TESIS

FUNGSI AMBIGUITI FRAKSIONAL DAN SIFAT-SIFATNYA

(***FRACTIONAL AMBIGUITY FUNCTION AND THEIR PROPERTIES***)

ANDI NURKIFAYAH
H022222002

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2024

FUNGSI AMBIGUITI FRAKSIONAL DAN SIFAT-SIFATNYA
FRACTIONAL AMBIGUITY FUNCTION AND THEIR PROPERTIES

Tesis

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Matematika

Disusun dan diajukan oleh

ANDI NURKIFAYAH

H022222002

pada

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2024

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis berjudul " Fungsi Ambiguiti Fraksional dan Sifat-Sifatnya" adalah benar karya saya dengan arahan dari tim pembimbing (Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Utama dan Dr. Amran, S.Si., M.Si sebagai Pembimbing Pendamping). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi manapun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal (International Journal of Mathematics and Computer Science, 19(2), 453-458; http://ijmcs.future-in-tech.net (*Published*)) sebagai atikel dengan judul "*New Fundamental Inequalities for Fractional Ambiguity Function*". Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku. Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 04 Juni 2024

METERAI TEMPEL
AC0D6ALX119352791

Andi Nurkifayah
H022222002

TESIS

FUNGSI AMBIGUITI FRAKSIONAL DAN SIFAT-SIFATNYA

ANDI NURKIFAYAH

NIM: H022222002

telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Magister pada tanggal 04 Juni 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

pada

Program Studi Magister Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan,

Pembimbing Utama

Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.
NIP. 19701231 199802 1001

Pembimbing Pendamping

Dr.Amran, S.Si., M.Si.
NIP. 19701101 199802 1001

Ketua Program Studi
Matematika S2

Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1013

Dekan Fakulras MIPA
Universitas Hasanuddin

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS HASANUDDIN
FAKULTAS MIPA

Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.
NIP. 19720515 1997 02 1002

PRAKATA

Bismillahirrahmanirrahim. Alhamdullilah, puji dan syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT., yang telah melimpahkan rahmat, karunia, dan hidayah-Nya sehingga penelitian dan penyusunan thesis yang berjudul **Fungsi Ambiguiti Fraksional dan Sifat-Sifatnya** ini dapat terlaksana dengan baik. Tidak lupa pula penulis lantunkan salam dan shalawat atas Nabi Muhammad SAW., keluarga, seluruh sahabat yang selalu istiqomah di jalan-Nya untuk mendapatkan ridha Allah SWT dan para syuhada yang telah berjihad menegakkan dan mempertahankan agama yang dirahmati serta yang setia hingga akhir zaman.

Dalam pelaksanaan penelitian hingga terangkumnya tesis ini, cukup banyak rintangan dan hambatan yang penulis jumpai, sehingga disadari sepenuhnya bahwa tesis ini tak mungkin tersusun tanpa adanya bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberi bantuan dan dukungan. Terima kasih yang teristimewa penulis ucapkan kepada keluarga tercinta, Ayahanda **Andi Fahruddin** dan Ibunda **Hasni** atas limpahan cinta, kasih sayang, doa restu, serta dukungan moril dan materi yang tak berhingga sehingga penulis mampu menyelesaikan studi dengan baik. Pula untuk kakak **Andi Nurhidayah** dan adik **Andi Muh. Farchan** yang selalu memberikan semangat, dukungan, serta doa. Penulis juga mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si**, dan Bapak **Dr. Amran, S.Si., M.Si** selaku dosen pembimbing atas kesediaaan waktu dan kesabaran serta dengan penuh keikhlasan memberikan dukungan, arahan, motivasi, dan membimbing penulis sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan baik.

2. Bapak **Dr. Firman, S.Si.**, Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**, dan Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** selaku dosen penguji atas segala bentuk bimbingan, saran, dan arahan, yang diberikan kepada penulis dalam penyelesaian tesis ini.

3. **Seluruh dosen** dan **staff** Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah banyak memberikan bekal ilmu, bantuan, dan arahan dalam pengurusan administrasi.

4. Teman-teman **Lab. Analisis**, **Ajeng**, **Hilma**, **Fitri**, **Imanuel**, **Esra**, Bu **Sri**, Bu

Uni, Bu **Ida** dan kak **Nasrullah** yang telah banyak memberikan motivasi, dukungan, dan bantuan kepada penulis selama penyelesaian tesis.

5. Teman-teman **Pascasarjana Matematika 2022-2**, terkhusus Kak **Mawar** dan **Airin** atas segala bentuk dukungan, bantuan, kebersamaan, dan telah berbagi suka dan duka selama proses perkuliahan.

6. Teman-teman, **Naya**, **Putri**, **Shindy**, **Inda**, **Galih**, **Harna** dan **Hijra**, yang selalu setia menemani, membantu, dan memberi semangat serta motivasi kepada penulis dalam menjalani keseharian.

7. Seluruh pihak yang terlibat, membantu, dan mendukung penulis yang tidak sempat disebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa laporan tesis ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu penulis memohon maaf serta mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun dari para pembaca, guna perbaikan di masa yang akan datang bagi penulis selanjutnya. Semoga tesis ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak, khususnya bagi dunia ilmu pengetahuan.

Makassar, 04 Juni 2024

Andi Nurkifayah

H022222002

ABSTRAK

ANDI NURKIFAYAH. **FUNGSI AMBIGUITI FRAKSIONAL DAN SIFAT-SIFATNYA** (dibimbing oleh Mawardi Bahri, Amran Rahim).

Fungsi ambiguiti fraksional merupakan perluasan dari fungsi ambiguiti standar dengan mengaplikasikan kernel transformasi Fourier fraksional. Penelitian ini membahas tentang sifat-sifat fungsi ambiguiti fraksional. Sifat Konjugasi kompleks, translasi, modulasi, dan rumus rekontruksi dibuktikan secara rinci. Selanjutnya ditunjukkan relasi antara transformasi Fourier dengan fungsi ambiguiti fraksional. Kemudian diberikan juga beberapa teorema ketaksamaan dasar untuk fungsi ambiguiti fraksional yang merupakan bagian dari sifat-sifat fungsi ambiguiti fraksional.

Kata Kunci: fungsi ambiguiti fraksional, fungsi ambiguiti, transformasi Fourier, transformasi Fourier fraksional.

ABSTRACT

ANDI NURKIFAYAH. **Fractional ambiguity functions and their properties** (Supervised by Mawardi Bahri, Amran Rahim).

The fractional ambiguity function is an extension of the standard ambiguity function by applying a fractional Fourier transform kernel. This research discusses the properties of the fractional ambiguity function. The properties of complex conjugation, translation, modulation, and reconstruction formula are proven in detail. Furthermore, the relationship between the Fourier transform and the fractional ambiguity function is demonstrated. Additionally, several fundamental inequality theorems for the fractional ambiguity function, which are part of the properties of the fractional ambiguity function, are also provided.

Keywords: fractional ambiguity function, ambiguity function, Fourier transform, fraksional Fourier transform.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Transformasi Fourier (*Fourier Transform* atau FT) mempunyai peranan penting dalam banyak teori dari ilmu pengetehauan dan teknik [Wei D. et al., 2012]. Dalam bidang matematika terapan, transformasi Fourier telah berkembang menjadi teknik matematika yang penting, terutama sebagai metode yang sering digunakan untuk menyelesaiakan persamaan diferensial [Bahri M., 2022]. Transformasi Fourier juga digunakan untuk menganalisis fungsi atau sinyal dalam domain frekuensi. Transformasi Fourier fraksional (*Fraksional Fourier Transform* atau FrFT) adalah generalisasi dari transformasi Fourier biasa dengan parameter orde θ [Sutrina I. et al., 2019]. Transformasi Fourier fraksional memberikan perspektif berbeda dalam menganalisis sinyal atau fungsi. Transformasi Fourier fraksional (FrFT) telah menyediakan kerangka kerja yang fleksibel untuk menganalisis dan memanipulasi sinyal-sinyal baik dalam domain waktu maupun domain frekuensi [Song Y. E. et al., 2014]. Teknik matematika yang digunakan untuk menganalisis dan mengukur tingkat seberapa ambigu atau tidak pasti suatu sinyal dalam domain waktu-frekuensi dikenal sebagai fungsi ambiguiti (*Ambiguity Function*). Fungsi ini sering digunakan dalam teori pemrosesan sinyal dan komunikasi untuk mengidentifikasi dan memahami sifat-sifat sinyal, seperti resolusi waktu dan frekuensi, serta kemampuan untuk memisahkan sinyal-sinyal yang tumpang tindih [Bahri M. et al., 2017].

Dalam beberapa tahun terakhir, telah banyak minat yang signifikan dalam mempelajari generalisasi dan sifat-sifat transformasi Fourier dan FrFT, terutama dalam kaitannya dengan fungsi ambiguiti. Sebagai contoh, Tian-Wen C. et al., 2012 menggeneralisasikan fungsi ambiguiti dalam domain transformasi kanonik linier. Transformasi ini diperoleh dengan menggantikan kernel Fourier dengan kernel tranformasi kanonik linier dalam definisi fungsi ambiguiti. Selanjutnya, Bahri M. et al., 2017 dalam penelitian mereka mengembangkan beberapa sifat dan penerapan dari transformasi ini. Li Y. G. et al., 2014 juga menggeneralisasikan fungsi ambiguiti dalam ruang transformasi kanonik linier, dalam transformasi ini diperoleh prinsip ketidakpastian untuk fungsi ambiguiti yang terkait dengan transformasi kanonik linier. Terinspirasi dari bahasan fungsi ambiguiti kanonik linier, Sahay P. et al., 2020 telah menggeneralisasikan fungsi ambiguiti ke dalam transformasi Fourier fraksional, yang disebut sebagai fungsi ambiguiti fraksional (*Fractional Ambiguity Function* atau FrAF). Mereka menyelidiki fungsi ambiguiti fraksional dan menerapkannya dalam pemrosesan sinyal.

Dari bahasan sebelumnya, telah banyak dikembangkan fungsi ambiguiti kanonik linier. Namun, Fungsi ambiguiti fraksional yang baru diperkenalkan dan dikembangkan oleh Sahay P. et al., 2020 bersama dengan hasil yang diperoleh dapat digunakan untuk memberikan dasar dalam menggeneralisasikan ke sinyal termodulasi frekuensi tingkat tinggi. Oleh karena itu, tulisan ini akan membahas relasi antara fungsi ambiguiti fraksional dan transformasi Fourier, dan membangun beberapa sifat dalam fungsi ambiguiti fraksional berdasarkan sifat-sifat transformasi Fourier. Selanjutnya, akan diturunkan beberapa sifat ketaksamaan pada fungsi ambiguti fraksional. Fungsi ambiguti fraksional adalah generalisasi dari fungsi ambiguiti dengan basis transformasi Fourier fraksional. Adapun relasi yang diperoleh, sifat-sifat dan ketaksamaan yang diturunkan merupakan bahasan baru atau pengembangan dari fungsi ambiguti fraksional. Ketaksamaan juga merupakan sifat dari sebuah transformasi, sehingga judul yang dihasilkan dalam penelitian ini adalah Fungsi Ambiguiti Fraksional dan Sifat-Sifatnya.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang diuraikan sebelumnya, diperoleh rumusan masalah yaitu:

1. Bagaimana relasi antara fungsi ambiguiti fraksional dan transformasi Fourier?
2. Bagaimana membuktikan sifat-sifat pada fungsi ambiguiti fraksional?
3. Bagaimana membuktikan teorema ketaksamaan pada fungsi ambiguiti fraksional?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini hanya akan membahas fungsi ambiguiti fraksional dengan beberapa sifatnya yaitu konjugasi kompleks, translasi, modulasi dan formula rekontruksi.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini yaitu untuk:

1. Membuat relasi antara fungsi ambiguiti fraksional dan transformasi Fourier.
2. Membuktikan sifat-sifat pada fungsi ambiguiti fraksional.
3. Membuktikan teorema ketaksamaan pada fungsi ambiguiti fraksional.

1.5. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari tugas akhir ini yaitu diharapkan dapat memberikan pengetahuan baru sekaligus menjadi litaratur tambahan bagi penulis dan pembaca terkait fungsi ambiguiti fraksional dan sifat-sifatnya.

1.6. Sistematika Penulisan Tesis

Sistematika penulisan tesis ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi konsep dasar dan penelitian relevan yang terkait dengan fungsi ambiguiti fraksional dan sifat-sifatnya.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi metodologi penelitian yang digunakan dalam penelitian ini, meliputi: jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, prosedur atau tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi hasil-hasil dari kajian yang telah dilakukan, dan pembahasannya.

BAB V KESIMPULAN

Bab ini berisi kesimpulan dan saran berdasarkan hasil bab-bab sebelumnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini dibahas beberapa teori yang mendasari tulisan ini, pembahasan yang ada akan menjadi landasan dasar untuk fungsi ambiguiti fraksional dan sifat-sifatnya. Pada tulisan ini, dibahas terlebih dahulu tentang ruang L^p untuk transformasi Fourier, transformasi Fourier dan sifat-sifatnya, transformasi Fourier fraksional, dan fungsi ambiguiti.

2.1. Ruang L^p

Ruang L^p adalah ruang fungsi matematika yang penting dalam teori analisis fungsional. Ruang L^p terdiri dari himpunan fungsi yang memenuhi sifat-sifat tertentu dalam konteks norma L^p. Pada bagian ini, akan didefinisikan ruang L^p dengan $1 \leq p < \infty$.

2.1.1. Ruang $L^1(\mathbb{R})$

Definisi 2.1.1 (Ruang $L^1(\mathbb{R})$) *Misalkan f fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^1(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu*

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < \infty \right\} \tag{2.1}$$

[Rusdin. et al., 2013].

Ruang $L^1(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm $\|.\|_{L^1(\mathbb{R})}$ yang dirumuskan

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt. \tag{2.2}$$

Contoh 1. Diberikan fungsi

$$f(t) = 1 + t^2, \quad 0 < t < 5. \tag{2.3}$$

Tunjukkan bahwa fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang $L^1(\mathbb{R})$.

Penyelesaian. Berdasarkan definisi fungsi ruang $L^1(\mathbb{R})$, maka

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \int_0^5 \left|1 + t^2\right| dt = t + \frac{t^3}{3}|_0^5 = \left(5 + \frac{5^5}{3}\right) = \frac{140}{3},$$

maka $f(t)$ ada dalam ruang $L^1(\mathbb{R})$.

Contoh 2. Diberikan fungsi $f(t) = e^{-t^2}$ dimana $t \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$.

Penyelesaian. Berdasarkan Definisi 2.1.1, diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t^2}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-t^2}) dt \\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Karena $\sqrt{\pi} < \infty$, maka fungsi $f(t) = e^{-t^2}$ ada dalam ruang $L^1(\mathbb{R})$.

2.1.2. Ruang $L^2(\mathbb{R})$

Definisi 2.1.2 (Ruang $L^2(\mathbb{R})$) *Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu*

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\} \tag{2.4}$$

[Rusdin. et al., 2013].

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm $\|.\|_{L^2(\mathbb{R})}$ yang dirumuskan

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Jika $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan inner product dengan aturan jika $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt, \tag{2.6}$$

dengan normanya ditulis sebagai

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \tag{2.7}$$

Contoh 3. Diberikan fungsi rectangular pulse

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & selainnya, \end{cases} \tag{2.8}$$

dengan $T > 0$. Tunjukkan bahwa fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$.

Penyelesaian. Berdasarkan Definisi 2.1.2, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} |0|^2 dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |1|^2 dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\infty} |0|^2 dt \\ &= t|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T.\end{aligned}$$

Karena T sebarang bilangan konstan $T > 0$ maka integral $f(t)$ berhingga, maka fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang $L^2(\mathbb{R})$.

Contoh 4. Diberikan fungsi $f(t) = e^{-t^2}$ dimana $t \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$.

Penyelesaian. Berdasarkan Definisi 2.1.2, diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t^2}|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2t^2}) dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Karena $\sqrt{\frac{\pi}{2}} < \infty$, maka fungsi $f(t) = e^{-t^2}$ ada dalam ruang $L^2(\mathbb{R})$.

Definisi 2.1.3 (Ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$) *Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}^2$, maka ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu*

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{t})|^2 dt < \infty \right\}. \tag{2.9}$$

Maka norm dari f dalam $L^2(\mathbb{R}^2)$ dilengkapi dengan

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{t})|^2\, d\boldsymbol{t} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.10}$$

Contoh 5. Diberikan fungsi $f(\mathbf{t}) = e^{-\mathbf{t}^2}$ dimana $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$. Tunjukkan bahwa fungsi $f(\mathbf{t})$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Penyelesaian. Berdasarkan Definisi 2.1.2, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\mathbf{t}^2}|^2 d\mathbf{t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2(t_1^2+t_2^2)}) d\mathbf{t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t_1^2} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t_2^2} dt_2 \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Karena $\frac{\pi}{2} < \infty$, maka fungsi $f(\mathbf{t}) = e^{-\mathbf{t}^2}$ ada dalam ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$.

2.1.3. Ruang $L^p(\mathbb{R})$

Definisi 2.1.4 (Ruang $L^p(\mathbb{R})$) *Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur bernilai real. Koleksi kelas fungsi dari fungsi-fungsi terukur yang diintegralkan p pada $\mathbb{R}$ dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan sebagai*

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt < \infty \right\} \tag{2.11}$$

[Peetre J., 1969].

Ruang $L^p(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm $\|.\|_{L^p(\mathbb{R})}$ yang dirumuskan

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.12}$$

2.2. Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah transformasi integral linier yang mengubah suatu sinyal dari domain waktu (*space domain*) menjadi domain frekuensi (*frequency domain*). Transformasi ini umumnya digunakan pada bidang pemrosesan sinyal digital atau analisis sinyal.

Definisi 2.2.1 (Transformasi Fourier) *Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$, transformasi Fourier dari f didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{2.13}$$

dengan $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$ [Bracewell R., 2000].

Karena $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$ maka Persamaan (2.13) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(\omega t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(t) i \sin(\omega t)dt.\end{aligned}$$

Contoh 6.

Diberikan fungsi rectangular pulse

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & selainnya, \end{cases} \tag{2.14}$$

dengan $T > 0$.

Penyelesaian.

Berdasarkan Definisi 2.2.1, maka tranformasi Fourier dari $f(t)$ yaitu

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} (0)e^{-i\omega t}dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1)e^{-i\omega t}dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} (0)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t}dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t}|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{1}{i\omega}(e^{-\frac{i\omega T}{2}} - e^{\frac{i\omega T}{2}}) \\ &= \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right).\end{aligned}$$

Jadi $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{2}{\omega}\left(\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)$.

Sifat-sifat transformasi Fourier adalah sebagai berikut [Bahri M. & Zulfajar R. A., 2014].

1. Linieritas

   Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka

$$\mathcal{F}\{f+g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{2.15}$$

   Bukti. Dari definisi transformasi Fourier, diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{f+g\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}(f+g)(t)e^{-i\omega t}dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt\\ &= \mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega)+\mathcal{F}\left\{g\right\}(\omega).\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\left\{f+g\right\}(\omega)=\mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega)+\mathcal{F}\left\{g\right\}(\omega)$.

2. Perkalian konstanta

   Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $k \in \mathbb{C}$ maka

$$\mathcal{F}\left\{kf\right\}(\omega)=k\mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega). \tag{2.16}$$

   Bukti. Dari definisi transformasi Fourier, diperoleh

$$\mathcal{F}\left\{kf\right\}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}(kf(t))e^{-i\omega t}dt.$$

   Karena k adalah sebuah konstanta, maka

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{kf\right\}(\omega) &= k\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\\ &= k\mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega).\end{aligned}$$

   Jadi, $\mathcal{F}\left\{kf\right\}(\omega)=k\mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega)$.

3. Translasi

   Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan translasi $(\tau_k f)(t)=f(t-k)$, maka

$$\mathcal{F}\left\{\tau_k f\right\}(\omega)=e^{-i\omega k}\mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega). \tag{2.17}$$

   Bukti. Dari definisi transformasi Fourier, diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}(\tau_k f)e^{-i\omega t}dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(t-k)e^{-i\omega t}dt.\end{aligned}$$

   Misalkan $u=t-k, t=u+k, dt=du$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\omega(U+k)}du\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\omega u}e^{-i\omega k}du\\ &= e^{-i\omega k}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\omega u}du\\ &= e^{-i\omega k}\mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega). \qquad (2.18)\end{aligned}$$

   Jadi, $\mathcal{F}\left\{\tau_k f\right\}(\omega)=e^{-i\omega k}\mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega)$.

4. Modulasi

   Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $(\mathbb{M}_{\omega_0} f)(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$, maka

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\right\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega - \omega_0). \tag{2.19}$$

   Bukti. Dari definisi transformasi Fourier, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{M}_{\omega_0} f) e^{-\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega - \omega_0) t} dt \\
&= \mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega - \omega_0).
\end{aligned}$$

   Jadi, $\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\right\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega - \omega_0)$.

5. Translasi dan modulasi

   Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $k, \omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t-k)$ maka

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t)\right\}(\omega) = e^{-i(\omega - \omega_0)k} \mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega - \omega_0). \tag{2.20}$$

   Bukti. Dari definisi transfomasi Fourier, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t)\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t-k) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-k) e^{-i(\omega - \omega_0) t} dt.
\end{aligned}$$

   Ambil $u = t - k, t = u + k, dt = du$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t)\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(\omega - \omega_0)(u+k)} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(\omega - \omega_0)u} e^{-i(\omega - \omega_0)k} du \\
&= e^{-i(\omega - \omega_0)k} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(\omega - \omega_0)u} du \\
&= e^{-i(\omega - \omega_0)k} \mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega - \omega_0).
\end{aligned}$$

   Jadi, $\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t)\right\}(\omega) = e^{-i(\omega - \omega_0)k} \mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega - \omega_0)$.

Teorema 2.2.1 (Invers Transformasi Fourier) *Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai*

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\left\{f\right\}](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{2.21}$$

[Sutrina I. et al., 2019].

2.3. Transformasi Fourier Fraksional

Transformsi Fourier fraksional adalah sebuah generalisasi dari transformasi Fourier biasa dengan sebuah parameter θ. Transfromasi Fourier yang berorde θ adalah sebuah pangkat θ dari operator transformasi Fourier. $\theta = \frac{\pi}{2}$ adalah orde transformasi Fourier fraksional dari transformasi Fourier biasa.

Definisi 2.3.1 *Diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, Transformasi Fourier fraksional dengan parameter θ didefinisikan berikut*

$$\mathcal{F}^\theta \left\{f\right\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) K^\theta(\omega, t) dt, \tag{2.22}$$

dengan kernelnya $K^\theta(t,\omega)$ didefinisikan

$$K^\theta(\omega, t) = \begin{cases} C_\theta e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta}, & \theta \neq n\pi \\ \delta(t-\omega), & \theta = 2n\pi \\ \delta(t+\omega), & \theta = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.23}$$

[Bahri M. & Abdul Karim S. A., 2023].

Dimana δ adalah fungsi Direc Delta dan

$$\begin{aligned} C_\theta &= \left(\frac{1 - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sin\theta - i\cos\theta}{2\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{2\pi i\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{e^{i\theta}}{2\pi i\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{(2\pi i\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} = e^{\frac{i\theta}{2}}(2\pi i\sin\theta)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi\sin\theta}} = \sqrt{\frac{1-i\cot\theta}{2\pi}}. \end{aligned}$$

Ini mengakibatkan

$$C_\theta^{-1} = \frac{1}{C_\theta} = \sqrt{2\pi\sin\theta}\, e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{2.24}$$

Hal ini jelas bahwa

$$\overline{C_\theta} = \sqrt{\frac{1+i\cot\theta}{2\pi}}, \quad |C_\theta| = \sqrt{\frac{\csc\theta}{2\pi}}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \tag{2.25}$$

Contoh 7. Diberikan fungsi dalam bentuk $f(t) = e^{-t^2}$, maka bentuk transformasi Fourier fraksional dari fungsi $f(t)$ adalah

$$\mathcal{F}^\theta \left\{f(t)\right\}(\omega) = \sqrt{\frac{1-i\cot\theta}{2-i\cot\theta}}\, e^{\frac{\omega^2}{2}\left(i\cot\theta - \frac{\csc^2\theta}{2-i\cot\theta}\right)}. \tag{2.26}$$

Bukti. Perhatikan bahwa, berdasarkan definisi transformasi Fourier fraksional diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\theta}\left\{f(t)\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}(C_\theta e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2}-it\omega\csc\theta})dt \\
&= C_\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\cot\theta}{2}t^2+\frac{i\cot\theta}{2}\omega^2-t^2-it\omega\csc\theta}dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{i\cot\theta}{2}-1)t^2-it\omega\csc\theta}dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i\cot\theta}{2})t^2-it\omega\csc\theta}dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i\cot\theta}{2})(t^2-i(\frac{2}{-2+i\cot\theta})t\omega\csc\theta)}dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i\cot\theta}{2})(t^2-(\frac{2}{2i+\cot\theta})t\omega\csc\theta)}dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i\cot\theta}{2})(t^2-(\frac{2t\omega\csc\theta}{2i+\cot\theta}))}dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i\cot\theta}{2})((t-\frac{\omega\csc\theta}{2i+\cot\theta})^2(\frac{\omega\csc\theta}{2i+\cot\theta})^2)}dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i\cot\theta}{2})(t-\frac{\omega\csc\theta}{2i+\cot\theta})^2-(\frac{-2+i\cot\theta}{2})(\frac{\omega\csc\theta}{2i+\cot\theta})^2}dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}} e^{-(\frac{-2+i\cot\theta}{2})(\frac{\omega\csc\theta}{2i+\cot\theta})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i\cot\theta}{2})(t-\frac{\omega\csc\theta}{2i+\cot\theta})^2}dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}} e^{-i(\frac{2i+\cot\theta}{2})(\frac{\omega\csc\theta}{2i+\cot\theta})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{2+i\cot\theta}{2})(t-\frac{\omega\csc\theta}{2i+\cot\theta})^2}dt.
\end{aligned}$$

Karena integral gaussian $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ku}du = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$, maka

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\theta}\left\{f(t)\right\}(\omega) &= C_\theta e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}} e^{-i(\frac{\omega^2\csc^2\theta}{2(2i+\cot\theta)})}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{2-i\cot\theta}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{1-i\cot\theta}{2\pi}} e^{\frac{i\omega^2\cot\theta}{2}-(\frac{\omega^2\csc^2\theta}{2(2-i\cot\theta)})}\sqrt{\frac{2\pi}{2-i\cot\theta}} \\
&= \sqrt{\frac{1-i\cot\theta}{2-i\cot\theta}} e^{\frac{\omega^2}{2}(i\cot\theta-\frac{\csc^2\theta}{2-i\cot\theta})}.
\end{aligned}$$

2.3.1. Sifat-sifat transformasi Fourier fraksional

Sifat-sifat transformasi Fourier fraksional dapat dibuktikan dengan definisi transformasi Fourier fraksional [Pratami I.A., 2023].

Teorema 2.3.1 *Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$, maka sifat linier dari transformasi Fourier fraksional adalah*

$$\mathcal{F}^{\theta}\left\{f+g\right\}(\omega) = \mathcal{F}^{\theta}\left\{f\right\}(\omega) + \mathcal{F}^{\theta}\left\{g\right\}(\omega). \tag{2.27}$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier fraksional, diperoleh

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{\theta}\left\{f+g\right\}(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)+g(t)) \left(C_{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta}\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) C_{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta} + g(t) C_{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta}\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) C_{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta} dt + g(t) C_{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta} dt \\
&= \mathcal{F}^{\theta}\left\{f\right\}(\omega) + \mathcal{F}^{\theta}\left\{g\right\}(\omega).
\end{aligned}$$

Jadi, Teorema 2.3.1 terbukti.

Teorema 2.3.2 *Misalkan $f \in L^(\mathbb{R})$ dan translasi $\tau_k f(t) = f(t-k)$, maka sifat translasi dari transformasi Fourier fraksional adalah*

$$\mathcal{F}^{\theta}\left\{\tau_k f\right\}(\omega) = e^{\frac{i}{4}(k^2\sin 2\theta - 4\omega k \sin\theta)} \mathcal{F}^{\theta}\left\{f\right\}(\omega - k\cos\theta). \tag{2.28}$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier fraksional, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\theta}\left\{\tau_k f\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k f(t) C_{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-k) C_{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta} dt.
\end{aligned}$$

Misalkan $u = t-k, t = u+k, du = dt$, maka

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{\theta}\left\{\tau_k f\right\}(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) C_{\theta} e^{i((u+k)^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - i(u+k)\omega\csc\theta} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) C_{\theta} e^{i(u^2+2uk+k^2+\omega^2)\frac{\cos\theta}{2\sin\theta} - \frac{i\omega k + i\omega u}{\sin\theta}} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) C_{\theta} e^{\frac{i}{2\sin\theta}(u^2+2uk+k^2+\omega^2)\cos\theta - 2(\omega k + \omega u)} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) C_{\theta} e^{\frac{i}{2\sin\theta}(u^2\cos\theta + 2uk\cos\theta + k^2\cos\theta + \omega^2\cos\theta - 2\omega k + 2\omega u)} du.
\end{aligned}$$

Kemudian misalkan $v = \omega - k\cos\theta$, dan $\omega = v + k\cos\theta$, sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{\theta}\left\{\tau_k f\right\}(\omega)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)C_{\theta}e^{\frac{i}{2\sin\theta}(u^2\cos\theta+2u((v+k\cos\theta)-k\cos\theta)+k^2\cos\theta+(v+k\cos\theta)^2\cos\theta-2k(v+k\cos\theta))}du\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)C_{\theta}e^{\frac{i}{2\sin\theta}((u^2+v^2)\cos\theta-2uv)}e^{\frac{i}{2\sin\theta}(2vk\cos^2\theta+k^2\cos^3\theta-2vk-k^2\cos\theta)}du\\
&= e^{\frac{i}{2\sin\theta}(2vk\cos^2\theta+k^2\cos^3\theta-2vk-k^2\cos\theta)}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)C_{\theta}e^{\frac{i}{2\sin\theta}((u^2+v^2)\cos\theta-2uv)}du\\
&= e^{\frac{i}{2\sin\theta}(-2vk(1-\cos^2\theta)-k^2\cos\theta(1-\cos^2\theta))}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)C_{\theta}e^{i(u^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2}-2uv\csc\theta}du\\
&= e^{\frac{i}{2\sin\theta}(-2vk\sin^2\theta-k^2\cos\theta\sin^2\theta)}\mathcal{F}^{\theta}\left\{f\right\}(v)\\
&= e^{\frac{i}{4}(k^2\sin 2\theta-4\omega k\sin\theta)}\mathcal{F}^{\theta}\left\{f\right\}(\omega-k\cos\theta).
\end{aligned}
$$

Jadi, Teorema 2.3.2 terbukti.

Teorema 2.3.3 *Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$ dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0}f(t) = e^{i\omega_0 t}f(t)$, maka sifat modulasi dari transformasi Fourier fraksional adalah*

$$
\mathcal{F}^{\theta}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}f\right\}(\omega) = e^{\frac{1}{4}(4\omega\omega_0\cos\theta-\omega_0^2\sin 2\theta)}\mathcal{F}^{\theta}\left\{f\right\}(\omega-\omega_0\sin\theta). \tag{2.29}
$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier fraksional, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\theta}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}f\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{M}_{\omega_0}f(t)C^{\theta}e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2}-it\omega\csc\theta}dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t}f(t)C^{\theta}e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2}-it\omega\csc\theta}dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)C^{\theta}e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2}-it(\omega-\omega_0\sin\theta)\csc\theta}dt.
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

Misalkan $u = \omega - \omega_0\sin\theta$ dan $\omega = u + \omega_0\sin\theta$, maka

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\theta}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}f\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)C^{\theta}e^{i(t^2+(u+\omega_0\sin\theta)^2)\frac{\cot\theta}{2}-itu\csc\theta}dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)C^{\theta}e^{i(t^2+u^2+2u\omega_0\sin\theta+\omega_0^2\sin^2\theta)\frac{\cot\theta}{2}-itu\csc\theta}dt\\
&= e^{i(2u\omega_0\sin\theta+\omega_0^2\sin^2\theta)\frac{\cot\theta}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)C^{\theta}e^{i(t^2+u^2)\frac{\cot\theta}{2}-itu\csc\theta}dt\\
&= e^{i(2u\omega_0\sin\theta+\omega_0^2\sin^2\theta)\frac{\cot\theta}{2}}\mathcal{F}\left\{f\right\}(u)\\
&= e^{\frac{1}{4}(4\omega\omega_0\cos\theta-\omega_0^2\sin 2\theta)}\mathcal{F}^{\theta}\left\{f\right\}(\omega-\omega_0\sin\theta).
\end{aligned}
$$

Jadi, Teorema 2.3.3 terbukti.

Definisi 2.3.2 *Misalkan fungsi* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $\mathcal{F}^\theta\{f\} \in L^1(\mathbb{R})$. *Maka invers transfromasi Fourier fraksional dari fungsi f adalah*

$$\begin{aligned} f(t) &= (\mathcal{F}^\theta)^{-1}(\mathcal{F}^\theta\{f\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) K_{-\theta}(\omega, t) d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) \overline{C_\theta} e^{-i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} + it\omega\csc\theta} d\omega. \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.4. Fungsi Ambiguiti

Fungsi ambiguitas didefinisikan sebagai transformasi Fourier dari fungsi korelasi silang dari sinyal dengan versi yang bergeser dalam waktu. Ini adalah konsep yang berguna dalam berbagai aplikasi yang melibatkan analisis sinyal dalam domain waktu dan frekuensi.

Definisi 2.4.1 (Fungsi Ambiguiti) *Misalkan diberikan dua fungsi* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. *Fungsi ambiguiti dari* f *dan* g *didefinisikan sebagai*

$$A_{f,g}(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{-i\omega t} dt \tag{2.32}$$

[Tian-Wen C. et al., 2012].

Beberapa sifat dasar dari fungsi ambiguiti dirangkum sebagai berikut. Misalkan lambang τ_a adalah operator translasi yang didefinisikan sebagai $\tau_k f(t) = f(t-k)$, dan $\mathbb{M}_{\omega_0}$ adalah operator modulasi yang didefinisikan sebagai $\mathbb{M}_{\omega_0} f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$. Maka sifat-sifat berikut berlaku [Bahri M. et al., 2017]:

1. Konjugasi kompleks

$$\overline{A_{f,g}(x,\omega)} = A_{g,f}(-x,-\omega). \tag{2.33}$$

2. Sifat translasi

$$A_{\tau_k f, \tau_k g}(x,\omega) = e^{-i\omega_0 k} A_{f,g}(x,\omega). \tag{2.34}$$

3. Sifat modulasi

$$A_{\mathbb{M}_{\omega_0} f, \mathbb{M}_{\omega_0} g}(x,\omega) = e^{-i\omega_0 t} f(t) A_{f,g}(x, \omega - \omega_0). \tag{2.35}$$

4. Formula Moyal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} A_{f_1,g_1}(x,\omega) \overline{A_{f_2,g_2}(x,\omega)} dx d\omega = (f_1, f_2) \overline{(g_1, g_2)}. \tag{2.36}$$

5. Sifat formula rekontruksi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\overline{g(0)}} \int_{\mathbb{R}} A_{f,g}\left(\frac{x}{2}, \omega\right) e^{i\omega x} d\omega, \tag{2.37}$$

dengan $\overline{g(0)} \neq 0$.

2.5. Fungsi Ambiguiti Fraksional

Fungsi ambiguiti fraksional (FrAF) dapat didefinisikan dengan cara menggantikan kernel dari transformasi Fourier dengan kernel dari transformasi Fourier fraksional kedalam definisi fungsi ambiguiti.

Definisi 2.5.1 *Jika dua fungsi $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, maka fungsi ambiguiti fraksional dapat didefinisikan berikut*

$$\mathcal{A}^{\theta}_{f,g}(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} K^{\theta}(t,\omega) dt, \tag{2.38}$$

dengan $K^{\theta}(t,\omega) = C_{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta}$ [Sahay P. et al., 2020].

Diasumsikan

$$h_{f,g}(t,x) = f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)}, \tag{2.39}$$

maka Persamaan (2.38) dapat ditulis kembali

$$\mathcal{A}^{\theta}_{f,g}(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}} h_{f,g}(t,x) K^{\theta}(\omega,t) dt. \tag{2.40}$$

2.6. Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz adalah salah satu ketaksamaan fundamental dalam analisis dan aljabar linier, memberikkan batas atas untuk nilai absolut dari produk dalam dua vektor dalam hal norma-norma vektor tersebut.

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz menyatakan bahwa untuk semua vektor x dan y dalam ruang hasil kali dalam

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|, \tag{2.41}$$

dimana $\langle x, y\rangle$ adalah hasil kali dalam dan untuk $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ [Kittaneh F. & Moradi H. R., 2020].

2.7. Ketaksamaan Hölder

Ketaksamaan Hölder adalah generalisasi dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan berlaku untuk integrasi fungsi-fungsi yang diambil dari ruang L^p. Ketaksamaan ini memberikan batas atas untuk integral dari produk dua fungsi dalam hal norma L^p dan L^q dari fungsi-fungsi tersebut.

Misalkan f dan g adalah fungsi nilai real yang dapat diintegrasikan pada interval tertentu dan $1 \leq p,q < \infty$ adalah dua bilangan yang memenuhi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Maka, integral f dan g memenuhi ketaksamaan Hölder [Chen G. & Chen Z., 2011]:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)|\, dt &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} . \end{aligned} \tag{2.42}$$