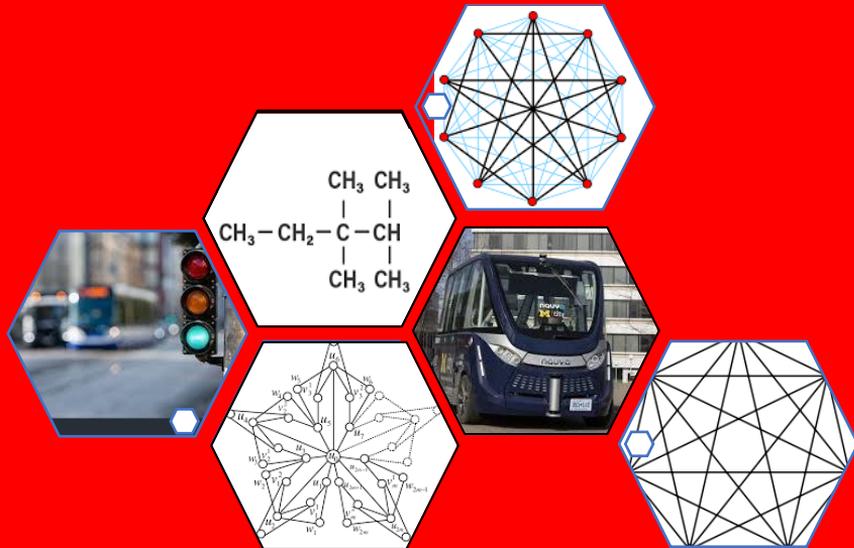


# DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF GRID $G_{m(n)}$



**MUHAMMAD NURFITRA PUSTAKA ALFURQAN**

**H011201079**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2024**



**DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF GRID  $G_{m(n)}$**

**MUHAMMAD NURFITRA PUSTAKA ALFURQAN**

**H011201079**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2024**

**DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF GRID  $G_{m(n)}$**

**MUHAMMAD NURFITRA PUSTAKA ALFURQAN**

**H011201079**

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Matematika

Pada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2024**

# SKRIPSI

DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF GRID  $G_{m(n)}$

MUHAMMAD NURFITRA PUSTAKA ALFURQAN

H011201079

Skripsi,

Telah dipertahankan didepan Panitia Ujian Sarjana Sains pada tanggal 09 Agustus 2024 Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Matematika

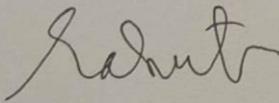
Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

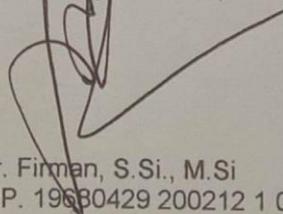
Makassar

Mengesahkan:  
Pembimbing Utama,



Prof. Dr. Hasmawati, M.Si  
NIP. 19641231 199003 2 007

Mengetahui:  
Ketua Program Studi,



Dr. Firman, S.Si., M.Si  
NIP. 19680429 200212 1 001



## PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DALAM PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Dimensi Metrik Sisi pada Graf Grid  $G_{m(n)}$ " adalah benar karya saya dengan arahan dari Prof. Dr. Hasmawati, M.Si sebagai pembimbing utama. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam daftar pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 02 Agustus 2024

Muh  iaka Alfurqan

NIM H011201079

## UCAPAN TERIMAKASIH

*Alhamdulillah* rabbil 'alamin segala puji bagi Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* Tuhan pencipta alam semesta yang telah melimpahkan Rahmat, hidayah, serta karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Dimensi Metrik Sisi pada Graf Grid  $G_{m(n)}$ ". Shalawat serta salam tak lupa kita haturkan kepada nabi besar Nabi Muhammad *Shallallahu 'Alaihi Wassalam* yang telah menghantarkan umatnya dari zaman jahiliah menuju zaman yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

Dalam proses penulisan skripsi ini, penulis tentunya mendapatkan dan melewati berbagai rintangan. Namun berkat dukungan, dan bantuan dari berbagai pihak sehingga dapat memberikan morivasi pada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terimakasih sebanyak banyaknya kepada orang tua tercinta Bapak A M Nawir Bali, dan Ibunda Hafsah Katu serta kakak saya Andi Muhammad Nurfitriah Insan Al Addin yang senantiasa memberikan doa dan dukungan secara moril maupun material selama proses perkuliahan hingga penyelesaian skripsi ini.

Pada kesempatan ini juga perkenankan penulis menyampaikan terimakasih kepada Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. selaku pembimbing utama penulis karena atas bimbingan, diskusi dan arahnya skripsi ini dapat selesai. Ucapan terimakasih juga penulis sampaikan kepada Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. selaku pembimbing akademik atas arahan dan nasehat kepada penulis atas bimbingannya selama menjadi mahasiswa program studi matematika. Ucapan terimakasih sebesar-besarnya kepada Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si. yang telah banyak memberi nasehat dan motivasi serta memfasilitasi Laboratorium Aljabar dan Kombinatorika dan Pusat Konsultasi Matematika kepada penulis selama menjadi mahasiswa program studi matematika.

Terimakasih kepada Sahabat SMA (Inas Andi Amira, Ainun Kezia Ramadani, Inas Wulan Ramadhani, dan Putri Rezky Amelya) dan Sahabat selama berkuliah penulis (Bayu Harnadi Nasrul, Ahmad Hidayah, Rifki Aldi Sobirin dan Wahyudi) atas segala dukungan, motivasi, canda, dan tawa selama masa perkuliahan hingga saat ini. Terimakasih juga kepada teman-teman Hori20ntal, MIPA 2020, Diksar XXVIII KSR PMI Unhas dan KKNT Inovasi Teknologi Tepat Guna Gel 111 Desa Tanjonga yang tidak sempat penulis sebutkan namanya satu persatu atas dukungan dan bantuannya selama ini.

Penulis menyadari dalam penyusunan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna karena sesungguhnya kesempurnaan hanya milik Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*. Oleh karena itu penulis sangat mengharpkan kritik serta saran yang membangun untuk perbaikan dimasa mendatang. Akhir kata mohon maaf atas segala kekurangan yang ada.

Penulis,

Muhammad Nurfitra Pustaka Alfurqan

## ABSTRAK

Muhammad Nurfitra Pustaka Alfurqan. **Dimensi Metrik Sisi pada Graf Grid  $G_{m(n)}$** . (dibimbing oleh Prof. Dr. Hasmawati, M.Si)

**Latar Belakang.** Dimensi metrik sisi merupakan pengembangan dimensi metrik titik yang pertama kali diperkenalkan oleh Slater (1975), serta Harary dan Melter (1976). Berbeda dengan dimensi metrik titik yang hanya fokus membahas jarak antar titik, namun pada dimensi metrik sisi pembahasan menjadi lebih kompleks. Dimensi metrik sisi juga memperhatikan, mempertimbangkan serta menganalisis jarak sisi terhadap suatu titik pada suatu graf. Konsep dimensi metrik sisi adalah mencari himpunan penentu sisi (*resolving set*) serta himpunan penentu sisi minimum. Berbagai masalah dapat diselesaikan dengan menggunakan dimensi metrik seperti ilmu kimia, optimasi, dan sistem navigasi transportasi khususnya pada *autonomous electric shuttle bus*. **Tujuan.** Tujuan penelitian ini untuk menentukan dimensi metrik sisi pada graf grid  $G_{m(n)}$  untuk sebarang bilangan asli  $m$  dan  $n$ . **Metode.** Metode yang digunakan adalah studi literatur yang bersifat eksploratif. **Hasil.** Hasil penelitian ini berupa teorema baru sebagai hasil utama penelitian, yakni tiga teorema. **Kesimpulan.** dimensi metrik sisi pada graf grid  $G_{m(n)}$  adalah  $dim_E(G_{m(n)}) = 2$  untuk sebarang bilangan asli  $m$  dan  $n$  berhingga.

**Kata kunci:** graf, Sisi, jarak, dimensi metrik sisi, himpunan penentu

## ABTRACT

Muhammad Nurfitra Pustaka Alfurqan. *Edge Metric Dimensions in Grid Graphs  $G_{m(n)}$* . (supervised by Prof. Dr. Hasmawati, M.Si)

**Background.** The concept of edge metric dimension is an extension of point metric dimension, which was first introduced by Slater (1975), as well as Harary and Melter (1976). Unlike point metric dimension, which only focuses on the distance between points, edge metric dimension involves a more complex analysis. Edge metric dimension also considers and analyzes the distance of edges from a point in a graph. The concept of edge metric dimension involves finding a resolving set for edges and the minimum edge resolving set. Various problems can be solved using metric dimensions, such as those in chemistry, optimization, and transportation navigation systems, particularly in autonomous electric shuttle buses. **Objectives.** The objectives of this research is to determine the edge metric dimension of the grid graph  $G_{m(n)}$  for any natural numbers  $m$  and  $n$ . **Method.** The method used is an exploratory literature study. **Results.** The results of this research are new theorems, with the main outcome being three theorems. **Conclusion.** The edge metric dimension of the grid graph  $G_{m(n)}$  is  $\dim_E(G_{m(n)}) = 2$  for any finite natural numbers  $m$  and  $n$ .

**Keywords:** Graph, edge, distance, edge metric dimension, resolving set

## Daftar Isi

	<b>Halaman</b>
HALAMAN JUDUL.....	i
PERNYATAAN PENGAJUAN.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI.....	iv
UCAPAN TERIMAKASIH.....	v
ABSTRAK.....	vi
Daftar Isi.....	viii
Daftar Gambar.....	x
<b>BAB I PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Landasan Teori.....	2
1.3 Jenis-Jenis Graf.....	3
1.4 Operasi Graf.....	4
1.5 Dimensi Metrik Sisi.....	6
1.6 Survey Dimensi Metrik Sisi.....	8
<b>BAB II METODOLOGI PENELITIAN.....</b>	<b>9</b>
2.1 Jenis Penelitian.....	9
2.2 Waktu dan Tempat Penelitian.....	9
2.3 Prosedur Penelitian.....	9
2.4 Diagram Alir Penelitian.....	10
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>11</b>
3.1. Dimensi Metrik Sisi Graf Grid $G_3(n)$ untuk $n$ Sebarang.....	11
3.2. Dimensi Metrik Sisi Graf Grid $G_4(n)$ untuk $n$ Sebarang.....	13
3.3. Dimensi Metrik Sisi Graf Grid $G_m(n)$ untuk $m, n \geq 2$ .....	15
3.4. Pembahasan.....	16
<b>BAB IV KESIMPULAN.....</b>	<b>18</b>
4.1 Kesimpulan.....	18
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>19</b>

LAMPIRAN.....19

## Daftar Gambar

Nomor Urut	Halaman
Gambar 1. Graf Lintasan P2 dan P3.....	3
Gambar 2. Graf Tangga L3 .....	4
Gambar 3. Graf Grid G4(5) .....	4
Gambar 4. Graf Lintasan P4 dan P5.....	5
Gambar 5. Graf Hasil P4 x P5 .....	5
Gambar 6. Diagram alir Penelitian .....	10
Gambar 7. Graf Grid G3(4) .....	11
Gambar 8. Graf Grid G4(6) .....	13

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Dewasa ini dengan semakin berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi di berbagai aspek terutama di bidang matematika, matematika kombinatorika ikut berperan besar dalam kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Kombinatorika umumnya banyak mengkaji teori graf, teori bilangan, kriptografi dan bidang-bidang yang terkait. Kombinatorika khususnya dalam kajian teori graf sangat membantu dalam menyelesaikan permasalahan realita terkait representasi objek objek diskrit sebagai titik (*Vertex*) dan hubungan dari beberapa titik yang disebut sisi (*edge*). Salah satu topik menarik dalam teori graf adalah dimensi metrik sisi.

Dimensi metrik sisi merupakan pengembangan dimensi metrik titik yang pertama kali diperkenalkan oleh Slater (1975), serta Harary dan Melter (1976). Berbeda dengan dimensi metrik titik yang hanya fokus membahas jarak antar titik, namun pada dimensi metrik sisi pembahasan menjadi lebih kompleks. Dimensi metrik sisi juga memperhatikan, mempertimbangkan serta menganalisis jarak sisi terhadap suatu titik pada suatu graf (Adawiyah dkk., 2021). Konsep dimensi metrik sisi adalah mencari himpunan penentu sisi (*resolving set*) serta himpunan penentu sisi minimum. Berbagai masalah dapat diselesaikan dengan menggunakan dimensi metrik seperti ilmu kimia, optimasi, dan sistem navigasi transportasi khususnya pada *automous electric shuttle bus* (Adawiyah & Alfarisi, 2020).

Hasil penelitian tentang dimensi metrik sisi hingga saat ini telah banyak diperoleh, Penelitian yang dilakukan (Adawiyah dkk., 2019) tentang dimensi metrik sisi pada beberapa keluarga graf tangga. Selain itu (Adawiyah & Alfarisi, 2020) meneliti tentang dimensi metrik sisi lokal pada graf. Penelitian (Aprilianto & Albirri, 2020) yang meneliti tentang dimensi metrik sisi pada beberapa graf *Unicyclic*. Kemudian (Deng dkk., 2021) melakukan penelitian tentang dimensi metrik pada keluarga jaringan mobius berbeda. Penelitian lainnya oleh (Singh dkk., 2021) yang meneliti tentang dimensi metrik dan dimensi metrik sisi pada graf kincir angin. Serta (Adawiyah dkk., 2021) yang membahas mengenai dimensi metrik sisi pada keluarga graf tangga.

Berdasarkan latar belakang penelitian sebelumnya peneliti hendak melanjutkan (Adawiyah dkk., 2021), dengan tujuan menentukan dimensi metrik sisi pada graf grid  $G_{m(n)}$  untuk sebarang bilangan asli  $m$  dan  $n$ . Dengan demikian diharapkan penelitian ini dapat memberikan wawasan tambahan mengenai dimensi metrik sisi.

Berdasarkan uraian latar belakang dan penelitian sebelumnya, peneliti akan mengkaji dimensi metrik sisi dengan mengambil objek graf grid sebagai objek

penelitian. Berdasarkan hal tersebut penulis mengambil judul “**DIMENSI METRIK SISI PADA GRAF GRID  $G_{m(n)}$** ”. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi keilmuan dalam bidang teori graf khususnya dimensi metrik sisi pada konstruksi graf grid  $G_{m(n)}$ .

## 1.2 Landasan Teori

Saat ini, dimensi metrik sisi yang merupakan pengembangan topik dimensi metrik titik merupakan topik penelitian yang mulai di minati para peneliti. Beberapa peneliti yang mengkaji dimensi metrik sisi diantaranya: (Aprilianto & Albirri ,2020), (Adawiyah dkk., 2020), (Singh dkk., 2021), (Adawiyah dkk., 2021), (Azisah, 2023), dan (Vira Anggraeni, 2024). Dalam penelitian Adawiyah dkk. pada tahun 2021 yang berjudul “*dimensi metrik sisi pada keluarga graf tangga*”, menunjukkan bahwa dimensi metrik sisi graf tangga  $L_n$  adalah 2, ditulis  $dim_E(L_n) = 2$ . Pengembangan graf tangga adalah graf grid, yakni perkalian antara lintasan  $P_m \times P_n$ , dengan notasi  $G_{m(n)}$ . Dalam penelitian ini akan dikaji dimensi metrik sisi pada graf grid  $G_{m(n)}$ .

Adapun teori-teori terkait dimensi metrik sisi pada graf grid  $G_{m(n)}$  antara lain konsep dasar graf, derajat graf, jenis-jenis graf, operasi pada graf dan dimensi metrik sisi serta hasil penelitian terdahulu akan dibahas pada bab ini. Pada bab ini referensi mengenai graf serta notasi-notasi yang dibutuhkan lebih banyak merujuk pada buku (Hasmawati, 2020).

**Definisi 1.2.1. (definisi graf secara umum)** Graf adalah pasangan himpunan  $(V, E)$ , dengan  $V$  adalah himpunan diskrit yang anggota anggotanya disebut titik, dan  $E$  adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota  $V$  yang disebut sisi.

Berdasarkan **Definisi 1.2.1** himpunan  $V$  dikatakan sebagai himpunan titik dan himpunan  $E$  dikatakan sebagai himpunan sisi. Selanjutnya himpunan  $(V, E)$  dinotasikan sebagai  $G$  sehingga  $G = (V, E)$ . Dalam hal ini  $V = V(G)$  dan  $E = E(G)$  sehingga  $G = (V(G), E(G))$ . Penulisan dengan cara lain, yakni graf  $G = (V(G), E(G))$  dengan  $V(G) = \{u; u \text{ disebut titik}\}$  dan  $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$ . Dalam penulisan skripsi ini Sisi  $(u, v)$  hanya ditulis  $uv$ .

**Contoh 1.2.1.** Diberikan graf  $G$  dengan  $V(G) = (a, b, c, d, e)$  dan  $E(G) = (ab, bc, cd, de, eb)$ , maka pasangan himpunan  $G = (V(G), E(G))$  disebut sebagai graf karena  $E(G)$  merupakan pasangan-pasangan dari anggota  $V(G)$ .

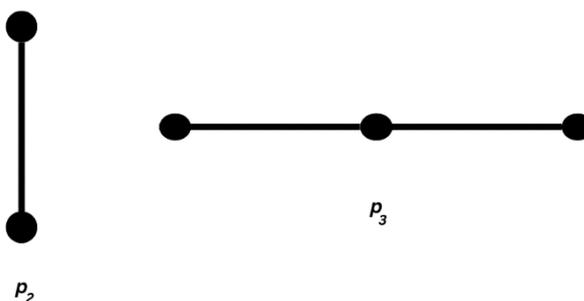
Pada **Definisi 1.2.1** jika  $V(G) \neq \phi$ ,  $uv = vu$  dan  $u \neq v$  untuk setiap  $u, v \in V(G)$  maka graf  $G$  disebut **graf sederhana**. Jika  $x = v_i v_j \in E(G)$  untuk suatu  $v_i, v_j \in V(G)$ , maka titik  $v_i, v_j$  disebut dua titik bertetangga dan sisi  $x$  disebut terkait dengan titik  $v_i$  dan  $v_j$ . Kardinalitas biasanya dinyatakan oleh simbol “| ”, sehingga banyak titik pada graf  $G$  adalah  $|V(G)|$  dan banyak sisi adalah  $|E(G)|$ . Dalam pembahasan selanjutnya, graf yang dibahas hanyalah graf sederhana. Banyak nya

tetangga dari titik  $v \in V(G)$  pada graf  $G$  ditulis  $N_G(v)$ , sehingga derajat titik  $v$  pada  $G$  adalah  $|N_G(v)|$ , ditulis  $d(v) = |N_G(v)|$ .

### 1.3 Jenis-Jenis Graf

Jenis- Jenis graf yang dibahas adalah jenis graf yang terkait dengan graf grid yaitu graf lintasan, graf tangga, dan graf grid itu sendiri.

**Definisi 1.3.1.** Lintasan pada graf  $G$  adalah barisan titik dan sisi  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$  dengan  $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$ . Graf yang hanya terdiri dari satu lintasan maksimum disebut graf lintasan dan dinotasikan  $P_n$  apabila berorde  $n \geq 2$ . Graf pada gambar 1 berikut adalah contoh graf lintasan berorde dua dan tiga.

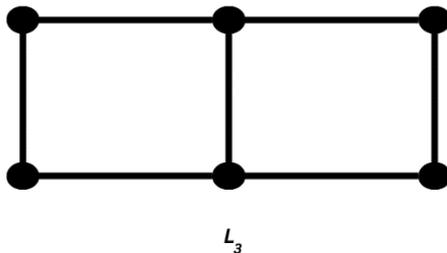


Gambar 1. Graf Lintasan  $P_2$  dan  $P_3$

**Definisi 1.3.2.** Graf  $G$  dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik  $u$  dan  $v$  terdapat lintasan yang memuat titik  $u$  dan  $v$  (Hasmawati, 2020).

**Definisi 1.3.3.** Graf tangga  $L_n$  adalah suatu graf tidak berarah dan merupakan graf planar dengan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi sebagai berikut :  $2n$  dan  $3n - 2$ . Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf  $G = L_n$  didefinisikan sebagai berikut  $p = V(L_{(n,m)}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $q = E(L_n) = \{x_i x_{(i+1)}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{(i+1)}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$ .

Berikut contoh graf tangga dapat dilihat pada gambar 2 dibawah ini.

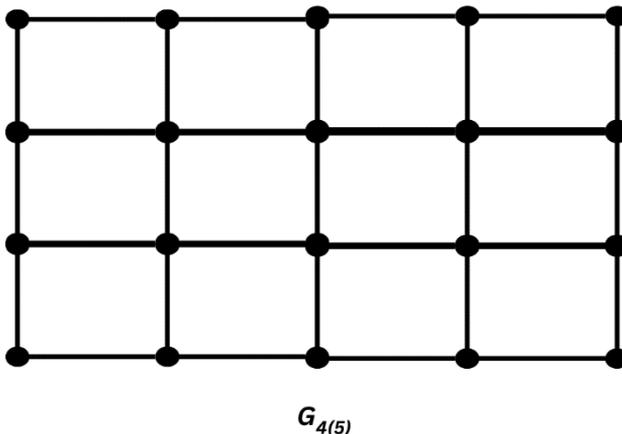


Gambar 2. Graf Tangga  $L_3$

**Definisi 1.3.4.** Graf grid merupakan hasil perkalian kartesius dari dua graf lintasan  $P_m$  dan  $P_n$  (Haspika dkk., 2023).

Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf  $G = G_{m(n)}$  sebagai berikut  $V(G_{m(n)}) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  dan  $E(G_{m(n)}) = \{x_{ij}x_{(i+1)j}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{ij}x_{i(j+1)}; 1 \leq i \leq n-1\}$ .

Berikut contoh graf grid  $G_{4(5)}$  dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 3. Graf Grid  $G_{4(5)}$

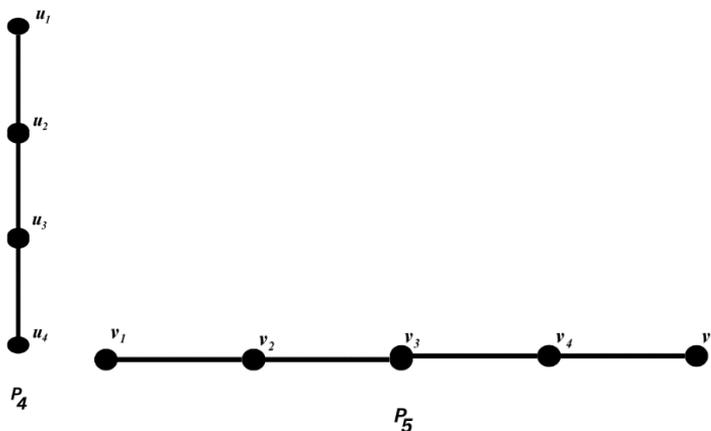
## 1.4 Operasi Graf

Operasi graf merupakan cara mendapatkan bentuk graf baru. Salah satu cara mengoperasikan graf ialah menggunakan cara perkalian kartesius (*cartesian product*).

**Definisi 1.4.1.** Misalkan  $G$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$  serta  $H$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(H)$  dan himpunan sisi  $E(H)$  maka graf kali didefinisikan sebagai  $G \times H$  dengan himpunan titik  $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$

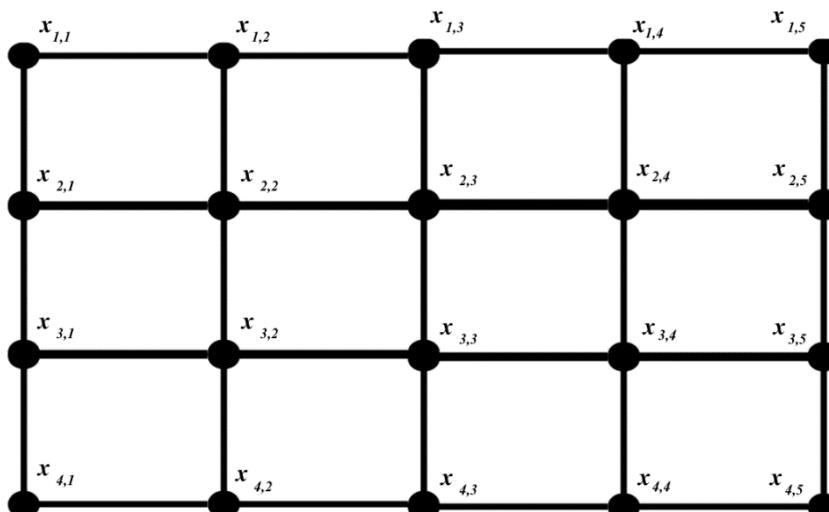
$V(H)$  dan himpunan sisi  $E(G \times H)$  adalah himpunan  $\{xy \mid x = u_1v_1, y = u_2v_2; u_1 = u_2, \text{ dan } v_1v_2, \in E(H)\}$  atau  $v_1, = v_2, \text{ dan } u_1u_2, \in E(G)\}$ .

**Contoh 1.4.1.** Diberikan graf lintasan  $P_4$  dan  $P_5$  dengan  $m, n \geq 2, m, n \in \mathbb{N}$  sebagai berikut.



Gambar 4. Graf Lintasan  $P_4$  dan  $P_5$

Disajikan graf kali  $G = P_4 \times P_5$  dengan kardinalitas titik pada graf grid grid sebanyak  $mn = 20$  dan kardinalitas sisi pada graf grid sebanyak  $2mn - m - n = 31$ . Sebagaimana dapat di lihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 5. Graf Hasil  $P_4 \times P_5$

## 1.5 Dimensi Metrik Sisi

Dimensi metrik sisi merupakan topik pengembangan dimensi metrik yang pertama kali diperkenalkan oleh Slater (1975), serta Harary dan Melter (1976). Berbeda dengan dimensi metrik yang hanya fokus membahas terkait jarak antar titik, namun pada dimensi metrik sisi pembahasan menjadi lebih kompleks. Dimensi metrik sisi juga memperhatikan, mempertimbangkan serta menganalisis jarak sisi terhadap suatu titik pada suatu graf (Adawiyah dkk., 2021).

**Definisi 1.5.1** Misalkan  $G$  adalah graf sederhana dan  $u, v \in V(G)$ . Jarak  $u$  dan  $v$  (ditulis  $d(u, v)$ ) didefinisikan panjang lintasan terpendek dari titik  $u$  ke titik  $v$ . Jika graf  $G$  tidak memiliki lintasan dari titik  $u$  ke titik  $v$ , maka didefinisikan  $d(u, v) = \infty$  (Diestel, 2005).

**Contoh 1.5.1-** Diberikan graf  $G_{3(4)}$  dengan  $V(G) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4\}$  dan  $E(G) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{x_{ij}x_{ij+1}; 1 \leq i \leq 2\}$  banyak nya pasang titik berbeda dari graf grid adalah  $C_2^{12} = \frac{12!}{(12-2)!2!} = 6.11 = 66$ . Berikut jarak antar titik graf  $G_{3(4)}$  disajikan dibawah ini.

- $d(x_{1,1}, x_{1,2}) = d(x_{1,1}, x_{2,1}) = d(x_{1,2}, x_{1,3}) = d(x_{1,2}, x_{2,2}) = d(x_{1,3}, x_{1,4}) =$   
 $d(x_{1,3}, x_{2,3}) = d(x_{1,4}, x_{2,4}) = d(x_{2,1}, x_{2,2}) = d(x_{2,1}, x_{3,1}) = d(x_{2,2}, x_{2,3}) =$   
 $d(x_{2,2}, x_{3,2}) = d(x_{2,3}, x_{2,4}) = d(x_{2,3}, x_{3,3}) = d(x_{2,4}, x_{3,4}) = d(x_{3,1}, x_{3,2}) =$   
 $d(x_{3,2}, x_{3,3}) = d(x_{3,3}, x_{3,4}) = 1$
- $d(x_{1,1}, x_{1,3}) = d(x_{1,1}, x_{2,2}) = d(x_{1,1}, x_{3,1}) = d(x_{1,2}, x_{1,4}) = d(x_{1,2}, x_{2,1}) =$   
 $d(x_{1,2}, x_{2,3}) = d(x_{1,2}, x_{3,2}) = d(x_{1,3}, x_{2,2}) = d(x_{1,3}, x_{2,4}) = d(x_{1,3}, x_{3,3}) =$   
 $d(x_{1,4}, x_{2,3}) = d(x_{1,4}, x_{3,4}) = d(x_{2,1}, x_{2,3}) = d(x_{2,1}, x_{3,2}) = d(x_{2,2}, x_{2,4}) =$   
 $d(x_{2,2}, x_{3,1}) = d(x_{2,2}, x_{3,3}) = d(x_{2,3}, x_{3,2}) = d(x_{2,3}, x_{3,4}) = d(x_{2,4}, x_{3,3}) =$   
 $d(x_{3,1}, x_{3,3}) = d(x_{3,2}, x_{3,4}) = 2$
- $d(x_{1,1}, x_{1,4}) = d(x_{1,1}, x_{2,3}) = d(x_{1,1}, x_{3,2}) = d(x_{1,2}, x_{2,4}) = d(x_{1,2}, x_{3,1}) =$   
 $d(x_{1,2}, x_{3,3}) = d(x_{1,3}, x_{2,1}) = d(x_{1,3}, x_{3,2}) = d(x_{1,3}, x_{3,4}) = d(x_{1,4}, x_{2,2}) =$   
 $d(x_{1,4}, x_{3,3}) = d(x_{2,1}, x_{2,4}) = d(x_{2,1}, x_{3,3}) = d(x_{2,2}, x_{3,4}) = d(x_{2,3}, x_{3,1}) =$   
 $d(x_{2,4}, x_{3,2}) = d(x_{3,1}, x_{3,4}) = 3$
- $d(x_{1,1}, x_{2,4}) = d(x_{1,1}, x_{3,3}) = d(x_{1,2}, x_{3,4}) = d(x_{1,3}, x_{3,1}) = d(x_{1,4}, x_{2,1}) =$   
 $d(x_{1,4}, x_{3,2}) = d(x_{2,1}, x_{3,4}) = d(x_{2,4}, x_{3,1}) = 4$
- $d(x_{1,1}, x_{2,4}) = d(x_{1,4}, x_{3,1}) = 5$

**Definisi 1.5.2.** Jarak antar titik  $v$  dan sisi  $e$  dinotasikan  $d_G(v, e) = \min \{d(u, v), d(w, v)\}$  (Adawiyah dkk., 2021).

**Contoh 1.5.2-** Diberikan graf grid pada Contoh 1.5.1 maka jarak antara sisi  $e_1$  dan titik  $x_{3,1}$  adalah  $d_G(x_{3,1}, e_1) = \min \{d(x_{1,1}, x_{3,1}), d(x_{1,2}, x_{3,1})\} = \min\{2, 3\} = 2$ .

**Definisi 1.5.3.** (Azisah, 2023) **Sisi setara pada Graf.**

Misalkan  $G$  graf terhubung dengan  $e_1, e_2 \in E(G)$ . Sisi  $e_1$  dan  $e_2$  disebut setara jika memenuhi kondisi berikut.

1.  $e_1 = va$  dan  $e_2 = vb$  untuk suatu  $a, b, v \in V(G)$
2.  $s(e_1, u) = s(e_2, u): \forall u \in V(G) \setminus \{a, b\}$

**Definisi 1.5.4.** Diberikan suatu himpunan terurut  $W = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V(G)$ . Representasi sisi  $e$  terhadap  $W$  dinotasikan  $r(e|W)$  dengan  $r(e|W) = \{d_G(e, x_1), d_G(e, x_2), \dots, d_G(e, x_n)\}$ .  $W$  disebut himpunan penentu sisi jika  $e_i, e_j \in E(G), r(e_i|W) \neq r(e_j|W)$  (Azisah, 2023).

**Contoh 1.5.4** Diberikan graf grid pada Contoh 1.2.10.

Pilih himpunan terurut  $W = \{x_{1,1}, x_{3,1}\} \subseteq V(G)$ . Maka

$$r((x_{1,1}, x_{1,2})|W) = (0,2) \quad r((x_{1,1}, x_{2,1})|W) = (0,1)$$

$$r((x_{1,2}, x_{1,3})|W) = (1,3) \quad r((x_{2,1}, x_{3,1})|W) = (1,0)$$

$$r((x_{1,3}, x_{1,4})|W) = (2,4) \quad r((x_{1,2}, x_{2,2})|W) = (1,2)$$

$$r((x_{2,1}, x_{2,2})|W) = (1,1) \quad r((x_{2,2}, x_{3,3})|W) = (2,1)$$

$$r((x_{2,2}, x_{2,3})|W) = (2,2) \quad r((x_{1,3}, x_{2,3})|W) = (2,3)$$

$$r((x_{2,3}, x_{2,4})|W) = (3,3) \quad r((x_{2,3}, x_{3,3})|W) = (3,2)$$

$$r((x_{3,1}, x_{3,2})|W) = (2,0) \quad r((x_{1,4}, x_{2,4})|W) = (3,4)$$

$$r((x_{3,2}, x_{3,3})|W) = (3,1) \quad r((x_{2,4}, x_{3,4})|W) = (4,3)$$

$$r((x_{3,3}, x_{3,4})|W) = (4,2)$$

Jika  $e_{ij} = (x_{ij}, x_{ir})$ , maka diperoleh  $r(e_{ij}|W) \neq r(e_{rs}|W)$ . jadi  $W$  merupakan himpunan penentu sisi.

**Definisi 1.5.5** Dimensi metrik sisi merupakan kardinalitas minimum dari semua himpunan penentu sisi pada  $G$  yang dilambangkan dengan  $dim_E(G)$  (Adawiyah dkk., 2021).

**Contoh 1.5.5.** Jika  $W$  pada contoh 1.5.4 merupakan himpunan penentu. Selanjutnya jika diambil  $W$  dan  $|W| = 1$ , maka  $W$  bukan himpunan penentu. Misal jika di ambil  $W = \{x_{ij}\}$ , maka  $r(e_{ij}|W) = 0$  dan  $r(e_{i+1,j}|W) = 0$ . Jadi  $r(e_{ij}|W) = r(e_{i+1,j}|W) = 0, \forall i, j \in \mathbb{N}$ . Karenanya,  $W$  bukan himpunan penentu. Dengan demikian  $W = \{x_{1,1}, x_{3,1}\}$  pada contoh 1.5.4 merupakan himpunan penentu minimum.

## 1.6 Survey Dimensi Metrik Sisi

Hasil-hasil survey dimensi metrik sisi terdahulu diberikan di sini agar terlihat bahwa materi penelitian skripsi ini belum dikerjakan sebelumnya.

**Teorema 1.6.1.** Jika  $L_n$  adalah graf tangga dengan  $n \geq 2$ , maka  $\dim_E(L_n) = 2$  (Adawiyah & Alfarisi, 2020).

**Teorema 1.6.2.** Jika  $C_n$  adalah graf siklus dengan  $n \geq 2$ , maka  $\dim_E(C_n) = 2$ . (Adawiyah & Alfarisi, 2020).

**Teorema 1.6.3.** Jika  $S_n$  adalah graf bintang dengan  $n \geq 4$ , maka  $\dim_E(S_n) = n - 1$  (Adawiyah & Alfarisi, 2020).

**Teorema 1.6.4.** Jika  $W_n$  adalah graf roda dengan  $n \geq 4$ , maka  $\dim_E(W_n) = n - 1$  (Adawiyah & Alfarisi, 2020).

**Teorema 1.6.5.** Jika  $CW_n^m$  atau graf *French cycle windmill* adalah graf hasil operasi *comb*  $C_m$  dan  $K_n$  dengan  $n > 2$ , maka  $\dim_E(CW_n^m) = \dim_E(C_m \triangleright K_n) = m(n - 2)$  (Singh dkk., 2021).

**Teorema 1.6.6.** Jika  $SL_m$  adalah graf tangga dengan  $m \geq 2$ , maka  $\dim_E(SL_m) = 2$  (Adawiyah dkk., 2021).

**Teorema 1.6.7.** Misalkan  $C_n$  adalah siklus dengan  $n \geq 3$  dan  $G$  adalah graf sebarang berorde  $n$ . Jika  $|V(G)| > 1$ , maka  $\dim_E(C_n \triangleright (K_1 + G)) = n|V(G)| - 1$  (Azisah, 2023).

**Teorema 1.6.8.** Dimensi metrik sisi graf  $G$  dinotasikan  $\beta_e(G)$ . Dimensi metrik sisi  $\beta_e(G) = 1$  jika dan hanya jika  $G$  adalah graf lintasan (Kelenc dkk., 2018).

Pada bab 2 berikut diuraikan langkah-langkah yang dilakukan penulis untuk mendapatkan dimensi metrik sisi graf grid.