TESIS

ESTIMASI VALUE AT RISK BERBASIS KOMPLEKS PADA INDEKS PASAR SAHAM

Estimation Value at Risk Based on Complex Number in Stock Indices

ASWAL ARYADI PANGGA

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

SEKOLAH PASCA SARJANA

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

TESIS

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Magister Sains

pada Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

LEMBAR PENGESAHAN

ESTIMASI VALUE AT RISK BERBASIS KOMPLEKS PADA INDEKS PASAR SAHAM

Disusun dan diajukan oleh

ASWAL ARYADI PANGGA
H022221016

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 06 Februari 2024 dan dinyatakan memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pendamping,
Dr. Amran, S.Si., M.Si.	**Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si.**
NIP. 19701101 199802 1 001	**NIP. 19701231 199802 1 001**
Ketua Program Studi	Dekan Fakultas MIPA
Magister Matematika,	Universitas Hasanuddin,
Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**
NIP. 19640207 199103 1 013	**NIP. 19720515 199702 1 002**

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis yang berjudul "Estimasi Value at Risk Berbasis Kompleks pada Indeks Pasar Saham" adalah benar karya saya dengan arahan komisi pembimbing (Dr. Amran, S.SI., M.Si. sebagai Pembimbing Utama dan Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Pendamping). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, Februari 2024

METERAI TEMPEL
34274ALX096230608

Aswal Aryadi Pangga

NIM. H022221016

PRAKATA

Segala puji bagi Allah Subhanahu Wa ta'ala Rabb semesta alam, shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi yang paling dimuliakan, pemimpin orang-orang bertakwa yakni Rasululah Shallahu Alaihi Wassallam. Alhamdulillahi wasy-sukurillah, semua kemudahan yang penulis dapatkan tidak lepas dari pertolongan Allah dan doa dari orang-orang yang tulus, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar Magister pada Program Studi Matematika Terapan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari dalam penyelesaian tesis ini dengan segala keterbatasan kemampuan dan pengetahuan dapat melewati segala hambatan dan masalah berkat doa, bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis haturkan rasa terima kasih serta penghargaan yang setinggi-tingginya untuk kedua orang tua tercinta Bapak H Hamka Zainuddin. dan Ibu Hj Nurlina. yang selalu menjadi inspirasi, membesarkan, dan mendidik penulis dengan bertabur cinta, kasih sayang, serta dengan ikhlas mengiringi setiap langkah penulis dengan doa dan dukungannya selama ini. Kepada Paman dan Bibi, Asri Wahyudi dan Mariana terima kasih atas segala bentuk kasih sayang, perhatian, bantuan yang tiada hentinya diberikan kepada penulis. Serta untuk seluruh keluarga besar penulis, terima kasih atas doa dan dukungannya selama ini.

Iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar- besar dan setinggi tingginya penulis sampaikan kepada:

1. Bapak Dr. Amran, S.Si., M.Si. selaku pembimbing pertama yang begitu banyak meluangkan waktu dan pikiran untuk memberikan nasihat, saran, dan setulus hati membimbing penulis ditengah berbagai kesibukan dalam menyelesaiakan tesis ini.

2. Bapak Prof Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si. selaku pembimbing kedua yang meluangkan waktu, dan pikiran dengan berbagai kesibukan dan prioritasnya untuk memberikan masukan serta motivasi dalam penulisan tesis ini.

3. Bapak Prof Dr. Amir, S.Si., M.Si., Bapak Dr. Hendra. S.Si., M.Si., dan Bapak Dr Muh. Anwar, S.Si., M.Si selaku penguji yang telah banyak memberikan masukan dalam penyempurnaan tesis ini.

4. Bapak Dr. Muhammad Zakir, M.Si. selaku Ketua Program Studi Magister Matematka yang senantiasa memberikan bimbingan dan semangat dalam menyelesaikan tesis ini.

5. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta staf yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.

6. Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin, seluruh dosen, dan staf administrasi pada Program Studi S2 Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.

7. Teman teman seperjuangan S2 Matematika Terapan 2022 (LEMMA 22) atas segala bantuan dan semangatnya kepada Penulis.

8. Kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, telah membersamai disetiap momen yang ada, memberikan doa, bantuan dan semangat untuk menyelesaikan tesis ini.

Akhirnya Penulis berharap semoga Allah Swt memberikan imbalan yang setimpal pada mereka yang telah memberikan bantuan, dan dapat menjadikan semua bantuan ini sebagai sebagai amal jariyah dan pahala yang berlipat ganda di sisi-Nya. Aamiin Yaa Rabbal Alamin.

Makassar, Januari 2024

Aswal Aryadi Pangga

ABSTRAK

Value At Risk (VaR) adalah metode pengukuran risiko yang dapat terjadi menggunakan metode statistik. Keakuratan estimasi VaR dipengaruhi oleh bobot setiap aset keuangan. Besar bobot setiap aset bergantung pada fluktuasi nilai aset. Pada penelitian ini, diusulkan metode penentuan bobot berdasarkan nilai return kompleks yang digunakan dalam perhitungan VaR. Nilai return kompleks diperoleh menggunakan transformasi hilbert. Pengukuran hasil pembobotan pada portofolio menggunakan Bias, Mean Abslolut Deviance, dan besar profit. Hasil penelitian menunjukkan bahwa estimasi VaR suatu portofolio dengan bobot yang diperoleh dari return berbasis bilangan kompleks menghasilkan nilai estimasi yang lebih baik dibandingkan dengan metode konvensional.

Kata kunci: Value at Risk, bobot aset, transformasi hilbert, return, portofolio.

ABSTRACT

Value At Risk (VaR) is a method of measuring the risk that can be generated using statistical methods. The accuracy of VaR estimation is influenced by the weight of each financial asset. The amount of weight of each asset depends on the fluctuation of the asset value. In this study, a method of determining the weight based on the complex return value used in the calculation of VaR is proposed. The complex return value is obtained using the Hilbert transformation. Measurement of weighting results on portfolios using Bias, Mean Abslolut Deviance, and large profits. The results show that the VaR estimation of a portfolio with weights obtained from complex number-based returns produces a better estimation value than the conventional method.

Keywords: Value at Risk, asset weighting, hilbert transformation, return, portfolio

DAFTAR ISI

Daftar Tabel

Daftar Gambar

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Estimasi risiko merupakan proses yang digunakan untuk menghasilkan ukuran tingkat risiko yang dianalisis, yang terdiri dari estimasi frekuensi, analisis konsekuensi, dan integrasinya. Tujuan estimasi risiko adalah untuk memisahkan risiko kecil yang dapat diterima dari risiko besar, dan menyiapkan data sebagai bantuan dalam prioritas dan penanganan risiko. Dengan kegiatan tersebut dapat menanggulangi hal-hal yang tidak dapat diprediksi yang diakibatkan oleh krisis keuangan ataupun bencana alam dan pandemi. Seorang investor yang baik harus memiliki keahlian dalam mengestimasi risiko sehingga dia dapat memperoleh tingkat pengembalian *(return)* yang besar, dengan demikian investor dapat menghindari kerugian yang akan dialami ketika dihadapkan dengan masalah yang tak terduga.

Pada umumnya, para peneliti menggunakan beberapa ukuran risiko dalam mengestimasi risiko. Salah satu jenis ukuran risiko adalah *Value at Risk* (VaR). Menurut Jorion (2007), VaR merupakan metode penilaian risiko yang menggunakan standar teknik statistik yang digunakan secara rutin di bidang teknis lainnya. Portofolio optimal VaR terletak di perbatasan efisien dekat dengan portofolio varians minimum.

Selama tahun 1990-an, VaR diadopsi secara luas untuk mengukur risiko pasar dalam portofolio perdagangan. Asal usulnya dapat ditelusuri kembali hingga tahun 1922 dengan persyaratan modal yang diberlakukan Bursa Efek New York pada perusahaan-perusahaan anggotanya. VaR juga berakar pada teori portofolio dan pengukuran awal VaR yang diterbitkan pada tahun 1945.

Asal usul teori portofolio dapat ditelusuri seperti, Penulis seperti Hardy (1923) dan Hicks (1935) membahas secara intuitif manfaat diversifikasi. Leavens (1945) menawarkan contoh kuantitatif merupakan ukuran VaR pertama yang telah dipublikasikan.

Markowitz (1952) dan Roy (1952) melakukan secara independen dan menghasilkan ukuran VaR yang serupa. Markowitz dan Roy mengembangkan cara memilih portofolio yang dapat mengoptimalkan *return* pada tingkat risiko tertentu. Untuk tujuan ini, setiap usulan tahap perhitungan VaR membutuhkan kovarians antara faktor-faktor risiko untuk mencerminkan efek lindung nilai dan diversifikasi. Kedua ukuran tersebut secara matematis serupa, keduanya mendukung metrik VaR yang berbeda. Markowitz menggunakan varian metrik *return* sederhana. Roy menggunakan metric *shortfall risk* yang mewakili batas atas kemungkinan laba kotor portofolio lebih kecil dari *catastrophic return* tertentu. Markowitz (1959) mengusulkan pengukuran VaR yang lebih mudah dilakukan dengan menggunakan matriks kovarians diagonal.

Pengembangan VaR oleh William Sharpe (1964) dalam mengukur *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Karena terbatasnya ketersediaan kekuatan pemrosesan, pengukuran VaR pada periode ini sebagian besar bersifat teoritis dan dipublikasikan terutama dalam konteks teori portofolio yang sedang berkembang.

Penelitian Lietaer (1971) menjelaskan ukuran VaR untuk risiko nilai tukar mata uang asing. Lietaer mengusulkan prosedur baru untuk mengoptimalkan upaya lindung nilai tersebut melalui penggabungan ukuran VaR dan nilai pasar, dengan devaluasi terjadi secara acak, dengan besaran devaluasi diasumsikan berdistribusi normal. Penelitian Lietaer memperkenalkan penggunaan metode Monte Carlo dalam pengukuran VaR.

Nilai VaR menyatakan nilai kerugian terburuk yang dapat terjadi pada suatu periode waktu dengan tingkat kepercayaan tertentu. Namun, dalam penggunaannya nilai kerugian aktual yang didapatkan dapat lebih besar dari nilai penaksiran yang dihasilkan oleh VaR. Carmona (2004) menunjukkan bahwa VaR memiliki dua kelemahan, yaitu VaR menghasilkan nilai raksiran kurang dari nilai aktual dan tidak memungkinkan ketika melakukan diversifikasi. Karena hal ini, diperlukan pendekatan yang lebih akurat dalam menentukan bobot. Penentuan bobot dalam metode VaR sangatlah krusial dalam meningkatkan akurasi hasil estimasi.

Penelitian Ghazali, dkk., (2020) memperbaiki kelemahan VaR dengan metode pendekatan portofolio kas sederhana, model faktor, dan arus kas. Untuk memilih pendekatan terbaik, Ghazali, dkk., menggunakan metode Backtesting. Hasil backtesting menunjukkan bahwa model faktor merupakan pendekatan yang terbaik.

Menurut hasil penelitian Kurbatsky (2014), Transformasi Hilbert digunakan untuk menangkap properti dinamis dari data *time series* dan untuk menghasilkan variabel fitur untuk model prediksi. Hasil yang didapatkan lebih efisien dibandingkan dengan hasil yang menggunakan data riil.

Hasil penelitian yang dilakukan dalam menentukan bobot pada metode VaR memili tingkat akurasi yang rendah terutama ketika dihadapkan pada kondisi data yang cukup kompleks. Menurut hasil penelitian oleh Yusuke (2019) dengan menggunakan metode *Complex Value Risk Diversification* (CVRD) membentuk deret waktu *return* kompleks yang diperoleh dari hasil Transformasi Hilbert *return* riil. Yusuke juga mengkonstruksi matriks *variance-covariance return* kompleks, dan membangun portofolio diversifikasi risiko. Hasil realisasi diversifikasi risiko bersifat dinamis dan lebih baik daripada metode konstruksi portofolio berbasis *return* riil. Pendekatan matriks

Variance-Covariance berbasis bilangan kompleks memungkinkan *return* portofolio yang lebih optimal.

Berdasarkan penelitian terdahulu, penentuan bobot pada metode VaR sangatlah krusial, karena hal ini dapat mempengaruhi tingkat akurasi hasil estimasi menggunakan metode VaR. Penelitian yang berkaitan dengan metode VaR sejauh ini belum ada yang menggunakan basis bilangan kompleks. Berdasarkan uraian tersebut, penulis melakukan penelitian tentang pengembangan Metode VaR berbasis bilangan kompleks dengan judul "Estimasi *Value at Risk* dengan Pendekatan Transformasi Hilbert pada Indeks Pasar Saham".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penulis dapat menuyusun rumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut :

1. Bagaimana hasil estimasi risiko *Value at Risk* berbasis kompleks?
2. Bagaimana performa hasil estimasi risiko *Value at Risk* berbabasis kompleks?
3. Bagaimana pengaruh bilangan kompleks terhadap investasi saham?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah diatas tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mendapatkan nilai estimasi risiko *Value at Risk* berbasis kompleks
2. Mengetahui performa hasil estimasi model *Value at Risk* berbasis kompleks
3. Mengetahui pengaruh bilangan kompleks terhadap investasi saham

1.4 Manfaat

Adapun manfaat pada penelitian ini adalah

1. Bagi perusahaan dan investor, dapat dijadikan sebagai acuan dalam menghitung ataupun mengestimasi risiko perusahaan sehingga dapat dilakukan pertimbangan dalam berinvestasi.
2. Hasil penelitian dapat digunakan sebagai bahan referensi untuk penelitian selanjutnya.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah Data yang digunakan berasal dari 6 jenis saham dengan jumlah sama yang diambil dari tahun 2013-2023

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Portofolio Infestasi

Portofolio investasi adalah kumpulan aset investasi milik individu, lembaga keuangan, perusahaan maupun manajer investasi. Isi dari portofolio ini diantaranya susunan saham, obligasi, reksa dana, uang tunai, atau komoditas milik investor. Adapun aset yang tersimpan di dalamnya dapat berupa real estate, karya seni, perhiasan maupun bentuk penanaman modal lain yang bisa mendatangkan keuntungan di masa mendatang. Dalam dunia keuangan dibutuhkan kemampuan dalam manajemen portofolio. Manajemen portofolio telah mengasumsikan tingkat kepentingan yang lebih besar dalam beberapa tahun terakhir di mana seni memetik saham yang sukses sebelumnya dianggap sebagai jawaban atas kinerja investasi. Banyak opini yang terinformasi mendukung tingkat tertentu (Pagdin, dkk., 2017).

2.2 Ukuran Risiko

Pengukuran risiko keuangan adalah risiko pasar, atau risiko kerugian atau keuntungan yang timbul dari sesuatu yang tak terduga dari perubahan harga pasar misalnya seperti harga sekuritas, bunga atau nilai tukar. Risiko pasar dapat diklasifikasikan menjadi risiko suku bunga, risiko ekuitas, risiko nilai tukar, risiko harga komoditas, dan sebagainya. Tergantung pada apakah faktor risikonya suku bunga, harga saham, atau apapun. Teori dan praktik manajemen risiko dan, termasuk di dalamnya, pengukuran risiko telah berkembang pesat sejak karya perintis Harry Markowitz di tahun 1950-an. Teori tersebut telah berkembang ke titik di mana pengukuran manajemen risiko sekarang dianggap sebagai sub-bidang yang berbeda dari teori keuangan. Saat ini ukuran risiko terdapat beberapa jenis seperti *Gap*

Analysis, Duration Analysis, Derivatives Risk Measures, Value at Risk dan lain-lain (Dowd,2005).

2.3 *Return* Saham

Return merupakan deviden per lembar saham dibagi dengan harga beli saham per lembar. *Return* merpakan hasil yang diperoleh dari investasi (Sa'adah, 2020). *Return* saham merupakan perubahan nilai saham yang diterima oleh investor dari modal awal investasi yang dinyatakan dalam persentase. Dalam investasi saham tidak selalu menjanjikan *return* yang pasti, dimana jika untung disebut *capital gain* dan jika rugi disebut *capital loss*. Salah satu tujuan investor berinvestasi adalah untuk mendapatkan *return*. Tanpa adanya tingkat keuntungan yang dinikmati dari suatu investasi, tentunya investor tidak akan melakukan investasi.

Dalam menghitung *return* dapat dihitung menggunakan persamaan (Franke dkk., 2015)

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{2.1}$$

Dengan :

R_t : Nilai *return* pada waktu ke-*t*

P_t : Harga saham pada waktu ke-*t*

P_{t-1} : Harga saham pada waktu ke-$(t-1)$

2.4 Fungsi Pengganda Lagrange

Dalam menyelesaikan permasalahan optimasi salah metode yang dapat digunakan adalah Fungsi Pengganda Lagrange. Metode ini terdiri dari fungsi utama $f(x)$ dan fungsi syarat atau tujuan. Fungsi Pengganda Lagrange didefinisikan sebagai :

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) \tag{2.2}$$

Dimana

$L(x,\lambda)$: Fungsi Pengganda Lagrange

λ_i : Pengganda Lagrange

g_i : Syarat Batas

2.5 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bentuk bilangan yang melibatkan unit imajiner, biasanya dilambangkan dengan huruf i atau j. Unit imajiner didefinisikan sebagai akar kuadrat dari -1, sehingga $i^2 = -1i$. Dalam notasi matematis, suatu bilangan kompleks z dapat ditulis sebagai $a + bi$, di mana a dan b adalah bilangan real, dan i adalah unit imajiner.

Beberapa operasi dasar pada bilangan kompleks melibatkan penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Operasi-operasi ini dilakukan pada kedua bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks.

1. Penjumlahan

   $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
2. Pengurangan

   $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
3. Perkalian

   $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
4. Pembagian

   $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$

2.6 Matriks Kompleks

Matriks kompleks adalah matriks yang elemennya adalah bilangan kompleks. Setiap elemen matriks kompleks AA dapat ditulis dalam bentuk a+bia+bi, di mana aa dan bb adalah bilangan real, dan ii adalah unit imajiner. Contoh matriks kompleks:

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 4-i \\ -1 & 5i \end{bmatrix}$$

Beberapa sifat umum yang dimiliki oleh matriks kompleks:

1. Penjumlahan dan Pengurangan:

   Sifat komutatif : $A + B = B + A$

   Sifat asosiatif : $(A + B) + C = A + (B + C)$.

   Elemen identitas : Terdapat matriks nol kompleks O sehingga $A + O = A$.

2. Perkalian dengan Skalar:

   $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$.

   $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$

   $k \cdot (l \cdot A) = (kl) \cdot A$, di mana k dan l adalah bilangan kompleks.

3. Perkalian Matriks:

   Sifat asosiatif : $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

   Tidak komutatif: Secara umum, $A \cdot B \neq B \cdot A$

   Elemen identitas: Jika I adalah matriks identitas kompleks, maka $A \cdot I = I \cdot A = A$.

4. Transpos:

   $\left(A^T\right)^T = A$.

   $(A + B)^T = A^T + B^T$.

   $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$.

   $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

5. Hermitian (Adjoint) dan Konjugat Transpos:

Matriks Hermitian: A^H (atau A^*) adalah konjugat transpos dari A, di mana elemen-elemen kompleks dari A diubah menjadi konjugatnya dan kemudian matriks hasilnya ditranspos.

$A + B = (A + B)^H$.

$k \cdot A = (k \cdot A)^H$.

$(A \cdot B)^H = B^H \cdot A^H$.

$A^H = A$ jika dan hanya jika A adalah matriks Hermitian.

6. Determinan

   $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$.

7. Invers

   $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, Dimana A^{-1} adalah matriks invers dari □✓

Matriks kompleks tidak memiliki invers jika memiliki salah satu dari karakteristik berikut:

1. $\det(A) = 0 \Rightarrow A$ tidak memiliki invers
2. Ada baris atau kolom linearly dependent ⇒ A tidak memiliki invers
3. A adalah matriks singular ⇒ A tidak memiliki invers
4. Matriks tidak persegi ⇒ A tidak memiliki invers

2.7 Transformasi Hilbert

Transformasi Hilbert memainkan peran penting dalam banyak mata pelajaran sains dan teknologi seperti optik, gelombang dalam fluida bertingkat, pemrosesan sinyal dan sebagainya.

Transformasi Hilbert suatu fungsi dari deret waktu $x(t)$ pada $t \in [0, \infty)$ didefinisikan sebagai integral nilai prinsip Cauchy.

$$\mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \tag{2.3}$$

Dalam prakteknya, deret waktu empiris dituliskan kembali pada laju pengambilan sampel tertentu Δ_t, yang menghasilkan waktu diskrit $t_n = n\Delta_t$ dengan n adalah bilangan bulat. Transformasi Hilbert untuk deret waktu diskrit diberikan oleh:

$$\mathcal{H}D\ [xk] = -i\, sgn\left(k - \frac{N}{2}\right)\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{i2\pi n}{N}} \tag{2.4}$$

Dalam konsep perhitungan return saham rumus transformasi hilbert yang digunakan pada menjadi:

$$\mathcal{H} = x_n + i\,\mathcal{H}D\ [xk] \tag{2.5}$$

Dimana

sgn	:	Fungsi Signum
k	:	Indeks Aset Saham (1,2,3,…,n)
N	:	Banyak Aset
x_n	:	*Return* Saham
n	:	Indeks *return* Saham

2.8 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah teknik matematika yang digunakan untuk menganalisis fungsi dalam domain frekuensi. Terdapat dua jenis utama dari Transformasi Fourier: Transformasi Fourier Kontinu (CFT) dan Transformasi Fourier Diskrit (DFT). Rumus transformasi Fourier dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. Tranformasi Fourier Kontinu (CFT)

   CFT dari suatu fungsi $f(t)$ dinyatakan oleh rumus berikut:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \qquad (2.6)$$

   dimana:

   $F(\omega)$: transformasi Fourier dari $f(t)$ terhadap frekuensi ω

   $f(t)$: fungsi sinyal dalam domain waktu.

   ω : frekuensi angular (rad/s).

2. Tranformasi Fourier Diskrit (DFT)

   DFT adalah versi diskrit dari Transformasi Fourier dan sering diimplementasikan menggunakan algoritma cepat seperti Fast Fourier Transform (FFT). DFT dari suatu rangkaian diskrit $x[n]$ dengan panjang N dinyatakan sebagai:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{n-1} x[n] \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (2.7)$$

   dimana:

   $X[k]$: transformasi Fourier diskrit dari $x[n]$ pada frekuensi k

   $x[n]$: elemen ke-n dari rangkaian diskrit

   N : panjang dari rangkaian diskrit

   k : indeks frekuensi

2.9 Value at Risk

Value at Risk (VaR) merupakan metode yang merangkum kerugian terburuk dalam rentang target yang tidak akan terjadi melebihi tingkat kepercayaan tertentu. Secara umum, VaR menggambarkan kuantil distribusi keuntungan dan kerugian yang diproyeksikan pada jangka waktu tertentu. Jika α adalah tingkat kepercayaan yang dipilih, VaR berhubungan dengan tingkat ekor bawah $1-\alpha$. Berdasarkan konvensi, kerugian terburuk ini dinyatakan sebagai angka positif (Jorion, 2007). Secara umum dapat ditulis :

$$VaR_{\alpha}(X) = F_{x}^{-1}(\alpha) \tag{2.8}$$

dimana :

$F(x)$: Fungsi distribusi kumulatif

α : Nilai interval kepercayan (90%, 95%, 99%)

Ada tiga metode utama yang digunakan untuk menghitung VaR:

1. Metode *Varians-Kovarians*
2. Metode *Historical*
3. Metode simulasi *Monte Carlo*

Semua metode memiliki dasar yang sama tetapi kemudian berbeda dalam cara menghitung nilai berisiko. Setiap metode juga mempunyai masalah yang sama dalam berasumsi bahwa masa depan akan mengikuti masa lalu. Kekurangan ini biasanya diatasi dengan melengkapi angka VAR dengan analisis sensitivitas dan/atau *stress test* yang sesuai (Farid, dkk., 2010). Secara umum perhitungan VAR mengikuti lima langkah:

1. Identifikasi posisi
2. Identifikasi faktor risiko yang mempengaruhi penilaian posisi
3. Penetapan probabilitas (atau distribusi statistik) terhadap nilai faktor risiko yang mungkin
4. Penciptaan fungsi penetapan harga untuk posisi sebagai fungsi nilai faktor risiko
5. Perhitungan VAR

2.10 Metode *Historical*

Metode historis pada *Value at Risk* (VaR) adalah pendekatan yang sederhana untuk menghitung risiko di pasar keuangan. Pendekatan ini menggunakan data historis untuk mengevaluasi seberapa besar kerugian potensial pada portofolio atau instrumen keuangan tertentu selama periode waktu tertentu. Untuk mengukur nilai VaR menggunakan metode *historical* dapat menggunakan rumus berikut (Jorion,2007).

$$VaR = \alpha \times persentil\ portofolio\ ke - (1 - \alpha) \tag{2.9}$$

Rumus ini mengukur potensi kerugian di masa depan dengan melihat seberapa besar portofolio Anda bisa kehilangan pada tingkat kepercayaan tertentu berdasarkan pergerakan historis di pasar. Metode historis memiliki asumsi penting bahwa masa lalu adalah indikator yang baik untuk masa depan, dan tidak memperhitungkan perubahan kondisi pasar atau peristiwa ekstrem yang belum pernah terjadi sebelumnya. Selain itu, rumus ini dapat diubah sesuai dengan kebutuhan dan preferensi pengguna, misalnya, untuk menghitung VaR dalam persentase dari nilai portofolio.

2.11 Metode Varians-Kovarians

Metode Variance-Covariance membuat sejumlah asumsi. Keakuratan hasil bergantung pada seberapa valid asumsi tersebut. Metode ini mendapatkan namanya dari matriks varians-kovarians sekuritas yang digunakan untuk menghitung VaR (Farid, dkk., 2010).

Metodenya dimulai dengan menghitung standar deviasi dan korelasi faktor risiko, kemudian menggunakan nilai-nilai tersebut untuk menghitung standar deviasi dan korelasi perubahan nilai masing-masing sekuritas pembentuk posisi. Jika data harga, varians, dan korelasi tersedia untuk masing-masing sekuritas, maka informasi ini digunakan secara langsung. Nilai-nilai tersebut kemudian digunakan untuk menghitung standar deviasi portofolio. VaR untuk tingkat kepercayaan tertentu kemudian dihitung dengan mengalikan simpangan baku.

Untuk menghitung VaR dengan menggunakan metode Varins-Kovarians perlu mempertimbangkan portofolio P dengan aset N. Langkah pertama adalah menghitung matriks varians-kovarians. Varian pengembalian untuk aset X dapat dinyatakan sebagai:

$$\sigma_X^2 = \sum_{t=1}^{T} \left(X_t - \bar{X}\right)^2 \quad (2.10)$$

Untuk mengukur perbedaan aset satu sama lain, hitung kovarians. Kovariansi antara pengembalian dua aset X dan Y dapat dinyatakan sebagai:

$$Cov_{XY} = \sigma_{XY}^2 = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X}).(Y_t - \bar{Y}) \quad (2.11)$$

dimana :

X_t : *return* dari aset X pada periode t

Y_t : *return* dari aset Y pada periode t

Hitung standar deviasi dari portofolio P menggunakan rumus :

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i} \quad (2.12)$$

dimana :

w_i : bobot aset ke-i

σ_i : standar deviasi aset ke-i

Sehingga estimasi VaR dari portofolio adalah ;

$$VaR_p = \alpha.\sigma_p \quad (2.13)$$

dimana :

α : parameter yang menghubungkan kuantil dari distribusi normal dan standar deviasi ($\alpha = 2{,}33$ untuk $p = 99\%$, $\alpha = 1{,}65$ untuk $p = 95\%$, dan $\alpha = 1.28$ untuk $p = 90\%$).

2.12 Metode Monte Carlo

Metode Monte Carlo adalah pendekatan statistik yang menggunakan simulasi acak untuk memodelkan fenomena yang kompleks atau tidak pasti. Dalam konteks *Value at Risk* (VaR), Metode Monte Carlo dapat digunakan untuk mengestimasi distribusi potensial kerugian portofolio atau instrumen keuangan.

Berikut adalah langkah-langkah umum dalam menggunakan Metode Monte Carlo untuk menghitung VaR:

1. Hitung nilai standar deviasi portofolio
2. Buat simulasi nilai acak berdasarkan standar deviasi portofolio
3. Hitung standar deviasi simulasi nilai acak
4. Menentukan nilai interval kepecayaan
5. Hitung VaR berdasarkan nilai simulasi acak

Untuk mengukur nilai VaR menggunakan metode Monte Carlo dapat dilakukan dengan melalui rumus berikut:

$$VaR = \alpha . \sigma_q \tag{2.14}$$

2.13 Metode Backtesting

Validasi atau backtesting adalah pengujian berurutan dari model yang digunakan terhadap kondisi nyata untuk menilai akurasi prediksi yang telah dibuat. Model VaR (*Value at Risk*) bermanfaat hanya jika dapat memprediksi risiko secara efektif. Langkah-langkah yang diambil dalam backtesting melibatkan perbandingan antara kerugian aktual dengan kerugian yang diprediksi oleh model VaR (Jorion, 2007). Nilai backtesting yang baik untuk VaR adalah berada diantara nilai $-1{,}96 - 1{,}96$. Untuk menghitung backtesting dapat dilakukan menggunakan rumus berikut.

$$z = \frac{x - pT}{\sqrt{p(1-p)T}} \tag{2.15}$$

dimana

z : Nilai Backtesting

x : Nilai aktual yang lebih rendah dari nilai prediksi VaR

p : Nilai interval kepercayaan $(1 - \alpha)$

T : Jumlah data

2.14 Metode Mean Absolute Deviation

Metode untuk membangun portofolio optimal pertama kali diperkenalkan oleh Konno dan Yamazaki (1991). Parameter risiko yang digunakan dalam metode ini adalah Mean Absolute Deviation (MAD). MAD adalah salah satu metode untuk mengukur kinerja model VaR dengan memperhatikan perbedaan antara estimasi VaR dan kerugian aktual. Mean Absolute Deviation diberikan oleh rumus:

$$MAD = E\left[\sum_{i=1}^{n} |Kerugian\ aktual - Nilai\ VaR|\right] \tag{2.16}$$

MAD mengukur sejauh mana nilai-nilai VaR bervariasi dari kerugian aktual. Semakin kecil nilai MAD, semakin baik model VaR dalam mengestimasi risiko, karena perbedaan antara VaR dan kerugian aktual lebih kecil.

Dalam praktiknya, selain MAD, sering juga digunakan metrik lain seperti Bias untuk mengevaluasi kinerja model VaR dalam meramalkan risiko secara akurat. Bias dapat diukur menggunakan rumus :

$$Bias = \left|\frac{Nilai\ VaR - Kerugian\ Aktual}{Kerugian\ Aktual}\right| \tag{2.17}$$