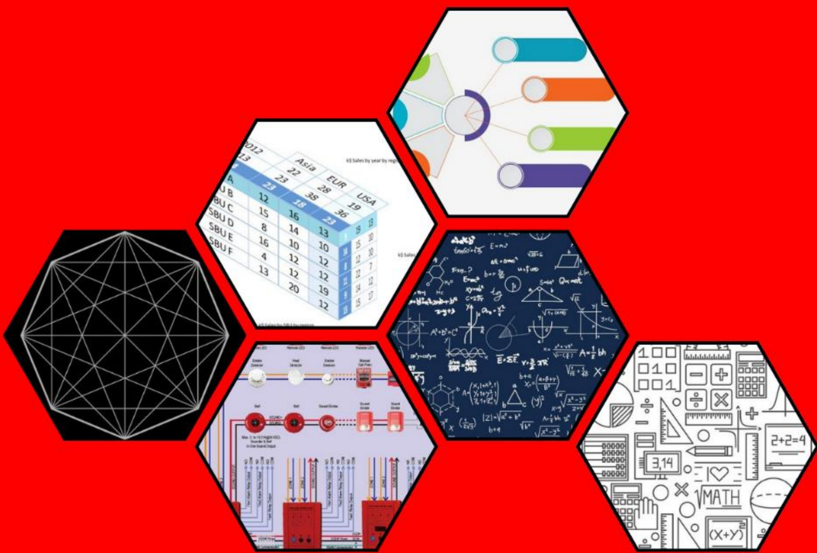
PENENTUAN DIMENSI PARTISI DARI GRAF HASIL KORONA GRAF LENGKAP DAN GRAF RODA



MUHAMMAD AHNAF YUSUF

H011201043

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

PENENTUAN DIMENSI PARTISI DARI GRAF HASIL KORONA GRAF LENGKAP DAN GRAF RODA

MUHAMMAD AHNAF YUSUF

H01201043

PROGRAM STUDI MATEMATIKA - DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

PENENTUAN DIMENSI PARTISI DARI GRAF HASIL KORONA GRAF LENGKAP DAN GRAF RODA

MUHAMMAD AHNAF YUSUF

H01201043

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

SKRIPSI

PENENTUAN DIMENSI PARTISI DARI GRAF HASIL KORONA GRAF LENGKAP DAN GRAF RODA

MUHAMMAD AHNAF YUSUF
H011201043

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana pada 26 Juni 2024
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan
pada

Program Studi Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.
NIP. 196412311990032007	NIP. 199012282018031001

Mengetahui:
Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 196804292002121001

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Penentuan Dimensi Partisi Dari Graf Hasil Korona Graf Lengkap Dan Graf Roda" adalah benar karya saya dengan arahan dari Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si sebagai Pembimbing Utama dan Bapak Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Pertama. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 26 Juni 2024

Muhammad Ahnaf Yusuf
H011201043

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji dan syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, yang telah melimpahkan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul “Penentuan Dimensi Partisi Dari Graf Hasil Korona Graf Lengkap Dan Graf Roda” dengan baik. Skripsi ini tidak akan terwujud tanpa dukungan, bimbingan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan kepada orang tua penulis, ayah kebanggan penulis **Muhammad Yusuf., S.E.,** dan Bunda kesayangan penulis **Diana Patiwi., S.E.,** yang telah membesarkan dan mendidik penulis, serta senantiasa memberikan doa, dukungan, motivasi dan materi, sehingga penulis bisa sampai di titik ini. Tak lupa juga terima kasih kepada saudara/i penulis, **Muhammad Naufal Yusuf** dan **Avisa Salsabila** yang banyak membantu penulis selama proses menyelesaikan skripsi ini, serta seluruh keluarga yang telah memberikan doa dan dukungan dalam penyelesaian skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin berserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. ENG. Amiruddin** Selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas hasanuddin berserta jajarannya.
2. Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.,** selaku ketua departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Ibunda **Prof. Dr. hasmawati, M.Si.,** selaku dosen pembimbing yang dengan sabar, tulus, Ikhlas banyak memberikan ilmu yang bermanfaat, meluangkan waktu untuk membimbing, memberi masukan serta arahan dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak **Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.** selaku pembimbig pertama sekaligus telah menjadi sosok yang sangat inspiratif dan penuh dedikasi dalam membimbing saya sejak awal masa studi hingga di penghujung masa studi penulis, memberikan nasihat serta saran yang menjadi penuntun yang berharga dalam perjalanan akademik maupun non-akademik penulis hingga di titik ini
5. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** dan Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Tim Penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan masukan dan kritikan yang membangun terhadap penyempurnaan penulisan skripsi ini.
6. Bapak dan ibu Dosen Departemen Matematika yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi matematika, serta bapak dan Ibu Staff Departemen matematika Yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.
7. Pemilik nama **Anisa Puspitasari** yang selalu menemani dan menjadi *support system* penulis pada hari yang tidak mudah dalam pengerjaan

skripsi, serta telah berkontribusi banyak dalam penulisan skripsi ini, memberikan dukungan, semangat, tenaga maupun bantuan dan senantiasa sabar dalam membersamai penulis hingga sekarang.

8. Sahabat-sahabat penulis , **Izza, Boggo, Elin, Alif, Reza** yang telah banyak membantu dan memberikan dukungan selama proses pengerjaan skripsi ini.
9. **Febi Lestari, Muh Fauzan Hamdani, Muhammad Ihsan, Nurhalima, Vira Anggraeni,** dan **Wardah Hidayah H** yang telah banyak membantu dan mendukung penulis selama perkuliahan hingga penyelesaian skripsi ini, serta membersamai penulis sejak awal perkuliahan hingga di titik ini.
10. Saudara-saudara penulis **"Pulau", Alung, Abdi, Joko, Dede,** dan **Fuad** yang telah memberikan penulis dukungan moral serta tempat berbagi pikiran penulis.
11. **TIM ONMIPA UNHAS** khususnya **Pak Anwar, Ferdi, Zidan, Parmenas,** dan **Usmaria** yang telah memberikan warna dan pengalaman berharga selama masa studi penulis serta membersamai penulis sejak masa studi hingga penyusunan skripsi ini.
12. Teman-teman seperjuangan **Matematika 2020** dan **HORI20NTAL** yang senantiasa memberikan bantuan dan dukungan moril kepada penulis, serta memberikan momen selama masa studi penulis.
13. **Muhammad Ahnaf Yusuf,** *Last but not least.* Diri saya sendiri, apresiasi yang sebesar besarnya karena telah bertanggung jawab untuk menyelesaikan apa yang telah dimulai. Terima kasih karena terus berusaha dan tidak menyerah, serta senantiasa menikmati seluruh prosesnya yang pasti tidak mudah. Terima kasih sudah bertahan sejauh ini.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan dapat memberikan kontribusi yang berarti dalam bidang ilmu yang saya tekuni.

Penulis,

Muhammad Ahnaf Yusuf

ABSTRAK

Graf G adalah himpunan pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit yang anggotanya disebut titik (vertex) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan elemen-elemen $V(G)$ yang anggotanya disebut sisi (edge). Misalkan graf G adalah graf sederhana. Untuk suatu k-partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$, representasi dari titik u terhadap Π adalah k-pasangan berurut, $r(u \mid \Pi) = (d(u, S\_1), d(u, S\_2), \dots, d(u, S\_k))$. Partisi Π dikatakan sebagai partisi pembeda dari G jika $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$. Partisi pembeda Π dengan kardinalitas minimum disebut sebagai partisi pembeda minimum. Adapun dimensi partisi dari graf G, dinotasikan sebagai $pd(G)$ merupakan kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari G. Pada penelitian ini akan ditentukan dimensi partisi dari graf hasil korona antara graf lengkap dan graf roda dengan menggunakan beberapa pernyataan matematika tentang partisi pembeda, konsep titik setara, dan konsep titik setingkat. Akan ada beberapa hasil analisis dari titik $K_n \odot W_m$ mengenai tentang titik setara dan setingkat. Hasil penelitian menunjukkan untuk $m = n\ pd(K_n \odot W_m) = n, n \geq 3$, untuk $m = n + 1,\ pd(K_n \odot W_m) = 3, n = 3$ dan $pd(K_n \odot W_m) = n\ n \geq 3$, dan *untuk* $m = n + 2, pd(K_n \odot W_m) = 4, n = 2{,}3$ dan $pd(K_n \odot W_m) = n, n \geq 4$.

Kata kunci: partisi pembeda, operasi korona, graf lengkap, graf roda, titik setara, titik setingkat.

ABSTRACT

The graph G is a pair of sets $(V(G), E(G))$, where $V(G)$ is a finite set whose elements are called vertices, and $E(G)$ is a set of pairs of members of $V(G)$, which is called the edges. Let G be a simple graph. For an ordered k-partition $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ of $V(G)$, the representation of u with respect to Π is k-ordered pairs, $r(u \mid \Pi) = (d(u, S_1), d(u, S_2), \ldots, d(u, S_k))$. The partition Π is called a resolving partition of G if $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$ for all distinct $u, v \in V(G)$. The resolving partition Π with the minimum cardinality is called minimum resolving partistion. The partition dimension of G, denotaded $pd(G)$ is the cardinality of a minimum resolving partition of G. In this research, we will determine the partition dimension of corona product of complete graph by using some mathematical statements about resolving partition, consept of equivalent vertices, and same level vertices. There will be several analysis result for the $K_n \odot W_m$ vertices referring to equivalent vertices and same level vertices consept. The result show that for $m = n \, pd(K_n \odot W_m) = n, n \geq 3$, for $m = n + 1$, $pd(K_n \odot W_m) = 3, n = 3$ and $pd(K_n \odot W_m) = n \, n \geq 3$, and $for \, m = n + 2$, $pd(K_n \odot W_m) = 4, n = 2,3$ and $pd(K_n \odot W_m) = n, n \geq 4$.

Keywords: resolving partition, corona product, complete graph, wheel graph, equivalent vertices, same level vertices

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan sebuah disiplin ilmu yang berkaitan dengan logika dan pengukuran. Matematika dianggap sebagai bahasa universal yang dapat digunakan untuk memodelkan fenomena alam, sosial, dan ekonomi. Dalam pendapat lain mengatakan bahwa matematika adalah ilmu pengetahuan yang mempelajari pola dan struktur secara sistematis (Morris Kline,1980)

Waktu demi waktu perkembangan ilmu pengetahuan khususnya dalam bidang matematika sangatlah berkembang pesat. Salah satu cabang diantaranya adalah matematika diskrit. Menurut Kenneth (2011) dalam bukunya matematika Diskrit adalah studi tentang struktur matematika yang pada dasarnya bersifat diskrit (terbatas) daripada kontinu. Berbeda dengan bilangan riil yang memiliki sifat bervariasi secara halus, objek yang dipelajari dalam matematika diskrit seperti bilangan bulat, graf, dan pernyataan dalam logika tidak bervariasi secara halus, tetapi memiliki nilai-nilai yang berbeda dan terpisah.

Dalam matematika diskrit, salah satu topik yang juga cukup banyak diteliti dan pesat perkembangannya adalah teori graf. Teori graf mulai populer pada akhir abad ke-19. G. Chartrand (1977) dalam bukunya mendefinisikan graf sebagai sebuah pasangan himpunan, di mana himpunan pertama berisi simpul-simpul (vertex) dan himpunan kedua berisi garis-garis (edge) yang menghubungkan pasangan simpul-simpul tersebut.

Teori graf memiliki banyak topik yang menarik dan dapat diterapkan di berbagai bidang baik dalam bidang ilmu matematika itu sendiri maupun dalam bidang ilmu lainnya (Hasmawati, 2020). Diantara beragam topik didalamnya, salah satu bidang tersebut adalah dimensi partisi. Dimensi partisi pertama kali dipopulerkan oleh G. Chartrand dalam bukunya yang mengelompokkan semua titik di graf G ke dalam suatu kelas partisi dan menentukan representasi setiap titik terhadap kelas partisi tersebut. Representasi dari titik-titik tersebut berupa penentuan jarak dari titik pada graf G terhadap kelas partisi yang dibentuk.

Penelitian yang berkelanjutan terkait dimensi partisi graf terus menarik minat, terutama dalam mengeksplorasi aspek-aspek baru dalam teori graf. Meskipun belum ada formula universal yang ditemukan untuk dimensi partisi di semua jenis graf, upaya-upaya untuk merumuskan konsep ini pada graf-graf spesifik terus berkembang, memberikan kontribusi penting dalam mengembangkan landasan ilmiah di bidang ini. Dalam dinamika perkembangan ini, peneliti terus bertujuan untuk menyempurnakan pemahaman tentang dimensi partisi, mendorong terbukanya pintu untuk pengetahuan yang lebih mendalam dalam teori graf.

Pada tahun 2012 Yogi dkk menemukan bahwa dimensi partisi graf korona siklus dengan graf lengkap adalah $pd(C_m \odot K_n) = 3$ untuk $n = 1$ dan $pd(C_m \odot K_n) = p$ untuk $n > 1$, dengan p merupakan bilangan bulat positif yang memenuhi $\binom{p}{n} \geq m$. Juga contoh lain pada tahun 2011 penelitian Darmaji menemukan dimensi partisi graf hasil korona graf lengkap berorde m dan graf lengkap berorde n adalah $pd(K_m \odot K_n) = n + 1$ jika dan hanya jika $2 \leq m \leq ((n+1)¦n)$ dan $pd(K\_m \odot K\_n) = n + 2$ jika dan hanya jika $\binom{n+1}{n} + 1 \leq m \leq \binom{n+2}{n} + n$. Pada tahun 2021, Hasmawati dkk dalam penelitiannya juga memperoleh dimensi partisi kincir angin belanda. Dimensi partisi untuk graf kincir angin belanda tersebut adalah $pd(Amal(K_n)_m) = k$, uuntuk suatu $k \geq 3, n \geq 3$ dan $m \in I_k$.

Berdasarkan beberapa data yang disajikan, dan telah dilakukannya penelusuran literatur oleh penulis, pembahasan dimensi partisi masih belum cukup untuk menjawab seluruh pertanyaan dimensi partisi untuk seluruh graf. Oleh Rozzaq tahun 2022, didapatkan dimensi partisi dari graf hasil korona graf lengkap dan roda adalah $pd(K_n \odot W_m) = n$ untuk $n \geq 3$. Pada saat ini masih belum adanya penelitian dimensi partisi dari graf hasil korona graf lengkap dan graf roda secara menyeluruh. Maka dari itu penulis memutuskan untuk melakukan penelitian dan mengkaji dimensi partisi dari graf hasil korona graf lengkap dan graf roda. Terkhusus penelitian ini menitik beratkan pada penentuan dimensi partisi graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde m (W_m) Dimana $m = n$ dan $m = n + 2$.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana menentukan batas bawah dimensi partisi graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde m (W_m)
2. Bagaimana menentukan batas atas dimensi partisi graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde m (W_m)
3. Bagaimana menentukan dimensi partisi graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde m (W_m)

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Mengetahui cara penentuan batas bawah dimensi partisi graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde m (W_m).
2. Mengetahui cara penentuan batas atas dimensi partisi graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde m (W_m).

3. Mengetahui cara penentuan dimensi partisi graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde m (W_m).

1.4 Batasan Masalah

Masalah pada penelitian ini dibatasi pada graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n dengan graf roda berorde m dimana $m = n$ dan $m = n + 2$ untuk $n \geq 3$

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah dapat menjadi sumber referensi literatur serta pemahaman dalam proses berkembangnya ilmu pengetahuan terkhusus pada ilmu matematika diskrit yaitu bidang teori graf yang memuat tentang penentuan dimensi partisi hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde m (W_m). Selain itu diharapkan penelitian ini dapat menjadi teori pendukung bagi penelitian mendatang yang relevan dengan topik ini

1.6 Graf dan Istilah-Istilah Pada Graf

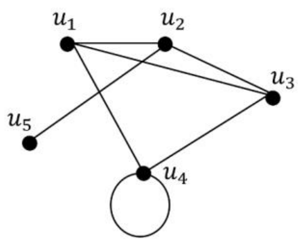
Dimensi partisi merupakan suatu sub bagian dari bidang matematika terapan khusunya kombinatorika graf yang mulai digeluti oleh para ahli sejak dicetus pertama kali oleh G. Chartrand, E Salehi serta P. Zhang pada 2002. Penggunaan aplikasi dimensi partisi graf ini digunakan pada banyak bidang. Mulai dari penggunaanya pada dunia sains, hingga manfaat langsung pada kehidupan sehari-hari sebagai fungsi terapannya. Pada bab ini akan dibahas beberapa teori pendukung dalam pembahasan dimensi partisi diantaranya istilah penting dalam graf, jenis-jenis graf, operasi dalam graf, hingga beberapa definisi dan teorema yang terkait dengan penentuan dimensi partisi dalam sebuah graf.

Definisi 1.6.1 Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit yang elemen-elemennya disebut titik (vertex) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan elemen-elemen $V(G)$ disebut sisi (edge). (Hasmawati, 2020)

Definisi 2.1.1 menegaskan bahwa dalam sebuah graf, kumpulan titik harus memiliki paling sedikit satu elemen (tidak boleh kosong), tetapi kumpulan sisi diperbolehkan kosong. Dengan kata lain, sebuah graf dapat memiliki paling sedikit satu titik. Graf yang hanya mempunyai satu titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial.

Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf seperti $a, b, c, \dots, v, w, \dots$ dengan bilangan asli $1,2,3 \dots$ atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dan v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dinyatakan dengan lambang $e\_1, e\_2, e\_3, \ldots$. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan u dan v maka e dapat dinyatakan sebagai $e = (u, v)$ atau uv yang menyatakan sisi yang menghubungkan u dan v. (Munir,2003).

Contoh 1.6.1 Misalkan himpunan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1, u_2u_5, u_4u_4\}$. Maka pasangan himpunan $G = \{V(G), E(G)\}$ adalah graf sebab $V(G)$ merupakan himpunan diskrit berhingga dan anggota $E(G)$ adalah elemen dari $V(G)$. Bentuk dari graf G adalah seperti pada Gambar 1.6.1

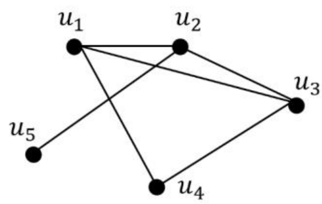


Gambar 1.6.1 Contoh Graf G

Definisi 1.6.1 adalah definisi graf yang secara umum. Ada pula definisi lain yaitu graf sederhana, yaitu menambahkan syarat khusus pada Definisi 1.6.1. definisi tersebut diberikan sebagai berikut.

Definisi 1.6.2 Graf sederhana G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dan berbeda dari titik-titik berbeda di G yang disebut sisi.

Contoh 1.6.2 Misalkan himpunan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1, u_2u_5\}$. Maka pasangan himpunan $G = \{V(G), E(G)\}$ adalah graf sebab $V(G)$ merupakan himpunan diskrit berhingga dan anggota $E(G)$ adalah elemen dari $V(G)$. Bentuk dari graf G adalah seperti pada Gambar 1.6.2.



Gambar 1.6.2 Graf Sederhana G

Pada Gambar 1.6.2 terlihat $V(G)$ memenuhi definisi dari graf sederhana, yaitu $V(G)$ tidak kosong dan berhingga serta untuk setiap pasangan terurut u_iu_j pada $E(G)$ tidak memuat $u_i = u_j$ dimana $i, j \in \{1, 2, 3, ,4 ,5\}$. Maka dari itu G merupakan salah satu contoh graf sederhana.

Definisi 2.1.3 Orde dari graf G yang disimbolkan dengan p adalah banyaknya elemen pada himpunan $V(G)$. Sedangan ada pula isitilah ukuran yang dinyatakan sebagai q yaitu banyaknya elemen pada $E(G)$.

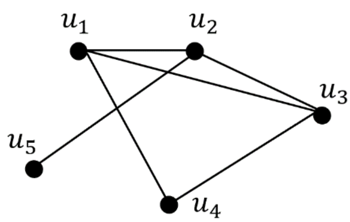
Contoh 1.6.3 graf pada contoh 1.6.2 merupakan graf beorde lima dan memiliki ukuran tujuh.

Definisi 1.6.4 Misalkan G adalah suatu graf lalu $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$, maka dapat dikatakan sebagai berikut:

a) Titik v_i bertetangga dengan titik v_j.
b) Sisi x terkait dengan titik v_i dan titik v_j

Keterangan tambahan terkait Definisi 1.6.4 adalah jika sisi $x_1, x_2,$ dan x_3 terkait langsung dengan suatu titik v pada graf G, maka sisi $x_1, x_2,$ dan x_3 dikatakan saling bertetangga.

Contoh 1.6.4 Misalkan graf G dengan himpunan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1, u_2u_5\}$. Bentuk dapat dilihat pada Gambar 2.1.3

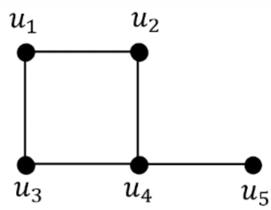


Gambar 1.6.3 Graf G_1 Orde Lima

Pada Gambar 1.6.3, dapat dilihat titik u_1 bertetangga dengan titik $u_2, u_3,$ dan u_4. Sedangkan sisi u_1u_2 terkait dengan titik 1 dan 2.

Definisi 1.6.5 Derajat suatu titik v dalam graf G dilambangkan dengan $\deg(v)$ adalah banyaknya sisi $e \in E(G)$ yang terkait dengan titik v. Derajat minimum dari graf G dinotasikan $\delta(G)$ yaitu $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in E(G)\}$ sedangkan derajat maksimum dari graf G dinyatakan sebagai $\Delta(G)$ yaitu $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in E(G)\}$.

Contoh 2.1.5 graf G_2 pada Gambar 1.6.4 dibawah berikut memiliki $\deg(u_1) = 2$ dan $\deg(u_4) = 3$. Sedangkan untuk derajat optimalnya adalah $\delta(G) = 2$ dan $\Delta(G) = 3$.



Gambar 1.6.4 Graf G_2

Definisi 1.6.6 Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, e_{n-1}, x_n$ dengan $e_i = v_i\, v_{i+1}, i \in \{1,2,3, .., n-1\}$. Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut.

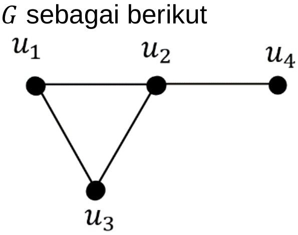
Apabila suatu titik u dan v selalu terdapat lintasan yang memuat titik u dan v maka graf G dikatakan graf terhubung. Sebaliknya apabila dapat dipilih dua titik berbeda u dan v dan setiap lintasan di G tidak memuat u dan v, maka graf G dikatakan graf tak terhubung.

Contoh 1.6.6 Perhatikan graf G pada Gambar 1.6.4. jika kita memilih sebarang dua titik u, v pada graf tersebut, maka akan selalu ditemukan lintasan yang memuat kedua titik tersebut. Oleh karena itu, graf G adalah graf terhubung.

Definisi 1.6.7 Misal u dan v dua buah titik pada graf sederhana G. Jarak dari titik u ke titik v dalam graf dinotasikan sebagai $d(u, v)$ adalah Panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Jika graf G tidak memiliki lintasan dari titik u ke titik v, maka didefinisikan $d(u, v) = \infty$

Keterangan tambahan untuk Definisi 1.6.7 adalah untuk setiap $u \in V(G)$ dapat disimpulkan untuk jarak dari u ke u atau dapat di tulis $d(u, u) = 0$ karena untuk mencapai titik u dari titik u kita tidak memerlukan sebuah sisi sebab kita sudah berada di titik tujuan itu sendiri.

Contoh 1.6.7 Diberikan graf G sebagai berikut

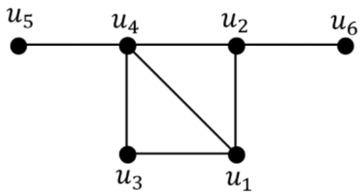


Gambar 1.6.5 Graf G_3 dengan Lintasan Terpanjang Tiga

Graf G_3 pada Gambar 1.6.5 memiliki lintasan terpanjang tiga yang diperoleh melalui titik 1 dan 4. Lintasan pertama adalah $1,13,3,32,2,24$ yang memiliki panjang tiga. Lintasan kedua adalah $1,12,2,24$ yang memiliki panjang dua. Karena jarak dari titik 1 ke titik 4 merupakan panjang lintasan terpendek dari titik 1 ke titik 4, maka jarak titik 1 ke titik 4 adalah $d(1{,}4) = 2$. Dalam hal ini, pada graf tersebut memiliki lintasan terpanjang tiga yang diperoleh melalui titik 1 dan 4, akan tetapi jarak dari titik 1 ke titik 4 adalah dua.

Definisi 1.6.8 Jika titik $u \in V(G)$ dan subhimpunan $S \subset V\,(G)$, maka jarak dari u ke S dinotasikan dengan $d(u,S)$ dan didefinisikan sebagai $d(u,S) = \min\,\{d(u,x)|x \in S\}$. Sehingga untuk setiap $u \in S, d(u,S) = 0$.

Contoh 1.6.8 Misalkan himpunan $V(G_5) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ dan $E(G_5) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_1u_4, u_2u_4, u_2u_6, u_3u_4, u_4u_5\}$ serta diberikan $S = \{u_1, u_2, u_3\}$. Bentuk graf dapat dilihat pada Gambar 2.1.6



Gambar 1.6.6 Graf G_4 Berorde Enam

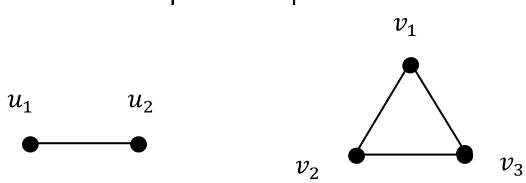
Pada Gambar 2.1.6 diperoleh $d(u_6,S) = \min\,\{d(u_6,x)|x \in S\} = \min\{d(u_6,u_1), d(u_6,u_2), d(u_6,u_3)\} = \min\{2{,}1{,}3\} = 1$.

1.7 Operasi korona Dalam Graf

Terdapat beberapa operasi yang dikenal dalam teori graf, diantaranya adalah operasi gabung, operasi tambah, operasi kali, operasi amalgamasi, operasi subdivisi, dan operasi korona. Akan tetapi, dalam penulisan ini, operasi yang digunakan hanyalah operasi korona. Pembahasan operasi graf ini merujuk pada buku “Pengantar dan Jenis-Jenis Graf” yang disusun oleh Hasmawati pada tahun 2020.

Definisi 1.7.1 Misalkan G adalah graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m. Graf korona G dan H dinotasikan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan graf H sebanyak n kali namakan $H^1, H^2, \ldots, H^n$ dan mengaitkan titik v_i di G dengan setiap titik di graf $H^i, i = 1{,}2, \ldots, n$

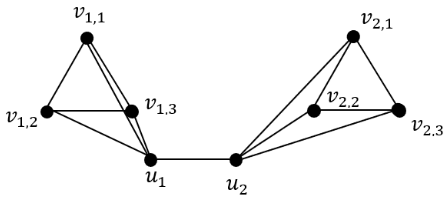
Contoh 1.7.1 Diberikan graf G adalah graf dengan $V(G) = \{u_1, u_2\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2\}$ dan graf H adalah graf dengan $V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$. Bentuk graf G dan H dapat dilihat pada Gambar 1.7.1 berikut.



(a) (b)

Gambar 1.7.1 (a) Graf G dan (b) Graf H

Karena graf G mempunyai dua titik, maka graf H digandakan sebanyak dua kali dan setiap titik di graf G dikaitkan dengan suatu titik di graf H. Hasil korona dari graf G dan H dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 1.7.2 Graf Korona $G \odot H$

Operasi korona memiliki sifat tidak komutatif apabila graf G tidak isomorfik dengan graf H. Hal ini dikarenakan untuk $G \odot H$ artinya graf H sebagai graf kedua harus digandakan sebanyak jumlah titik graf G, kemudian untuk titik ke- i dari graf G dihubungkan ke setiap titik di H^i berdasarkan Definisi 1.7.1. Sifat lain yang dimiliki graf hasil operasi korona adalah misalkan diberikan graf G dan H, maka graf hasil operasi korona $G \odot H$, memenuhi :

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} V(H^i)$$

$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} E(H^i) \cup \{iu_i | i \in V(G), u_i \in V(H_i)\}$$

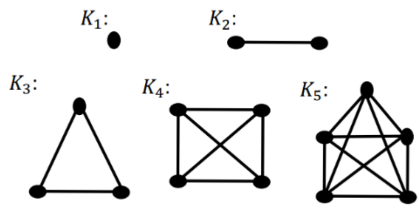
dengan H^i adalah penggandaan ke-i dari graf H.

1.8 Jenis-jenis Graf

Pada teori graf dikenal berbagai jenis graf khusus. Jenis-jenis graf tersebut diantaranya adalah graf lengkap, graf lintasan, graf siklus, graf roda, graf kipas, graf helm, graf web, graf gergaji, graf gir, dan sebagainya. Pada penulisan ini graf yang akan dibahas hanyalah graf lengkap, dan graf roda.

Definisi 1.8.1 Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap dua titiknya bertetangga atau dengan kata lain untuk setiap $u, v \in V(G)$ berlaku $uv \in E(G)$. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n.

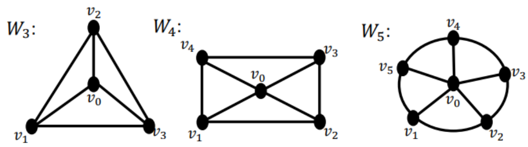
Contoh 1.8.1 Berikut adalah contoh dari graf lengkap



Gambar 1.8.1 Graf Lengkap

Definisi 1.8.2 Graf roda (*Wheel*) adalah graf yang dikonstruksi dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x dan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus $(K_1 + C_n)$.

Contoh 1.8.2



Gambar 1.8.2 Graf Roda

1.9 Korona Graf Lengkap dan Graf Roda

Pada subbab ini akan dibahas hasil operasi graf korona graf lengkap dan graf roda.

Definsi 1.9.1 Titik dan sisi graf lengkap berturut-turut dinotasikan sebagai $V(K_n) = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(K_n) = \{u_i u_j \,|1 \leq i \leq n\}$.

Definisi 1.9.2 Titik dan sisi graf roda berturut-turut dinotasikan sebagai $V(W_n) = \{v_i | 0 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{v_i v_{i+1\,(mod\ n)} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_0 v_i | 1 \leq i \leq n\}$.

Definisi 1.9.3 Misal graf $G = K_n \odot W_m$ adalah hasil korona graf lengkap dan graf roda. Titik dan sisi graf roda yang digandakan setelah operasi korona sebanyak i (W_m^i) berturut-turut dinotasikan sebagai $V(W_n^i) = \{v_{i,j} | 0 \leq j \leq m\}$ dan $E(W_n) = \{v_{i,j} v_{i,j+1\,(mod\ n)} | 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{i,0} v_{i,j} | 1 \leq j \leq n\}$. himpunan titik dan sisi dari G dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$V(G) = V(K_n) \cup \bigcup_{i \in V(G)} V(W_m^i)$$

$$E(G) = E(K_n) \cup \bigcup_{i \in V(G)} E(W_m^i) \cup \{u_i v_{i,j} | 1 \leq i < n\,, 0 \leq j \leq m\}$$

dengan W_m^i adalah penggandaan ke-i dari graf W_n.

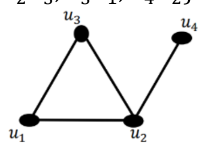
Untuk kebutuhan pembuktian dimensi partisi dari graf $K_n \odot W_n$ didefinisikan suatu himpunan titik blok $V\left(W_m^{i\,\prime}\right)$ dimana $V\left(W_m^{i\,\prime}\right) = V(W_m^i) \cup \{u_i\}$ untuk $1 \le i \le n$. Definisi ini akan digunakan untuk mengefesienkan penulisan dalam penjabaran pembuktian.

1.10 Dimensi Partisi

Pada subbab ini akan dibahas definisi, sifat dan teorema yang terkait dengan konsep dimensi partisi graf.

Definisi 1.10.1 Misalkan $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ dan $v \in V(G)$. Representasi dari $v \in V(G)$ terhadap Π dinotasikan $r(v|\prod)$ merupakan pasangan-k terurut $\big(d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k)\big)$. (Darmaji, 2011).

Contoh 1.10.1 Diberikan graf dengan himpunan titik dan sisi sebagai berikut $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_1, u_4u_2\}$



Gambar 1.10.1 Graf G

Misalkan $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{u_1, u_2\}, S_2 = \{u_3\}, S_3 = \{u_4\}$. Representasi untuk setiap $v \in V(G)$ terhadap $\prod$ ialah sebagai berikut.

- $r(u_1|\prod) = \{d(u_1,S_1), d(u_1,S_2), d(u_1,S_3)\} = \{0,1,2\}$
- $r(u_2|\prod) = \{d(u_2,S_1), d(u_2,S_2), d(u_3,S_3)\} = \{0,1,1\}$
- $r(u_3|\prod) = \{d(u_3,S_1), d(u_3,S_2), d(u_3,S_3)\} = \{1,0,2\}$
- $r(u_4|\prod) = \{d(u_4,S_1), d(u_4,S_2), d(u_4,S_3)\} = \{1,2,0\}$

Definisi 1.10.2 Partisi terurut $\prod$ merupakan partisi pembeda dari $V(G)$ jika untuk seteiap $u, v \in V(G)$ memiliki representasi terhadap $\prod$ yang berbeda, yakni berlaku $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$.

Contoh 1.10.2 Berdasarkan Contoh 1.10.1 diperoleh untuk setiap $i \neq j \in V(G)$ berlaku $r(u_i|\prod) \neq r(u_j|\prod)$, sehingga $\prod$ disebut partisi pembeda dari $V(G)$.

Definisi 1.10.3 Partisi pembeda $\prod$ dengan kardinalitas minimum disebut partisi pembeda minimum. Adapun Dimensi partisi $pd(G)$ dari graf G adalah kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari G.

Contoh 1.10.3 Berdasarkan Gambar 1.10.1 $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{u_1, u_2\}, S_2 = \{u_3\}, S_3 = \{u_4\}$ merupakan partisi pembeda dari $V(G)$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari $V(G)$ memiliki kardinalitas sedikitnya 3. Berdasarkan teorema yang mengatakan suatu graf memiliki dimensi partisi 2 jika dan hanya jika graf tersebut adalah graf P_n. Karena graf pada Gambar 2.5.1 bukanlah graf P_n , maka, dimensi partisinya pasti bukan 2. maka dapat kita katakana $pd(G) > 2$. Karena $pd(G) \leq 3$, dan informasi lain mengatakan bahwa $pd(G) > 2$. maka dapat disimpulkan bahwa $pd(G) = 3$. ■

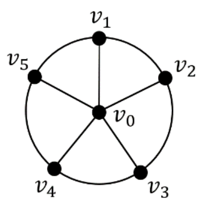
Untuk kepentingan pembuktian dimensi partisi pada graf yang diteliti, maka disajikan beberapa definisi dan teorema yang akan membantu dalam pembahasan masalah pada penelitian ini.

Definisi 1.10.4 Diberikan G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik-titik yang setara dalam graf G apabila memenuhi salah satu sifat berikut:

1. $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G)/\{u,v\}$
2. Terdapat titik c sehingga $d(u,c) + d(c,s) = d(v,c) + d(c,s), \forall s \in V(G)/\{u,v\}$.

Pada Definisi 1.10.4, jika titik u dan v memenuhi syarat 1, maka titik u dan v tersebut disebut titik setara kuat dan jika tidak, u dan v disebut setara lemah.

Contoh 1.10.4 Diberikan graf W_5 dengan $V(W_5)$={ $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$} dan $E(W_5) = \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_0v_5, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_1v_5\}$.



Gambar 1.10.2 Graf W_5

Berdasarkan Definisi 2.5.4, untuk setiap $i, j = 1,2,3,4,5$ dengan $i \neq j$, titik v_1 dan titik v_j adalah titik setara karena terdapat titik v_0 sedemikian sehingga :

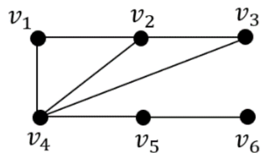
$$d(v_1, v_0) + d(v_0, s) = d(v_j, v_0) + d(v_0, s) = 2, \forall s \in V(W_5)/\{v_i, v_j\}$$

Teorema 1.10.1 Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi $\prod$ dari $V(G)$ dan titik u dan v merupakan titik-titik yang setara dalam G. Jika $\prod$ merupakan partisi pembeda graf G, maka u dan v atau tetangga u dan tetangga v berada pada kelas partisi yang berbeda di $\prod$. (Hasmawati,2021)

Definisi 1.10.5 Diberikan G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik-titik yang setingkat dalam graf G apabila memenuhi sifat – sifat berikut:

1. $\deg(u) = \deg(v)$
2. Jika $d(u,x) = k$, maka terdapat $y \in V(G)$ sehingga $d(u,x) = d(v,y) = k$ dan $|\{x \in V(G)|d(u,x) = k\}| = |\{y \in V(G)|d(v,y) = k\}|$

Contoh 1.10.5 Diberikan graf G dengan $V(G)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6\}$.



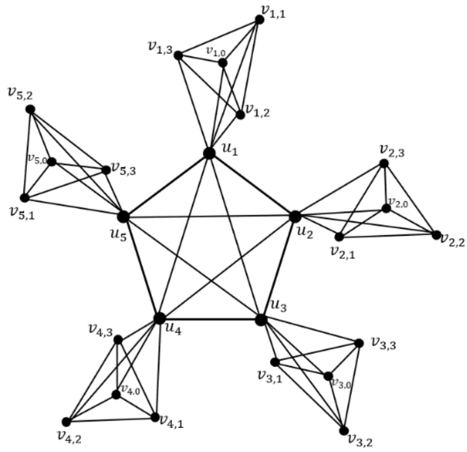
Gambar 1.10.3 Graf G

Berdasarkan Definisi 1.10.5, titik v_1 dan titik v_3 adalah titik setara karena memenuhi kedua sifat titik setingkat. Dari sifat pertama $\deg(v_1) = \deg(v_3) = 2$ dan sifat kedua banyaknya titik yang berjarak k dimana $k \in \{1,2,3)$ terhadap masing masing v_1 dan v_3 adalah sama.

Lemma 1.10.1 Diberikan graf G terhubung dengan himpunan partisi Π dari $V(G)$. Misalkan pula titik u dan v titik-titik yang setingkat dalam G terdapat $x, y \in V(G)$ sedemikian sehingga $d(u,x) = d(v,y) = k$. Jika Π merupakan partisi pembeda graf G dan $k = \min\{d(u,a)|a \in S, S \in \Pi\}$, maka u dan v atau x dan y berada pada kelas partisi yang berbeda di Π.

Lemma 1.10.2 Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi Π dari $V(G)$. Jika Π merupakan partisi pembeda graf G dan titik u dan titik v merupakan titik-titik yang setara kuat dalam G, maka u dan v berada pada kelas partisi yang berbeda pada Π.

Contoh 1.10.6 Misalkan graf $K_5 \odot W_3$ dengan himpunan titik dan sisi berturut turut yaitu $V(K_5 \odot W_3) = V(K_5) \cup_{i \in V(K_5)} V(W_3^i)$ dan $E(K_5 \odot W_3) = E(K_5) \cup \cup_{i \in V(K_5)} E(W_3^i) \cup \{u_i v_{i,j} | 1 \leq i < 5 , 0 \leq j \leq 3\}$.



Gambar 1.10.4 Graf $K_5 \odot W_3$

Berdasarkan penelitian yang dilakukan Darmaji pada tahun 2011, dimensi partisi dari graf $pd(K_5 \odot K_4)$ adalah $4+1=5$. Perhatikan bahwa untuk secara umum W_3 merupakan graf yang kembar dengan K_4, Akibatnya $pd(K_5 \odot W_3) = pd(K_5 \odot K_4) = 5$. Oleh karena itu, dapat dipastikan bahwa kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari $K_5 \odot W_3$adalah 5 dan dapat dipilih $\prod = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ dengan anggota dari S berikut.

$$S_1 = \{u_2, v_{2,0}, v_{3,1}, v_{4,1}, v_{5,1}\}$$
$$S_2 = \{u_3, v_{3,0}, v_{4,3}, v_{5,2}, v_{1,1}\}$$
$$S_3 = \{u_4, v_{4,0}, v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,2}\}$$
$$S_4 = \{u_5, v_{5,0}, v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,3}\}$$
$$S_5 = \{u_1, v_{1,0}, v_{2,1}, v_{4,2}, v_{5,3}\}$$

sebagai partisi pembeda dari $V(K_5 \odot W_3)$.

Akan diperlihatkan $\prod$ sebagai partisi pembeda dari $V(K_5 \odot W_3)$ sebagai berikut.

$r(u_1|\prod) = \{d(u_1,S_1), d(u_1,S_2), d(u_1,S_3), d(u_1,S_4), d(u_1,S_5)\} = \{1,1,1,1,0\}$
$r(u_2|\prod) = \{d(u_2,S_1), d(u_2,S_2), d(u_2,S_3), d(u_2,S_4), d(u_2,S_5)\} = \{0,1,1,1,1\}$
$r(u_3|\prod) = \{d(u_3,S_1), d(u_3,S_2), d(u_3,S_3), d(u_3,S_4), d(u_3,S_5)\} = \{1,0,1,1,1\}$
$r(u_4|\prod) = \{d(u_4,S_1), d(u_4,S_2), d(u_4,S_3), d(u_4,S_4), d(u_4,S_5)\} = \{1,1,0,1,1\}$
$r(u_5|\prod) = \{d(u_5,S_1), d(u_5,S_2), d(u_5,S_3), d(u_5,S_4), d(u_5,S_5)\} = \{1,1,1,0,1\}$
$r(v_{1,0}|\prod) = \{d(v_{1,0},S_1), d(v_{1,0},S_2), d(v_{1,0},S_3), d(v_{1,0},S_4), d(v_{1,0},S_5)\} = \{2,1,1,1,0\}$
$r(v_{2,0}|\prod) = \{d(v_{2,0},S_1), d(v_{2,0},S_2), d(v_{2,0},S_3), d(v_{2,0},S_4), d(v_{2,0},S_5)\} = \{0,2,1,1,1\}$
$r(v_{3,0}|\prod) = \{d(v_{3,0},S_1), d(v_{3,0},S_2), d(v_{3,0},S_3), d(v_{3,0},S_4), d(v_{3,0},S_5)\} = \{1,0,1,1,2\}$
$r(v_{4,0}|\prod) = \{d(v_{4,0},S_1), d(v_{4,0},S_2), d(v_{4,0},S_3), d(v_{4,0},S_4), d(v_{4,0},S_5)\} = \{1,1,0,2,1\}$
$r(v_{5,0}|\prod) = \{d(v_{5,0},S_1), d(v_{5,0},S_2), d(v_{5,0},S_3), d(v_{5,0},S_4), d(v_{5,0},S_5)\} = \{1,1,2,0,1\}$
$r(v_{1,1}|\prod) = \{d(v_{1,1},S_1), d(v_{1,1},S_2), d(v_{1,1},S_3), d(v_{1,1},S_4), d(v_{1,1},S_5)\} = \{2,0,1,1,1\}$

$$r(v_{1,2}|\Pi) = \{d(v_{1,2}, S_1), d(v_{1,2}, S_2), d(v_{1,2}, S_3), d(v_{1,2}, S_4), d(v_{1,2}, S_5)\} = \{2,1,0,1,1\}$$
$$r(v_{1,3}|\Pi) = \{d(v_{1,3}, S_1), d(v_{1,3}, S_2), d(v_{1,3}, S_3), d(v_{1,3}, S_4), d(v_{1,3}, S_5)\} = \{2,1,1,0,1\}$$
$$r(v_{2,1}|\Pi) = \{d(v_{2,1}, S_1), d(v_{2,1}, S_2), d(v_{2,1}, S_3), d(v_{2,1}, S_4), d(v_{2,1}, S_5)\} = \{1,2,1,1,0\}$$
$$r(v_{2,2}|\Pi) = \{d(v_{2,2}, S_1), d(v_{2,2}, S_2), d(v_{2,2}, S_3), d(v_{2,2}, S_4), d(v_{2,2}, S_5)\} = \{1,2,0,1,1\}$$
$$r(v_{2,3}|\Pi) = \{d(v_{2,3}, S_1), d(v_{2,3}, S_2), d(v_{2,3}, S_3), d(v_{2,3}, S_4), d(v_{2,3}, S_5)\} = \{1,2,1,0,1\}$$
$$r(v_{3,1}|\Pi) = \{d(v_{3,1}, S_1), d(v_{3,1}, S_2), d(v_{3,1}, S_3), d(v_{3,1}, S_4), d(v_{3,1}, S_5)\} = \{0,1,1,1,2\}$$
$$r(v_{3,2}|\Pi) = \{d(v_{3,2}, S_1), d(v_{3,2}, S_2), d(v_{3,2}, S_3), d(v_{3,2}, S_4), d(v_{3,2}, S_5)\} = \{1,1,0,1,2\}$$
$$r(v_{3,3}|\Pi) = \{d(v_{3,3}, S_1), d(v_{3,3}, S_2), d(v_{3,3}, S_3), d(v_{3,3}, S_4), d(v_{3,3}, S_5)\} = \{1,1,1,0,2\}$$
$$r(v_{4,1}|\Pi) = \{d(v_{4,1}, S_1), d(v_{4,1}, S_2), d(v_{4,1}, S_3), d(v_{4,1}, S_4), d(v_{4,1}, S_5)\} = \{0,1,1,2,1\}$$
$$r(v_{4,2}|\Pi) = \{d(v_{4,2}, S_1), d(v_{4,2}, S_2), d(v_{4,2}, S_3), d(v_{4,2}, S_4), d(v_{4,2}, S_5)\} = \{1,1,1,2,0\}$$
$$r(v_{4,3}|\Pi) = \{d(v_{4,3}, S_1), d(v_{4,3}, S_2), d(v_{4,3}, S_3), d(v_{4,3}, S_4), d(v_{4,3}, S_5)\} = \{1,0,1,2,1\}$$
$$r(v_{5,1}|\Pi) = \{d(v_{5,1}, S_1), d(v_{5,1}, S_2), d(v_{5,1}, S_3), d(v_{5,1}, S_4), d(v_{5,1}, S_5)\} = \{0,1,2,1,1\}$$
$$r(v_{5,2}|\Pi) = \{d(v_{5,2}, S_1), d(v_{5,2}, S_2), d(v_{5,2}, S_3), d(v_{5,2}, S_4), d(v_{5,2}, S_5)\} = \{1,0,2,1,1\}$$
$$r(v_{5,3}|\Pi) = \{d(v_{5,3}, S_1), d(v_{5,3}, S_2), d(v_{5,3}, S_3), d(v_{5,3}, S_4), d(v_{5,3}, S_5)\} = \{1,1,2,1,0\}$$

Dalam beberapa dekade terakhir, penelitian mengenai dimensi partisi graf telah menarik perhatian banyak ahli di bidang teori graf dan kombinatorika. Dimensi partisi suatu graf merupakan konsep yang penting dalam memahami struktur dan sifat-sifat dari graf tersebut. Banyak studi telah dilakukan untuk menentukan dimensi partisi berbagai jenis graf, mulai dari graf sederhana hingga graf yang lebih kompleks. Berikut ini adalah rangkuman hasil penelitian terdahulu yang telah berhasil menentukan dimensi partisi untuk berbagai jenis graf. Tabel di bawah ini menyajikan daftar hasil penelitian terdahulu, yang mencakup nama peneliti, tahun publikasi, jenis graf yang diteliti, serta dimensi partisi yang ditemukan.

Tabel 1.10.1 Hasil Penelitian Dimensi Parsial Pada Graf Sederhana

Graf	Dimensi Partisi	Peneliti
$G \cong K_m \odot K_n$	$pd(G) = \begin{cases} n+1, & 2 \le m \le \binom{n+1}{n} \\ n+2, & n+2 \le m \le \binom{n+2}{n} + 1 \\ n+k, & \binom{n+k-1}{n} \le m \le \binom{n+k}{n} \end{cases}$	(Darmaji,2011)
$G \cong C_m \odot K_n$	$pd(G) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ p & n > 1 \end{cases}$ Dimana p merupakan bilangan bulat posistif yang memenuhi $\binom{p}{n} \ge m$	(Yogi dkk,2012)

$G \cong S_{k,m}$	$pd(G) = \begin{cases} m-1, & 2 \le k \le m-2, m \ge 4 \\ m, & m-1 \le k \le m^2-1 \\ m+a, & (m+a-1)^2-1 < k \le (m+a)^2-1 \end{cases}$	(Asmiati, 2012)
$G \cong K_n \odot K_{n-1}$, $n \ge 3$	$pd(G) = 2n-1$	(Listiana,2017)
$G \cong P_m \odot K_{1,m}$	$pd(G) = \begin{cases} n & m \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ n+1 & m > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{cases}$	(Purwaningsih,2017)
$G \cong Amal(C_n)_m$, Untuk suatu $k \ge 3$, $n \ge 3$ dan $m \in I_k$	$pd(Amal(C_n)_m) = k$	(Hasmawati dkk,2021)
$G \cong G_{m,n}$ Untuk $n = 2k$	$pd(G) = 3$	(Haspika dkk, 2023)
$G_1 \cong U_{m,n}(1)$ $G_2 \cong U_{m,n}(1)$ Untuk $m \ge 5, n \ge 2$	$pd(G_1) \le \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$, $pd(G_2) \le \left\lceil \frac{m+2}{2} \right\rceil$	(Yuli dkk,2024)
Penelitian Dimensi Parsial Pada Graf Hasil Korona Graf Lengkap dan Graf Roda		
$G \cong K_n \odot W_{n+1}$, $n \ge 3$	$pd(G) = \begin{cases} 4 & n = 3 \\ n & n > 3 \end{cases}$	(Rozzaq dkk,2022)

Dalam penelitian skripsi ini di kaji dimensi partisi untuk graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde m (W_m) yang ditulis $K_n \odot W_m$. Pembahasannya disajikan secara lengkap pada Bab III.