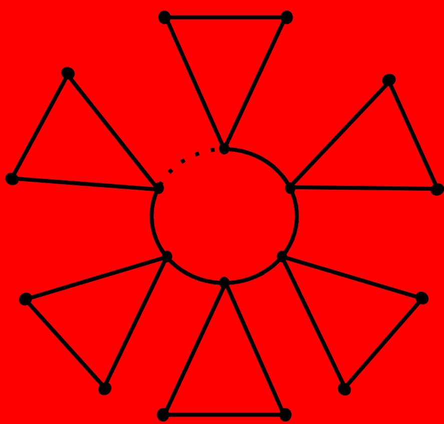
BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF $C_m \odot P_2$



KRISDAYANTI

H011171319

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF $C_m \odot P_2$

KRISDAYANTI

H011171319

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF $C_m \odot P_2$

KRISDAYANTI
H011171319

Skripsi

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana

Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

HALAMAN PENGESAHAN

BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF $C_m \odot P_2$

KRISDAYANTI

H011171319

Skripsi,

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Sarjana Program Studi Matematika pada tanggal 1 Juli 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Pada

Program Studi Matematika
Deparatemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan,	**Mengesahkan,**
Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**
NIP. 19680803 199202 1 001	**NIP. 19700807 200003 1 002**

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 19680429 200212 1001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "**Basis Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf $C_m \odot P_2$**" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing (**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** sebagai Pembimbing Utama dan **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** sebagai Pembimbing Pertama). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 1 Juli 2024

10000 SEPULUH RIBU RUPIAH
METERAI TEMPEL
23435ALX293451076

Krisdayanti
NIM H011171319

UCAPAN TERIMA KASIH

Alhamdulillahirobbil'alamin, Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Basis Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf $C_m \odot P_2$**" sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada program studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Salam dan shalawat penulis kirimkan kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW sebagai teladan terbaik dalam menjalani kehidupan.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa bantuan, bimbingan, dukungan dan motivasi dari bebagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga dan teristimewa kepada Ibunda **Hj. St Maryama Ibrahim** yang telah bekerja keras sendiri membesarkan dan mendidik penulis dengan kesabaran dan penuh kasih sayang serta senantiasa memberikan doa dan dukungan keras sehingga dapat menjadi motivasi bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih pula atas dukungan dan doa kepada kakak saya **Ir. Ispandi Pudael, S.Pd., S.T., M.T.** serta seluruh keluarga yang telah memberi semangat kepada penulis. Pada kesempatan ini pula, penulis juga ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. **Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
4. **Bapak Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan banyak waktunya dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, arahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah sabar dan tulus meluangkan waktunya untuk membimbing dan memberikan saran serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
6. **Bapak Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc.** selaku dosen penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih banyak atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat serta dukungan telah membimbing penulis menjalani pendidikan di Departemen Matematika.
7. **Ibu Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku dosen penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan saran serta kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

8. **Bapak** dan **Ibu Dosen Departemen Matematika** yang telah membimbing, mendidik, dan memberikan ilmunya kepada penulis. Serta seluruh staf yang telah membantu dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
9. Teman-teman **Matematika 2017** yang telah memberi kenangan terindah dalam masa perkuliahan hingga penyusunan tugas akhir serta senantiasa membantu dan memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Segenap keluarga **Himatika FMIPA Unhas**, terkhusus untuk **Diskrit 2017** yang telah mewarnai serta memberikan pelajaran hidup mengesankan penuh banyak suka dan sedikit duka dalam menjalankan roda organisasi pada masa perkuliahan. Salam **Satukan, Eratkan, Kuatkan**.
11. Saudari-saudari penulis **GengBel** diantaranya **Cici, Tasya, Ita, Khandy, Firda, Ekur, Dhila,** dan **Indi** yang telah mewarnai hidup, berbagi cerita, memberi semangat kepada penulis selama masa berorganisasi, perkuliahan, hingga saat ini.
12. Saudara-saudari penulis diantaranya **Lenny, Dilla, Akin, Upi, Rista, Kaye, Cahyu, Deniz,** dan **Heru** khususnya kepada **Rafika, Farah, Teka,** dan **Khandy** yang senantiasa menemani, menghibur, membantu, memberi semangat, membagi ilmu, membagi cerita selama masa perkuliahan. Semoga kita semua senantiasa diberi kesehatan dan kesempatan untuk bersama-sama lagi kedepannya.
13. Teman-teman **KKN UNHAS** Gelombang **104** terkhusus **Bontoala** yang telah mewarnai masa-masa KKN penulis ketika mengabdi kepada masyarakat.
14. **SUPER JUNIOR** yang telah menemani penulis selama 13 tahun hingga saat ini dan hingga seterusnya dengan memberikan semangat motivasi melalui karya-karyanya selama penulis mengerjaan skripsi ini.
15. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang juga telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya apabila terdapat banyak kekurangan dalam penyusunan skipsi ini. Akhir kata, semoga tulisan dapat memberikan manfaat untuk pembaca.

Makassar, 1 Juli 2024

Krisdayanti

ABSTRAK

Graf $C_m \odot P_2$ merupakan graf yang diperoleh dari hasil operasi korona dengan menggabungkan graf siklus berorde m (C_m) untuk $m \geq 3$ dengan graf lintasan berorde 2 (P_2). Misalkan $A(C_m \odot P_2)$ adalah matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$. Matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks blok. Basis ruang eigen dari suatu nilai eigen (λ) pada matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$ dinotasikan sebagai $BRE(C_m \odot P_2)_\lambda$. Adapun multisiplitas aljabar dan geometri dari matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$ dinotasikan sebagai $\alpha(\lambda)$ dan $\beta(BRE_\lambda)$. Pada skripsi ini akan ditentukan pola umum dari basis ruang eigen dari matriks ketetangaan graf $C_m \odot P_2$. Dalam menentukan pola umum basis ruang eigen graf $C_m \odot P_2$ nilai eigen yang digunakan berupa bilangan bulat, $\lambda \in \mathbb{N}$. Hasil yang diperoleh yaitu bentuk umum basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$ untuk $m \geq 3$.

Kata Kunci: Graf $C_m \odot P_2$, Matriks ketetangaaan, Matriks blok, Nilai eigen, Basis ruang eigen

ABSTRACT

$C_m \odot P_2$ graph is a graph obtained from the corona operation by combining a cycle graph of ordr m (C_m) for $m \geq 3$ with a path graph of order 2 (P_2). Let $A(C_m \odot P_2)$ be the adjacency matrix of graph $C_m \odot P_2$. The adjacency matrix of graph $C_m \odot P_2$ can be expressed in block matrix form. The eigenbasis of an eigenvalue (λ) in the adjacency matrix of graph $C_m \odot P_2$ is denoted as $BRE(C_m \odot P_2)_\lambda$. The algebraic and geometric multiplicities of the adjacency matrix of graph $C_m \odot P_2$ are denoted as $\alpha(\lambda)$ and $\beta(BRE_\lambda)$ respectively. In this thesis will determine the general pattern of the eigenbasis of the adjacency matrix of graph $C_m \odot P_2$. In determining the general pattern of the eigenbasis of graph $C_m \odot P_2$, the eigenvalues used are integers, $\lambda \in \mathbb{N}$. The result is the general form of the eigenbasis of the adjacency matrix of graph $C_m \odot P_2$ for $m \geq 3$.

***Keywords**: Graph $C_m \odot P_2$, adjacency matrix, block matrix, eigenvalues, eigen basis*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu dalam matematika yang pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh Leonard Euler, yang merupakan seorang matematikawan asal Swiss. Di dalam karya tulis yang berjudul "*Solution Problematis and Geometriam Situs Pertinestis*" Leonard Euler memperlihatkan solusi dari 7 buah jembatan yang ada di kota Königsberg melalui pembuktian sederhana. Walaupun karya tulis tersebut tidak ditulis dalam bahasa graf, tetapi secara teoritis konsep dasar lahirnya teori graf adalah melalui karyanya.

Dengan pesatnya perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, teori graf banyak didukung oleh berbagai cabang ilmu matematika lain salah satunya yaitu bidang aljabar. Kedua cabang ilmu tersebut, dapat dihubungkan dengan mengkaji suatu graf melalui sifat-sifat aljabar yaitu representasi graf dalam suatu matriks. Bermacam-macam cara yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah-masalah terkait teori graf, salah satunya yaitu menentukan matriks ketetanggaan pada suatu graf.

Matriks ketetanggaan adalah salah satu matriks yang diperoleh dari merepresentasikan suatu graf dengan cara melihat hubungan antar titik yang ada pada suatu graf [1]. Terdapat beberapa teori yang menerapkan konsep matriks ketetanggaan salah satunya ialah mencari basis ruang eigen suatu graf.

Teori basis ruang eigen suatu graf merupakan penghubung yang mempertemukan teori graf dan aljabar linear. Lebih spesifiknya basis ruang eigen suatu graf merupakan cabang ilmu teori graf yang membahas sifat-sifat graf yang berkaitan dengan nilai eigen, vektor eigen, spektrum, polynomial karakteristik, dan matriks ketetanggaan.

Dalam teori graf, penelitian mengenai basis ruang eigen suatu graf merupakan bahasan yang masih jarang. Oleh sebab itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk meneliti Basis Ruang Eigen Graf $C_m \odot P_2$ yang telah diperoleh dari hasil operasi korona antara Graf Siklus (C_m) dengan Graf Lintasan (P_2) yang dikemas dalam judul "**Basis Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf $\boldsymbol{C_m \odot P_2}$**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang maka dari graf $C_m \odot P_2$ akan diperoleh matriks ketetanggaan. Ada beberapa nilai eigen yang berbeda dari matriks ketetanggaan, setiap nilai eigen yang berbeda terkait dengan suatu ruang eigennya. Masalah yang akan dibahas adalah menetapkan bentuk umum basis dari ruang eigen matriks ketetanggaan pada graf $C_m \odot P_2$.

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini ada beberapa ruang eigen dari matriks ketetanggaan, maka basis ruang eigen pada graf $C_m \odot P_2$ yang dicari akan dibatasi pada ruang eigen tertentu saja dalam hal ini yaitu $C_m \odot P_2$ dengan $m \geq 3$ serta nilai eigen yang digunakan hanya bilangan bulat.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan masalah yang diangkat, adapun tujuan dari penelitian yang dilakukan adalah menetapkan bentuk basis dari ruang eigen matriks ketetanggaan pada graf $C_m \odot P_2$.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah wawasan peneliti mengenai graf khusunya basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$.
2. Sebagai media bagi peneliti untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuan.
3. Menjadi pustaka bagi matematikawan yang berminat melakukan penelitian mengenai basis ruang eigen matriks ketetanggaan.

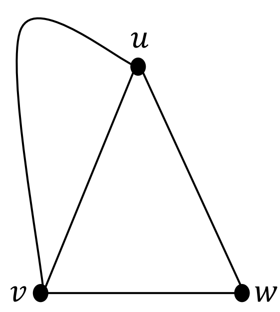
1.6 Landasan Teori

Berdasarkan masalah yang diangkat berikut merupakan landasan teori yang relevan terhadap penelitian yang akan digunakan dalam bab hasil dan pembahasan.

1.6.1 Teori Graf

Definisi 1.6.1.1 Graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.

Berdasarkan definisi 1.6.1.1, himpunan V disebut titik (*vertex set*), dan E disebut himpunan sisi (*edge set*). Kadang-kadang ada yang menyebut titik sebagai noktah (*point*) dan sisi sebagai busur, rusuk, atau garis (*line*). Jika graf (V, E) dinotasikan G, dengan kata lain $G = (V, E)$, maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga graf $G = (V(G), E(G))$. Secara metematika definisi tersebut dapat ditulis graf $G = (V(G), E(G))$, dengan $V(G) = \{u : u\ disebut\ titik\}$ dan $E(G) = \{(u, v) : u, v \in V(G)\}$, dengan (u, v) disebut sisi, rusuk atau garis [2]



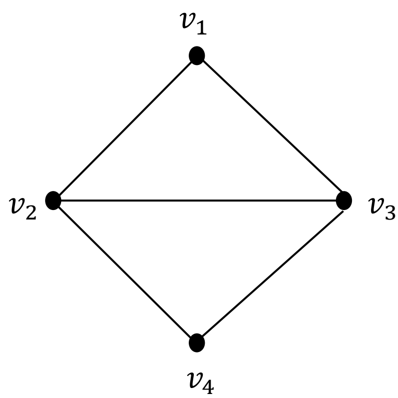
Gambar 1. 1 graf G

Pada gambar 1.1. sebuah graf $G = (V(G), E(G))$ dimana himpunan titiknya adalah $V(G) = \{u, v, w\}$ serta himpunan sisi dari pasangan titik-titik graf yang saling terhubung adalah $E(G) = \{uv, uv, vw, uw\}$.

1.6.2 Terminologi Graf

Dalam teori graf terdapat beberapa terminologi yang berkaitan dengan graf. Berikut beberapa definisi dari terminologi dalam teori graf yang relevan terhadap pembahasan dari penelitian ini.

Definisi 1.6.2.1 Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = uv$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut bertetangga (*adjacent*). Selanjutnya sisi e dikatakan terkait (*incident*) dengan titik u dan v [3].



Gambar 1. 2 Graf $\boldsymbol{G}$

Pada gambar 1.2 graf G titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_3, tetapi titik v_1 tidak bertetangga dengan titik v_4. Sisi (v_2, v_3) bersisian dengan dengan v_2 dan v_3, sisi (v_2, v_4) bersisian dengan titik v_2 dan v_4, tetapi sisi (v_1, v_2) tidak bersisian dengan titik v_4.

Definisi 1.6.2.2 Derajat suatu titik pada graf adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut. $d(v)$ adalah notasi dari derajat suatu titik pada graf [4].

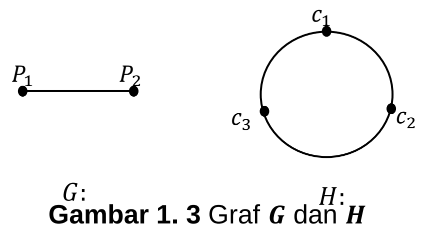
Contoh 1.6.2.2 Dapat dilihat pada gambar 2.2 derajat dari graf G untuk semua titik adalah sebegai berikut.

$$d(v_1) = d(v_4) = 2$$
$$d(v_2) = d(v_3) = 3$$

1.6.3 Operasi Korona pada Graf

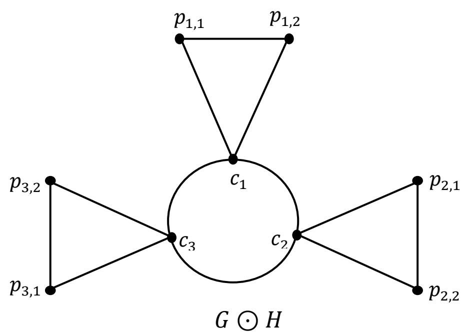
Dalam penelitian ini penulis akan menggunakan opersai korona pada graf, definisi dari operasi korona pada graf dapat ditulis sebagai berikut.

Definisi 1.6.3.1 Misalkan G graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m. Graf korona G dan H dinotasikan $G \odot H$ adalah menggandakan graf H sebanyak n kali, namakan $H_1, H_2, \dots, H_n$, dan mengaitkan setiap titik v_i di G dengan setiap titik di graf $H_i, i = 1, 2, \dots, n$ [2].
Contoh 1.6.3.1 Diberikan graf G dan graf H seperti pada gambar berikut.



Gambar 1. 3 Graf $\boldsymbol{G}$ dan $\boldsymbol{H}$

Karena graf G mempunyai 2 titik, graf H digandakan sebanyak 3 kali dan setiap titik di H dikaitkan dengan titik-titik di G. Maka hasil korona seperti berikut.

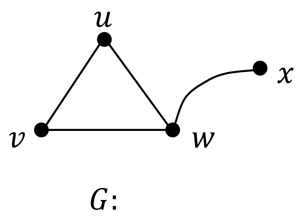


Gambar 1. 4 Graf Korona $\boldsymbol{G \odot H}$

1.6.4 Jenis-Jenis Graf

Berikut merupakan definisi jenis-jenis graf yang relevan terhadap penelitian ini.

Definisi 1.6.4.1 Graf sederhana G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggota disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*) [2].



Gambar 1. 5 Graf $\boldsymbol{G}$ sederhana

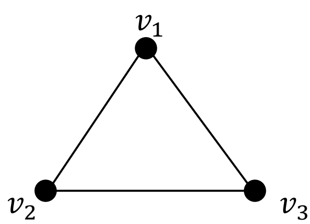
Pada gambar 1.5 dapat dilihat bahwa $V(G)$ tidak kosong dan berhingga serta untuk setiap uv di $E(G), uv = vu\ dan\ u \neq v$. Jadi graf G merupakan salah satu contoh graf sederhana.

Definisi 1.6.4.2 Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, n-1$. Graf yang hanya terdiri dari satu lintasan disebut Graf Lintasan dan dinotasikan P_n apabila berorde n [2].

Gambar 1. 6 Graf $\boldsymbol{P_4}$

Pada gambar 1.6 merupakan graf lintasan yang berorde 4 atau disebut P_4.

Definisi 1.6.4.3 Siklus pada suatu graf adalah struktur khusus dari graf yang memuat n titik dimana $n \geq 3$, yaitu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan sisi $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$, dan $\{v_n, v_1\}$. Jika n adalah bilangan genap, siklus tersebut dinamakan siklus genap (*even cycle*). Sedangkan, jika n ganjil, siklus tersebut dinamakan siklus ganjil (*odd cycle*). Graf yang memuat tepat satu siklus disebut sebagai graf siklus dan dinotasikan C_n dengan $n \geq 3$. [5]

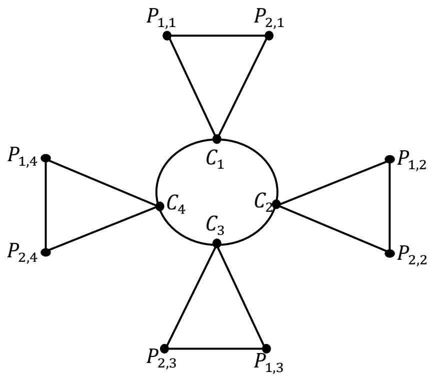


Gambar 1. 7 Graf $\boldsymbol{C_3}$

Pada gambar 1.7 merupakan graf siklus yang berorde 3 atau disebut C_3.

Definisi 1.6.4.4 Graf $C_m \odot P_2$ merupakan graf yang diperoleh dari hasil operasi korona dengan menggabungkan graf siklus berorde m (C_m) untuk $m \geq 3$ dengan graf lintasan berorde 2 (P_2).

Contoh 1.6.4.4 Gambar dibawah ini merupakan graf $C_4 \odot P_2$.



Gambar 1. 8 Graf $\boldsymbol{C_4 \odot P_2}$

Pada Gambar 1.8 merupakan graf hasil operasi korona dari graf siklus yang berorde 4 (C_4) dengan graf lintasan yang berorde 2 (P_2).

1.6.5 Matriks

Berikut merupakan definisi matriks, matriks ketetangaan, determinan matriks, dan matriks blok yang revelan terhadap penelitian ini.

Definisi 1.6.5.1 Matriks adalah bilangan-bilangan yang disusun dalam bentuk persegi panjang. Penyusunan bilangan-bilangan dalam bentuk persegi panjang biasanya secara horizontal dan vertikal. Susunan bilangan-bilangan horizontal disebut baris dan susunan bilangan-bilangan vertikal disebut kolom dari mariks. Setiap bilangan yang disusun disebut elemen matrik [6]

Definisi 1.6.5.2 Matriks ketetanggaan untuk suatu graf dengan n titik didefinisikan sebagai $A_{n\times n} = |a_{ij}|$ dimana a_{ij} bernilai 1 jika titik v_i dan v_j bertetangga, dan bernilai 0 jika titik v_i dan v_j tidak bertetangga [3].

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & jika\ v_i\ dan\ v_j\ bertetangga \\ 0, & lainnya. \end{cases}$$

Contoh 1.6.5.2 Pada gambar 1.2, graf G jika dicari matriks ketetanggaannya maka hasilnya sebagai berikut.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Definisi 1.6.5.3 Determinan matriks A adalah selisih antara perkalian elemen-elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder. Determinan dari matriks A dinotasikan dengan $det(A)$ [7]. Jika matriks A berukuran $n \times n$, determinan matriks A didefinisikan sebagai berikut.
Contoh 1.6.5.3 Misalkan sebuah matriks sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Maka determinan dari matriks A adalah $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Definisi 1.6.5.4 Matrks blok atau matriks partisi adalah matriks yang dipartisi atau diblok menjadi beberapa matriks yang ukurannya lebih kecil dengan memasukkan garis horizantal dan vertikal antara baris dan kolom matriks. Matriks-matriks yang ukurannya kecil hasil partisi matriks disebut submatriks [8].
Contoh 1.6.5.4 Diberikan sebuah matriks B, tentukan matriks blok 2×2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan di blok menjadi matriks 2×2 sebagai berikut.

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan,

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

1.6.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Berikut merupakan definisi nilai eigen dan vektor eigen serta definisi multisiplitas aljabar dan geometri yang relevan terhadap penelitian ini.
Definisi 1.6.6.1 Jika A adalah sebuat matriks $n \times n$, maka sebuah vektor bukan nol x pada $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax merupakan sebuah kelipatan skalar dari x; dimana

$$Ax = \lambda x$$

Untuk skalar sebarang λ, skalar λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan x disebut sebagai vektor eigen (*eigenvector*) dari A yang terkait dengan λ. Nilai eigen dapat diperoleh dengan menentukan persamaan karakteristik terlebih dahulu sebagai berikut.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Kemudian didapatkan nilai λ yang disebut nilai eigen [9].
Contoh 1.6.6.1 Diketahui sebuah vektor A, tentukan nilai eigen dari matriks tersebut.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari A adalah $\det(A - \lambda I) = 0$

$$det \left| \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = det \left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right|$$

Sehingga persaamaan karakteristik dari A yang diperoleh ialah

$$(2-\lambda)(2-\lambda)-0=0$$
$$\lambda-2=0$$
$$\lambda=2$$

Maka nilai eigen dari matriks A adalah 2.

Definisi 1.6.6.2 Misal λ_1 adalah suatu nilai eigen dari suatu matriks A. Multiplisitas aljabar dari λ_1 adalah banyaknya λ_1 sebagai akar persamaan polinomial A. Sedangkan multiplisitas geometri λ_1 adalah dimensi ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 [10].

Contoh 1.6.6.2 Pada Gambar 1.4 akan dicari multiplisitas grafnya. Berdasarkan gambar tersebut maka matriks ketetanggaan yang diperoleh sebagai berikut.

$$A(C_3 \odot P_2) = \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&1&1 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Kemudian setelah mendapatkan bentuk matriks ketetanggaan dari graf diatas, selanjutnya akan dicari nilai eigen dari matriks tersebut sebagai berikut.

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&1&1 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}\right)=0$$

$$det\begin{bmatrix} -\lambda&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&-\lambda&1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&1&-\lambda&0&0&0&0&1&1 \\ 1&0&0&-\lambda&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&-\lambda&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&-\lambda&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&-\lambda&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&-\lambda&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&-\lambda \end{bmatrix}=0$$

Dengan menggunakan *software* MATLAB, diperoleh persamaan polynomial karakteristik sebagai berikut.

$$-\lambda^9+12\lambda^7+8\lambda^6-42\lambda^5-48\lambda^4+36\lambda^3+72\lambda^2+27\lambda=0$$

Dari persamaan tersebut diperoleh juga nilai eigennya yaitu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 3, \lambda_6 = \lambda_7 = \sqrt{3}, \lambda_8 = \lambda_9 = -\sqrt{3}$.

Berdasarkan nilai eigen yang telah diperoleh maka multiplisitas aljabar yang didapatkan yaitu $\alpha(-1) = 3, \alpha(0) = 1, \alpha(3) = 1, \alpha(\sqrt{3}) = 2,$ dan $\alpha(-\sqrt{3}) = 2$.

1.6.7 Basis Ruang Eigen

Berikut definisi beserta contoh basis ruang eigen yang relevan terhadap penelitian ini.

Definisi 1.6.7.1 Berdasarkan pada definisi 1.6.6.1 vektor eigen merupakan vektor bukan nol $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi persamaan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x}$. Vektor eigen yang terkait dengan $\boldsymbol{\lambda}$ adalah vektor bukan nol dalam ruang solusi $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Ruang solusi ini merupakan sebagai ruang eigen (*eigenspace*) dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang terkait $\boldsymbol{\lambda}$ [9].

Contoh 1.6.7.1 Berdasarkan contoh 1.6.6.2 yang telah diperoleh nilai eigennya yaitu sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1,\ \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 3,\ \lambda_6 = \sqrt{3},\ \lambda_7 = \sqrt{3},\ \lambda_8 = -\sqrt{3},\ \lambda_9 = -\sqrt{3}.$$

- Pertama-tama akan dicari basis dari ruang vektor eigen untuk $\lambda = -1$ pada graf $C_3 \odot P_2$ dengan memsubtitusikan nilai eigen ke dalam persamaan $(A - \lambda I)x = 0$, maka diperoleh sebagai berikut.

$$(A(C_3 \odot P_2) - (-1)I)x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Metode Gauss-Jordan pada *software* MATLAB, diperoleh matriks bentuk eselon baris tereduksi sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian di peroleh

$x_8 + x_9 = 0, x_6 + x_7 = 0, \quad x_4 + x_5 = 0, \quad x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = 0$

$x_8 = -x_9 \quad x_6 = -x_7 \quad x_4 = -x_5$

Misalkan $x_5 = a_1,\ x_7 = a_2, x_9 = a_3$ dengan $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$x_8 = -a_3 \qquad x_6 = -a_2 \qquad x_4 = -a_1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a_1 \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a_2 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a_3 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

Dari vekor eigen yang telah diperoleh maka dapat ditulis sebagai berikut.

$$BRE(C_3 \odot P_2)_{\lambda=-1} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

Sehingga diperoleh basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$ untuk graf $C_3 \odot P_2$ serta multiplisitas geometrinya (β) adalah 3.

- Setalah mencari basis ruang eigen untuk $\lambda = -1$, selanjutnya akan dicari basis ruang eigen dari ruang vektor eigen untuk $\lambda = 3$ pada graf $C_3 \odot P_2$ dengan mensubtitusikan nilai eigen ke dalam $(A - \lambda I)x = 0$ yang diperoleh sebagai berikut.

$$(A(C_3 \odot P_2) - (3)I)x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - (3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Metode Gauss-Jordan pada *software* MATLAB, diperoleh matriks bentuk eselon baris tereduksi sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian misalkan $x_9 = b$ dengan $b \in \mathbb{R}$ maka diperoleh

$x_8 - x_9 = 0,\ \ x_7 - x_9 = 0,\ \ x_6 - x_9 = 0,\ \ x_5 - x_9 = 0,\ \ x_4 - x_9 = 0$

$x_8 = b \quad x_7 = b \quad x_6 = b \quad x_5 = b \quad x_4 = b$

$x_3 - 2x_9 = 0, x_2 - 2x_9 = 0,\ \ x_1 - 2x_9 = 0,$

$x_3 = 2b \quad x_2 = 2b \quad x_1 = 2b$

Verktor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ 2b \\ 2b \\ b \\ b \\ b \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R}$$

Dari vekor eigen yang telah diperoleh maka dapat ditulis sebagai berikut.

$$BRE(C_3 \odot P_2)_{\lambda=3} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

Sehingga diperoleh basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ untuk graf $C_3 \odot P_2$ serta multiplisitas geometrinya (β) adalah 1.

BAB II
METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Jenis Penelitian

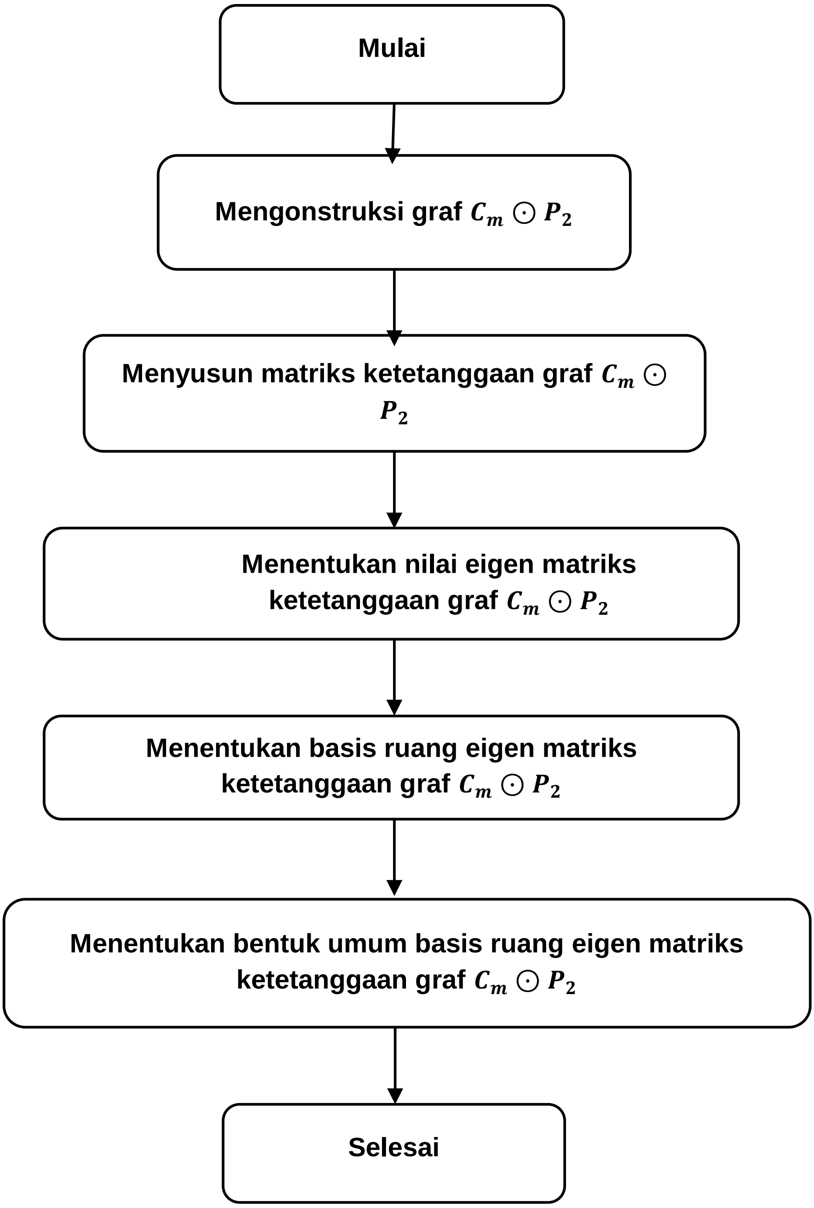
Untuk mencapai tujuan penelitian maka penelitian ini dilakukan berdasarkan pada metode studi pustaka dengan mengumpulkan bahan penelitian melalui jurnal atau literatur yang relevan dengan basis ruang eigen matriks ketetanggaan pada graf $C_m \odot P_2$.

2.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Perpustakaan dan Laboratorium Aljabar jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin pada bulan Juni 2023.

2.3 Tahapan Penelitian

1. Melakukan studi pustaka terkait dengan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$.
2. Menentukan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$ dengan alur seperti berikut:


Mulai
Mengonstruksi graf $C_m \odot P_2$
Menyusun matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$
Menentukan nilai eigen matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$
Menentukan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$
Menentukan bentuk umum basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf $C_m \odot P_2$
Selesai