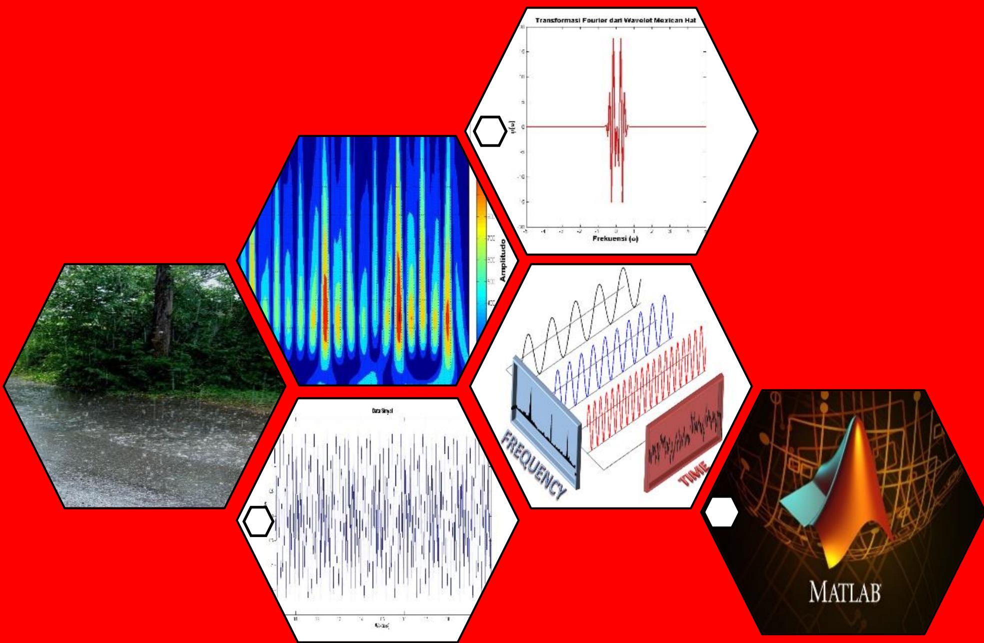
PERBANDINGAN TRANSFORMASI FOURIER DAN TRANSFORMASI WAVELET DALAM ANALISIS SPEKTRUM FREKUENSI CURAH HUJAN DI KOTA MAKASSAR



AERON LUTHER BATARA
H011201063

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2024

PERBANDINGAN TRANSFORMASI FOURIER DAN TRANSFORMASI WAVELET DALAM ANALISIS SPEKTRUM FREKUENSI CURAH HUJAN DI KOTA MAKASSAR

AERON LUTHER BATARA
H01201063

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

PERBANDINGAN TRANSFORMASI FOURIER DAN TRANSFORMASI WAVELET DALAM ANALISIS SPEKTRUM FREKUENSI CURAH HUJAN DI KOTA MAKASSAR

AERON LUTHER BATARA
H01201063

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

SKRIPSI

PERBANDINGAN TRANSFORMASI FOURIER DAN TRANSFORMASI WAVELET DALAM ANALISIS SPEKTRUM FREKUENSI CURAH HUJAN DI KOTA MAKASSAR

AERON LUTHER BATARA
H01201063

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Sains pada 09 Juli 2024
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan
pada

Program Studi Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan: Pembimbing tugas akhir,	Mengetahui: Ketua Program Studi,
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si. NIP.197012311998021001	Dr. Firman, S.Si., M.Si NIP.196804292002121001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Perbandingan Transformasi Fourier dan Transformasi Wavelet dalam Analisis Spektrum Frekuensi Curah Hujan di Kota Makassar" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 09-Juli-2024

Aeron Luther Batara
NIM H011201063

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas kasih dan pertolongan-Nya yang senantiasa menyertai dan menuntun penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Perbandingan Transformasi Fourier dan Transformasi Wavelet dalam Analisis Spektrum Frekuensi Curah Hujan di Kota Makassar" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua terkasih Bapak Arianto Batara dan Ibu Damayanti Todingdatu yang selalu mendoakan, mendukung, dan memberikan cinta kasihnya dengan tulus ikhlas. Begitu pula kepada adik-adik penulis yang selalu memberikan keceriaan dan semangat dalam proses penyusunan skripsi ini. Kehadiran mereka memberikan warna tersendiri dan menjadi sumber inspirasi bagi penulis untuk terus berjuang dan menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih juga untuk seluruh keluarga besar di mana pun berada untuk cinta dan dukungan yang selalu diberikan bagi penulis.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga disampaikan kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc., selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Bapak Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si., selaku pembimbing tugas akhir dan pembimbing akademik yang dengan penuh kesabaran telah membimbing penulis selama perkuliahan serta bersedia meluangkan waktu dan pemikiran untuk mendampingi penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si., dan Bapak Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si., selaku penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan saran dalam penyempurnaan penyusunan skripsi ini.
5. Bapak/Ibu Dosen dan Staff Departemen Matematika yang telah memberikan ilmu, pengalaman, dan bantuan selama masa perkuliahan.
6. Sahabat-sahabat ‘Waffle Ubi Squad’ dan ‘Orang Baik’ yang telah membantu dan menemani penulis, terima kasih untuk kebersamaan, kenangan suka duka, serta dukungan selama masa-masa perkuliahan sampai saat ini.
7. GMKI Komisariat FMIPA Unhas yang telah menjadi wadah pengembangan diri dan pelayanan bagi penulis.
8. Teman-teman Matematika 2020 atas segala dukungan, kerja sama, dan kebersamaannya selama ini.
9. Teman-teman KKN Posko Buntu Datu atas segala dukungan, kebersamaan, dan pengalaman baru yang telah diperoleh selama proses KKN hingga saat ini.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga saran dan kritik yang membangun diharapkan oleh penulis untuk perbaikan dan pengembangan penelitian lebih lanjut. Akhir kata, semoga hasil penelitian ini dapat bermanfaat bagi kalangan akademisi, praktisi, dan semua pihak.

Makassar, 09 Juli 2024

Aeron Luther Batara

ABSTRAK

AERON LUTHER BATARA. **Perbandingan Transformasi Fourier dan Transformasi Wavelet dalam Analisis Spektrum Frekuensi Curah Hujan di Kota Makassar** (dibimbing oleh Mawardi).

Latar Belakang. Penelitian ini dilakukan untuk memahami pola musiman curah hujan di Kota Makassar yang penting untuk mitigasi bencana dan perencanaan infrastruktur. Kota Makassar sering menghadapi banjir dan kekeringan, sehingga analisis spektrum frekuensi curah hujan menjadi sangat relevan. **Tujuan.** Penelitian ini bertujuan untuk menentukan pola musiman curah hujan di Kota Makassar dengan menggunakan Transformasi Fourier dan Transformasi Wavelet, serta menentukan perbandingan kinerja Transformasi Fourier dan Transformasi Wavelet dalam penentuan pola musiman curah hujan di Kota Makassar. **Metode.** Penelitian ini menggunakan program MATLAB untuk mengimplementasikan Transformasi Fourier dan Transformasi Wavelet. Data curah hujan diolah untuk mengidentifikasi frekuensi dominan dan pola musiman. **Hasil.** Transformasi Fourier mengidentifikasi frekuensi dominan sebesar 0,08 (periode 12,86 bulan), sedangkan Transformasi Wavelet menunjukkan variasi frekuensi dominan dari 0,333 (periode 3 bulan) dan 0,09 hingga 0,083 (periode 11 hingga 12 bulan). Transformasi Fourier menunjukkan bahwa siklus tahunan adalah faktor utama dalam pola curah hujan. Namun, Transformasi Wavelet menunjukkan adanya pengaruh siklus triwulanan dan tahunan dengan lebih detail. Transformasi Fourier lebih sederhana dan mudah diinterpretasikan, tetapi tidak mampu menangkap variasi temporal. Sebaliknya, Transformasi Wavelet mampu menangkap variasi temporal dengan baik, namun analisisnya lebih kompleks dan membutuhkan interpretasi yang lebih mendalam. **Kesimpulan.** Secara umum, Transformasi Wavelet lebih direkomendasikan untuk analisis spektrum frekuensi curah hujan di Kota Makassar karena mampu memberikan informasi yang lebih detail dan akurat mengenai variasi temporal frekuensi curah hujan.

Kata Kunci: Curah hujan, Kota Makassar, Transformasi Fourier, Transformasi Wavelet, analisis spektrum frekuensi

ABSTRACT

AERON LUTHER BATARA**. Comparison of Fourier Transform and Wavelet Transform in Frequency Spectrum Analysis of Rainfall in Makassar City** (supervised by Mawardi).

Background. This research was conducted to understand the seasonal pattern of rainfall in Makassar City which is important for disaster mitigation and infrastructure planning. Makassar City often faces floods and droughts, so analyzing the frequency spectrum of rainfall becomes very relevant. **Aims**. This study aims to determine the seasonal pattern of rainfall in Makassar City by using Fourier Transform and Wavelet Transform, as well as determining the performance comparison of Fourier Transform and Wavelet Transform in determining the seasonal pattern of rainfall in Makassar City. **Methods**. This research uses MATLAB program to implement Fourier Transform and Wavelet Transform. Rainfall data is processed to identify the dominant frequency and seasonal patterns. **Results**. The Fourier Transform identified a dominant frequency of 0.08 (12.86 months period), while the Wavelet Transform showed variations in the dominant frequency from 0.333 (3 months period) and 0.09 to 0.083 (11 to 12 months period). The Fourier Transform shows that the annual cycle is the main factor in the rainfall pattern. However, the Wavelet Transform shows the influence of quarterly and annual cycles in more detail. The Fourier transform is simpler and easier to interpret, but it is unable to capture temporal variations. In contrast, the Wavelet Transform captures temporal variations well, but the analysis is more complex and requires more in-depth interpretation. **Conclusion**. In general, the Wavelet Transform is more recommended for analyzing the frequency spectrum of rainfall in Makassar City because it is able to provide more detailed and accurate information about temporal variations in rainfall frequency.

Keywords: Rainfall, Makassar City, Fourier Transform, Wavelet Transform, frequency spectrum analysis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Nomor Urut Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Cuaca merupakan keadaan atmosfer pada waktu tertentu yang sifatnya berubah-ubah dari waktu ke waktu (Susilo, 2021). Karakteristik cuaca suatu wilayah dapat ditentukan oleh frekuensi beberapa unsur cuaca dan iklim yang saling berinteraksi, seperti lama penyinaran matahari, suhu, kelembaban, tekanan udara, angin, awan, presipitasi dan evaporasi (Wirjomidjojo S. dan Swarinoto, 2010). Hujan adalah bentuk presipitasi, yang merupakan proses pengendapan air dari atmosfer ke permukaan bumi dalam bentuk cair (hujan) dan padat (salju) (Harijono dkk, 2010). Curah hujan adalah ketinggian air hujan yang jatuh pada tempat yang datar dengan asumsi tidak menguap, tidak meresap dan tidak mengalir yang diukur dalam milimeter (mm) (Badan Pusat Statistik, 2024). Curah hujan merupakan salah satu parameter penting dalam memahami pola iklim suatu wilayah.

Kota Makassar, sebagai salah satu kota terbesar di Indonesia yang terletak di Sulawesi Selatan, memiliki iklim muson tropis dengan dua musim utama, yaitu musim hujan dan musim kemarau. Salah satu perhatian umum di Kota Makassar adalah banjir yang diakibatkan oleh hujan lebat yang berlangsung selama beberapa hari, menyebabkan kemacetan lalu lintas dan kerusakan fasilitas publik. Namun, pada bulan Agustus hingga pertengahan bulan Oktober tahun 2023, Kota Makassar mengalami musim kemarau yang menyebabkan kekeringan dan krisis air bersih di beberapa wilayah. Pengetahuan tentang pola musiman curah hujan yang signifikan khususnya di Kota Makassar sangatlah vital dalam berbagai bidang, termasuk pertanian, pengelolaan sumber daya alam, mitigasi bencana, dan perencanaan infrastruktur. Metode analisis spektral seperti transformasi Fourier dan transformasi Wavelet merupakan alat yang penting dalam memahami pola dan variasi dalam data curah hujan. transformasi Fourier secara tradisional telah digunakan untuk mengidentifikasi komponen frekuensi dominan dalam data, sedangkan transformasi Wavelet menawarkan kemampuan untuk menganalisis pola pada berbagai skala waktu atau frekuensi.

Noya dkk, (2014) meneliti periode curah hujan di Kabupaten Seram Bagian Barat, Provinsi Maluku dengan menggunakan pendekatan Transformasi Fourier. Pada tahun 2021, Nurdiati dkk menganalisis pola curah hujan di Kalimantan dengan menggunakan metode *Fast Fourier Transform* (FFT) dan *Empirical Orthogonal Function* (EOF). Sementara itu, pada tahun 2023 Zakwandi dkk juga menggunakan pendekatan transformasi Fourier untuk memprediksi curah hujan di Kabupaten Lima Puluh Kota. Di sisi lain, Rahman dkk (2018) melakukan penelitian terkait pengenalan pola curah hujan di Bangladesh dengan menggunakan transformasi Wavelet. Sedangkan, Hajrul dkk (2019) menggunakan transformasi Wavelet untuk menganalisis data curah hujan di Kabupaten Ketapang dan Kota Pontianak. Mengacu pada beberapa penelitian sebelumnya, pola musiman curah hujan dapat ditentukan dengan menggunakan pendekatan transformasi Fourier maupun transformasi Wavelet. Hal tersebut menarik untuk diteliti dengan membandingkan transformasi Fourier dan transformasi Wavelet pada data curah hujan di Kota Makassar untuk mengidentifikasi pola musiman yang dominan dari data curah hujan dalam skala waktu tertentu.

Penelitian ini akan membandingkan kinerja teknik transformasi Fourier dan transformasi Wavelet untuk menganalisis spektrum frekuensi data curah hujan untuk menentukan pola musiman curah hujan di Kota Makassar. Sehingga, judul dari penelitian ini adalah "Perbandingan Transformasi Fourier dan Transformasi Wavelet dalam Analisis Spektrum Frekuensi Curah Hujan di Kota Makassar".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, maka diperoleh permasalahan, yaitu:

1. Bagaimana penerapan transformasi Fourier dan transformasi Wavelet dalam analisis spektrum frekuensi untuk menentukan pola musiman curah hujan di Kota Makassar?
2. Bagaimana perbandingan kinerja transformasi Fourier dan transformasi Wavelet dalam analisis spektrum frekuensi data curah hujan di Kota Makassar?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan dari adanya penelitian ini adalah:

1. Menentukan pola musiman curah hujan di Kota Makassar dengan menggunakan transformasi Fourier dan transformasi Wavelet.
2. Menentukan perbandingan kinerja transformasi Fourier dan transformasi Wavelet dalam penentuan pola musiman curah hujan di Kota Makassar.

1.4 Batasan Masalah

Berikut batasan masalah pada penelitian tugas akhir ini, yaitu:

1. Penerapan transformasi Fourier pada penelitian ini akan fokus pada penerapan transformasi Fourier menggunakan algoritma transformasi Fourier cepat.
2. Penerapan transformasi Wavelet pada penelitian ini akan fokus pada penerapan transformasi Wavelet dengan jenis fungsi wavelet yang digunakan, yaitu *Mexican Hat Wavelet* ('mexh'), untuk menganalisis waktu-frekuensi curah hujan.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian tugas akhir ini diharapkan dapat bermanfaat untuk menambah wawasan dan pengetahuan dalam bidang analisis spektral menggunakan transformasi Fourier dan transformasi Wavelet untuk mengidentifikasi pola musiman curah hujan di Kota Makassar serta membandingkan kinerja kedua metode, dan dapat memberikan informasi yang berharga tentang pola musiman curah hujan di Kota Makassar kepada pemangku kepentingan terkait, seperti pemerintah daerah, peneliti, dan masyarakat umum. Informasi ini dapat digunakan untuk pengambilan keputusan, perencanaan tata ruang, manajemen bencana, dan pengembangan strategi adaptasi terhadap perubahan cuaca.

1.6 Landasan Teori

Pada subbab ini, akan diuraikan beberapa teori pendukung atau landasan dalam penulisan tugas akhir ini. Sebelum menerapkan metode transformasi Fourier dan transformasi Wavelet pada data curah hujan, terlebih dahulu akan dibahas mengenai konsep curah hujan, spektrum frekuensi, metode transformasi Fourier, transformasi Fourier cepat, metode transformasi Wavelet, dan sifat-sifat transformasi Wavelet.

1.6.1 Konsep Curah Hujan

Cuaca adalah keadaan atmosfer pada waktu tertentu yang sifatnya berubah-ubah dari waktu ke waktu (Susilo, 2021). Cuaca merupakan keadaan dari atmosfer selama suau periode tertentu yang terbentuk melalui interaksi beberapa unsur cuaca, seperti lama penyinaran matahari, suhu, kelembaban, tekanan udara, angin, awan, presipitasi dan evaporasi (Wirjomidjojo S. dan Swarinoto, 2010). Hujan adalah bentuk presipitasi, yang merupakan proses pengendapan air dari atmosfer ke permukaan bumi dalam bentuk cair (hujan) dan padat (salju) (Harijono dkk, 2010). Curah hujan merupakan ketinggian air hujan yang jatuh pada daerah yang datar dengan asumsi tidak menguap, tidak meresap dan tidak mengalir yang diukur dalam milimeter (mm) (Badan Pusat Statistik, 2024). Curah hujan merupakan salah satu parameter penting dalam memahami pola iklim suatu wilayah.

Curah hujan adalah faktor penting yang memengaruhi berbagai aspek kehidupan manusia dan lingkungan. Analisis curah hujan menjadi kunci dalam berbagai bidang, termasuk:

1. Mitigasi bencana. Curah hujan ekstrem dapat menyebabkan bencana alam, seperti banjir dan tanah longsor. Analisis curah hujan membantu dalam mengidentifikasi area yang rentan terhadap bencana dan merencanakan tindakan mitigasi yang efektif, termasuk sistem peringatan dini dan perencanaan tanggap darurat.
2. Hidrologi. Curah hujan memainkan peran penting dalam siklus hidrologi, termasuk aliran permukaan, infiltrasi tanah, dan peningkatan level sungai. Analisis curah hujan membantu dalam pemodelan banjir, estimasi debit sungai, perencanaan tata guna lahan yang berkelanjutan dan pengelolaan persediaan air bersih.
3. Rekayasa sipil. pemahaman yang baik tentang curah hujan penting untuk merancang infrastruktur yang tahan terhadap bencana alam, seperti bendungan, saluran drainase, dan sistem pengendalian banjir. Analisis curah hujan digunakan untuk menentukan curah hujan maksimum yang diharapkan dalam perencanaan struktur hidrolik dan pengaturan tata letak infrastruktur.

1.6.2 Spektrum Frekuensi

Spektrum frekuensi merupakan representasi matematis dari sinyal yang menunjukkan kontribusi energi sinyal pada setiap frekuensi. Dalam konteks curah hujan, spektrum frekuensi dapat digunakan untuk menganalisis pola dan variabilitas curah hujan di berbagai rentang waktu. Analisis ini dapat membantu memahami dinamika curah hujan dan memprediksi pola curah hujan di masa depan. Spektrum frekuensi suatu sinyal menunjukkan seberapa banyak energi sinyal terdapat pada setiap frekuensi. Nilai absolut dari $F(u)$ menunjukkan besarnya spektrum frekuensi atau amplitudo pada frekuensi u.

Spektrum frekuensi curah hujan dapat digunakan untuk:

1. Menganalisis pola musiman curah hujan. Spektrum frekuensi curah hujan menunjukkan frekuensi dominan dari pola musiman curah hujan. Informasi ini dapat digunakan untuk memahami bagaimana curah hujan bervariasi sepanjang tahun.
2. Menganalisis variabilitas curah hujan. Spektrum frekuensi curah hujan menunjukkan variabilitas curah hujan pada berbagai rentang waktu. Informasi ini dapat digunakan untuk memahami bagaimana curah hujan bervariasi dari waktu ke waktu.

1.6.3 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah teknik matematika yang digunakan untuk menganalisis fungsi atau sinyal dalam domain frekuensi. Konsep dasarnya adalah bahwa setiap sinyal dapat dipecah menjadi sejumlah gelombang sinusoidal dengan frekuensi dan amplitudo tertentu. Transformasi Fourier memungkinkan kita untuk mengonversi sinyal dari domain waktu ke domain frekuensi, sehingga memungkinkan analisis yang lebih baik tentang karakteristik periodiknya.

Peran penting transformasi Fourier dalam menganalisis sinyal periodik:

1. Identifikasi komponen frekuensi: Transformasi Fourier memungkinkan kita untuk mengidentifikasi komponen frekuensi yang terkandung dalam sinyal periodik. Ini penting dalam berbagai aplikasi, seperti komunikasi nirkabel, pemrosesan sinyal, dan ilmu data.
2. Filtrasi dan pemrosesan sinyal: Dengan menganalisis spektral frekuensi sinyal, kita dapat melakukan filtrasi atau pemrosesan sinyal untuk menghilangkan atau mempertahankan komponen tertentu sesuai kebutuhan.
3. Rekonstruksi sinyal: Transformasi Fourier juga memungkinkan kita untuk merekonstruksi sinyal dari domain frekuensi ke domain waktu, yang dapat digunakan untuk mendapatkan pemahaman yang lebih baik tentang sinyal asli.

Fungsi aslinya adalah dalam domain waktu, x, yang diubah menjadi domain frekuensi, u. Sinyal transformasi yang dihasilkan memberikan indikasi komponen frekuensi yang berkontribusi pada sinyal asli ketika grafik spektral amplitudo dengan frekuensi dibangun. Fungsi $f(x)$ dapat kontinu atau diskrit.

1.6.3.a Transformasi Fourier Kontinu

Transformasi Fourier kontinu untuk satu peubah untuk fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ adalah:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx. \tag{1}$$

Transformasi Fourier kontinu balikan untuk satu peubah:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}\, du. \tag{2}$$

Dalam hal ini, i adalah imajiner, yaitu $i = \sqrt{-1}$ dan u adalah peubah frekuensi.
Transformasi Fourier dan transformasi Fourier balikan di sebut dengan pasangan transformasi Fourier.
Amplitudo atau $|F(u)|$ disebut spektrum frekuensi Fourier dari $f(x)$ dan didefinisikan sebagai:

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}. \tag{3}$$

Sudut fase spektrum, (Leis, 2011):

$$\Theta(u) = \tan^{-1}\left(\frac{I(u)}{R(u)}\right). \tag{4}$$

menyatakan pergeseran fase atau sudut fase dari setiap frekuensi u.
Dengan mengingat kesamaan Euler,

$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i\sin(x). \tag{5}$$

maka transformasi Fourier kontinu dapat ditulis juga sebagai,

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(ux) - i\sin(ux))dx, \end{aligned} \tag{6}$$

Contoh 1 (Transformasi Fourier Kontinu):
Diberikan fungsi $f(x)$ berikut (lihat Gambar 1)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & selainnya. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} 0\, e^{-iux}\, dt + \int_{-1}^{0} 1\, e^{-iux}\, dt + \int_{0}^{1} 1\, e^{-iux}\, dt + \int_{1}^{\infty} 0\, e^{-iux}\, dt. \end{aligned}$$

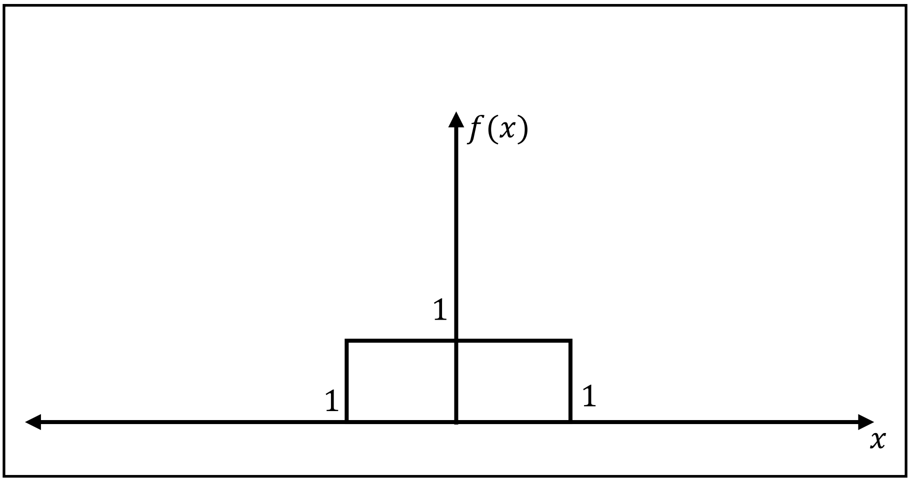
Dengan menggunakan sifat integral,

$$\int_a^c f(x)dt + \int_c^b f(x)dt = \int_a^b f(x)dt, \qquad a < c < b\ dan\ a, b, c \in \mathbb{R},$$

diperoleh,

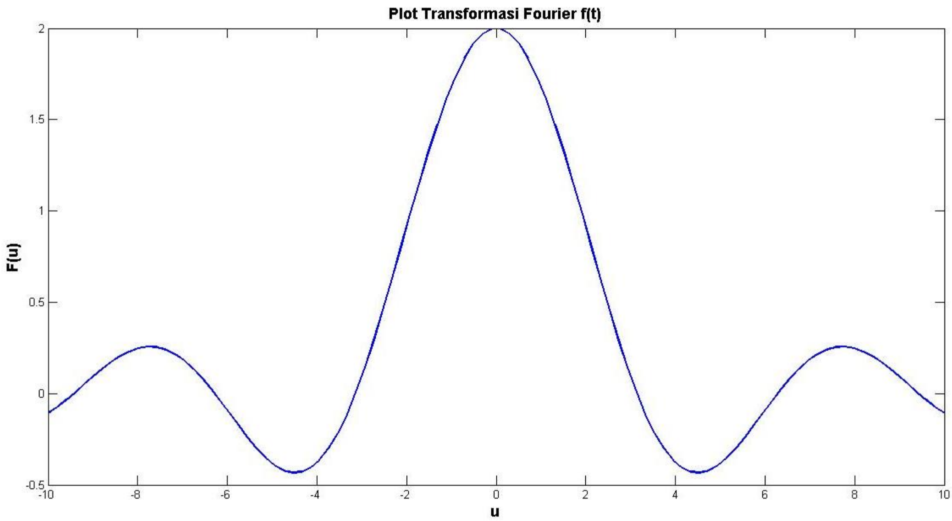
$$
\begin{aligned}
F(u) &= \int_{-\infty}^{-1} 0\, e^{-iux}\, dt + \int_{-1}^{1} 1\, e^{-iux}\, dt + \int_{1}^{\infty} 0\, e^{-iux}\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^{-iux}\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} (\cos ux - i \sin ux) dt \\
&= \int_{-1}^{1} \cos ux\ dt - i \int_{-1}^{1} \sin ux\ dt \\
&= \left[\frac{1}{u} \sin ux\right]_{-1}^{1} - i \left[\frac{1}{u} \cos ux\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{u} (\sin u - \sin(-u)) + i(\cos u - \cos(-u)) \\
&= \frac{1}{u} (\sin u + \sin u) + i(\cos u - \cos(-u)) \\
&= \frac{2}{u} \sin u.
\end{aligned}
$$

Jadi, $F(u) = \frac{2}{u} \sin u$, seperti ditunjukkan oleh Gambar 2.



Gambar 1 Plot dari fungsi $f(x)$ pada Contoh 1

Pada Gambar 1 menjelaskan terkait plot pada fungsi $f(x)$, dimana $f(x)$ bernilai 1 untuk nilai $-1 \leq x \leq 1$. Untuk plot pada transformasi Fourier $f(x)$ terlihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 2 Plot Transformasi Fourier dari Contoh 1

Pada Gambar 2 menggambarkan plot pada transformasi Fourier $f(x)$, dimana transformasi Fourier pada fungsi $f(x)$ bernilai 2 untuk nilai $u = 0$.

1.6.3.b Transformasi Fourier Diskrit

Transfomasi Fourier diskrit atau *discrete Fourier transform* (DFT) adalah alat matematis yang penting untuk menganalisis sinyal digital atau data yang diambil dalam interval waktu diskrit. Transformasi Fourier diskrit mengonversi suatu sinyal dari domain waktu menjadi domain frekuensi.

Formula transformasi Fourier diskrit (Sundararajan, 2018) :

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\, e^{-\frac{i2\pi ux}{N}} \quad , u = 0, 1, 2, \dots, N-1. \tag{7}$$

Formula transformasi Fourier diskrit balikan atau *invers discrete Fourier transform* (IDFT):

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u)\, e^{\frac{i2\pi ux}{N}} \quad , u = 0, 1, 2, \dots, N-1. \tag{8}$$

Dengan memperhatikan kesamaan Euler, pasangan transformasi Fourier diskrit di atas dapat ditulis dalam bentuk,

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} \left(f(x) \left(\cos\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) \right) \right), \tag{9}$$

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \left(F(u) \left(\cos\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi ux}{N}\right) \right) \right). \tag{10}$$

Interpretasi dari transformasi Fourier diskrit adalah sebagai berikut: Transformasi Fourier Diskrit mengkonversi data diskrit menjadi sejumlah sinusoida diskrit yang frekuensinya dinomori dengan $u = 0,1,2, \dots, N-1$, dan amplitudonya diberikan oleh $|F(u)|$. Faktor $1/N$ pada persamaan $f(x)$ adalah faktor skala yang dapat disertakan dalam persaman $F(u)$ atau dalam persaman $f(x)$, tetapi tidak kedua-duanya. Berikut contoh dari transformasi Fourier diskit:

Contoh 2 (Transformasi Fourier Diskrit):
Diberikan sinyal diskrit $f(x) = [0, 1, 1, 2]$. Tentukan transformasi Fourier diskrit dari sinyal tersebut!
Penyelesaian:
Untuk menyelesaikan masalah di atas, akan dihitung nilai transformasi Fourier diskrit dari sinyal $f(x)$ di atas. Transformasi Fourier diskrit dari sinyal $f(x)$ di atas didefinikan sebagai berikut;

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\, e^{-\frac{i2\pi ux}{N}}, u = 0,1,2, \dots, N-1.$$

Berdasarkan sinyal $f(x)$ yang diberikan di atas, diketahui $N = 4$. Sehingga,

$$F(u) = \sum_{x=0}^{3} f(x)\, e^{-\frac{i2\pi ux}{4}}, u = 0,1,2,3.$$

- Untuk $u = 0$,

$$\begin{aligned} F(0) &= \sum_{x=0}^{3} f(x)\, e^{-\frac{i2\pi(0)x}{4}} \\ &= \sum_{x=0}^{3} f(x)\, e^{0} \\ &= \sum_{x=0}^{3} f(x)(1) \\ &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ &= 0 + 1 + 1 + 2 \\ &= 4, \end{aligned}$$

- Untuk $u = 1$,

$$F(1) = \sum_{x=0}^{3} f(x)\, e^{-\frac{i2\pi(1)x}{4}}$$

$$= \sum_{x=0}^{3} f(x)\ (cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) - i\,sin\left(\frac{x\pi}{2}\right))$$
$$= f(0)(1) + f(1)\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\,sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + f(2)(cos(\pi) - i\,sin(\pi))$$
$$+ f(3)\left(cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i\,sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$
$$= 0 + 1(-i) + 1(-1) + 2(i)$$
$$= -1 + i,$$

- Untuk $u = 2$,

$$F(2) = \sum_{x=0}^{3} f(x)\ e^{-\frac{i2\pi(2)x}{4}}$$
$$= \sum_{x=0}^{3} f(x)\ (cos(x\pi) - i\,sin(x\pi))$$
$$= f(0)(1) + f(1)(cos(\pi) - i\,sin(\pi)) + f(2)(cos(2\pi) - i\,sin(2\pi))$$
$$+ f(3)(cos(3\pi) - i\,sin(3\pi))$$
$$= 0 + 1(-1) + 1(1) + 2(-1)$$
$$= -2,$$

- Untuk $u = 3$,

$$F(3) = \sum_{x=0}^{3} f(x)\ e^{-\frac{i2\pi(3)x}{4}}$$
$$= \sum_{x=0}^{3} f(x)\ (cos\left(\frac{3x\pi}{2}\right) - i\,sin\left(\frac{3x\pi}{2}\right))$$
$$= f(0)(1) + f(1)\left(cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i\,sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) + f(2)(cos(3\pi) - i\,sin(3\pi))$$
$$+ f(3)\left(cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) - i\,sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)\right)$$
$$= 0 + 1(i) + 1(-1) + 2(-i)$$
$$= -1 - i.$$

Jadi, didapatkan nilai transformasi Fourier dari sinyal $f(x)$ di atas, yaitu $F(u) = [4, -1 + i, -2, -1 - i]$.

Selain menggunakan cara manual seperti di atas, nilai transformasi Fourier juga dapat dihitung menggunakan program MATLAB. Berikut *syntax* yang digunakan dan *output* yang dihasilkan dalam menghitung nilai transformasi Fourier dari sinyal $f(x)$ di atas.

Input:

```
clc;clear all;
% Membuat sinyal 1D
signal = [0 1, 1, 2];
% Menghitung Transformasi Fourier Diskrit
N = length(signal);
```

```
fourier_transform = zeros(1, N);
for u = 1:N
    sum_val = 0;
    for x = 1:N
        sum_val = sum_val + signal(x) * exp(-1i * 2 * pi * (u-
1) * (x-1) / N);
    end
    fourier_transform(u) = sum_val;
end
%Menghitung Spektrum Frekuensi (Amplitudo) Fourier
amplitudo = abs(fourier_transform);
% Menampilkan sinyal asli dan hasil transformasi Fourier
disp('Sinyal Asli:');
disp(signal);
disp('Transformasi Fourier:');
disp(fourier_transform);
disp('Amplitudo Fourier:');
disp(amplitudo);
```

Output:

```
Sinyal Asli:
    0     1     1     2
Transformasi Fourier:
    4.0000  -1.0000+1.0000i  -2.0000-0.0000i  -1.0000-1.0000i
Amplitudo Fourier:
    4.0000    1.4142    2.0000    1.4142
```

1.6.4 Transformasi Fourier Cepat

Aplikasi langsung dari transformasi Fourier diskrit pada Persamaan (8) untuk data dengan panjang N membutuhkan N perkalian dan N penjumlahan. Dalam permasalahan nyata, biasanya data menggunakan N dalam jumlah yang besar, sehingga menimbulkan masalah karena akan melibatkan jutaan operasi perhitungan DFT. Namun, kesulitan ini dapat diatasi dengan transformasi Fourier cepat atau *fast Fourier transforms* (FFT). Transformasi Fourier cepat merupakan transformasi Fourier diskrit yang memiliki jumlah komputasi lebih sedikit dibanding komputasi transformasi Fourier diskrit biasa. Transformasi Fourier diskrit akan menghasilkan jumlah komputasi sebesar $O(N^2)$ sedangkan transformasi Fourier cepat akan menghasilkan jumlah komputasi sebesar $O(N)\log_2 N$. Sehingga transformasi Fourier cepat menjadi metode praktis transformasi Fourier diskrit untuk N dalam jumlah yang besar (Kreyszig, 2011).

Misal diberikan,

$$e_{ux} = e^{-\frac{i2\pi ux}{N}} = w^{ux}, w = w_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}, \tag{11}$$

dengan, $u, x = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$

Dengan mensubstitusi Persamaan (11) ke Persamaan (7), maka persamaan untuk transformasi Fourier diskrit berubah menjadi,

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\, w_N^{ux} \;, u, x = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (12)$$

Misalkan bahwa N dapat dibagi 2, diberikan variabel baru dengan $M = \frac{N}{2}$. Sehingga untuk Persamaan (12) dibagi menjadi 2, yaitu untuk x genap dan x ganjil.

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(2x)\, w_N^{2xu} + \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)\, w_N^{(2x+1)u}. \quad (13)$$

Jika diketahui bahwa,

$$w_N^2 = \left(e^{-\frac{2\pi i}{N}}\right)^2 = e^{-\frac{4\pi i}{2M}} = e^{-\frac{2\pi i}{M}} = w_M. \quad (14)$$

Maka dengan mensubstitusi Persamaan (14) ke Persamaan (13), diperoleh,

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(2x)\, w_M^{xu} + w_N^u \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)\, w_M^{xu}\;. \quad (15)$$

Setelah domain waktu dibagi 2 maka domain frekuensi juga dibagi 2 sehingga, dengan membagi frekuensi pada Persamaan (15) maka,

$$F(u+M) = \sum_{x=0}^{M-1} f(2x)\, w_M^{xu} w_M^M + w_N^u w_N^M \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)\, w_M^{xu} w_M^M. \quad (16)$$

Karena $w_M^M = 1$ dan $w_N^M = -1$, maka Persamaan (16) menjadi,

$$F(u+M) = \sum_{x=0}^{M-1} f(2x)\, w_M^{xu} - w_N^u \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)\, w_M^{xu}. \quad (17)$$

Sehingga, Persamaan (15) dan Persamaan (17) inilah yang dikenal dengan persamaan transformasi Fourier cepat.

Terdapat berbagai implementasi transformasi Fourier cepat yang tersedia dalam berbagai bahasa pemrograman dan lingkungan perangkat lunak, termasuk MATLAB. Pada program MATLAB, dapat digunakan perintah ‘fft’ untuk menghitung Transformasi Fourier Cepat dari sebuah sinyal. Perintah ini mengambil sinyal sebagai argumen input dan mengembalikan spektrum frekuensi dari sinyal tersebut. Berikut sintaks yang digunakan untuk menghitung transformasi Fourier cepat di MATLAB,

```
Y = fft(X).
```

X adalah vektor atau matriks yang mewakili sinyal input. Fungsi ‘fft’ kemudian akan menghitung transformasi Fourier cepat dari sinyal tersebut dan mengembalikan hasilnya dalam bentuk vektor atau matriks Y.

Contoh 3 (Transformasi Fourier Cepat):

Berikut adalah contoh implementasi transformasi Fourier cepat di MATLAB. Misalnya diberikan sinyal $f(x) = [0, 1, 1, 2]$, dengan panjang $N = 4$. Transformasi Fourier dari sinyal $f(x)$ dengan algoritma FFT adalah:

1. Pembagian Sinyal.
   Bagi sinyal menjadi dua bagian:
$$f(x)^{even} = [f(0), f(2)] = [0, 1],$$
$$f(x)^{odd} = [f(1), f(3)] = [1, 2].$$
2. Rekursi.
   Hitung Transformasi Fourier dari bagian genap dan ganjil.
   - Untuk bagian genap:
$$F(0)^{even} = f(0) + f(2) = 0 + 1 = 1,$$
$$F(1)^{even} = f(0) - f(1) = 0 - 1 = -1.$$
   - Untuk bagian ganjil:
$$F(0)^{odd} = f(1) + f(3) = 1 + 2 = 3,$$
$$F(1)^{odd} = f(1) - f(3) = 1 - 2 = -1.$$
3. Gabungkan Hasil.
   Gunakan $W_n^u = e^{-i2\pi u/N}$ untuk menggabungkan hasil
$$W_N^0 = e^{-i2\pi 0/4} = e^0 = 1,$$
$$W_N^1 = e^{-i2\pi 1/4} = e^{-i\pi/2} = -i,$$
$$W_N^2 = e^{-i2\pi 2/4} = e^{-i\pi} = -1,$$
$$W_N^3 = e^{-i2\pi 3/4} = e^{-i3\pi/2} = i.$$
   Gabungkan hasil:
$$F(0) = F(0)^{even} + W_4^0 \cdot F(0)^{odd} = 1 + 1 \cdot 3 = 4,$$
$$F(1) = F(1)^{even} + W_4^0 \cdot F(1)^{odd} = -1 + (-i) \cdot (-1) = -1 - i,$$
$$F(2) = F(0)^{even} + W_4^0 \cdot F(0)^{odd} = 1 + 1 \cdot 3 = -2,$$
$$F(3) = F(1)^{even} + W_4^1 \cdot F(1)^{odd} = (-1) - (-i) \cdot (-1) = -1 - i.$$

Jadi, hasil dari FFT untuk sinyal $f(x) = [0, 1, 1, 2]$ adalah:
$$F(u) = [4, -1 + i, -2, -1 - i].$$
Untuk memudahkan perhitungan, algoritma transformasi Fourier cepat dapat diimplementasikan pada program MATLAB sebagai berikut:

Input:
```
% Definisikan sinyal
f_x = [0, 1, 1, 2];
% Panjang sinyal
N = length(f_x);
% Hitung FFT dari sinyal
```

```
fft_result = fft(f_x)
% Hitung frekuensi normalisasi
frequencies = (0:N-1)*(1/N);
% Visualisasi hasil FFT
figure;
stem(frequencies, abs(fft_result), 'filled');
title('Hasil FFT dari Sinyal f(x) = [0, 1, 1, 2]', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
xlabel('Frekuensi Normalisasi', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Amplitudo', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
grid on;
```

Output:

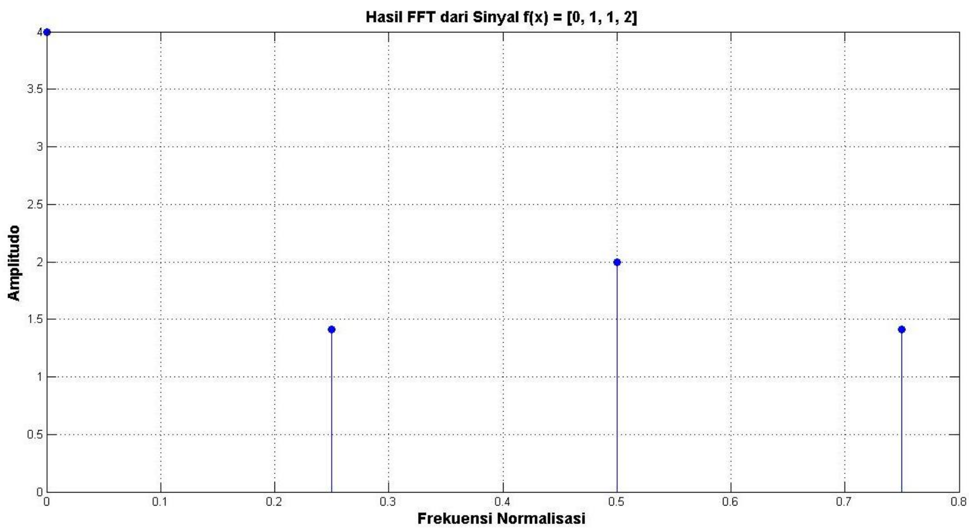
```
Command Window

fft_result =

   4.0000             -1.0000 + 1.0000i  -2.0000             -1.0000 - 1.0000i
```

Gambar 3 *Output* Penerapan Algoritma FFT

Hasil DFT adalah $[4, -1 + i, -2, -1 - i]$. Plot hasil FFT akan menunjukkan amplitudo dari komponen-komponen ini seperti berikut:



Gambar 4 Plot Hasil FFT dari Sinyal $f(x) = [0, 1, 1, 2]$

Hasil plot menunjukkan amplitudo komponen frekuensi dari sinyal $f(x) = [0,1,1,2]$ dengan menggunakan FFT. Setiap batang pada plot menunjukkan magnitudo dari komponen frekuensi tertentu.

1.6.5 Transformasi Wavelet

Transformasi Wavelet menggunakan skala waktu berbeda untuk analisis komponen frekuensi berbeda yang terdapat dalam sinyal dan memberikan informasi tiga dimensi lengkap tentang sinyal tersebut, yaitu pada interval waktu tertentu, komponen frekuensi yang ada dalam sinyal tersebut, dan amplitudonya. Oleh karena itu, transformasi Wavelet memiliki sifat multi-resolusi, yaitu menggunakan skala waktu yang berbeda (skala berbanding terbalik dengan frekuensi) untuk menganalisis komponen frekuensi yang berbeda. Skala waktu tinggi digunakan untuk menganalisis komponen frekuensi rendah, sedangkan skala rendah digunakan untuk menganalisis komponen frekuensi tinggi.

Keunggulan utama dari transformasi Wavelet adalah:

1. Transformasi Wavelet memiliki sifat multi-resolusi, yang memungkinkannya menggunakan skala waktu yang berbeda untuk menganalisis komponen frekuensi yang berbeda dalam sinyal.
2. Transformasi Wavelet memiliki sifat lokalitas spektral yang baik, yang berarti dapat memberikan informasi yang lebih tepat tentang di mana frekuensi tertentu terdapat dalam sinyal.

Sifat multi-resolusi berarti bahwa komponen frekuensi yang berbeda dalam sinyal dipecahkan pada skala yang berbeda (skala waktu atau ukuran jendela yang berbeda). Skala ini berbanding terbalik dengan frekuensi, yang berarti skala kecil digunakan untuk frekuensi yang lebih tinggi, sementara skala besar digunakan untuk frekuensi yang lebih rendah. Sifat lokalitas spektral berarti bahwa transformasi gelombang memberikan informasi tentang komponen frekuensi yang ada dalam sinyal tertentu dan pada sumbu waktu di mana komponen frekuensi tersebut hadir (Saxena, 2011). Transformasi Wavelet memiliki kemampuan multi-resolusi, yang berarti ia memecah komponen frekuensi yang berbeda dari sinyal pada skala yang berbeda.

Ruang Lebesgue L^p untuk $p \geq 1$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ yang memenuhi:

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}, \tag{20}$$

dengan norma

$$||f||_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{21}$$

Jadi, ruang Lebesgue adalah istilah yang mengacu pada keluarga ruang fungsi yang memungkinkan konsep pengukuran yang lebih luas daripada yang diberikan oleh integral Riemann, dan L^p adalah contoh dari ruang Lebesgue, dengan L^2 menjadi yang paling umum digunakan dalam berbagai bidang matematika dan ilmu terapan.

Contoh 4 (Ruang Lebesgue):

Akan ditunjukkan bahwa fungsi Gauss $f(x) = e^{-x^2}$ termasuk dalam ruang Lebesgue di $L^2(\mathbb{R})$, untuk itu perlu diperiksa apakah integral kuadrat dari fungsi ini terhadap variabel independen x terbatas. Dalam hal ini, akan diperiksa apakah integral dari modulus kuadrat $|f(x)|^2$ terhadap variabel independennya, yaitu x, terbatas atau tidak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-x^2}\right|^2 dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}\, dx.$$

Dapat digunakan fakta bahwa e^{-x^2} adalah fungsi Gaussian yang terkenal dan memiliki sifat integral yang penting:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

dengan $a > 0$. Dalam kasus kita, $a = 2$, jadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Karena integral dari $|f(x)|^2$ adalah konstan, maka integral tersebut adalah terbatas. Oleh karena itu, fungsi Gauss $f(x) = e^{-x^2}$ adalah anggota dari ruang Lebesgue di $L^2(\mathbb{R})$.

Gelombang atau *wavelet* adalah sebuah fungsi dari $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ yang digunakan untuk melokalisasi sebuah fungsi yang diberikan seperti $f(x)$ dalam translasi (u) dan penskalaan (s). Fungsi gelombang dasar atau *wavelet function* (*mother wavelet)* diperoleh dengan translasi dan penskalaan dalam waktu (t) menggunakan gelombang individual seperti yang diberikan dalam persamaan berikut (Mallat, 1999):

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right). \tag{22}$$

Persamaan matematis untuk transformasi Wavelet adalah:

$$Wf(u,s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{s}}\bar{\psi}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt. \tag{23}$$

Persamaan ini mewakili transformasi Wavelet kontinu (*continuous Wavelet transform*, CWT) dari sebuah fungsi f pada skala $s > 0$ dan translasi oleh $u \in \mathbb{R}$. Saat memproses sinyal dengan fungsi $f(x)$, transformasi wavelet ini dapat diterapkan dengan persamaan berikut (Mallat, 1999):

$$Wf(u,s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\psi}\left(\frac{x-u}{s}\right) dx. \quad (24)$$

Dengan $\bar{\psi}$ adalah kompleks konjugat dari wavelet induk (*mother wavelet*) $\psi(x)$. Contoh bentuk-bentuk *mother wavelet* adalah *Mexican Hat*, *Haar*, dan *Morlet Wavelet*.

Wavelet *Mexican Hat* adalah turunan kedua dari fungsi Gaussian yang dinormalisasi secara tepat, Wavelet *Mexican Hat*, $\psi(t)$ diberikan sebagai (Mallat, 2008):

$$\psi(t) = (t^2 - 1)\ e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (25)$$

Contoh 5 (*Mexican Hat Wavelet*):

Akan digambarkan wavelet *Mexican Hat* beserta transformasi Fourier nya sebagai berikut:

Fungsi Wavelet *Mexican Hat* ($\psi(t)$) :

$\psi(t) = (\ t^2 - 1)\ e^{-\frac{t^2}{2}}.$

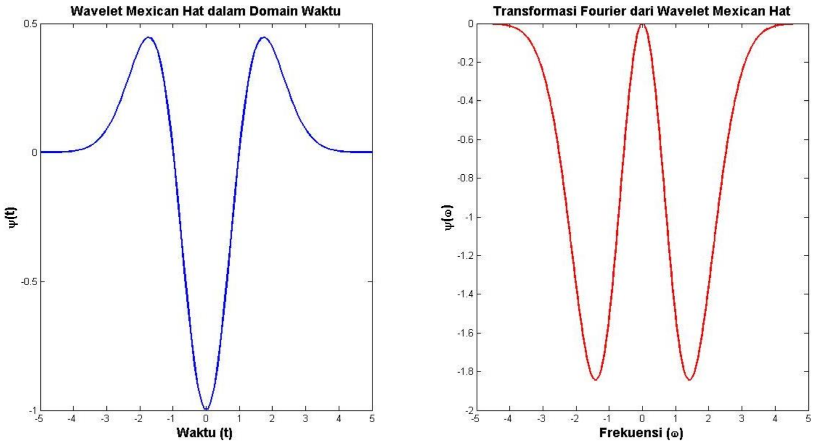
Berikut adalah penerapannya pada program MATLAB, dengan rentang t dari -5 hingga 5:

Input:

```
clc;
clear all;
% Definisikan fungsi wavelet Mexican Hat dalam domain waktu
t = linspace(-5, 5); % rentang waktu (t)
psi_t = ((t.^2)-1) .* exp(-t.^2 / 2);
% Plot wavelet Mexican Hat dalam domain waktu
figure;
subplot(1,2,1);
plot(t, psi_t, 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (t)','FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('\psi(t)','FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
title('Wavelet Mexican Hat dalam Domain Waktu','FontSize',
14, 'FontWeight', 'bold');
% Hitung transformasi Fourier dari wavelet Mexican Hat
omega = linspace(-5, 5, 1000); % Rentang Frekuensi
psi_omega = (-(sqrt(2*pi))*(omega.^2).*exp(-(omega.^2) / 2));
% Plot transformasi Fourier dari wavelet Mexican Hat
subplot(1,2,2);
plot(omega, psi_omega, 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Frekuensi (\omega)','FontSize', 14, 'FontWeight',
'bold');
ylabel('\psi(\omega)','FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
```

```
title('Transformasi Fourier dari Wavelet Mexican
Hat','FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
```

Output:



Gambar 5 Plot wavelet Mexican Hat dan transformasi Fourier-nya

Gambar 5 menunjukkan bentuk wavelet Mexican Hat dalam domain waktu dan transformasi Fourier dari wavelet Mexican Hat. Wavelet Mexican Hat adalah fungsi matematika yang berbentuk seperti topi Meksiko (sombrero). Fungsi ini memiliki energi yang terkonsentrasi di sekitar titik waktu t=0 dan memiliki nilai yang kecil di luar titik tersebut. Transformasi Fourier dari wavelet Mexican Hat menunjukkan bahwa fungsi ini memiliki energi yang terkonsentrasi pada frekuensi tinggi. Karakteristik ini memungkinkan wavelet Mexican Hat untuk digunakan untuk menganalisis sinyal yang memiliki variasi yang cepat dalam waktu.

Berikut adalah langkah-langkah analisis wavelet:

1. Pilih jenis gelombang induk (*mother wavelet*).
2. Bandingkan dengan bagian awal sinyal pada waktu, $t = 0$; hitung W_0.
3. Geser gelombang ke bagian berikutnya dari sinyal pada waktu, $t = 0 + 1$; hitung W_1.
4. Hitung semua W_i untuk semua waktu.
5. Gunakan gelombang-gelombang dengan berbagai skala, dan ulangi langkah 1–4.
6. Gambarkan plot skala terhadap waktu dengan amplitudo W_i menjadi intensitas warna di setiap koordinat waktu-skala.

Ada berbagai implementasi transformasi Wavelet yang tersedia dalam berbagai bahasa pemrograman dan lingkungan perangkat lunak, termasuk MATLAB. Pada program MATLAB, dapat digunakan perintah ‘cwt’ untuk menghitung transformasi Wavelet dari sebuah sinyal. perintah ini digunakan untuk melakukan *continuous Wavelet transform* (CWT). CWT adalah alat analisis sinyal yang berguna untuk mempelajari perilaku frekuensi sinyal seiring waktu. Ini memungkinkan kita untuk menganalisis bagaimana frekuensi dalam sinyal berubah seiring waktu dengan resolusi yang berbeda. Di MATLAB, bisa digunakan berbagai jenis mother wavelet yang telah didefinisikan sebelumnya, seperti 'mexh' (*Mexican Hat*), 'morl' (*Morlet*), 'gaus1' (*Gaussian*), dan lainnya.

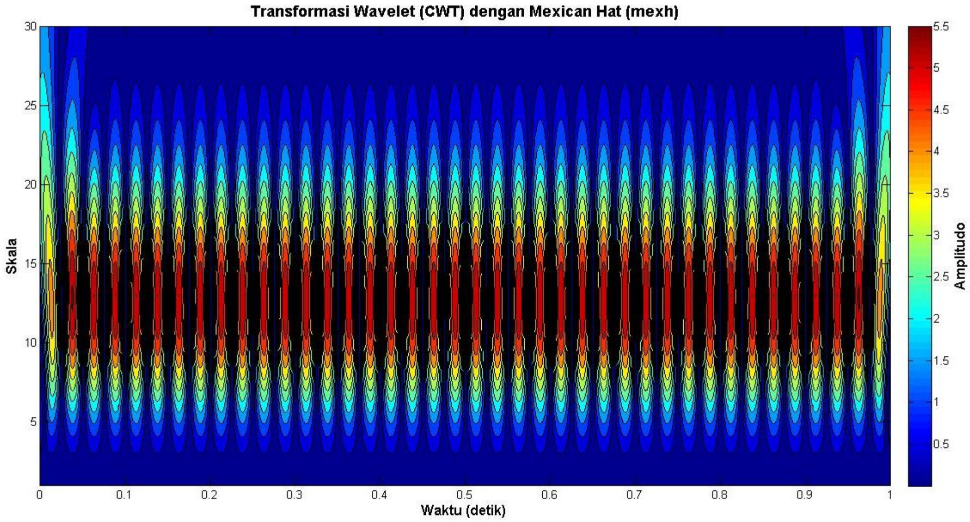
Contoh 6 (Transformasi Wavelet):

Berikut ini adalah contoh penggunaan fungsi 'cwt' dengan menggunakan *mother wavelet* 'mexh' (*Mexican Hat*) di MATLAB:

Input:

```
clc;
clear all;
% Generate sample data
t = linspace(0, 1, 1000);  % Waktu dari 0 hingga 1 detik dengan
1000 titik
f = 20;  % Frekuensi sinyal
y = sin(2 * pi * f * t);  % Sinyal sinusoidal
% Melakukan Continuous Wavelet Transform (CWT) dengan
menggunakan 'mexh' sebagai mother wavelet
scales = 1:30;  % Skala untuk melakukan analisis, dalam hal ini
dari 1 hingga 64
cfs = cwt(y, scales, 'mexh');  % 'mexh' digunakan sebagai mother
wavelet
% Plot hasil CWT
figure;
contourf(t, scales, abs(cfs));
colorbar;
xlabel('Waktu (detik)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Skala', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
ylabel(colorbar, 'Amplitudo', 'FontSize', 12, 'FontWeight',
'bold');
title('Transformasi Wavelet (CWT) dengan Mexican Hat (mexh)',
'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
```

Output:



Gambar 6 Plot Skala terhadap Waktu dan Amplitudo Transformasi Wavelet

Dalam contoh ini, dihasilkan sinyal sinusoidal dengan frekuensi 20 Hz sebagai contoh data. Kemudian, dilakukan transformasi Wavelet (CWT) menggunakan fungsi 'cwt' dengan menggunakan 'mexh' (*Mexican Hat*) sebagai *mother wavelet*. Ditentukan rentang skala dari 1 hingga 30 dan memplot hasil transformasi Wavelet menggunakan fungsi 'contourf'. Dalam plot yang dihasilkan, sumbu x mewakili waktu, sumbu y mewakili skala, dan warna yang dihasilkan menunjukkan kekuatan atau amplitudo hasil transformasi pada waktu dan skala tertentu.

BAB II
METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini, akan diuraikan metodologi penelitian yang dilakukan pada tugas akhir ini. Pada metologi penelitian tugas akhir ini, akan dibahas mengenai jenis penelitian, jenis dan sumber data, teknik analisis data, dan alur kerja penelitian.

2.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian tugas akhir ini, adalah jenis penelitian pustaka (*library research*) dan analisis deskriptif. Pada penelitian ini dilakukan pengolahan data curah hujan untuk menentukan periode curah hujan di Kota Makassar dengan metode transformasi Fourier dan transformasi Wavelet, kemudian membandingkan kinerja kedua metode transformasi tersebut. Pengolahan data dilakukan dari sistem yang dibangun pada program *Matrix Laboratory* (MATLAB).

2.2 Jenis dan Sumber Data

Penelitian ini menggunakan data sekunder, yaitu data yang diperoleh secara tidak langsung melainkan melalui media perantara. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data curah hujan bulanan di Kota Makassar sejak Januari 2009 hingga Desember 2023 yang diperoleh dari Badan Meteorologi, Klimatologi, dan Geofisika (BMKG) Stasiun Meteorologi Maritim Paotere, Makassar. Data diperoleh secara online dari situs https://dataonline.bmkg.go.id/data_iklim.

2.3 Teknik Analisis Data

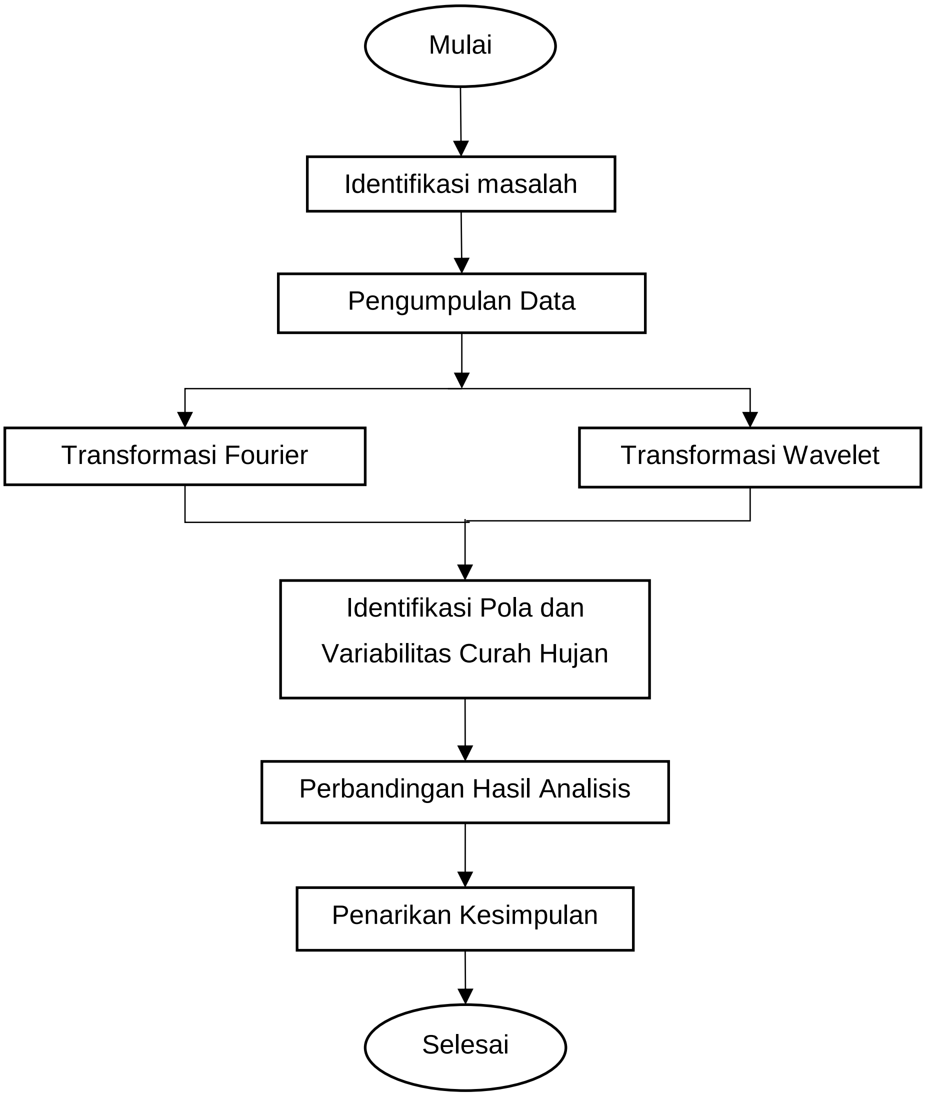
1. Analisis deskriptif data

   Bagian ini memberikan gambaran data curah hujan bulanan di Kota Makassar secara umum serta memberikan ringkasan poin-poin penting untuk menginterpretasi data yang digunakan dalam penelitian.
2. Implementasi transformasi Fourier
   a. Menerapkan metode transformasi Fourier pada data.
   b. Menghitung spektrum frekuensi (amplitudo) Fourier hasil transformasi.
   c. Membuat plot spektrum frekuensi transformasi Fourier dari data curah hujan.
   d. Menentukan frekuensi dan periode dominan pada data.
3. Implementasi transformasi Wavelet
   a. Menerapkan metode transformasi Wavelet pada data.
   b. Menghitung spektrum frekuensi (amplitudo) Wavelet hasil transformasi.
   c. Membuat plot spektrum frekuensi transformasi Wavelet dari data curah hujan.
   d. Menentukan frekuensi dominan pada hasil transformasi.
4. Menentukan pola musiman curah hujan di Kota Makassar

5. Membandingkan kinerja transformasi Fourier dan transformasi Wavelet dalam analisis spektrum frekuensi data curah hujan berupa pola dan variabilitas curah hujan di Kota Makassar.
6. Memberikan kesimpulan hasil penelitian.

2.4 Alur Kerja

Berikut alur kerja dari penelitian ini:



Gambar 7 Alur Kerja Penelitian