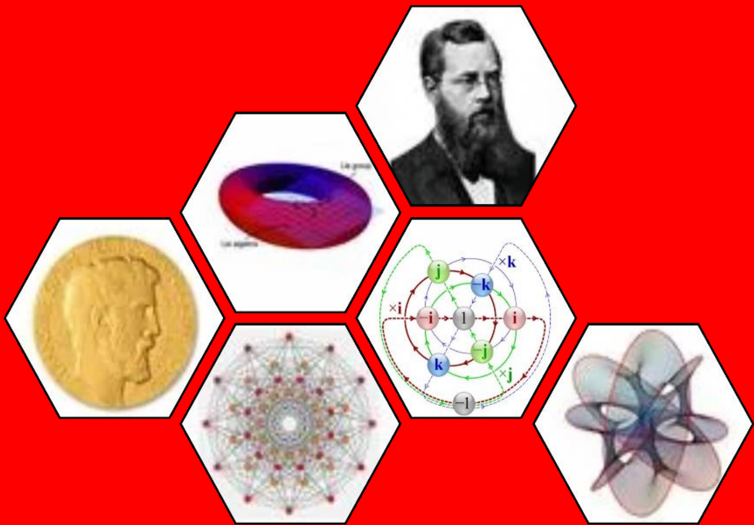
QUATERNIFIKASI PADA ALJABAR LIE



FERDI

H011201045

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

QUATERNIFIKASI PADA ALJABAR LIE

FERDI

H01201045

PROGRAM STUDI MATEMATIKA - DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

QUATERNIFIKASI PADA ALJABAR LIE

FERDI

H01201045

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

SKRIPSI

QUATERNIFIKASI PADA ALJABAR LIE

<u>FERDI</u>

H011201045

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Sains pada 14 Juni 2024

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Matematika

Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

Makassar

Mengesahkan:

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.
NIP. 1968080319920211001	NIP. 199012282018031001

Mengetahui:

Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si., M.Si.

NIP. 196804292002121001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Quaternifikasi Pada Aljabar Lie" adalah benar karya saya dengan arahan dari bapak Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. sebagai Pembimbing Utama dan bapak Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Pertama. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 14 Juni 2024

10000 METERAI TEMPEL 23CC5ALX128967132

Ferdi

H011201045

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji dan syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, yang telah melimpahkan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "Quaternifikasi Pada Aljabar Lie" dengan baik. Skripsi ini tidak akan terwujud tanpa dukungan, bimbingan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati, penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya, antara lain kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Jamaluddin Jompa, M.Si.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin, Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, serta Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika.
2. Seluruh **Dosen** dan **Staf** Departemen Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
3. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** sebagai Pembimbing Utama dan bapak **Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si**.sebagai Pembimbing Pertama atas kesediaan dan kesabarannya dalam membimbing dan memberikan arahan kepada penulis, serta meluangkan banyak waktu sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak **Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D.** dan Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** selaku penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan ilmu, saran, dan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini
5. Kedua orang tua tercinta penulis (Bapak **Sinala** dan Ibu **Amira**), kakak-kakak penulis (**Kak Nurbaya, Kak Syamsir, Kak Sarini, Kak Arman,** dan **Kak Ashar**), adik penulis (**Putri Kaswani**) serta segenap keluarga yang telah memberikan dukungan yang tak tergantikan selama perjalanan pendidikan penulis. Terimakasih atas motivasi, doa, serta materi yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
6. Terima kasih terkhusus untuk cewek saya (**Fida**) dan kakak senior (**Kak Nasrullah, Kak Daya, Kak Ipul, Kak Jeki,** serta **Kak Zidan**) yang selalu memberikan semangat, dukungan, serta bantuan baik secara langsung maupun tidak langsung selama penyusunan skripsi ini.
7. Teman-teman **Matematika 2020** dan **PKM** yang telah berjuang bersama sejak awal perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini selesai
8. Seluruh pihak yang tidak dapat saya sebutkan satu per satu, yang telah membantu dan memberikan dukungan dalam bentuk apapun.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan dapat memberikan kontribusi yang berarti dalam bidang ilmu yang saya tekuni.

Penulis,

Ferdi

ABSTRAK

Aljabar Lie Kac-Moody adalah aljabar Lie yang menggunakan generalisasi matriks Cartan atas lapangan real atau kompleks. Penelitian ini bertujuan untuk mendefinisikan aljabar Lie Kac-Moody di quaternion dengan menggunakan konsep Quaternifikasi pada aljabar Lie. Dari beberapa penelitian terdahulu, definisi dari aljabar Lie Kac-Moody atas lapangan real atau kompleks terbagi jadi dua yaitu definisi aljabar Lie Kac-Moody Standar dan Direduksi. Untuk memperoleh kedua definisi tersebut diperlukan satu definisi tambahan yaitu aljabar Lie Kac-Moody Umum. Sehingga, untuk mendefinisikan Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion diperlukan tiga konstruksi yaitu konstruksi Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Umum, Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Standar, dan Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Direduksi. Hasil dari penelitian ini diperoleh definisi dari Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Umum, Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Standar, dan Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Direduksi.

Kata kunci: Aljabar Lie, Aljabar Lie Kac-Moody, Quaternifikasi aljabar Lie, Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Umum, Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Standar, Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Direduksi

Judul	: Quaternifikasi Pada Aljabar Lie
Nama	: Ferdi
NIM	: H011201045
Program Studi	: Matematika

ABSTRACT

Kac-Moody Lie algebra is a Lie algebra associated with Cartan matrix generalized over real or complex field. This research aims to define Kac-Moody Lie algebra in quaternion by using the concept of Quaternification of Lie algebra. From some previous research, the definition of Kac-Moody Lie algebra over real or complex field is divided into two, namely the definition of Standard and Reduced Kac-Moody Lie algebra. To obtain both definitions, one additional definition is needed, namely the Universal Kac-Moody Lie algebra. So, to define Kac-Moody Quaternion Lie Algebra, three constructions are needed, namely the construction of Universal Kac-Moody Quaternion Lie Algebra, Standard Kac-Moody Quaternion Lie Algebra, and Reduced Kac-Moody Quaternion Lie Algebra. The results of this study obtained the definition of Universal Kac-Moody Quaternion Lie Algebra, Standard Kac-Moody Quaternion Lie Algebra, and Reduced Kac-Moody Quaternion Lie Algebra.

Keywords: *Lie algebra, Kac-Moody Lie algebra, Quaternification of Lie algebra, Universal Kac-Moody Quaternion Lie Algebra, Standard Kac-Moody Quaternion Lie Algebra, Reduced Kac-Moody Quaternion Lie Algebra*

Title : *Quaternification on Lie Algebra*

Name : Ferdi

NIM : H011201045

Study Program : *Mathematics*

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Nomor urut Halaman

DAFTAR NOTASI

Lambang	Arti dan penjelasan
$\mathbb{Z}$	Bilangan bulat
$\mathbb{N}$	Bilangan asli
$\mathbb{R}$	Bilangan real
$\mathbb{C}$	Bilangan kompleks
$\mathbb{H}$	Bilangan quaternion
V	Ruang vektor
$(\mathcal{V}, J)$	Modul quaternion atau Modul $\mathbb{H}$
σ	Involusi linear $\mathbb{C}$ pada $\mathcal{V}$
τ	Konjugat involusi linear $\mathbb{C}$ pada $\mathcal{V}$
$T(V)$	Aljabar tensor atau aljabar tensor quaternion
$\otimes$	Tensor *product*
$\oplus$	*Direct sum*
L	Aljabar Lie atau aljabar Lie quaternion
$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{H})$	Aljabar Lie dari semua matriks 2×2 (dengan entri di $\mathbb{H}$)
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{H})$	Aljabar Lie dari semua matriks 2×2 dan bagian real dari tracenya nol (dengan entri di $\mathbb{H}$)
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$	Aljabar Lie dari semua matriks $n \times n$ dan dan bagian real dari tracenya nol (dengan entri di $\mathbb{H}$)
$(\hat{X}, J\hat{X})$	Himpunan atas quaternion
$L(\hat{X}, J\hat{X})$	Aljabar Lie yang digeneret oleh basis $\{\hat{X}, J\hat{X}\}$
$\hat{g}(A)$	Aljabar Lie yang digeneret oleh himpunan
$\tilde{g}(A)$	Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Umum
$g(A)$	Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Standar
$\breve{g}(A)$	Aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Direduksi
ϵ_i	Basis e_i atau Je_i
ϕ_i	Basis f_i atau Jf_i
$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$	Kompleksifikasi dari V
$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V_0$	Quaternifikasi dari V_0
A	Aljabar asosiatif atau aljabar asosiatif quaternion
$I, \hat{I}, K, \vartheta$	Ideal dari aljabar Lie atau aljabar asosiatif
$\varphi, \phi, \psi, \Psi, i, j, \Phi$	Homomorfisma aljabar Lie atau homomorfisma aljabar asosiatif
H^*	Ruang dual dari H
Π	Himpunan akar sederhana
Π^V	Himpunan *co*-akar sederhana
Q	Akar *lattice*
Δ	Sistem akar
ht α	*height* α
ad $x(y)$	Adjoin representasi

$p(x)$	Operator linear pada V
$x\cdot$	Operator linear pada V
$U \times V$	(u, v), $u \in U, v \in V$
$M^{2\times 2}(\mathbb{R})$	Semua matriks 2×2 atas lapangan $\mathbb{R}$
$gl(V)$	Himpunan dari semua pemetaan linear dari V ke V
$\ker f$	*Kernel* f
$\operatorname{im} f$	*Image* f
$\mathbb{Z}[X]$	Himpunan semua polinomial berderajat n dengan koefisien di $\mathbb{Z}$
G	Grup
R	Gelanggang
$\mathbb{F}$	Lapangan
$N(H)$	Normaliser dari H di L
$\alpha, \beta, \lambda, \gamma$	Konstanta
$M_2(\mathbb{C})$	Himpunan matriks 2×2 atas lapangan $\mathbb{C}$
$M_n(\mathbb{C})$	Himpunan matriks $n \times n$ atas lapangan $\mathbb{C}$
δ_{ij}	Fungsi Kronecker delta
$I + K$	$\{i + k \mid i \in I, k \in K\}$
$I \cap K$	$\{x \mid x \in I \ dan \ x \in K\}$
$I \cup K$	$\{x \mid x \in I \ atau \ x \in K\}$

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas mengenai latar belakang, rumusan masalah penelitian, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan landasan teori.

1.1 Latar Belakang

Aljabar adalah cabang matematika yang mempelajari struktur, relasi, dan operasi matematika yang melibatkan objek abstrak seperti bilangan, variabel, dan operasi aritmatika.

Topik dalam aljabar yang banyak diteliti salah satunya adalah aljabar Lie. Istilah aljabar Lie diambil dari nama matematikawan Norwegia yaitu Marius Sophus Lie (1842-1899). Shopus Lie mengembangkan aljabar Lie untuk mempelajari konsep transformasi yang sangat kecil (*infinitesimal*) pada tahun 1870-an. Beberapa peneliti telah mempublikasikan tulisannya dalam bentuk buku dan paper mengenai aljabar Lie seperti Gerard G.A. Bauerle dan Eddy A. De Kerf (Bauerle & Kerf, 1990), James E. Humpherys (Humphreys, 2010), dan Brian C. Hall (Hall, 2015) dalam bukunya telah membahas beberapa materi mengenai aljabar Lie seperti konsep-konsep dasar mengenai aljabar Lie, homomorfisma aljabar Lie, kompleksifikasi dari aljabar Lie real, aljabar Lie sederhana, aljabar Lie semisederhana, dll. Selanjutnya, pada tahun 1984 Rolf Farnsteiner (Farnsteiner, 1984) mulai memperkenalkan tentang aljabar Lie di quaternion dengan menyelidiki aljabar Lie yang isomorfik dengan *central quotient* dari aljabar pembagian quaternion yang kemudian disebut sebagai aljabar Lie quaternion. Kemudian, Dominic Joyce (Joyce, 1998) memberikan definisi aljabar Lie quaternion sebagai objek modul $\mathbb{AH}$ yang memenuhi kondisi braket aljabar Lie modul $\mathbb{AH}$ merupakan konsep yang lebih khusus dibandingkan modul $\mathbb{H}$. Selanjutnya, Tasioki Kori (Kori, 2023) mempublikasikan papernya yang membahas tentang quaternifikasi pada aljabar Lie kompleks yang merupakan perluasan dari kompleksifikasi pada aljabar Lie real. Berdasarkan paper tersebut, Tasioki Kori memperkenalkan definisi dari aljabar Lie quaternion, quaternifikasi aljabar Lie, quaternifikasi pada aljabar Lie sederhana, dan dekomposisi ruang akar dari aljabar Lie quaternion. Salah satu topik penting dalam pengembangan aljabar Lie adalah Aljabar Lie Kac-Moody.

Aljabar Lie Kac-Moody adalah aljabar Lie yang menggunakan generalisasi matriks Cartan. Aljabar Lie Kac-Moody diusulkan dengan dua properti yang berbeda oleh Robert Vaughan Moody (Moody, 1967) dan Victor Gershevich Kac (Kac V. G., 1968). Karena terdapat dua definisi dengan properti berbeda maka Steven Berman (Berman S. , 1981) memberikan nama untuk masing-masing properti yaitu Aljabar Lie Kac-Moody Standar dan Aljabar Lie Kac-Moody Direduksi. Namun, untuk mendapatkan dua definisi tersebut, terlebih dahulu didefinisikan Aljabar Lie Kac-Moody Umum yang diaplikasikan ke dua properti yang diperkenalkan oleh Moody dan Kac sehingga diperoleh Aljabar Lie Kac-Moody Standar dan Aljabar Lie Kac-Moody Direduksi.

Berdasarkan uraian diatas, hal yang menarik untuk diteliti adalah penggabungan antara quaternifikasi pada aljabar Lie kompleks dengan aljabar Lie Kac-Moody. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dibahas tentang konstruksi aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Umum, Standar, dan Direduksi dengan menggunakan quaternifikasi. Hasil-hasil yang diperoleh dituangkan dalam bentuk penelitian tugas akhir dengan judul "**Quaternifikasi Pada Aljabar Lie**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Umum?
2. Bagaimana konstruksi aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Standar?
3. Bagaimana konstruksi aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Direduksi?

1.3 Batasan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, diberikan batasan masalah yaitu aljabar Lie Kac-Moody Quaternion yang diteliti dalam hal ini menggunakan quaternifikasi pada aljabar Lie Kac-Moody atas lapangan kompleks. Selain itu, himpunan pembangun yang digunakan untuk mengkonstruksi aljabar Lie Kac-Moody Quaternion berdimensi hingga.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka penelitian ini bertujuan mengkonstruksi aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Umum, Standar, dan Direduksi.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat kepada berbagai pihak sebagai berikut:

1. Bagi Penulis:
   a. Sebagai sarana untuk memperkaya pengetahuan dan wawasan mengenai ilmu matematika khususnya pada bidang aljabar.
   b. Sebagai sarana untuk menambah keterampilan dalam menerapkan teori-teori yang telah diperoleh dalam perkuliahan maupun yang diperoleh secara mandiri.
2. Bagi Pembaca:
   a. Sebagai sarana untuk menambah pemahaman tentang teori-teori dalam bidang aljabar.
   b. Sebagai bahan referensi dalam kajian keilmuan matematika.
3. Bagi Universitas Hasanuddin:

   Sebagai pelengkap literatur mengenai matematika khususnya aljabar yang dapat dimanfaatkan oleh setiap civitas akademik Universitas Hasanuddin.

1.6 Landasan Teori

Pada subbab ini diberikan beberapa materi yang akan digunakan sebagai landasan teori dalam mengkaji konstruksi aljabar Lie Kac-Moody Quaternion Umum, Standar, dan Direduksi. Materinya berupa grup, gelanggang, lapangan, ruang vektor, aljabar $\mathbb{F}$, Quaternion $\mathbb{H}$, teori modul, aljabar Lie, aljabar Lie bebas, aljabar Lie sederhana, aljabar Lie semisederhana, Kompleksifikasi dari aljabar Lie real, akar dan ruang akar, subaljabar Cartan dan Teorema Serre, modul pada aljabar Lie, representasi dari dimensi terbatas dari aljabar Lie, tensor *product*, aljabar enveloping umum, aljabar Lie Kac-Moody, modul quaternion, aljabar Lie quaternion, aljabar Lie quaternion bebas, quaternifikasi pada aljabar Lie kompleks, quaternifikasi pada aljabar Lie sederhana, dan dekomposisi ruang akar pada aljabar Lie quaternion. Selain itu, juga dibutuhkan beberapa notasi dan istilah yang umumnya merujuk pada buku "*Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics Vol.1*" oleh G.G.A. Bauerle dan E.A. De Kerf dan Paper "*On a Quaternification of Complex Lie algebras*" oleh Tosiaki Kori.

1.6.1 Grup, Gelanggang, dan Lapangan

Pada subbab ini dibahas tentang grup, subgrup, koset, subgrup normal, grup *quotient*, homomorfisma grup beserta jenis-jenisnya, grup aksi, gelanggang, subgelanggang, ideal, gelanggang *quotient*, homomorfisma gelanggang beserta jenis-jenisnya, dan lapangan.

Definisi 1.6.1.1 Grup adalah himpunan tak kosong G, yang dilengkapi dengan sebuah operasi biner yang dinotasikan dengan $(*)$, yang memenuhi aksioma berikut:

1. (Asosiatif) Untuk setiap $a, b, c \in G$
$$(a * b) * c = a * (b * c) \tag{1}$$
2. (Identitas) Terdapat elemen $e \in G$ dimana
$$e * a = a * e = a \tag{2}$$
untuk setiap $a \in G$.
3. (Invers) Untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen $a^{-1} \in G$ dimana
$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \tag{3}$$

(Roman, 2007)

Contoh 1.6.1.1 Misalkan $G = \mathbb{C}$ maka G adalah grup terhadap operasi penjumlahan

Definisi 1.6.1.2 Grup G abelian atau komutatif jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$. (Suryanti, 2017)

Contoh 1.6.1.2 Misalkan $G = \mathbb{C}$ maka G adalah grup abelian.

Definisi 1.6.1.3 Misalkan G grup dan $H \subseteq G$, H dikatakan subgrup dari G dituliskan $H \leq G$, jika $H \neq \emptyset$, H sendiri merupakan grup dengan operasi biner yang sama dengan G. (Suryanti, 2017)

Teorema 1.6.1.1 Misalkan G grup, himpunan H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika untuk $\forall x, y \in H$ berlaku $xy^{-1} \in H$. (Suryanti, 2017)

Definisi 1.6.1.4 Misalkan G grup, maka G dan $\{e\}$ adalah subgrup tak sejati dari G, dan semua subgrup yang lain adalah subgrup sejati. (Suryanti, 2017)

Definisi 1.6.1.5 Misalkan H adalah subgrup dari G, dan $a \in G$. Koset kiri dari H dalam G adalah $aH = \{ah | h \in H\}$. Sedangkan, koset kanan dari H dalam G adalah $Ha = \{ha | h \in H\}$. (Suryanti, 2017)

Definisi 1.6.1.6 Subgrup H dari grup G dikatakan subgrup normal dari G jika dan hanya jika $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$. Dengan kata lain H disebut subgrup normal dari G ditulis $H \lhd G$ jika koset kanan sama dengan koset kiri. (Suryanti, 2017)

Definisi 1.6.1.7 Jika H adalah subgrup normal dari grup G, himpunan koset dari H dalam G adalah grup *quotient* dari G dan dinotasikan dengan G/H dimana $G/H = \{x + H | x \in G\}$. (Suryanti, 2017)

Definisi 1.6.1.8 Misalkan $(G,*)$ dan $(H,\circ)$ adalah grup, fungsi dari G dan H dikatakan mengawetkan operasi/homomorfisma jika:

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G \tag{4}$$

(Suryanti, 2017)

Definisi 1.6.1.9 Misalkan $f: G \to H$ adalah homomorfisma grup, maka

a. Jika f injektif maka f dinamakan monomorfisma
b. Jika f surjektif maka f dinamakan epimorfisma
c. Jika f bijektif maka f dinamakan isomorfisma
d. Jika $G = H$ maka f dinamakan endomorfisma
e. Jika $G = H$ dan f bijektif maka f dinamakan automorfisma

(Suryanti, 2017)

Contoh 1.6.1.3

a. $f: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ dengan $f(x) = 2x$ merupakan isomorfisma
b. $f: G \to G$ dengan $f(g) = e$ merupakan endomorfisma
c. $f: G \to G$ dengan $f(g) = g$ merupakan automorfisma

Definisi 1.6.1.10 Jika $f: G \to H$ homomorfisma grup, $kernel\, f$ adalah

$$\ker f = \{g \in G | f(g) = e_h\} \tag{5}$$

dan *image* dari f adalah

$$\mathrm{im}\, f = \{h \in H | f(g) = h, \text{untuk } g \in G\} \tag{6}$$

(Suryanti, 2017)

Teorema 1.6.1.2 Misalkan H adalah subgrup normal dari grup G. Definisikan fungsi g dari G ke grup G/H dengan $g(a) = aH$ untuk setiap $a \in G$. Sehingga, g adalah homomorfisma dari G ke G/H dan $\ker g = H$. Homomorfisma g adalah homomorfisma natural/kanonik dari G ke G/H. (Malik, Mordeson, & Sen, 1997)

Teorema 1.6.1.3 Misalkan f adalah homomorfisma dari grup G ke grup G_1. Maka $f(G)$ adalah subgrup dari G_1 dan $G/\ker f \cong f(G)$. (Malik, Mordeson, & Sen, 1997)

Definisi 1.6.1.11 Misalkan G adalah grup dan X adalah himpunan. Grup aksi dari G pada X adalah pemetaan $G \times X \to X$ biasanya dinotasikan dengan $(g, x) \to g \cdot x$ memenuhi

a. $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ dan
b. $e \cdot x = x$, dimana e adalah identitas dari G

untuk setiap $x \in S$, $g_1, g_2 \in G$. (Malik, Mordeson, & Sen, 1997)

Definisi 1.6.1.12 Gelanggang adalah himpunan tak kosong R, yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan (dinotasikan dengan $+$) dan perkalian (dinotasikan dengan $\cdot$), dimana memenuhi aksioma berikut:

1. R adalah grup abelian atau komutatif terhadap penjumlahan.
2. (asosiatif) Untuk setiap $a, b, c \in R$,
$$(ab)c = a(bc) \tag{7}$$
3. (distributif) Untuk setiap $a, b, c \in R$,
$$(a + b)c = ac + bc \text{ dan } c(a + b) = ca + cb \tag{8}$$

Contoh 1.6.1.4 Misalka $R = \mathbb{C}$ maka R adalah gelanggang atas operasi penjumlahan dan perkalian.

Definisi 1.6.1.13 Gelanggang R dikatakan komutatif jika $ab = ba$ untuk setiap $a, b \in R$. Jika gelanggang R memuat elemen e dengan sifat

$$ae = ea = a \tag{9}$$

untuk setiap $a \in R$. R disebut sebagai gelanggang dengan identitas. Identitas e umumnya dinotasikan dengan 1. (Roman, 2007)

Contoh 1.6.1.5 Misalkan $R = \mathbb{C}$ maka R adalah gelanggang komutatif.

Definisi 1.6.1.14 Misalkan gelanggang $(R, +, \cdot)$ dan R' subhimpunan dari R. Maka $(R', +, \cdot)$ adalah subgelanggang dari $(R, +, \cdot)$ jika

a. $(R', +)$ adalah subgrup dari $(R, +)$ dan
b. Untuk setiap $x, y \in R'$, $x \cdot y \in R'$.

(Malik, Mordeson, & Sen, 1997)

Teorema 1.6.1.4 Misalkan R adalah gelanggang. Subhimpunan tak kosong R' dari R adalah subgelanggang dari R jika dan hanya jika $x - y \in R'$ dan $xy \in R'$ untuk setiap $x, y \in R'$. (Malik, Mordeson, & Sen, 1997)

Definisi 1.6.1.15 Misalkan R adalah gelanggang. Misalkan I adalah subhimpunan tak kosong dari R.

a. I adalah ideal kiri dari R jika untuk setiap $a, b \in I$ dan untuk setiap $r \in R, a - b \in I, ra \in I$.
b. I adalah ideal kanan dari R jika untuk setiap $a, b \in I$ dan untuk setiap $r \in R, a - b \in I, ra \in I$.
c. I adalah ideal dari R jika I adalah ideal kiri sekaligus ideal kanan dari R.

(Malik, Mordeson, & Sen, 1997)

Definisi 1.6.1.16 Misalkan R adalah gelanggang dan M adalah ideal dari R. M adalah ideal maksimal dari R jika $M \neq R$ dan tidak terdapat ideal I dari R yang memenuhi $M \subset I \subset R$. (Malik, Mordeson, & Sen, 1997)

Definisi 1.6.1.17 Jika R gelanggang dan I adalah ideal dari R, maka gelanggang $(R/I, +, \cdot)$ adalah gelanggang *quotient* R oleh I dimana $R/I = \{x + I | x \in R\}$. (Malik, Mordeson, & Sen, 1997)

Definisi 1.6.1.18 Misalkan $(R, +, \cdot)$ dan $(R', +', \cdot')$ adalah gelanggang dan f adalah fungsi dari R ke R'. Maka f adalah homomorfisma dari R ke R' jika untuk setiap $a, b \in R$ memenuhi:

$$f(a + b) = f(a) +' f(b) \tag{10}$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot' f(b) \tag{11}$$

(Suryanti, 2018)

Definisi 1.6.1.19 Misalkan $f: R \to R'$ adalah homomorfisma gelanggang, maka

a. Jika f injektif maka f dinamakan monomorfisma
b. Jika f surjektif maka f dinamakan epimorfisma
c. Jika f bijektif maka f dinamakan isomorfisma
d. Jika $G = H$ maka f dinamakan endomorfisma
e. Jika $G = H$ dan f bijektif maka f dinamakan automorfisma

(Suryanti, 2018)

Definisi 1.6.1.20 Jika $f: G \to H$ homomorfisma gelanggang, $kernel\, f$ adalah

$$\ker f = \{g \in G | f(g) = e_h\} \tag{12}$$

dan *image* dari f adalah

$$\mathrm{im}\, f = \{h \in H | f(g) = h, \text{untuk } g \in G\} \tag{13}$$

(Suryanti, 2018)

Definisi 1.6.1.21 Lapangan adalah himpunan $\mathbb{F}$, memuat paling sedikit 2 elemen, yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan (dinotasikan dengan $+$) dan perkalian (dinotasikan dengan ·), dimana memenuhi aksioma berikut:

1. $\mathbb{F}$ adalah grup komutatif terhadap pejumlahan.
2. Himpunan $\mathbb{F}^*$ adalah semua elemen tak nol di $\mathbb{F}$ adalah grup terhadap perkalian.
3. (distributif) untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{F}$,
   $(a+b)c = ac + bc$ dan $c(a+b) = ca + cb$ (14)

(Roman, 2007)

Contoh 1.6.1.6 Misalkan $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ maka $\mathbb{F}$ adalah lapangan terhadap operasi penjumlahan dan operasi perkalian.

1.6.2 Ruang Vektor

Pada subab ini dibahas tentang ruang vektor, subruang, basis, fungsional linear, ruang dual, basis dual, pemetaan linear, isomorfisma, pemetaan konjugat linear, involusi linear, konjugat involusi linear, invarian, dan pemetaan bilinear.

Definisi 1.6.2.1 Misalkan $\mathbb{F}$ adalah lapangan, yang elemennya disebut skalar. Ruang vektor atas $\mathbb{F}$ adalah himpunan tak kosong, yang elemennya disebut sebagai vektor, yang dilengkapi dengan dua operasi. Operasi pertama yaitu penjumlahan dan dinotasikan dengan $(+)$ sehingga untuk setiap pasangan $(u, v) \in V \times V$ dari vektor di V maka vektor $u + v$ juga di V. Operasi kedua, dikatakan perkalian skalar sehingga untuk setiap pasangan $(r, u) \in \mathbb{F} \times V$ maka vektor rv di V. Selanjutnya, aksioma-aksioma berikut harus terpenuhi:

1. (Asosiatif terhadap penjumlahan)
$$u + (v + w) = (u + v) + w \tag{15}$$
   untuk setiap vektor $u, v, w \in V$.
2. (Komutatif terhadap penjumlahan)
$$u + v = v + u \tag{16}$$
   untuk setiap vektor $u, v \in V$.
3. (Terdapat elemen **0**)
   Terdapat vektor $\mathbf{0} \in V$, dengan sifat
$$\mathbf{0} + u = u + \mathbf{0} = u \tag{17}$$
   untuk setiap vektor $u \in V$.
4. (Terdapat invers penjumlahan)
   untuk setiap vektor $u \in V$, terdapat vektor di V, dinotasikan dengan $-u$, dengan sifat
$$u + (-u) = (-u) + u = \mathbf{0} \tag{18}$$
5. (Aksioma perkalian skalar)

$$r(u+v) = ru + rv \quad (19)$$

$$(r+s)u = ru + su \quad (20)$$

$$(rs)u = r(su) \quad (21)$$

$$1u = u \quad (22)$$

untuk setiap $u, v \in V$ dan skalar $r, s \in \mathbb{F}$.

(Roman, 2007)

Contoh 1.6.2.1 Misalkan $V = \mathbb{C}$ maka V adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$

Teorema 1.6.2.1 Jika W adalah himpunan satu atau lebih vektor di ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{F}$, maka W adalah subruang dari V jika dan hanya jika kondisi berikut memenuhi.

1. Jika u dan v vektor di W, maka $u + v$ di W.
2. Jika k adalah skalar di $\mathbb{F}$ dan u adalah vektor di W, maka ku di W.

(Roman, 2007)

Contoh 1.6.2.2 Ruang vektor $\mathbb{R}$ atas lapangan $\mathbb{R}$ adalah subruang dari ruang vektor dari $\mathbb{C}$ atas lapangan $\mathbb{R}$.

Definisi 1.6.2.3 Misalkan V adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Subruang direntang (atau digeneret) oleh himpunan S dari vektor di V adalah himpunan semua kombinasi linear dari vektor di S

$$\langle S \rangle = \{r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n | r_i \in \mathbb{F}, v_i \in V\} \quad (23)$$

dengan $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ adalah himpunan terbatas. Bentuk $r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n$ dengan $r_i \in \mathbb{F}, v_i \in V$ untuk setiap i, adalah kombinasi linear dari vektor $v_1, \dots, v_n$. (Roman, 2007)

Definisi 1.6.2.4 Himpunan tak kosong S dari vektor di V bebas linear jika untuk sebarang $v_1, \dots, v_n$ di V, diperoleh

$$r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n = \mathbf{0} \rightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0 \quad (24)$$

Jika himpunan dari vektor tidak bebas linear, maka himpunan tersebut disebut bergantung linear. (Roman, 2007)

Definisi 1.6.2.5 Himpunan vektor di V yang bebas linear dan mengeneret V disebut basis untuk V. (Roman, 2007)

Definisi 1.6.2.6 Fungsional linear pada ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{F}$ adalah pemetaan $\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}$ yang memenuhi

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ dan } \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \quad (25)$$

untuk setiap $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$. (Roman, 2007)

Definisi 1.6.2.7 Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$, didefinisikan ruang dual V^* adalah himpunan semua fungsional linear $\varphi: V \to \mathbb{F}$. (Roman, 2007)

Contoh 1.6.2.3 Misalkan $V = \mathbb{R}^3$ dan $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, maka $\varphi(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$ adalah anggota dari V^*.

Teorema 1.6.2.2 Misalkan $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ adalah basis dari V. fungsional linear $\varphi_1, \dots \varphi_n$ didefinisikan oleh $\varphi_i(v_j) = \delta_{i,j}$ adalah basis untuk ruang dual V^* untuk $j = 1, \dots, n$ dimana δ_{ij} adalah fungsi Kronecker delta, yang didefinisikan oleh $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{jika } i = j \\ 0, \text{jika } i \neq j \end{cases}$, Basis $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ adalah basis dual untuk B. (Roman, 2007)

Definisi 1.6.2.8 Diberikan ruang vektor V_1 dan V_2 atas lapangan $\mathbb{F}$, maka fungsi $\varphi: V_1 \to V_2$ disebut transformasi linear jika memenuhi aksioma sebagai berikut:

a. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, untuk setiap $u, v \in V_1$.
b. $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $v \in V_1$.

Jika f adalah fungsi bijektif adalah isomorfisma. (Roman, 2007)

Definisi 1.6.2.9 Diberikan ruang vektor V_1 dan V_2 atas lapangan $\mathbb{F}$, maka fungsi $\varphi: V_1 \to V_2$ disebut transformasi konjugat linear jika memenuhi aksioma sebagai berikut:

a. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, untuk setiap $u, v \in V_1$.
b. $\varphi(\alpha v) = \bar{\alpha}\varphi(v)$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $v \in V_1$.

Definisi 1.6.2.10 Misalkan V adalah ruang vektor dan τ adalah operator linear pada V. Misalkan S adalah subruang dari V, S dikatakan invarian terhadap τ jika $\tau(S) \subset S$, yaitu $\tau(s) \in S$ untuk setiap $s \in S$. (Roman, 2007)

Contoh 1.6.2.4 Misalkan $V = \mathbb{Z}$ dan $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $\tau(x) = x$, $x \in \mathbb{Z}$. $2\mathbb{Z}$ adalah invarian terhadap τ.

Definisi 1.6.2.11 Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Involusi linear adalah operator linear $\sigma: V \to V$ yang memenuhi $\sigma^2 = I$.

Teorema 1.6.2.3 Misalkan V adalah ruang vektor dan misalkan $\sigma: V \to V$ adalah involusi linear. Maka nilai eigen dari σ adalah ± 1.

Definisi 1.6.2.12 Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Involusi linear adalah operator konjugat linear $\tau: V \to V$ yang memenuhi $\tau^2 = I$.

Definisi 1.6.2.13 Misalkan U, V dan W adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Misalkan $U \times V$ adalah perkalian kartesius dari U dan V seperti himpunan. Himpunan fungsi

$$f: U \times V \to W \tag{26}$$

adalah bilinear jika itu adalah linear pada kedua variable secara terpisah, yaitu, jika

$$f(ru + su', v) = rf(u, v) + sf(u', v) \tag{27}$$

dan

$$f(u, rv + sv') = rf(u, v) + sf(u, v') \tag{28}$$

Himpunan semua fungsi bilinear dari $U \times V$ ke W dinotasikan oleh $Hom_{\mathbb{F}}(U, V; W)$. Fungsional bilinear $f: U \times V \to \mathbb{F}$ dengan nilai di basis lapangan $\mathbb{F}$ disebut bentuk bilinear pada $U \times V$. (Roman, 2007)

Contoh 1.6.2.5 Jika A adalah aljabar $\mathbb{F}$, pemetaan perkalian $\mu: A \times A \to A$ didefinisikan oleh

$$\mu(a, b) = ab \tag{29}$$

adalah bilinear.

1.6.3 Aljabar $\mathbb{F}$ dan Quaternion $\mathbb{H}$

Pada subbab ini dibahas tentang aljabar $\mathbb{F}$ dan Quaternion $\mathbb{H}$.

Definisi 1.6.3.1 Ruang vektor A atas lapangan $\mathbb{F}$ dikatakan aljabar $\mathbb{F}$ jika untuk setiap vektor $u, v, w \in A$ didefinisikan perkalian $uv \in A$ memenuhi untuk setiap $u, v, w \in A$ dan setiap $\lambda \in \mathbb{F}$ diperoleh

$$u(v + w) = uv + uw \tag{30}$$

$$(u + v)w = uw + vw \tag{31}$$

$$\lambda(uv) = u(\lambda v) = (\lambda u)v \tag{32}$$

Aljabar A disebut aljabar asosiatif jika untuk setiap $u, v, w \in A$

$$(uv)w = u(vw) \tag{33}$$

Aljabar ini adalah dikatakan memiliki elemen identitas e jika $eu = ue = u$ untuk setiap $u \in A$. (Bauerle & Kerf, 1990)

Contoh 1.6.3.1 Misalkan $A = \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ didefinisikan operasi sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \end{pmatrix} \tag{36}$$

dimana $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in A$ dan $\lambda \in \mathbb{F}$

diperoleh bahwa $A = \mathbb{R}^2$ adalah aljabar $\mathbb{F}$.

Definisi 1.6.3.2 Quaternion $\mathbb{H}$ adalah aljabar $\mathbb{R}$ dengan basis $\{1, i, j, k\}$ dan memenuhi kondisi berikut.

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (37)$$

(Voight, 2021)

Quaternion $\mathbb{H}$ bersifat asosiatif tetapi tidak bersifat komutatif terhadap operasi perkalian. Diberikan sebuah quaternion $\mathbb{H}$ misal $q \in \mathbb{H}$ maka q dapat dituliskan sebagai berikut:

$$q = a + bi + cj + dk, \;\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (38)$$

Selanjutnya, didefinisikan konjugat quaternion dengan bentuk

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk \quad (39)$$

Sehingga

$$q\bar{q} = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R} \quad (40)$$

dimana $|q|$ adalah panjang dari q sebagai vektor di $\mathbb{R}^4$. Jadi, jika $q \neq 0$ maka itu dapat diinverskan yaitu:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \quad (41)$$

Selain itu, setiap elemen di quaternion juga bisa dituliskan atas bilangan kompleks yaitu:

$$\begin{aligned} q &= a + bi + cj + ck \\ &= (a + bi) + (c + di)j \\ &= (a + bi) + j(c - di) \\ &= z_1 + jz_2 \end{aligned} \quad (42)$$

dengan $z_1 = a + bi$ dan $z_2 = c - di$ Perkalian quaternionnya yaitu:

$$xy = (z_1 + jz_2)(w_1 + jw_2) = (z_1w_1 - \bar{z}_2w_2) + j(\bar{z}_1w_2 + z_2w_1) \quad (43)$$

untuk $x = z_1 + jz_2, y = w_1 + jw_2$. $\mathbb{H}$ dan $\mathbb{C}^2$ isomorfik sebagai ruang vektor $\mathbb{C}$:

$$z_1 + jz_2 \rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (44)$$

(Kori, 2023)

1.6.4 Teori Modul

Pada subbab ini dibahas tentang modul, submodul, *direct sum*, modul yang dibangun oleh suatu himpunan, homomorfisma modul, dan isomorfisma modul.

Teori modul merupakan perluasan dari ruang vektor. Alasan diperlukan teori modul adalah untuk mempelajari struktur dari suatu aljabar ketika suatu lapangan di ruang vektor digantikan dengan suatu gelanggang.

Definisi 1.6.4.1

1. Diberikan grup komutatif $(M, +)$ dan gelanggang R dengan elemen satuan 1_R, serta operasi $\circ : R \times M \to M$. Grup M disebut modul kiri atas gelanggang R apabila memenuhi aksioma-aksioma:
   a. $r_1 \circ (m_1 + m_2) = r_1 \circ m_1 + r_1 \circ m_2$
   b. $(r_1 + r_2) \circ m_1 = r_1 \circ m_1 + r_2 \circ m_1$
   c. $(r_1 \cdot r_2) \circ m_1 = r_1 \circ (r_2 \circ m_1)$
   d. $1_R \circ m_1 = m_1$

   untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$.

2. Diberikan grup komutatif $(M, +)$ dan gelanggang R dengan elemen satuan 1_R, serta operasi $\circ : M \times R \to M$. Grup M disebut modul kanan atas gelanggang R apabila memenuhi aksioma-aksioma:
   a. $(m_1 + m_2) \circ r_1 = m_1 \circ r_1 + m_2 \circ r_1$
   b. $m_1 \circ (r_1 + r_2) = m_1 \circ r_1 + m_1 \circ r_2$
   c. $m_1 \circ (r_1 \cdot r_2) = (m_1 \circ r_1) \circ r_2$
   d. $m_1 \circ 1_R = m_1$

   untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$.

3. M disebut modul atas gelanggang R jika M merupakan modul kiri sekaligus modul kanan.

(Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Contoh 1.6.4.1 $\mathbb{H}$ adalah modul atas gelanggang $\mathbb{R}$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{H}$ adalah modul kiri atas gelanggang $\mathbb{R}$.

Definisikan pemetaan

$$\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

dengan

$$\circ\, (x, a + bi + cj + dk) \to xa + xbi + xcj + xdk$$

maka diperoleh

a. $x_1 \circ \big((a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)\big)$
$= x_1 \circ \big((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k\big)$
$= x_1(a_1 + a_2) + x_1(b_1 + b_2)i + x_1(c_1 + c_2)j + x_1(d_1 + d_2)k$
$= (x_1 a_1 + x_1 b_1 i + x_1 c_1 j + x_1 d_1 k) + (x_1 a_2 + x_1 b_2 i + x_1 c_2 j + x_1 d_2 k)$
$= x_1 \circ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + x_1 \circ (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k).$

b. $(x_1 + x_2) \circ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)$
$= \big((x_1 + x_2)a_1 + (x_1 + x_2)b_1 i + (x_1 + x_2)c_1 j + (x_1 + x_2)d_1 k\big)$

$= (x_1a_1 + x_1b_1i + x_1c_1j + x_1d_1k) + (x_2a_1 + x_2b_1i + x_2c_1j + x_2d_1k)$
$= x_1 \circ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + x_2 \circ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k).$

c. $(x_1 \cdot x_2) \circ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)$
$= \big((x_1 \cdot x_2)a_1 + (x_1 \cdot x_2)b_1i + (x_1 \cdot x_2)c_1j + (x_1 \cdot x_2)d_1k\big)$
$= (x_1(x_2a_1) + x_1(x_2b_1)i + x_1(x_2c_1)j + x_1(x_2d_1)k)$
$= x_1 \circ (x_2a_1 + x_2b_1i + x_2c_1j + x_2d_1k)$
$= x_1 \circ \big(x_2 \circ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)\big).$

d. $1_{\mathbb{R}} \circ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)$
$= (1_{\mathbb{R}}a_1 + 1_{\mathbb{R}}b_1i + 1_{\mathbb{R}}c_1j + 1_{\mathbb{R}}d_1k)$
$= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k).$

dimana $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan $(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k), (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \in \mathbb{H}$ dengan $a_1, a_2, \dots, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Sehingga, diperoleh bahwa $\mathbb{H}$ adalah modul kiri atas gelanggang $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ adalah gelanggang komutatif maka $\mathbb{H}$ adalah modul kiri sekaligus modul kanan atas gelanggang $\mathbb{R}$. Sehingga, $\mathbb{H}$ adalah modul atas gelanggang $\mathbb{R}$. (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Definisi 1.6.4.2 Misalkan R adalah gelanggang dengan elemen satuan dan M adalah suatu modul atas R. Suatu subhimpunan tak kosong $S \subseteq M$ disebut submodul dari M jika S merupakan subgrup dari M terhadap operasi penjumlahan serta S juga merupakan modul atas R terhadap operasi perkalian scalar yang sama dengan yang berlaku di M. (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Untuk memudahkan dalam menentukan suatu himpunan merupakan submodul, maka diberikan satu teorema yaitu:

Teorema 1.6.4.1 Diberikan modul M atas gelanggang R dan himpunan tak kosong $S \subseteq M$. S merupakan submodul di M jika dan hanya jika memenuhi sifat:

a. $(\forall s_1, s_2 \in S)\ s_1 - s_2 \in S.$
b. $(\forall r \in R)(\forall s \in S)\ r \circ s \in S.$

(Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Contoh 1.6.4.2 Pada modul $\mathbb{Z}$ atas gelanggang $\mathbb{Z}$, himpunan $n\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$.

Lemma 1.6.4.1 Diberikan modul M atas gelanggang R. Jika S_1 dan S_2 merupakan submodul di M, maka:

a. $S_1 \cap S_2$ merupakan submodul di M.
b. $S_1 + S_2$ merupakan submodul di M.

(Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Definisi 1.6.4.3 Misalkan S_1 dan S_2 adalah submodul-submodul di M dengan sifat $S_1 + S_2 = M$ dan $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, maka modul M disebut dengan *direct sum* dari S_1 dan S_2 yang dinotasikan dengan $M = S_1 \oplus S_2$. (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Teorema 1.6.4.2 Misalkan modul M atas gelanggang R serta himpunan $X \subseteq M$. Jika $\mathfrak{G}_X = \{S_i | S_i \text{ submodul dan } X \subseteq S_i\}$, maka diperoleh $\bigcap_{S_i \in \mathfrak{G}_X} S_i = \langle X \rangle$. (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Berdasarkan Teorema 1.6.4.2, diperoleh kesimpulan bahwa submodul terkecil yang memuat himpunan X adalah himpunan semua kombinasi linear dari elemen-elemen di dalam himpunan X, dinotasikan dengan $\langle X \rangle$. Jelas bahwa $\langle X \rangle \subseteq M$. Jika $\langle X \rangle = M$, maka dapat dituliskan definisi modul yang dibangun oleh suatu himpunan sebagai berikut:

Definisi 1.6.4.4 Misalkan modul M atas gelanggang R dan himpunan $X \subseteq M$. Jika $\langle X \rangle = M$, maka M disebut modul yang dibangun oleh X dengan $\langle X \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \, | r_i \in R \text{ dan } x_i \in X\}$. (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Contoh 1.6.4.3 Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah modul atas gelanggang $\mathbb{Z}$ dan subhimpunan $X = \{3,6,9\}$ di $\mathbb{Z}$. Karena submodul di $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, maka submodul-submodul dari $\mathbb{Z}$ yang memuat himpunan X adalah submodul $3\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ sendiri. Akibatnya, diperoleh submodul yang dibangun oleh X adalah submodul $3\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$.

Definisi 1.6.4.5 Misalkan modul M atas gelanggang R dan S adalah submodul dari M. Maka M/S adalah modul atas gelanggang R dengan operasi $\circ : R \otimes M/S \to M/S$ yaitu $r \circ (m + S) = rm + S$, dimana $r \in R, m \in M$. M/S selanjutnya disebut dengan modul *quotient* dari submodul S di M. (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Definisi 1.6.4.6 Misalkan modul M dan M' atas gelanggang R serta fungsi $f: M \to M'$. Fungsi f disebut homomorfisma modul atas gelanggang R jika untuk setiap $m_1, m_2 \in M$ dan $r \in R$ memenuhi:

a. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$
b. $f(r \circ m_1) = r \circ' f(m_1)$

Jika f adalah fungsi injektif adalah monomorfisma modul atas gelanggang R. Jika f adalah fungsi surjektif adalah epimorfisma modul atas gelanggang R. Jika f adalah fungsi bijektif adalah isomorfisma. (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Contoh 1.6.4.4 Misalkan $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}[X]$ keduanya merupakan modul atas gelanggang $\mathbb{Z}$. Fungsi $\theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[X]$ dengan definisi $\theta(a) = aX^3$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, merupakan homomorfisma modul atas gelanggang $\mathbb{Z}$.

Teorema 1.6.4.3 Misalkan modul M dan M' atas gelanggang R. Jika fungsi $f: M \to M'$ merupakan homomorfisma modul gelanggang R, maka berlaku $M/\ker f \cong \operatorname{im} f$. (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Definisi 1.6.4.7 Misalkan M adalah modul atas gelanggang R. Subruang S dari M adalah basis jika S adalah bebas linear dan membangun M. Modul M atas gelanggang R dikatakan bebas jika $M = \{0\}$ atau jika M adalah basis. Jika S adalah basis untuk M, ini disebut M bebas pada S. (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2017)

Definisi 1.6.4.8 Misalkan M adalah modul atas gelanggang R. M dikatakan bebas jika M memiliki basis. Jika B adalah basis M, maka M dikatakan bebas pada B. (Roman, 2007)

Contoh 1.6.4.5 Misalkan $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dan $R = \mathbb{Z}$ serta $B = \{(1,1)\}$. Diperoleh M bebas pada B.

1.6.5 Aljabar Lie

Pada subbab ini dibahas tentang aljabar Lie, subaljabar Lie, ideal aljabar Lie, aljabar Lie solvabel, aljabar Lie nilpoten, homomorfisma aljabar Lie, isomorfisma aljabar Lie, adjoin representasi, dan aljabar Lie bebas.

Aljabar Lie dikembangkan oleh Marius Shopus Lie (1842-1899). Kemudian, pada tahun 1900 Barleue dalam bukunya memberikan definisi aljabar Lie sebagai berikut:

Definisi 1.6.5.1 Aljabar Lie real atau kompleks berdimensi hingga adalah ruang vektor real atau kompleks berdimensi hingga L, bersama dengan peta $[\cdot,\cdot]$ dari $L \times L$ ke L, dengan sifat-sifat sebagai berikut:

1. $[\cdot,\cdot]$ adalah bilinear.
$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \tag{45}$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y] \tag{46}$$
untuk setiap $X, Y, Z \in L$ dan setiap $a, b \in \mathbb{F}$, dimana $\mathbb{F}$ dalam hal ini $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.
2. $[\cdot,\cdot]$ anti simetri:
$$[X, Y] = -[Y, X] \text{ untuk setiap } X, Y \in L \tag{47}$$
3. Memenuhi identitas Jacobi:
$$\big[X, [Y, Z]\big] + \big[Y, [Z.X]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] = 0 \tag{48}$$
untuk setiap $X, Y, Z \in L$.

(Bauerle & Kerf, 1990)

Contoh 1.6.5.1 Misalkan $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ adalah ruang $X \in M_n(\mathbb{C})$ dimana trace$(X) = 0$. Maka $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ adalah aljabar Lie dengan bracket $[X, Y] = XY - YX$.

Bukti:

Pertama akan ditunjukkan bahwa memenuhi sifat bilinear

$$\begin{aligned}[aX + bY, Z] &= (aX + bY)Z - Z(aX + bY) \\ &= a(XZ - ZX) + b(YZ - ZY) \\ &= a[X, Z] + b[Y, Z]\end{aligned} \tag{49}$$

$$[X, aY + bZ] = X(aY + bZ) - (aY + bZ)X \tag{50}$$

$$= a(XY - YX) + b(XZ - ZX)$$

$$= a[X,Y] + b[X,Z]$$

untuk setiap $X, Y, Z \in \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ dan setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan anti simetri

$$[X+Y, X+Y] = 0 \rightarrow [X, X+Y] + [Y, X+Y] = 0 \tag{51}$$

$$\rightarrow [X,X] + [X,Y] + [Y,X] + [Y,Y] = 0$$

$$\rightarrow [X,Y] = -[Y,X]$$

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa memenuhi sifat identitas Jacobi

$$\big[X, [Y,Z]\big] = [X, YZ - ZY] \tag{52}$$

$$= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X$$

$$= XYZ - XZY - YZX + ZYX$$

$$\big[Y, [Z,X]\big] = [Y, ZX - XZ] \tag{53}$$

$$= Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y$$

$$= YZX - YXZ - ZXY + XZY$$

$$\big[Z, [X,Y]\big] = [Z, XY - YX] \tag{54}$$

$$= Z(XY - YX) - (XY - YX)Z$$

$$= ZXY - ZYX - XYZ + YXZ$$

Sehingga diperoleh

$$\big[X, [Y,Z]\big] + \big[Y, [Z,X]\big] + \big[Z, [X,Y]\big] = 0 \tag{55}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ adalah aljabar Lie dengan braket $[X,Y] = XY - YX$.

Selanjutnya, Aljabar Lie juga memiliki sifat komutatif yang kemudian disebut sebagai aljabar Lie abelian atau komutatif. Untuk definisinya sebagai berikut:

Definisi 1.6.5.2 Aljabar Lie L adalah abelian atau komutatif jika

$$[x,y] = 0 \tag{56}$$

untuk setiap $x, y \in L$. (Bauerle & Kerf, 1990)

Contoh 1.6.5.2 Jika $L \subset M_2(\mathbb{C})$ menotasikan matriks 2×2 dengan bentuk

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \tag{57}$$

dimana a, b di $\mathbb{C}$. L adalah aljabar Lie dengan bracket $[X, Y] = XY - YX$. Aljabar Lie L adalah abelian.

Suatu aljabar Lie juga memiliki subaljabar yang dinamakan dengan subaljabar dari aljabar Lie real atau kompleks yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.6.5.3 Subaljabar dari real atau aljabar Lie kompleks L adalah suatu subruang M dari L memenuhi $[H_1, H_2] \in M$ untuk setiap $H_1, H_2 \in M$. (Hall, 2015)

Dalam subaljabar dari aljabar Lie real atau kompleks terdapat istilah ideal yang definisinya sebagai berikut:

Definisi 1.6.5.4 Subaljabar M dari aljabar Lie L dikatakan ideal di L jika $[X, H] \in M$ untuk setiap $x \in L$ dan $H \in M$. (Hall, 2015)

Definisi 1.6.5.5 Misalkan L adalah aljabar Lie. Barisan $L_0, L_1, \dots, L_n, \dots$ didefinisikan

$$L_0 \coloneqq L, L_1 \coloneqq [L_0, L_0], \dots, L_n \coloneqq [L_{n-1}, L_{n-1}], \dots \tag{58}$$

disebut barisan *derived*. (Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.5.6 Aljabar Lie L disebut solvabel jika $L_n = 0$ untuk beberapa $n \in \mathbb{N}$. (Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.5.7 Misalkan L adalah aljabar Lie. Barisan $L^0, L^1, \dots, L^n, \dots$ didefinisikan

$$L^0 \coloneqq L, L^1 \coloneqq [L, L], L^2 \coloneqq [L, L^1], \dots, L^n \coloneqq [L, L^{n-1}], \dots \tag{59}$$

disebut barisan *descending central*. (Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.5.8 Aljabar Lie L disebut nilpoten jika terdapat $n \in \mathbb{N}$ memenuhi $L^n = \mathbf{0}$. (Bauerle & Kerf, 1990)

Lemma 1.6.5.1 Misalkan I dan K adalah ideal di L. Maka jumlahan $I + K$, irisan $I \cap K$ dan kommutator $[I, K]$ adalah ideal di L. (Bauerle & Kerf, 1990)

Contoh 1.6.5.3 Aljabar Lie komutatif adalah aljabar Lie solvabel.

Definisi 1.6.5.9 Jika L dan N adalah aljabar Lie, maka pemetaan linear $\phi: L \to N$ dikatakan suatu homomorfisma aljabar Lie jika $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ untuk setiap $X, Y \in L$. Jika ϕ adalah pemetaan injektif dan surjektif, maka ϕ dikatakan isomorfisma aljabar Lie. L dan N adalah isomorfik yang dinotasikan dengan $L \cong N$. (Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.5.10 Isomorfisma $\phi: L \to L$ disebut automorfisma. (Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.5.11 Jika L adalah aljabar Lie dan x adalah elemen dari L, didefinisikan pemetaan linear ad $x(y) : L \to L$ dengan ad $x(y) \coloneqq [x, y]$. Pemetaan $x \to$ ad x adalah pemetaan adjoin atau representasi adjoin. (Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.5.12 Misalkan L adalah aljabar Lie atas $\mathbb{F}$ digeneret oleh himpunan X. L dikatakan bebas pada X jika, dengan sebarang pemetaan ϕ dari X ke aljabar Lie M, terdapat homomorfisma tunggal $\psi: L \to M$ perluasan ϕ. (Bauerle & Kerf, 1990)

Teorema 1.6.5.1 Misalkan ψ adalah homomorfisma aljabar Lie dari aljabar Lie K ke aljabar Lie L dan misalkan I adalah ideal di K dimuat di *kernel* ψ yaitu $I \subset$ ker ψ. Maka terdapat homomorfisma ϕ dari K/I ke L memenuhi

$$\psi = \phi \circ \Psi \tag{60}$$

dimana $\Psi: K \to K/I$ adalah proyeksi kanonik. (Bauerle & Kerf, 1990)

1.6.6 Aljabar Lie Sederhana

Pada subbab ini dibahas tentang aljabar Lie sederhana.

Definisi 1.6.6.1 Aljabar Lie L dikatakan dikatakan sederhana jika L tidak komutatif dan tidak memiliki ideal sejati. (Bauerle & Kerf, 1990)

Contoh 1.6.6.1 Aljabar Lie $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ adalah sederhana.

Bukti:

Akan digunakan basis untuk $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$;

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

Sehingga diperoleh

$[X,Y] = H, [H,X] = 2X,$ dan $[H,Y] = -2Y$. Misalkan K adalah ideal di $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ dan K memuat element $Z = aX + bH + cY$, dimana $a, b,$ dan c tidak semua nol. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa, $K = \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$, Pertama misalkan bahwa $c \neq 0$. Maka elemen

$$\big[X,[X,Z]\big] = [X,(-2bX + cH)] = -2cX \tag{62}$$

adalah suatu kelipatan tak nol dari X. Karena K adalah ideal, diperoleh bahwa $X \in K$. Tetapi $[Y,X]$ adalah kelipatan tak nol dari H dan $\big[Y,[Y,X]\big]$ adalah kelipatan tak nol dari Y, yang menunjukkan bahwa Y dan H ada di K, sehingga dapat diperoleh bahwa $K = \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$. Selanjutnya, misalkan $c = 0$ tetapi $b \neq 0$. Maka $[X,Z]$ adalah kelipatan tak nol dari X dan dengan menggunakan cara serupa pada kasus sebelumnya diperoleh $K = \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$. Terakhir, jika $c = 0$ dan $b = 0$ tetapi $a \neq 0$, maka Z adalah kelipatan tak nol dari X sehingga kita peroleh bahwa $K = \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$.

1.6.7 Aljabar Lie Semisederhana

Pada subbab ini dibahas tentang aljabar Lie semisederhana.

Definisi 1.6.7.1 Aljabar Lie L dikatakan semisederhana jika L tidak memuat ideal solvabel tak nol. (Bauerle & Kerf, 1990)

Lemma 1.6.7.1 Aljabar Lie L adalah semisederhana jika dan hanya jika L tidak memuat ideal abelian tak nol. (Bauerle & Kerf, 1990)

Lemma 1.6.7.2 Setiap aljabar Lie sederhana adalah semisederhana. (Bauerle & Kerf, 1990)

Teorema 1.6.7.1 Jika L adalah aljabar Lie semisederhana dan $I \subset L$ adalah ideal maka ada ideal $J \subset L$ memenuhi $L = I \oplus J$. (Bauerle & Kerf, 1990)

Akibat 1.6.7.1 Aljabar Lie L adalah semisederhana jika dan hanya jika L merupakan *direct sum* dari aljabar Lie sederhana. (Bauerle & Kerf, 1990)

Contoh 1.6.7.1 Aljabar Lie $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ adalah semisederhana.

1.6.8 Kompleksifikasi dari Aljabar Lie Real

Pada subbab ini dibahas tentang Kompleksifikasi aljabar Lie real.

Definisi 1.6.8.1 Jika V adalah ruang vektor real berdimensi hingga, maka Kompleksifikasi dari V, dinotasikan $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ adalah ruang bentuk kombinasi linear

$$v_1 + iv_2, \quad (63)$$

dengan $v_1, v_2 \in V$. (Hall, 2015)

Contoh 1.6.8.1

1. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ adalah aljabar Lie kompleks dan merupakan kompleksifikasi dari $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.
2. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ adalah aljabar Lie kompleks dan merupakan kompleksifikasi dari $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

1.6.9 Subaljabar Cartan dan Teorema Serre

Pada subbab ini dibahas tentang subaljabar Cartan dan Teorema Serre.

Definisi 1.6.9.1 Misalkan H adalah subaljabar dari aljabar Lie L. Normaliser $N(H)$ dari H di L didefinisikan sebagai

$$N(H) = \{x \in L \mid \forall h \in H : \ [h,x] \in H\} \quad (64)$$

(Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.9.2 Subaljabar H dari L disebut subaljabar Cartan jika H adalah nilpotent dan $H = N(H)$.

Misalkan L adalah aljabar Lie semisederhana, H adalah subaljabar Cartan, Δ adalah sistem akar yang bersesuaian, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ adalah basis yang ditetapkan. Mengingat bahwa

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \alpha_i(h_j) \quad (h_j = h_{\alpha_j}) \quad (65)$$

Ditetapkan himpunan standar generator $x_i \in L_{\alpha_i}$, $y_i \in L_{-\alpha_i}$, sehingga

$$[x_i y_i] = h_i \quad (66)$$

(Bauerle & Kerf, 1990)

Proposisi 1.6.9.1 Misalkan L digeneret oleh $\{e_i, f_i, h_i | 1 \leq i \leq n\}$, dan generator tersebut memenuhi paling sedikit relasi berikut:

1) $[h_i, h_j] = 0 \qquad (1 \leq i, j \leq n)$
2) $[e_i, f_i] = h_i, [e_i, f_j] = 0$ jika $i \neq j$
3) $[h_i, e_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle e_j$, $[h_i, f_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle f_j$
4) (ad $e_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(e_j) = 0 \quad (i \neq j)$
5) (ad $f_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(f_j) = 0 \quad (i \neq j)$

Misalkan L_0 adalah aljabar Lie bebas pada generator $3n$, $X = \{e_i, f_i, h_i; 1 \leq i \leq n\}$. Misalkan I_0 adalah ideal di L_0 digeneret oleh elemen:

$$[h_i, h_j], [e_i, f_j] = -\delta_{ij} h_i, [h_i, e_j] = -c_{ji} e_j, , [h_i, f_j] = c_{ji} f_j \quad (67)$$

(Humphreys, 2010)

Teorema 1.6.9.1 $M_0 = L_0 / I_0$ adalah aljabar Lie kompleks dengan generator $\{e_i, f_i, h_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan relasi (1)-(3). Elemen $h_i; 1 \leq i \leq n$, adalah basis dari subaljabar abelian H_0 berdimensi n dari M_0 dan

$$M_0 = F_0 \oplus H_0 \oplus E_0 \quad (68)$$

dimana F_0 adalah subaljabar dari M_0 digeneret oleh $f_1, \ldots, f_n$ dan E_0 adalah subaljabar dari M_0 digeneret oleh $e_1, \ldots, e_n$.

Misalkan $\widetilde{I_0}$ adalah ideal dari M_0 digeneret setiap $e_{ij} =$ (ad $e_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(e_j)$ dan $f_{ij} =$ (ad $f_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(f_j)$. (Humphreys, 2010)

Teorema 1.6.9.2 (Teorema Serre) Misalkan Π adalah sistem akar dan misalkan $L = M_0 / I_0$ aljabar Lie yang digeneret oleh $3n$ elemen $\{e_i, f_i, h_i; 1 \leq i \leq n\}$, dan relasi (1)-(5). Misalkan L adalah dimensi terbatas aljabar semisimple, dengan subaljabar Cartan yang dispan oleh h_i dan dengan system akar Π yang bersesuaian. (Humphreys, 2010)

1.6.10 Akar dan Ruang Akar

Pada subbab ini dibahas tentang akar dan ruang akar dari aljabar Lie.

Definisi 1.6.10.1 Elemen tak nol α dari H adalah akar (untuk L relatif terhadap H) jika terdapat tak nol $X \in L$ memenuhi $[h, X] = \langle \alpha, h \rangle X$ untuk setiap h di H. Himpunan semua akar dinotasikan dengan Δ. (Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.10.2 Jika α adalah akar, makar ruang akar L_α adalah ruang dari setiap X di L dimana $[h, X] = \langle \alpha, h \rangle X$ untuk setiap h di H. Elemen tak nol dari L_α disebut akar vektor untuk α. (Bauerle & Kerf, 1990)

Proposisi 1.6.10.1 Aljabar Lie L bisa didekomposisi sebagai *direct sum* dari ruang vektor sebagai berikut:

$$L = L_0 \oplus e_0 \oplus f_0$$
$$e_0 = \sum_{\alpha \in \Delta^+} L_\alpha, \tag{69}$$
$$f_0 = \sum_{\alpha \in \Delta^-} L_\alpha$$

dimana $\Delta^+ = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n \neq 0; k_n \geq 0\ \forall n\}$ dan $\Delta^- = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n \neq 0; k_n \leq 0\ \forall n\}$. (Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.10.3 Misalkan elemen $\alpha \neq 0$ di akar *lattice* Q, yaitu akar dengan bentuk $Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$, dimana $L_\alpha \neq 0$ disebut akar. Himpunan semua akar disebut sistem akar dan itu adalah dinotasikan oleh Δ. Akar α_i $(i = 1,2,\ldots)$ dikatakan sederhana. Himpunan akar sederhana dinotasikan oleh $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ dan Π merupakan basis akar untuk Δ. Sedangkan, himpunan *co*-akar sederhana dinotasikan oleh $\Pi^V = \{\alpha_1^v, \alpha_2^v, \ldots, \alpha_n^v\}$ dan Π^v merupakan basis *co*-akar untuk Δ. Akar-akar tersebut terbagi kedalam dua subhimpunan yang ditentukan oleh

$$\Delta^+ \coloneqq \Delta \cap Q^+, \quad \Delta^- \coloneqq \Delta \cap Q^- \tag{70}$$

dan diketahui

$$\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-, \quad \Delta^+ \cap \Delta^- = \emptyset \tag{71}$$

Untuk $\alpha \in \Delta^+$ yang memiliki

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \qquad (k_i \in \mathbb{N} \equiv \{0,1,2,\ldots\}) \tag{72}$$

dengan

$$\text{ht } \alpha = \textstyle\sum_{i=1}^{n} k_i > 0 \tag{73}$$

akar tersebut disebut positif.

Untuk $\alpha \in \Delta^-$ yang memiliki

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \qquad (k_i \in -\mathbb{N} \equiv \{-0,-1,-2,\ldots\}) \tag{74}$$

dengan

$$\text{ht } \alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i < 0 \tag{75}$$

akar tersebut disebut negatif.

Kelipatan dari akar α didefinisikan dengan

$$\text{mult } \alpha \coloneqq \dim L_\alpha \tag{76}$$

Telah diperoleh pernyataan bahwa $\dim L_\alpha < \infty$. Untuk akar sederhana diperoleh

$$L_{\alpha_i} = \mathbb{C}e_i,\ \ L_{-\alpha_i} = \mathbb{C}f_i \tag{77}$$

dan

$$\text{mult } \alpha_i = \dim L_{\alpha_i} = 1 \tag{78}$$

Lebih lanjut kelipatan $k\alpha_i$ dari α_i yang merupakan akar-akarnya hanyalah α_i dan $-\alpha_i$. (Bauerle & Kerf, 1990)

Contoh 1.6.10.1 Misalkan $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ dan $\alpha \coloneqq \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ adalah akar dari L maka diperoleh himpunan akarnya adalah

$$\Delta = \{\pm\alpha\} \tag{79}$$

dan dekomposisi ruang akar

$$L = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{80}$$

Bukti:

Misalkan basis dari L adalah $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ maka

$$\begin{aligned} \text{ad } H(H) &= [H, H] = 0 \\ \text{ad } H(E) &= [H, E] = 2E \\ \text{ad } H(F) &= [H, F] = -2F \end{aligned} \tag{81}$$

maka diperoleh akar $\alpha = -2{,}0{,}2$ maka diperoleh dekomposisi ruang akar adalah

$$\begin{aligned} L &= L_0 \oplus L_2 \oplus L_{-2} \\ &= \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{82}$$

1.6.11 Modul pada Aljabar Lie dan Representasi Dimensi Terbatas dari Aljabar Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Pada subbab ini akan dibahas tentang modul pada aljabar Lie dan Representasi dari Aljabar Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Definisi 1.6.11.1 Representasi (linear) p dari aljabar Lie L adalah homomorfisma p dari L ke aljabar Lie $gl(V)$ dari operator linear pada ruang vektor V. Representasi matriks M

adalah homomorfisma M dari L ke aljabar Lie $gl(n,\mathbb{F})$ pada matriks $n \times n$. Representasi disebut *faithful* ketika representasinya adalah pemetaan injektif. (Bauerle & Kerf, 1990)

Misalkan p adalah representasi dari L. Maka setiap elemen x dari L dipetakan ke (dipresentasi oleh) operator linear $p(x)$ mengaksi pada V dan homomorfisma p. Sehingga, untuk setiap $x, y \in L$ dan setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$p: x \in L \to p(x) \in gl(V) \quad (83)$$

dengan

$$p(\alpha x + \beta y) = \alpha p(x) + \beta p(y) \quad (84)$$

dan

$$p([x,y]) = [p(x), p(y)] \quad (85)$$

Ketika operator $p(x)$ $(x \in L)$ adalah matriks representasi. Sehingga matriks representasi adalah pemetaan

$$M: x \in L \to M(x) \in gl(n,\mathbb{F}) \quad (86)$$

dimana (84) dan (85), diperoleh dengan mengganti p dengan M, berlaku. Ketika V dimensi terbatas, memilih basis di V mengubah representasi menjadi representasi matriks dan sebaliknya. Selanjutnya, operator linear yang berkorespondensi dengan x akan dinotasikan dengan x yang diikuti oleh titik, yaitu:

$$p(x) \equiv x\, \cdot \quad (87)$$

Definisi 1.6.11.2 Modul Lie $(V, L, \cdot)$ adalah ruang vektor V, aljabar Lie L dan pemetaan $L \times V \to V$, dinotasikan oleh $(x, v) \to x \cdot v$, dimana memenuhi untuk setiap $x, y \in L$, setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, dan setiap $v, w \in V$

$$x \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha(x \cdot v) + \beta(x \cdot w) \quad (88)$$

$$(\alpha x + \beta y) \cdot v = \alpha(x \cdot v) + \beta(y \cdot v) \quad (89)$$

dan

$$[x, y] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v \quad (90)$$

(Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.11.3 Modul Lie $(W, L, \cdot)$ adalah submodul Lie dari modul Lie $(V, L, \cdot)$ jika W adalah subruang dari V dan W adalah invarian atas aksi dari L. (Bauerle & Kerf, 1990)

Pada subbab ini dikonstruksi representasi dimensi terbatas dari aljabae Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ pada ruang vektor kompleks V. Untuk memperoleh representasi dari aljabar Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ cukup untuk konstruksi representasi untuk basis di aljabar Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Untuk $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ diperoleh basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (91)$$

diperoleh relasi komutasi

$$[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h \quad (92)$$

Misalkan V adalah dimensi terbatas modul $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Menotasikan operator linear merepresentasi aksi dari e, f, dan h oleh $e\,\cdot, f\,\cdot$ dan $h\,\cdot$, diperoleh definisi representasi

$$[h, e]\cdot = h \cdot e \cdot - e \cdot h \cdot = 2e\,\cdot \quad (93)$$

$$[h, f]\cdot = h \cdot f \cdot - f \cdot h \cdot = -2f\,\cdot \quad (94)$$

$$[e, f]\cdot = e \cdot f \cdot - f \cdot e \cdot = h\,\cdot \quad (95)$$

Perhatikan bahwa $e\,\cdot, f\,\cdot$, dan $h\,\cdot$ adalah operator liner pada ruang vektor V. Sekarang operator linear pada ruang vektor kompleks berdimensi hingga memiliki paling sedikit satu vektor eigen. Misalkan $v \in V$ adalah vektor eigen dari operator $h\,\cdot$, maka $v \neq 0$ dan

$$h \cdot v = \lambda v \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (96)$$

dari (93) diperoleh

$$h \cdot (e \cdot v) = e \cdot h \cdot v + 2e \cdot v \quad (97)$$

atau ekuivalen

$$h \cdot (e \cdot v) = (\lambda + 2) e \cdot v \quad (98)$$

demikian pula pada

$$h \cdot (f \cdot v) = f \cdot h \cdot v - 2f \cdot v \quad (99)$$

atau

$$h \cdot (f \cdot v) = (\lambda - 2) f \cdot v \quad (100)$$

Sehingga diperoleh

$$[h\,\cdot, (e\,\cdot)^k] = 2k (e\,\cdot)^k \quad (101)$$

$$[h\,\cdot, (f\,\cdot)^k] = -2k (f\,\cdot)^k \quad (102)$$

$$[e\,\cdot, (f\,\cdot)^k] = -k(k-1)(f\,\cdot)^{k-1} + k(f\,\cdot)^{k-1} h\,\cdot \quad (103)$$

Lemma 1.6.11.1 Misalkan V adalah modul $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ dan $v_0 \neq 0$ adalah vektor di V memenuhi

$$h \cdot v_0 = \gamma v_0 \quad (\gamma \in \mathbb{C}) \quad (104)$$

$$e \cdot v_0 = 0 \quad (105)$$

Misalkan vektor v_j didefinisikan oleh

$$v_j := (f\ \cdot)^j v_0 \tag{106}$$

Sehingga relasi berikut berlaku

$$h \cdot v_j = (\gamma - 2j)v_j \tag{107}$$

$$e \cdot v_j = j(\gamma - j + 1)v_{j-1} \tag{108}$$

$$f \cdot v_j = v_{j+1} \tag{109}$$

(Bauerle & Kerf, 1990)

1.6.12 Tensor *Product* dan Aljabar Enveloping Umum

Pada subbab ini dibahas tentang pemetaan multilinear, tensor *product*, *graded*, aljabar tensor, aljabar enveloping umum.

Definisi 1.6.12.2 Jika U dan V adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$, maka tensor *product* dari U dengan V adalah ruang vektor $U \otimes V$, bersama dengan pemetaan bilinear $\phi: U \times V \to U \otimes V$ dengan properti berikut: Jika ψ adalah pemetaan bilinear dari $U \times V$ ke ruang vektor X, maka terdapat pemetaan linear tunggal $\bar{\psi}$ dari $U \otimes V$ ke X memenuhi $\psi = \bar{\psi} \circ \phi$. (Roman, 2007)

Contoh 1.6.12.2 Misalkan $U = V = M^{2\times 2}(\mathbb{R})$. Gunakan tensor *product* pada matriks (Kronecker *product*) yaitu:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \tag{110}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_2b_1 & a_2b_2 \\ a_1b_3 & a_1b_4 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_4b_1 & a_4b_2 \\ a_3b_3 & a_3b_4 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{pmatrix} \tag{111}$$

dimana $A \in U, B \in V$.

Misalkan $\{e_i | i \in I\}$ dan $\{f_j | j \in J\}$ adalah basis untuk U dan V. Untuk konstruksi tensor *product* dapat menggunakan dua cara yaitu konstruksi pertama adalah dengan menggunakan kedua basisnya dan konstruksi kedua adalah dengan menggunakan ruang *quotient* (Roman, 2007).

Definisi 1.6.12.3 Jika $V_1, \dots, V_n$ dan W adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$, fungsi $f: V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ adalah multilinear jika itu linear jika itu adalah linear di setiap koordinat secara terpisah, yaitu, jika

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_{k-1}, rv + sv', u_{k+1}, \dots, u_n) \\ = rf(u_1, \dots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \dots, u_n) \\ + sf(u_1, \dots, u_{k-1}, v', u_{k+1}, \dots, u_n) \end{aligned} \tag{112}$$

untuk setiap $k = 1, \dots, n$. (Roman, 2007)

Contoh 1.6.12.3 Jika A adalah aljabar $\mathbb{F}$, maka pemetaan perkalian $\mu: A \times \cdots \times A \to A$ didefinisikan oleh $\mu(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdots a_n$ adalah n-linear atau multilinear.

Definisi 1.6.12.4 Jika $V_1, \dots, V_n$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$, maka tensor *product* dari $V_1, \dots, V_n$ adalah ruang vektor $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, bersama dengan pemetaan multilinear $\phi: V_1 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ dengan properti berikut: Jika ψ adalah pemetaan multilinear dari $V_1 \times \cdots \times V_n$ ke ruang vektor X, maka terdapat pemetaan linear tunggal $\bar{\psi}$ dari $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ ke X memenuhi $\psi: \bar{\psi} \circ \phi$. (Roman, 2007)

Untuk pembahasan selanjutnya akan digunakan simbol $T^n V$ untuk menyatakan $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ atau $T^n V \coloneqq V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Definisi 1.6.12.5 Aljabar A atas $\mathbb{F}$ adalah aljabar *graded* jika ruang vektor atas $\mathbb{F}$, A dapat ditulis dalam bentuk

$$A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i \qquad (113)$$

untuk subruang A_i dari A, dan dimana memiliki sifat perkalian yaitu:

$$A_i A_j \subseteq A_{i+j} \qquad (114)$$

Elemen dari A_i adalah derajat homogen i. Jika $a \in A$ dapat ditulis

$$a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_n} \qquad (115)$$

untuk $a_{i_k} \in A_{i_k}, i_k \neq i_j$, maka a_{i_k} adalah komponen homogen dari a dengan derajar i_k. (Roman, 2007)

Filtrasi dari aljabar A adalah semua barisan A_i dari A memenuhi $A_i \subseteq A_{i+1}$ dan $A_i \cdot A_k \subseteq A_{i+k}$ untuk setiap $i, k \in \mathbb{N}$.

Definisi 1.6.12.6 Misalkan V adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Misalkan $T^n V = V \otimes \cdots \otimes V$. Jika $n = 0$ maka $T^0 V = \mathbb{R}$. Aljabar tensor $T(V) = \oplus_{i \geq 0} T^i V = \mathbb{R} \oplus V \oplus V \otimes V + \cdots$. dengan muplikasi dengan bentuk

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \cdot (v_1' \otimes \dots \otimes v_m') = v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes v_1' \otimes \dots \otimes v_m' \qquad (116)$$

(Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.12.7 Misalkan L adalah aljabar Lie. Aljabar enveloping umum dari L adalah pasangan $(U(L), i)$ dengan $U(L)$ aljabar asosiatif dengan elemen unit dan i homomorfisma aljabar Lie

$$i: L \to U(L) \qquad (117)$$

dimana $U(L)$ adalah diperhatikan sebagai aljabar Lie yaitu i adalah pemetaan linear memenuhi

$$i([x,y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x) \quad (x, y \in L) \tag{118}$$

Lebih lanjut pasangan $(U(L), i)$ adalah memenuhi untuk suatu pasangan lain (W, j) dengan W aljabar asosiatif dengan elemen unit dan j homomorfisma aljabar Lie $j: L \to W$ terdapat homomorfisma $\psi: U(L) \to W$, pemetaan identitas dari $U(L)$ ke identitas dari W, dan memenuhi $j = \psi \circ i$. (Bauerle & Kerf, 1990)

1.6.13 Generalisasi matriks Cartan dan Aljabar Lie Kac-Moody

Pada subbab ini dibahas tentang matriks Cartan, generalisasi matriks Cartan, realisasi, dan aljabar Lie Kac-Moody.

Definisi 1.6.13.1 Matriks Cartan $(A_{ij})_{i,j=1}^{k}$ dari aljabar Lie semisederhana yang didefinisikan melalui dual kontraksi antara Π dan Π^V:

$$A_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_i^v \rangle = \frac{2(\alpha_j|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)} \tag{119}$$

(Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.13.2 Misalkan matriks Cartan A dari aljabar Lie semisederhana kompleks berdimensi hingga. maka

1) det $A \neq 0$
2) $A_{ii} = 2 \quad (i = 1, \ldots, k)$
3) $A_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\} \quad (i \neq j)$
4) $A_{ij} = 0 \leftrightarrow A_{ji} = 0$
5) $A_{ij} = -2 \rightarrow A_{ji} = -1$
6) $A_{ij} = -3 \rightarrow A_{ji} = -1$

(Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.13.3 Misalkan A adalah matriks $n \times n$ dengan properti berikut

1) $A_{ii} = 2 \quad (i = 1, \ldots, n)$
2) $A_{ij} \in \{0, -1, -2, \ldots\} \quad (i \neq j)$
3) $A_{ij} = 0 \leftrightarrow A_{ji} = 0$
4) A adalah tidak dapat dikomposisikan

maka A adalah generalisasi matriks Cartan. (Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.13.4 Matriks $A = (A_{ij})$ berorde $n \times n$ dikatakan *decomposable* jika dengan melakukan permutasi indeks baris dan kolomnya dengan satu permutasi yang sama π maka akan berbentuk

$$\left(A_{\pi(i)\pi(j)}\right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \tag{120}$$

dimana B dan C adalah matriks persegi. Matriks $n \times n$ yang tidak *decomposable* disebut *indecomposable*. (Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.13.5 Misalkan A adalah matriks $n \times n$ dengan rank $A = r$. Maka realisasi dari matriks A ini adalah $\{H, \Pi, \Pi^V\}$ dengan:

1) H adalah ruang vektor kompleks dengan dimensi $(2n - r)$.
2) $\Pi^V = \{\alpha_1^v, \alpha_2^v, \dots, \alpha_n^v\}$ adalah himpunan dari n elemen bebas di H.
3) $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ adalah himpunan dari n elemen bebas di ruang dual H^* dari H.
4) Kontraksi dual antara H^* dan H adalah memenuhi $A_{ij} = \langle a_j, a_i^v \rangle$.

(Bauerle & Kerf, 1990)

Definisi 1.6.13.6 Misalkan $A = (A_{jk})$ adalah generalisasi matriks Cartan yang tidak dapat dikomposisi, dan $\tilde{g}$ adalah aljabar Lie Kac-Moody Umum atas $\mathbb{R}$. Mengingat bahwa, jadi didefinisikan, $\tilde{g}$ adalah aljabar Lie atas $\mathbb{R}$ pada generator $3l$ $e_j, h_j, f_j, 1 \leq j \leq n$, dengan relasi

$$[e_k, h_j] = A_{jk} e_k, \qquad [f_k, h_j] = -A_{jk} f_k, \qquad [h_j, h_k] = 0, \qquad [e_k, f_j] = \delta_{kj} h_k, \tag{121}$$

untuk setiap $1 \leq j, k \leq n$. Misalkan H adalah span real dari h_j dan ϑ ideal maksimal tunggal dari $\tilde{g}$ dimana irisannya H *trivially*. Maka aljabar Lie Kac-Moody Direduksi $\breve{g}$ didefinisikan oleh $\breve{g} = \tilde{g}/\vartheta$, sedangkan aljabar Lie Kac-Moody Standar g didefinisikan $g = \tilde{g}/K$ dimana K adalah ideal dari $\tilde{g}$ digenerat oleh elemen $e_j(\text{ad } e_k)^{A_{kj}+1}$ dan $f_j(\text{ad } f_k)^{A_{kj}+1}$ untuk setiap $1 \leq j, k \leq n, j \neq k$. (Berman & Pianzola, 2007)

Contoh 1.6.13.1 Aljabar Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ adalah aljabar Lie Kac-Moody Standar (Bauerle & Kerf, 1990) dan aljabar Lie Kac-Moody Direduksi (Kac V. G., 1985).

1.6.14 Modul Quaternion

Sebelum membahas quaternion pada aljabar Lie. Diperlukan istilah modul quaternion yang definisinya sebagai berikut:

Definisi 1.6.14.1 Struktur quaternion pada ruang vektor $\mathcal{V}$ atas $\mathbb{C}$ adalah suatu pemetaan konjugat linear $J: \mathcal{V} \to \mathcal{V}: J(au) = \bar{a}J(u)$ untuk $a \in \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{V}$, memenuhi relasi $J^2 = -I$. Modul kiri $\mathbb{H}$ adalah ruang vektor real $\mathcal{U}$ dengan aksi dari $\mathbb{H}$ pada kiri, $(x, v) \to xv$, memenuhi bahwa $x(yv) = (xy)v$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{H}$ dan $v \in \mathcal{U}$. Struktur quaternion J pada $\mathcal{V}$ ruang vektor $\mathcal{V}$ atas $\mathbb{C}$ adalah ekuivalen dengan struktur modul $\mathbb{H}$ pada $\mathcal{V}$ ditunjukkan sebagai ruang vektor real. (Kori, 2023)

Contoh 1.6.14.1 $\mathbb{H}^n$ adalah modul atas gelanggang $\mathbb{H}$.

Misalkan σ adalah involusi linear $\mathbb{C}$ pada modul quaternion $(\mathcal{V}, J)$ memenuhi anti komutatif $J: J\sigma = -\sigma J$. Misalkan $\mathcal{V}_0$ adalah ruang eigen dari σ bersesuaian dengan nilai eigen $+1$. Maka $J\mathcal{V}_0 = \{Ju; u \in \mathcal{V}_0\}$ adalah ruang eigen dari σ bersesuaian dengan nilai eigen -1 dan diperoleh dekomposisi *direct sum* dari $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + J\mathcal{V}_0 \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_0 \tag{122}$$

Terdapat juga konjugasi kompleks τ pada modul V atas $\mathbb{C}$; $\tau^2 = I$. τ membatasi konjugasi involusi linear pada $\mathcal{V}_0$; $\tau(z) = \bar{z}$, $z \in \mathcal{V}_0$. Diperoleh $\tau(z_1 + Jz_2) = \bar{z}_1 + J\bar{z}_2$ untuk $z_1, z_2 \in \mathcal{V}_0$. σ dan τ adalah homomorfisma komutatif dari $\mathcal{V}$: $\sigma\tau = \tau\sigma$. Jika dimisalkan $\mathcal{V}_r$ menotasikan subruang eigen dari τ pada $\mathcal{V}_0$ bersesuaian dengan nilai eigen $+1$, maka diperoleh

$$\mathcal{V}_0 = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_r = \mathcal{V}_r + \sqrt{-1}\mathcal{V}_r,\ \mathcal{V} = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_r \tag{123}$$

yang mengembalikan struktur quaternion pada $\mathcal{V}$. (Kori, 2023)

Definisi 1.6.14.2 Misalkan $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + J\mathcal{V}_0$ adalah modul $\mathbb{H}$. Misalkan $\mathcal{W}$ adalah submodul $\mathbb{R}$ dari $\mathcal{V}$.

1. $\mathcal{W}$ adalah submodul J dari $\mathcal{V}$ jika $\mathcal{W}$ adalah invarian under J, atau ekuivalen, $\mathcal{W}$ memiliki dekomposisi *direct sum* $\mathcal{W} = \mathcal{U}_0 + J\mathcal{U}_0$ untuk $\mathbb{R}$-subruang vektor U_0 dari V_0.
2. $\mathcal{W}$ adalah submodul σ dari $\mathcal{V}$ jika $\mathcal{W}$ adalah invarian under konjugat automorfisma τ dan σ, atau ekuivalen, $\mathcal{W}$ bersesuai $\mathbb{Z}_2$-gradasi; $\mathcal{W} = \mathcal{W} \cap \mathcal{V}_0 + \mathcal{W} \cap J\mathcal{V}_0$.

(Kori, 2023)

Contoh 1.6.14.2 Setiap submodul $\mathbb{H}$ dari modul $\mathbb{H}$ adalah submodul J dari $\mathcal{V}$. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$ adalah modul $\mathbb{H}$.

1.6.15 Aljabar Lie Quaternion

Pada subbab ini dibahas tentang aljabar Lie quaternion, homomorfisma aljabar Lie quaternion, ideal dari aljabar Lie quaternion, dan aljabar Lie quaternion bebas.

Pada 1.6.5 telah dibahas tentang aljabar Lie atas lapangan real dan kompleks. Selanjutnya, dalam penelitian yang dilakukan oleh pada tahun 2023 diberikan definisi tentang aljabar Lie atas quaternion yang kemudian sebagai aljabar Lie quaternion dengan definisi sebagai berikut:

Misalkan $(\mathcal{V}, J)$ adalah modul $\mathbb{H}$. Misalkan σ adalah involusi linear $\mathbb{C}$ pada $\mathcal{V}$ yaitu anti komutatif $J: J\sigma = -\sigma J$, dan misalkan τ adalah konjugat involusi linear $\mathbb{C}$ pada $\mathcal{V}$ yaitu komutatif dengan $\sigma: \sigma\tau = \tau\sigma$. Misalkan $\mathcal{V}_0$ adalah subruang eigen $\mathbb{C}$ dari σ bersesuaian dengan nilai eigen $+1$. Maka $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + J\mathcal{V}_0$. $\mathcal{V}_0$ dan $J\mathcal{V}_0$ adalah invarian terhadap τ.

Definisi 1.6.15.1 Misalkan L adalah submodul $\mathbb{R}$ dari modul $\mathbb{H}$ $(\mathcal{V}, J)$. L dikatakan Aljabar Lie quaternion jika L dilengkapi dengan suatu bracket $[\cdot,\cdot]$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(L, [\cdot,\cdot])$ adalah suatu aljabar Lie real:

a. Operasi bracket adalah bilinear atas $\mathbb{R}$.
b. $[X,Y]+[Y,X]=0$ untuk setiap $X,Y\in L$.
c. $\big[X,[Y,Z]\big]+\big[Y,[Z,X]\big]+\big[Z,[X,Y]\big]=0$ untuk setiap $X,Y,Z\in L$.

2. σ dan τ adalah homomorfisma aljabar Lie L:
   a. $(L,[\cdot,\cdot])$ adalah invarian terhadap involusi σ dan τ.
   b. $\sigma[X,Y]=[\sigma X,\sigma Y],\ \tau[X,Y]=[\tau X,\tau Y],\ \ \forall X,Y\in L$.

Contoh 1.6.15.1 $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{H})$ adalah aljabar Lie quaternion dengan bracket:

$$\begin{aligned}[X_1+JY_1,X_2+JY_2] &= [X_1,X_2]+[X_1,JY_2]+[JY_1,X_2]+[JY_1,JY_2]\\ &= (X_1X_2-X_2X_1)+(J\bar{X}_1Y_2-JY_2X_1)+(JY_1X_2-J\bar{X}_2Y_1)\\ &\quad+(-\bar{Y}_1Y_2+\bar{Y}_2Y_1)\\ &= (X_1X_2-X_2X_1-\bar{Y}_1Y_2+\bar{Y}_2Y_1)\\ &\quad+J(\bar{X}_1Y_2-Y_2X_1+Y_1X_2-\bar{X}_2Y_1)\end{aligned}$$

$$\sigma(X+JY)=X-JY$$

$$\tau(X+JY)=\bar{X}+J\bar{Y}$$

Seperti pada aljabar Lie atas lapangan real atau kompleks. Tasioki kori dalam papernya juga membahas tentang homomorfisma dan ideal pada quaternion dengan definisi sebagai berikut:

Definisi 1.6.15.2 Misalkan L dan L' aljabar Lie quaternion. Misalkan $\sigma_i,\tau_i\colon L\to L$ dengan $\sigma_i(u_i+Jv_i)=u_i-Jv_i$ dan $\tau_i(u_i+Jv_i)=\bar{u}_i+J\bar{v}_i$. Homomorfisma $\varphi\colon L\to L'$ dari aljabar Lie real adalah dikatakan homomorfisma dari aljabar Lie quaternion jika memenuhi:

$$\varphi(\sigma_1u)=\sigma_2\varphi(u) \text{ dan } \varphi(\tau_1u)=\tau_2\varphi(u), \text{ untuk setiap } u\in L \tag{124}$$

(Kori, 2023)

Definisi 1.6.15.3 Misalkan L adalah aljabar Lie quaternion dan misalkan I adalah ideal dari L yang dipandang suatu aljabar Lie real. I dikatakan suatu ideal dari aljabar Lie quaternion L jika I adalah invarian atas involusi σ. (Kori, 2023)

Ruang *quotient* dari aljabar Lie quaternion L oleh suatu ideal P yang dilengkapi dengan struktur aljabar Lie quaternion, dimana involusi $\hat{\sigma}$ pada L/P didefinisikan oleh

$$\hat{\sigma}(x+P)=\sigma x+P \tag{125}$$

Untuk homomorfisma dari aljabar Lie quaternion $\varphi\colon L\to L'$, *kernel* $\ker\varphi$ menjadi ideal dari L. (Kori, 2023)

Definisi 1.6.15.4 Misalkan X himpunan terbatas yang teridentifikasi dengan subhimpunan $1\otimes X\subset\mathbb{H}\subset X$. Dinotasikan $JX=j\otimes X\subset\mathbb{H}\otimes X$. Himpunan $\{X,JX\}$ dapat dianggap sebagai subhimpunan dari modul quaternion. Misalkan L adalah aljabar Lie quaternion yang digeneret oleh basis $\{X,JX\}$. L dikatakan bebas pada $\{X,JX\}$ jika, diberi aljabar Lie quaternion M dan pemetaan *graded* $\mathbb{Z}_2$ $\phi: X + JX \to M$, terdapat homomorfisma aljabar Lie quaternion tunggal $\psi: L \to M$ yang memperluas pemetaan ϕ. (Kori, 2023)

Proposisi 1.6.15.1 Terdapat aljabar Lie quaternion L bebas yang tunggal pada $\{X, JX\}$. (Kori, 2023)

Definisi 1.6.15.5 Jika L adalah aljabar Lie quaternion bebas pada $X = \{x_i; i \in \Delta\}$, dan jika R adalah ideal dari L digeneret oleh elemen $\{f_j; j \in \Delta'\}$, L/R disebut aljabar Lie quaternion *quotient* dengan generator $\{x_i\}_{i\in\Delta}$ dan relasi $\{f_i = 0; i \in \Delta'\}$, dimana x_i adalah *image* di L/R dari elemen dari X. (Kori, 2023)

1.6.16 Quaternifikasi pada aljabar Lie kompleks

Pada subbab ini dibahas tentang definisi dari quaternifikasi pada aljabar Lie kompleks.

Untuk aljabar Lie quaternion L dinotasikan oleh subruang eigen $L^{\pm}$ dari involusi σ dengan nilai eigen ± 1 berturut-turut. $L^{\pm}$ adalah subruang vektor dari A invarian atas konjugasi kompleks τ, dan $L = L^{+} + L^{-}, L^{+} = L \cap \mathcal{V}_0, L^{-} = L \cap J\mathcal{V}_0$. L^{+} adalah subaljabar dari L. Selanjutnya, akan didefinisikan quaternifikasi pada aljabar Lie sebagai berikut:

Definisi 1.6.16.1 Misalkan $(L_0, [\,,])$ adalah aljabar Lie real atau kompleks. Misalkan $(L, [\,,])$ adalah aljabar Lie quaternion. L adalah quaternifikasi dari L_0 jika L_0 adalah subaljabar Lie (real) dari L^{+} dan jika terdapat subruang vektor (real) K dari L^{-} sehingga memenuhi $L_0 + K$ mengeneret L adalah aljabar Lie real. (Kori, 2023)

Contoh 1.6.16.1

3. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$ adalah aljabar Lie quaternion dan merupakan quaternifikasi dari $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.
4. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ adalah aljabar Lie quaternion dan merupakan quaternifikasi dari $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Proposisi 1.6.16.1 $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) + J\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ menggeneret aljabar Lie quaternion $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ atas $\mathbb{R}$. Generator dari $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ adalah

$$h_i, e_i, f_i, Jh_i, Je_i, Jf_i; \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{126}$$

Oleh karena itu, quaternifikasi dari $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ adalah $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$. (Kori, 2023)

1.6.17 Quaternifikasi pada aljabar Lie Sederhana

Pada subbab ini dibahas tentang quaternifikasi pada aljabar Lie sederhana.

Proposisi 1.6.17.1 Misalkan M adalah aljabar Lie quaternion. Maka Elemen $h_1, \ldots, h_n$ dan $Jh_1, \ldots, Jh_n$ dari M adalah bebas linear atas $\mathbb{C}$. (Kori, 2023)

Definisi 1.6.17.1 Misalkan M adalah aljabar Lie quaternion. Sehingga,

1. Misalkan H_0 adalah subaljabar Cartan dari M_0 dengan basis $h_i; 1 \le i \le n$.
2. Misalkan H_r adalah bentuk real dari $H_0: H_0 = H_r + \sqrt{-1}H_r$.
3. Misalkan K adalah subaljabar dari M digeneret atas $\mathbb{R}$ oleh $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} H_0 = H_0 + JH_0$.

4. Misalkan $H_r^{\perp}$ adalah subaljabar dari K digeneret oleh $\sqrt{-1}H_r + JH_r$

(Kori, 2023)

Lemma 1.6.17.1 Misalkan M adalah aljabar Lie quaternion. Sehingga,

1. H_r adalah subaljabar komutatif maksimal dari M
2. $H_r^{\perp}$ adalah ideal dari K yang melengkap H_r
3. $[H_r, K] = 0$
4. $[K, K] = H_r^{\perp}$

(Kori, 2023)

Teorema 1.6.17.1

1. M adalah aljabar Lie quaternion yang digeneret oleh
2. M adalah quaternifikasi dari M_0

$$[h, h] = 0, [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i, [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i, \\ [h, e_i] = \delta_{ij} \alpha_i^v, \tag{127}$$

dan

$$\begin{gathered} [Jh, e_i] = \langle \alpha_i, Jh \rangle e_i, \qquad [h, Je_i] = \langle \alpha_i, h \rangle Je_i, [Jh, Je_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle e_i \\ [Jh, f_i] = -\langle \alpha_i, Jh \rangle f_i, \qquad [h, Jf_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle Jf_i, [Jh, Jf_i] = \langle \alpha_i, h \rangle f_i \\ [Jh, e_i] = \delta_{ij} J\alpha_i^v, \qquad [h, Je_i] = \delta_{ij} J\alpha_i^v, \qquad [Jh, Je_i] = -\delta_{ij} \alpha_i^v, \\ [h, Jh] = 0, \qquad [Jh, Jh] = 0 \end{gathered} \tag{128}$$

3. Bentuk real H_r dari subaljabar Cartan H_0 dari M_0 adalah subaljabar komutatif maksimal dari M.
4. Misalkan E adalah modul $\mathbb{C}$ yang digeneret oleh $\{f_1, \dots, f_n, Jf_1, \dots, Jf_n\}$ dan F adalah modul $\mathbb{C}$ yang digeneret oleh $\{e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n\}$. Kemudian, $E, K,$ dan F dipandang sebagai subaljabar Lie real dari M memberikan dekomposisi *triangular* dari M:

$$M = K \oplus E \oplus F \tag{129}$$

(Kori, 2023)

Lemma 1.6.17.2 Misalkan ϵ_i menotasikan basis e_i atau Je_i dan misalkan ϕ_i menotasikan basis f_i atau Jf_i, Jika

$$[\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_t}] = [\epsilon_{i_1}, [\epsilon_{i_2}, \dots, [\epsilon_{i_{t-1}}, \epsilon_{i_t}]]] \tag{130}$$

$$[\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_t}] = [\phi_{i_1}, [\phi_{i_2}, \dots, [\phi_{i_{t-1}}, \phi_{i_t}]]] \tag{131}$$

maka

$$[h_j, [\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_t}]] = (c_{i_1 j} + \dots + c_{i_t j})[\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_t}] \tag{132}$$

$$[h_j, [\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_t}]] = -(c_{i_1 j} + \dots + c_{i_t j})[\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_t}] \tag{133}$$

1.6.18 Dekomposisi Sistem Akar dari aljabar Lie Quaternion

Pada subbab ini dibahas tentang dekomposisi sistem akar dari aljabar Lie quaternion. Berikut merupakan teorema perluasan dari Subbab 1.6.10.

Teorema 1.6.18.1 Misalkan L adalah aljabar Lie quaternion, maka L memiliki properti dekomposisi sistem akar sebagai berikut:

1. $L = L_0 + e + f$

   $$e = \sum_{\alpha \in \Delta^+} L_\alpha \,, f = \sum_{\alpha \in \Delta^-} L_\alpha$$

   dimana $\Delta^+ = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n \neq 0; k_n \geq 0\ \forall n\}$ dan

   $\Delta^- = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n \neq 0; k_n \leq 0\ \forall n\}$.

2. $L_\alpha = \mathbb{H} \otimes (L_0)_\alpha$ jika $\alpha \neq 0$

   $L_0 = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} H_0,$

   $e = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} e_0,$

   $f = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} f_0$

3. $\dim_{\mathbb{C}} L_{\alpha_i} = 2,$
   $\dim_{\mathbb{C}} L_{-\alpha_i} = 2, i = 1, \dots, n.$

(Kori, 2023)