini serta senantiasa menikmati seluruh prosesnya yang tidak mudah. Bertanggung jawab untuk menyelesaikan apa yang telah dimulai. Terima kasih sudah bertahan.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, dan oleh karena itu, segala kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan untuk perbaikan di masa mendatang.

Penulis,

Febi Lestari

ABSTRAK

FEBI LESTARI. **Pelabelan graceful pada graf buku segitiga** (dibimbing oleh Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.)

Latar Belakang. Banyak penelitian yang berkaitan dengan pelabelan graceful pada beberapa graf diantaranya graf superstar, graf H-bintang, graf A-bintang, graf ilalang, graf siput, graf ubur-ubur, graf lintasan P_n , graf timbangan dan graf I-bintang, tetapi pelabelan graceful pada graf buku segitiga belum diketahui. **Tujuan.** Penelitian ini bertujuan untuk mengklarifikasi apakah graf buku segitiga merupakan graf graceful atau bukan dan mendefinisikan pelabelan graceful pada graf buku segitiga. **Metode.** Penelitian ini menggunakan metode penelitian pustaka yaitu dengan mengumpulkan bahan penelitian yang berkaitan dengan tugas akhir ini. **Hasil.** Graf buku segitiga untuk $n \geq 3$ merupakan graf graceful karena fungsi pelabelan $f: V(BT_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n + 1\}$ merupakan fungsi injektif dan $f^*: E(BT_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n + 1\}$ merupakan fungsi bijektif. **Kesimpulan.** Graf buku segitiga atau dapat dituliskan sebagai $BT_n = P_2 + nK_1$ merupakan graf graceful meskipun graf nK_1 bukan graf graceful.

Kata kunci: graf; pelabelan; pelabelan graceful; graf buku segitiga; fungsi.

ABSTRACT

FEBI LESTARI. Graceful Labeling on Triangle Book Graphs (Supervised by Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.)

Background. Many studies have investigated graceful labeling on various graphs, including superstar graphs, H-star graphs, A-star graphs, reeds graphs, snail graphs, jellyfish graphs, path graphs P_n , scale graphs, and I-star graphs. However, graceful labeling on triangle book graphs remains unknown. **Aim.** This research aims to clarify whether triangle book graphs are graceful graphs and to define graceful labeling on triangle book graphs. **Method.** The study employs a literature research method by collecting relevant materials related to this final project. **Results.** Triangle book graphs for $n \geq 3$ are graceful graphs because the labeling function $f: V(BT_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n + 1\}$ is injective and $f^*: E(BT_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n + 1\}$ is bijective. **Conclusion.** Triangle book graphs, denoted as $BT_n = P_2 + nK_1$ are graceful graphs, even though nK_1 graphs are not graceful graphs.

Keywords: graph; labeling; graceful labeling; triangle book graph; function.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....
PERNYATAAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI	iv
UCAPAN TERIMA KASIH	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian.....	2
1.4 Batasan Masalah.....	2
1.5 Manfaat Penelitian	2
1.6 Landasan Teori	2
1.6.1 Konsep Dasar Graf	2
1.6.3 Jenis-Jenis Graf	5
1.6.4 Pemetaan.....	6
1.6.5 Pelabelan Graf	7
1.6.6 Pelabelan Graceful	8
BAB II METODOLOGI PENELITIAN	9
2.1 Waktu dan tempat penelitian.....	9
2.2 Jenis Penelitian	9
2.3 Tahapan Penelitian	9
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	11
3.1 Hasil	11
3.2 Pembahasan	19
BAB IV KESIMPULAN	20
4.1 Kesimpulan.....	20

4.2	Saran.....	x
		20
	DAFTAR PUSTAKA.....	21

DAFTAR GAMBAR

Nomor urut	Halaman
1. Graf G	3
2. Graf G	3
3. (a) Titik bertetangga (b) Sisi bertetangga	4
4. Graf G_4 dengan Lintasan Terpanjang Tiga.....	4
5. (a) Graf G , (b) Graf H dan (c) Graf $G \cup H$	5
6. (a) Graf G , (b) Graf H dan (c) Graf $G + H$	5
7. Graf Lintasan	6
8. Graf Lengkap K_5	6
9. Graf Buku Segitiga BT_n	6
10. Fungsi Injektif.....	7
11. Fungsi Surjektif	7
12. Fungsi Bijektif	7
13. Pelabelan Graf.....	8
14. Pelabelan graceful pada graf sikel C_3	8
15. Alur Penelitian.....	10
16. Pelabelan graceful pada graf BT_3	11
17. Pelabelan graceful pada graf BT_4	11
18. Pelabelan graceful pada graf BT_5	12
19. Pelabelan graceful pada graf BT_6	13
20. Pelabelan graceful pada graf BT_7	14
21. Pelabelan graceful pada graf BT_8	14
22. Pelabelan graceful pada graf BT_9	15
23. Pelabelan graceful pada graf BT_{10}	16
24. Pelabelan pada graf P_2	19
25. Pelabelan pada graf nK_1	19
26. Pelabelan pada graf $P_2 + 5K_1$	19

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang berperan penting di dalam kehidupan karena dapat digunakan untuk mencari dan menemukan solusi serta menyederhanakan penyajian dan pemahaman dari suatu masalah. Dalam matematika, terdapat berbagai macam cabang ilmu matematika salah satunya adalah teori graf.

Teori graf diperkenalkan pertama kali pada tahun 1736 oleh ahli matematika bernama Leonhard Euler. Pada saat itu, di Königsberg terdapat 7 jembatan yang digunakan untuk menghubungkan 4 daratan yang dipisahkan oleh sungai. Warga di kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali yang bertolak dan berakhir pada daratan yang sama. Euler membuktikan bahwa hal tersebut tidak dapat dilakukan. Berkat hal yang dilakukan oleh Euler, terdapat suatu cabang ilmu matematika yang baru yaitu teori graf. (Hasmawati, 2020).

Teori graf adalah cabang matematika yang mempelajari hubungan antar objek yang dinyatakan dalam bentuk graf. Graf terdiri dari titik-titik (*vertices*) dan sisi-sisi (*edges*) yang menghubungkan pasangan titik. Dalam berbagai aplikasi, graf digunakan untuk merepresentasikan dan memodelkan berbagai fenomena dalam bidang sains, teknik, sosial, dan komputer. Dalam perkembangannya, teori graf dapat dibagi menjadi beberapa topik kajian yaitu dimensi metrik, dimensi partisi, pewarnaan graf, pelabelan graf, dan lain sebagainya.

Secara umum, objek kajian dari pelabelan merupakan graf yang direpresentasikan oleh titik, sisi, dan himpunan bagian bilangan asli yaitu label. Pelabelan pada graf mulai diperkenalkan pada tahun 1964 oleh Sadlăck. Pada tahun 1967 diperkenalkan oleh Rosa valuasi β yang sekarang dikenal dengan pelabelan graceful.

Pelabelan graceful merupakan salah satu jenis pelabelan yang terkenal. Pelabelan graceful didefinisikan sebagai pemberian label pada titik dari suatu graf G dengan bilangan bulat tak negatif dari himpunan $\{0,1,2,3, \dots, |E(G)|\}$ yang memenuhi fungsi injektif sedemikian sehingga jika sisinya mendapat label harga mutlak dari selisih label kedua titik ujungnya maka setiap sisi akan mendapat label yang berbeda. Jika pada suatu graf G dapat dikonstruksi suatu pelabelan graceful, maka G disebut graf graceful. (Muarriah, 2008)

Penelitian yang berkaitan dengan pelabelan graceful telah banyak dilakukan oleh para peneliti, diantaranya pada tahun 2016 Ismail, dkk menemukan bahwa graf superstar adalah graf graceful. Pada tahun 2017 Nurul, dkk menemukan bahwa graf H-bintang dan A-bintang adalah graf graceful. Pada tahun 2020 Zulfi, dkk menemukan bahwa graf ilalang adalah graf graceful. Pada tahun 2021 Kevin, dkk. menemukan bahwa graf siput dan graf ubur-ubur adalah graf graceful. Pada tahun 2022 Ramadhan, dkk. menemukan bahwa graf lintasan P_n adalah graf graceful dan Aryunida menemukan bahwa graf timbangan adalah graf graceful. Pada tahun 2024 Syahrul menemukan bahwa graf I-bintang ($I(S_n)$) adalah graf graceful.

Berdasarkan berbagai penelitian dan setelah dilakukan penelusuran literatur, pembahasan mengenai pelabelan graceful pada graf buku segitiga belum ada. Karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian pelabelan graceful pada graf buku segitiga, dan selanjutnya penelitian tersebut akan dituangkan dalam bentuk skripsi yang berjudul, “**Pelabelan Graceful pada Graf Buku Segitiga**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah yang akan diselesaikan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Apakah graf buku segitiga merupakan graf graceful?
2. Bagaimana definisi pelabelan graceful pada graf buku segitiga?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Mengklarifikasi apakah graf buku segitiga merupakan graf graceful atau bukan.
2. Mendefinisikan pelabelan graceful pada graf buku segitiga.

1.4 Batasan Masalah

Graf buku segitiga merupakan graf hasil penjumlahan graf lintasan P_2 dengan n banyaknya graf lengkap K_1 . Karena itu pada penelitian ini akan ditinjau untuk $n \geq 3$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang akan diperoleh dari hasil penelitian ini adalah dapat diketahui hubungan pelabelan graceful pada graf lintasan P_2 dan n banyaknya graf lengkap K_1 dengan pelabelan pada graf buku segitiga.

1.6 Landasan Teori

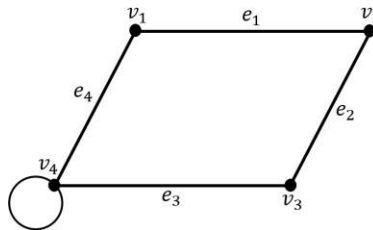
Pada landasan teori akan membahas tentang konsep dasar graf, operasi pada graf, jenis-jenis graf, pemetaan, pelabelan graf, dan pelabelan graceful.

1.6.1 Konsep Dasar Graf

Pada bagian ini akan disajikan definisi graf dan berbagai istilah yang digunakan dalam graf.

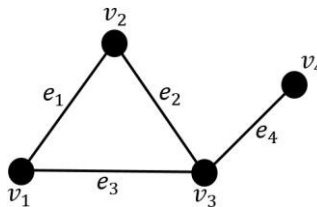
Definisi 1.1 Misalkan V adalah suatu himpunan tidak kosong dari objek-objek diskrit dan E adalah himpunan pasangan elemen-elemen dari V . Maka suatu sistem $G = (V, E)$ disebut graf.

Definisi 1.1 menegaskan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ boleh kosong. Graf yang hanya terdiri dari titik tanpa sisi disebut graf trivial. Titik pada graf dapat diberi label berupa huruf seperti a, b, c, \dots dengan bilangan asli $1, 2, 3, \dots$ atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dan v dinyatakan dengan pasangan (uv) . Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan u dan v maka e dapat dinyatakan sebagai $e = uv$. (Munir, 2010)

Contoh 1.1**Gambar 1** Graf G

Berdasarkan Gambar 1 himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Maka pasangan himpunan $G = \{V(G), E(G)\}$ adalah graf karena $V(G)$ merupakan himpunan diskrit berhingga dan anggota $E(G)$ adalah elemen dari $V(G)$.

Definisi 1.2 Misal $G = (V, E)$ suatu graf. Maka $|V|$ disebut orde dari G dan $|E|$ disebut ukuran dari G . Orde dari graf G yang disimbolkan dengan p adalah banyaknya elemen pada himpunan $V(G)$. Sedangkan ada pula istilah ukuran yang dinyatakan sebagai q yaitu banyaknya elemen pada $E(G)$. (Hasmawati, 2020)

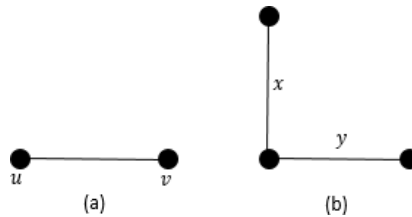
Contoh 1.2**Gambar 2** Graf G

Pada Gambar 2 graf G merupakan graf berorde empat dan memiliki ukuran empat.

Definisi 1.3 Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan $v \in V$. Derajat titik v adalah banyaknya sisi-sisi dari graf G yang terkait dengan v . Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan $\deg(v)$. (Chartrand, dkk, 1996)

Pada Gambar 2 dapat dilihat bahwa v_3 pada graf G memiliki derajat tiga atau $\deg(v_3) = 3$ karena sisi yang terhubung dengan v_3 adalah $\{e_2, e_3, e_4\}$.

Definisi 1.4 Misal $G = (V, E)$ suatu graf dimana $u, v \in V$. Maka u dan v disebut bertetangga jika ada sisi uv yang menghubungkannya, kemudian titik u dan v dikatakan bersisian dengan sisi tersebut. Demikian pula dua sisi berlainan x dan y bertetangga jika mereka mempunyai titik yang sama. (Wilson, 1996)

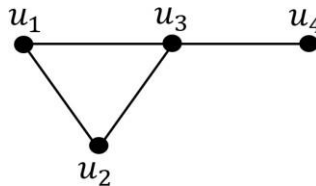


Gambar 3 (a) Titik bertetangga (b) Sisi bertetangga

Definisi 1.5 Misal $G = (V, E)$ suatu graf dimana $u, v \in V$. Jarak dari titik u ke titik v dalam graf dinotasikan sebagai $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v . Jika graf G tidak memiliki lintasan dari titik u ke titik v , maka didefinisikan $d(u, v) = \infty$. (Chartrand, 1997)

Keterangan tambahan untuk Definisi 1.5 adalah untuk setiap $u \in V(G)$ dapat disimpulkan untuk jarak dari u ke u atau dapat ditulis $d(u, u) = 0$ karena untuk mencapai titik u dari titik u kita tidak memerlukan sebuah sisi sebab kita sudah berada di titik tujuan itu sendiri.

Contoh 1.4



Gambar 4 Graf G_4 dengan Lintasan Terpanjang Tiga

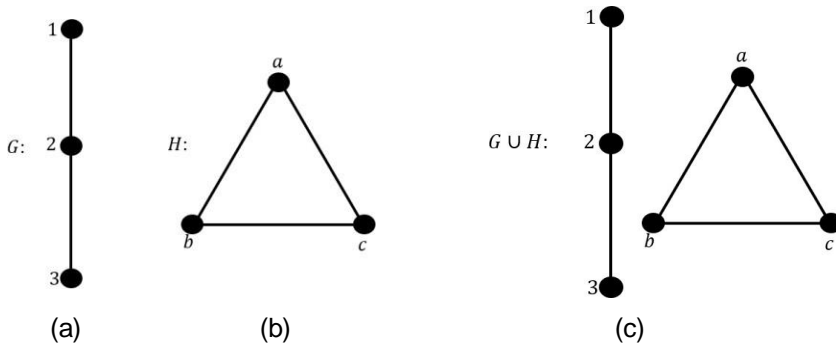
Pada Gambar 4 graf G_4 memiliki lintasan terpanjang tiga yang diperoleh melalui titik 1 dan 4. Lintasan pertama adalah 1,2,2,2,3,3,4 yang memiliki panjang tiga. Lintasan kedua adalah 1,1,3,3,3,4 yang memiliki panjang dua. Karena jarak titik 1 ke titik 4, maka jarak titik 1 ke titik 4 adalah $d(1,4) = 2$. Dalam hal ini, pada graf tersebut memiliki lintasan terpanjang tiga yang diperoleh melalui titik 1 dan 4, akan tetapi jarak dari titik 1 ke titik 4 adalah 2.

1.6.2 Operasi pada Graf

Terdapat beberapa operasi pada teori graf, antara lain operasi jumlah, operasi kali, operasi gabung, operasi amalgamasi, operasi korona, dan operasi subdivisi. Namun, pada penulisan terdapat dua operasi yaitu operasi gabung dan operasi jumlah.

Definisi 1.6 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Maka, graf gabung (union graph) antara G dan H ditulis $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. (Hasmawati, 2020)

Contoh 1.5

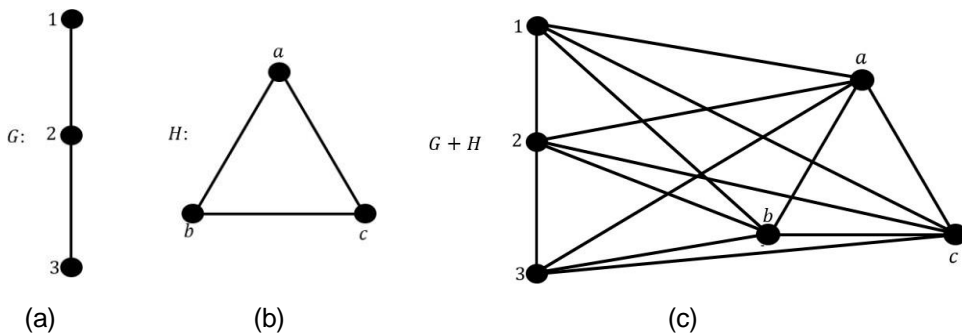


Gambar 5 (a) Graf G , (b) Graf H dan (c) Graf $G \cup H$

Berdasarkan Gambar 5(a), himpunan titik graf G yaitu $V(G) = \{1,2,3\}$ dan himpunan sisinya $E(G) = \{12,23\}$. Pada Gambar 5(b) himpunan titik graf H yaitu $V(H) = \{a, b, c\}$ dan himpunan sisinya $E(H) = \{ab, bc, ac\}$. Pada Gambar 5(c) yang merupakan graf gabungan dari graf G dan graf H dengan himpunan titik $V(G \cup H) = \{1,2,3, a, b, c\}$ dan himpunan sisinya $E(G \cup H) = \{12,23, ab, bc, ac\}$.

Definisi 1.7 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Maka, graf jumlah antara G dan H ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G), v \in V(H)\}$.

Contoh 1.6



Gambar 6 (a) Graf G , (b) Graf H dan (c) Graf $G + H$

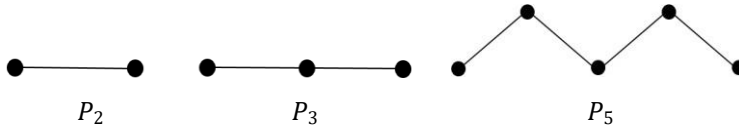
Berdasarkan Gambar 6(a), himpunan titik graf G yaitu $V(G) = \{1,2,3\}$ dan himpunan sisinya $E(G) = \{12,23\}$. Pada Gambar 5(b) himpunan titik graf H yaitu $V(H) = \{a, b, c\}$ dan himpunan sisinya $E(H) = \{ab, bc, ac\}$. Pada Gambar 5(c) yang merupakan graf jumlah dari graf G dan graf H dengan himpunan titik $V(G + H) = \{1,2,3, a, b, c\}$ dan himpunan sisinya $E(G + H) = \{12,23, ab, bc, ac\} \cup \{1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3c, 3b\}$.

1.6.3 Jenis-Jenis Graf

Pada teori graf dikenal berbagai jenis graf khusus. Jenis-jenis graf tersebut diantaranya adalah graf lengkap, graf lintasan, graf siklus, graf buku segitiga, graf kipas, dan sebagainya. Pada penulisan ini graf yang akan dibahas hanyalah graf lengkap, graf lintasan dan graf segitiga.

Definisi 1.8 Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf. Graf G disebut graf lintasan jika graf G hanya terdiri dari satu lintasan. Dimana lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1$.

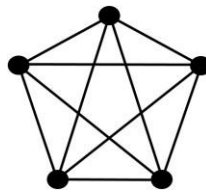
Contoh 1.7



Gambar 7 Graf Lintasan

Definisi 1.9 Misal $G = (V, E)$ suatu graf. Graf G disebut graf lengkap jika setiap dua titik pada G bertetangga. Graf lengkap yang memiliki n titik dinotasikan K_n . (Hasmawati, 2020)

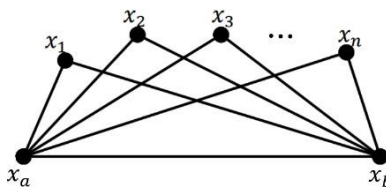
Contoh 1.8



K_5

Gambar 8 Graf Lengkap K_5

Definisi 1.10 Graf buku segitiga adalah suatu graf yang dibentuk dari graf lintasan P_2 yang tiap titiknya bertetangga dengan n graf lengkap K_1 atau dapat dituliskan sebagai $BT_n = P_2 + nK_1$.

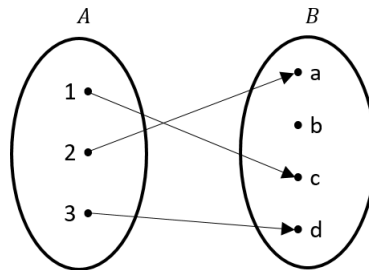


Gambar 9 Graf Buku Segitiga BT_n

1.6.4 Pemetaan

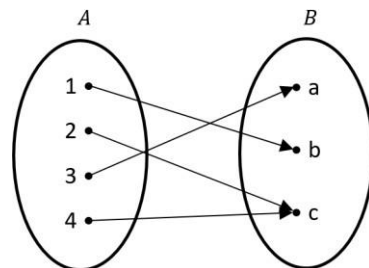
Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A ke tepat satu elemen di himpunan B disebut pemetaan dari himpunan A ke himpunan B yang dinotasikan $f: A \rightarrow B$. Himpunan A disebut sebagai daerah asal (*domain*) dan himpunan B disebut sebagai kawan (*kodomain*). Secara umum pemetaan dibagi menjadi 3 jenis sebagai berikut.

Definisi 1.11 Misalkan $f: A \rightarrow B$ adalah suatu pemetaan dari A ke B . Pemetaan f disebut injektif jika $\forall x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$ atau jika $x_1 = x_2$ maka $f(x_1) = f(x_2)$. (Bartle, 2011)



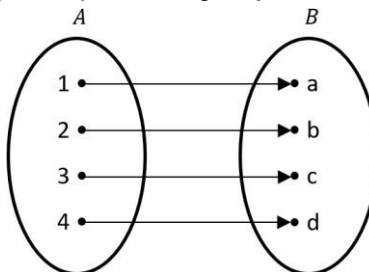
Gambar 10 Fungsi Injektif

Definisi 1.12 Misalkan $f: A \rightarrow B$ adalah suatu pemetaan dari A ke B . Pemetaan f disebut surjektif jika $\forall y \in B$ maka $\exists x \in A$ sedemikian hingga $f(x) = y$. (Bartle, 2011)



Gambar 11 Fungsi Surjektif

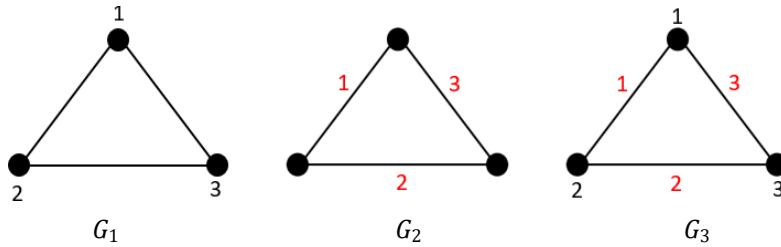
Definisi 1.13 Misalkan $f: A \rightarrow B$ adalah suatu pemetaan dari A ke B . Pemetaan f disebut bijektif jika fungsi f merupakan fungsi injektif dan surjektif. (Bartle, 2011)



Gambar 12 Fungsi Bijektif

1.6.5 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (umumnya bilangan bulat positif). Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total (*total labeling*). (Gallian, 2009)



Gambar 13 Pelabelan Graf

Pada Gambar 13 merupakan contoh pelabelan graf dimana graf G_1 adalah contoh pelabelan titik, graf G_2 adalah contoh pelabelan sisi dan graf G_3 adalah contoh pelabelan total.

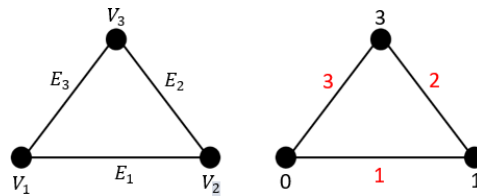
1.6.6 Pelabelan Graceful

Pada sub-sub bab ini, akan dibahas definisi dan contoh sederhana dari pelabelan graceful.

Definisi 1.14 Misal $G = (V, E)$ suatu graf dan suatu pemetaan $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(G)|\}$. Pemetaan f disebut pelabelan graceful jika f adalah suatu pemetaan injektif dan $|f(x) - f(y)|$ berbeda untuk setiap sisi $xy \in E$. Graf yang dapat dikonstruksi pada pelabelan graceful disebut graf graceful.

Contoh 1.14

Berikut adalah pelabelan graceful pada graf siklus (C_3).



Gambar 14 Pelabelan graceful pada graf siklus C_3

Pada Gambar 14 terdapat graf C_3 dengan himpunan titiknya adalah $V(C_3) = \{V_1, V_2, V_3\}$ dan himpunan sisinya $E(C_3) = \{V_1V_2, V_2V_3, V_1V_3\}$ dimana $V_1V_2 = E_1$, $V_2V_3 = E_2$, $V_1V_3 = E_3$ diberikan label titik sebagai berikut:

$$f(V_1) = 0 \quad f(V_2) = 1 \quad f(V_3) = 3.$$

Berdasarkan label titik tersebut dapat dilihat bahwa f bersifat injektif karena setiap anggota domain memiliki pasangan yang berbeda di kodomain. Sebagai akibat dari pelabelan titik di atas maka diperoleh:

$$f^*(V_1V_2) = |f(V_1) - f(V_2)| = |0 - 1| = 1,$$

$$f^*(V_2V_3) = |f(V_2) - f(V_3)| = |1 - 3| = 2,$$

$$f^*(V_1V_3) = |f(V_1) - f(V_3)| = |0 - 3| = 3.$$

Karena $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ injektif dan $|f(x) - f(y)|$ berbeda untuk setiap $xy \in E(C_3)$ maka graf siklus C_3 memiliki pelabelan graceful. Oleh karena itu, graf siklus C_3 merupakan graf graceful.

BAB II METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Waktu dan tempat penelitian

Penelitian dilakukan sejak Februari 2024. Penelitian ini menggunakan sumber literatur yang tersedia secara langsung di perpustakaan resmi dan laboratorium matematika Universitas Hasanuddin serta beberapa yang tersedia di internet.

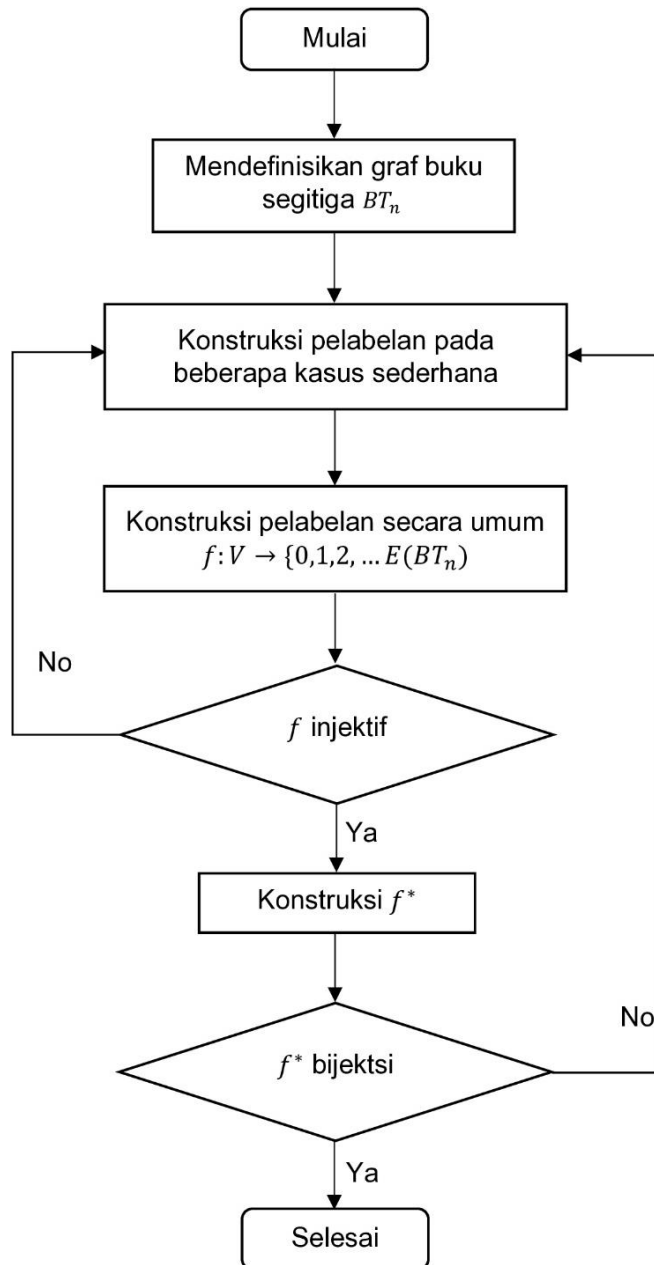
2.2 Jenis Penelitian

Metode yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir ini adalah metode penelitian pustaka (*Library Research*) yaitu dengan mengumpulkan bahan penelitian melalui buku, jurnal, media online ataupun hasil penelitian orang lain yang berhubungan dengan tugas akhir ini.

2.3 Tahapan Penelitian

1. Mendefinisikan graf buku segitiga BT_n .
2. Mengkonstruksi pelabelan pada beberapa kasus sederhana.
3. Mengkonstruksi pelabelan secara umum $f: V \rightarrow \{0,1,2,3, \dots, E(BT_n)\}$.
4. Membuktikan pemetaan f merupakan fungsi injektif.
5. Jika pemetaan f merupakan fungsi injektif, maka penelitian dilanjutkan ke tahap selanjutnya, jika pemetaan f bukan fungsi injektif maka kembali ke tahap kedua.
6. Mengkonstruksi f^* .
7. Membuktikan f^* fungsi bijektif.
8. Jika terbukti f^* fungsi bijektif, maka graf buku segitiga adalah graf graceful, jika f^* bukan fungsi bijektif maka kembali ke tahap kedua.

Tahapan-tahapan penelitian tersebut dibuat dalam bentuk diagram alir seperti pada Gambar 15.



Gambar 15 Alur Penelitian