

**PENERAPAN METODE HUNGARIAN MODIFIKASI DALAM
MENGATASI MASALAH PENUGASAN TIDAK SEIMBANG
MULTI-TUJUAN**

SKRIPSI



SISILIA ANGGRAENI

H011201050

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

2024

**PENERAPAN METODE HUNGARIAN MODIFIKASI DALAM
MENGATASI MASALAH PENUGASAN TIDAK SEIMBANG
MULTI-TUJUAN**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

UNIVERSITAS HASANUDDIN

SISILIA ANGGRAENI

H011201050

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

MEI 2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

**Penerapan Metode Hungarian Modifikasi dalam Mengatasi Masalah
Penugasan Tidak Seimbang
Multi-Tujuan**

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 7 Mei 2024



Sisilia Anggraeni

NIM. H011201050

**PENERAPAN METODE HUNGARIAN MODIFIKASI DALAM
MENGATASI MASALAH PENUGASAN TIDAK SEIMBANG
MULTI-TUJUAN**

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama

Dr. Khaeruddin, M.Sc.

NIP. 196509141991031003

Pada 7 Mei 2024

HALAMAN PENGESAHAN

**PENERAPAN METODE HUNGARIAN MODIFIKASI DALAM
MENGATASI MASALAH PENUGASAN TIDAK SEIMBANG
MULTI-TUJUAN**

Disusun dan diajukan oleh

SISILIA ANGGRAENI

H011201050

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 7 Mei 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama

Dr. Khaeruddin, M.Sc.

NIP. 196509141991031003

Ketua Program Studi

Dr. Firman, S.Si., M.Si.

NIP. 196804292002121001






HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : Sisilia Anggraeni
NIM : H011201050
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Penerapan Metode Hungarian Modifikasi Dalam Mengatasi Masalah Penugasan Tidak Seimbang Multi-Tujuan

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian dari persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

1. Ketua : Dr. Khaeruddin, M.Sc. ()
2. Anggota : Dr. Muhammad Zakir, M.Si. ()
3. Anggota : Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si. ()

Ditetapkan di : Makassar
Tanggal : 7 Mei 2024

KATA PENGANTAR

“Percayalah kepada TUHAN dengan segenap hatimu, dan janganlah bersandar kepada pengertianmu sendiri. Akuilah Dia dalam segala lakumu, maka Ia akan meluruskan jalanmu.”

Amsal 3:5-6

Puji Syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yesus Kristus, atas segala berkat, kasih, dan penyertaan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul **“Penerapan Metode Hungarian Modifikasi Hungarian dalam Mengatasi Masalah Penugasan Tidak Seimbang Multi-Tujuan”**. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk menyelesaikan Pendidikan Strata Satu (S1) Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua penulis, Bapak **Martinus Tando Pasanda** dan Ibu **Tabita Piung** yang telah sabar membesarkan dan mendidik penulis, serta memberikan doa dan materi sehingga penulis bisa berada pada titik ini dan mampu menyelesaikan pendidikan di perguruan tinggi. Terima kasih kepada kakak penulis **Dian Kristi Pratama** dan adik **Oktaviana** yang telah memberikan dukungan pada penulis. Terima kasih telah menjadi sumber motivasi dan kekuatan bagi penulis selama perjalanan akademik ini.

Pada kesempatan ini pula, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyemapaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika beserta jajaran staf Departemen Matematika yang telah membantu proses administrasi, serta Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika yang telah membagikan ilmu dan pengalamannya selama proses perkuliahan.

4. Bapak **Dr. Khaeruddin., M.Sc.**, selaku pembimbing untuk segala ilmu, nasihat, dan kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia meluangkan waktunya untuk mendampingi penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.
5. Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** dan Ibu **Prof. Dr. Kasbawati, M.Si.**, selaku penguji penulis yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penulisan skripsi ini.
6. Sahabat-sahabat penulis **Wardalisah, Nurpadian, dan Rofifah Fakhriyah** yang telah membantu, menemani, menyemangati, dan tempat berbagi keluh-kesah penulis selama kurang lebih 4 tahun perkuliahan.
7. Teman-teman penulis **Hilda, Asfi, Fahira, Indah, Wulan, Sulfina, Mona, dan Nurkholisa** yang telah membantu dan menjadi teman diskusi penulis selama perkuliahan dan proses penulisan skripsi.
8. Teman-teman **Matematika 2020** atas segala dukungan, kebersamaan, dan kerjasamanya selama ini.
9. Teman-teman **KKN G-110 Posko Parumpanai (Iceng, Kadek, Sela, Ade, Riona, Kak Firda, dan Jupe)** yang telah saling memberi semangat serta dukungan di masa semester terakhir penulis.
10. Serta segala pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun diharapkan oleh penulis untuk perbaikan dan pengembangan penelitian lebih lanjut. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kalangan akademisi, praktisi, dan semua pihak.

Makassar, 7 Mei 2024

Penulis,



Sisilia Anggraeni

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK
KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Sisilia Anggraeni
NIM : H011201050
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneklusif** (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**“Penerapan Metode Hungarian Modifikasi Dalam Mengatasi Masalah
Penugasan Tidak Seimbang Multi-Tujuan”**

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencatumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada 7 Mei 2024

Yang menyatakan



Sisilia Anggraeni

ABSTRAK

Masalah penugasan merupakan suatu kasus khusus dari pemrograman linear yang berkaitan dengan penetapan sejumlah tugas (n) ke sejumlah pekerja (m) dimana setiap pekerja memiliki kompetensi yang berbeda dalam menyelesaikan tugas. Masalah penugasan dikatakan tidak seimbang jika jumlah pekerja tidak sama dengan jumlah tugas ($m \neq n$). Metode Hungarian Modifikasi dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan tidak seimbang tanpa penambahan *dummy* sehingga tidak terdapat tugas yang diabaikan. Masalah penugasan multi-tujuan adalah suatu masalah penugasan yang tidak hanya mengoptimalkan biaya, namun dapat mengoptimalkan biaya dan waktu secara bersamaan sehingga diperoleh solusi yang minimum. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi optimal yang dihasilkan oleh metode Hungarian Modifikasi dalam mengatasi masalah penugasan tidak seimbang dan multi-tujuan. Berdasarkan perbandingan hasil solusi optimal dari penugasan yang hanya mempertimbangkan salah satu sumber daya dan yang mempertimbangkan semua sumber daya secara bersamaan, menunjukkan bahwa proses optimasi yang mempertimbangkan semua sumber daya lebih efektif dan efisien dibandingkan dengan hanya mempertimbangkan salah satu sumber daya.

Kata Kunci: Masalah Penugasan tidak seimbang, Multi-Tujuan, Metode Hungarian Modifikasi.

Judul : Penerapan Metode Hungarian Modifikasi dalam Mengatasi
Masalah Penugasan Tidak Seimbang dan Multi-Tujuan
Nama : Sisilia Anggraeni
NIM : H011201050
Program Studi : Matematika

ABSTRACT

The assignment problem is a special case of linear programming that deals with the assignment of a number of task (n) to a number of workers (m) where each worker has different competencies in completing task. The assignment problem is said to be unbalanced if the number of workers is not equal to the number of tasks ($m \neq n$). The Modified Hungarian Method can be used to solve the unbalanced assignment problem without the addition of dummies so that no tasks are ignored. A multi-objective assignment problem is an assignment problem that not only optimizes cost, but can optimize cost and time simultaneously so that a minimum solution is obtained. The purpose of this study is to determine the optimal solution produced by the Modified Hungarian method in solving the unbalanced and multi-objective assignment problem. Based on the comparison of the optimal solution results from assignments that only consider one of the resources and those that consider all resources simultaneously, it shows that the optimization process that considers all resources is more effective and efficient than considering only one of the resources.

Keywords: Unbalanced Assignment Problem, Multi-Objective, Modified Hungarian Method.

Title : Application of Modified Hungarian Method in Solving
Multi-Objective Unbalanced Assignment Problem
Name : Sisilia Anggraeni
Student ID : H011201050
Study Program : Mathematics

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR	vi
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR	viii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT.....	x
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL.....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xvi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	4
2.1 Pemrograman Linear	4
2.2 Masalah Penugasan (<i>Assignment Problem</i>)	5
2.2.1 Masalah Penugasan Sederhana	6
2.2.2 Masalah Penugasan Multi-Tujuan	7
2.2.3 Masalah Penugasan Tidak Seimbang (<i>Unbalanced</i>)	9
2.3 Metode Hungarian Modifikasi	10
2.4 MATLAB	11
2.5 Contoh Kasus Masalah Penugasan Tidak Seimbang dan Multi-Tujuan	11
BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	25
3.1 Jenis dan Sumber Data	25
3.2 Prosedur Penelitian.....	25
3.3 Alur Kerja Penelitian.....	26

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	27
4.1 Deskripsi Data	27
4.2 Implementasi Program	28
4.3 Hasil Penerapan Metode Hungarian Modifikasi pada Masalah Penugasan Tidak Seimbang dan Multi-Tujuan	30
4.3.1 Hasil Alokasi Optimal	30
4.3.2 Hasil Total Biaya dan Waktu Minimum.....	32
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN.....	35
5.1 Kesimpulan.....	35
5.2 Saran	35
DAFTAR PUSTAKA	36
LAMPIRAN.....	38

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3. 1 *Flowchart* Metodologi Penelitian 26

Gambar 4. 1 *Flowchart* Metode Hungarian Modifikasi..... 28

Gambar 4. 2 *Flowchart* Normalisasi dan Pembobotan Data Biaya dan Waktu.... 29

Gambar 4. 3 Hasil Total Biaya..... 33

Gambar 4. 4 Hasil Total Waktu 33

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Tabel Penugasan	5
Tabel 2. 2 Biaya dan Waktu Produksi.....	12
Tabel 2. 3 Biaya Produksi	13
Tabel 2. 4 Penentuan Nilai Minimum untuk Kolom.....	13
Tabel 2. 5 Penentuan Nilai Minimum untuk Baris	13
Tabel 2. 6 Menarik Garis Horizontal atau Vertikal.....	14
Tabel 2. 7 Hasil Pengurangan dan Penambahan Nilai Terkecil.....	14
Tabel 2. 8 Hasil Solusi Optimal	14
Tabel 2. 9 Penetapan Tugas ke Pekerja.....	15
Tabel 2. 10 Penetapan Tugas ke Pekerja.....	15
Tabel 2. 11 Hasil Penugasan Optimal	15
Tabel 2. 12 Waktu Produksi.....	16
Tabel 2. 13 Penentuan Nilai Minimum untuk Kolom.....	17
Tabel 2. 14 Penentuan Nilai Minimum untuk Baris	17
Tabel 2. 15 Menarik Garis Horizontal atau Vertikal.....	17
Tabel 2. 16 Penetapan Tugas ke Pekerja.....	18
Tabel 2. 17 Penetapan Tugas ke Pekerja.....	18
Tabel 2. 18 Hasil Penugasan Optimal	18
Tabel 2. 19 Hasil Normalisasi Data Biaya dan Waktu.....	19
Tabel 2. 20 Hasil Pembobotan Data Biaya dan Waktu	20
Tabel 2. 21 Penentuan Nilai Minimum untuk Kolom.....	20
Tabel 2. 22 Penentuan Nilai Minimum untuk Baris	21
Tabel 2. 23 Menarik Garis Horizontal atau Vertikal.....	21
Tabel 2. 24 Hasil Pengurangan dan Penambahan Nilai Terkecil.....	21
Tabel 2. 25 Hasil Solusi Optimal	22
Tabel 2. 26 Penetapan Tugas ke Pekerja.....	22
Tabel 2. 27 Penetapan Tugas ke Pekerja.....	22
Tabel 2. 28 Hasil Penugasan Optimal	23
Tabel 2. 29 Hasil Proses Optimasi Contoh 2.6	23
Tabel 4. 1 Data Masalah Penugasan	27
Tabel 4. 2 Hasil Alokasi Optimal untuk P1	30

Tabel 4. 3 Hasil Alokasi Optimal untuk P2	30
Tabel 4. 4 Hasil Alokasi Optimal untuk P3	31
Tabel 4. 5 Hasil Total Biaya	32
Tabel 4. 6 Hasil Total Waktu	32
Tabel L. 8. 1 Hasil Alokasi Optimal untuk P4.....	71
Tabel L. 8. 2 Hasil Alokasi Optimal untuk P5.....	72

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Tabel Data Biaya dan Waktu Penugasan dengan Ukuran 4 X 5	39
Lampiran 2. Tabel Data Biaya dan Waktu Penugasan dengan Ukuran 8 x 10	39
Lampiran 3. Data Biaya dan Waktu Penugasan dengan Ukuran 16 X 20	40
Lampiran 4. Data Biaya dan Waktu Penugasan dengan Ukuran 32 x 40	41
Lampiran 5. Data Biaya dan Waktu Penugasan dengan Ukuran 64 x 80	46
Lampiran 6. <i>Source Code</i> Matlab Penerapan Metode Hungarian Modifikasi	66
Lampiran 7. <i>Source Code</i> Matlab untuk Normalisasi	70
Lampiran 8. Hasil Alokasi Optimal untuk P4 dan P5	71

BAB I PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Masalah penugasan (*assignment problem*) merupakan masalah mengenai n tugas yang harus ditetapkan kepada m pekerja yang tepat sehingga total pengeluaran sumber daya untuk menyelesaikan semua tugas dapat diminimumkan. Setiap pekerja mempunyai tingkat kemampuan yang berbeda-beda dalam menyelesaikan tugas yang berbeda pula. Karena perbedaan kemampuan pribadi atau faktor lainnya, setiap pekerja dapat menghabiskan jumlah sumber daya yang berbeda untuk menyelesaikan tugas tertentu (Bao dkk., 2007). Masalah penugasan sering kali dijumpai dalam perusahaan atau lembaga lainnya. Misalnya yang terjadi pada sebuah perusahaan industri yang ingin menempatkan pekerja pada suatu tugas dengan tujuan meminimumkan biaya atau waktu produksi (Azis dkk., 2022). Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan adalah metode Hungarian.

Metode Hungarian merupakan metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan dengan mengubah baris dan kolom dalam matriks efektivitas sampai muncul sebuah komponen nol tunggal dalam setiap baris atau kolom yang dapat dipilih sebagai sebuah alokasi penugasan. Semua alokasi penugasan yang dibuat merupakan alokasi yang optimal sehingga saat diterapkan pada matriks efektivitas awal akan memberikan hasil penugasan yang paling minimum (Tamimi dkk., 2017). Metode Hungarian dapat menyelesaikan masalah penugasan, baik itu masalah penugasan yang seimbang maupun masalah penugasan yang tidak seimbang.

Masalah penugasan dengan kasus tidak seimbang masih sering ditemukan dalam kehidupan sehari-hari dimana jumlah pekerja (m) lebih sedikit daripada jumlah tugas (n) yang ada. Misalnya pada Mitra Tex Konveksi yang memiliki 5 pekerja yang akan menyelesaikan 8 tugas (Evipania dkk., 2021), proses pembuatan Glasswood pada CV. Master Studio dimana terdapat 7 pekerja untuk menyelesaikan 8 tugas (Fakhrudin dkk., 2022), dan penugasan karyawan usaha cuci motor "BEJO" dimana terdapat 4 pekerja yang akan menyelesaikan 6 tugas (Subaderi dan Suwondo, 2023). Penyelesaian masalah penugasan tidak seimbang menggunakan

metode Hungarian dilakukan dengan menambahkan variabel *dummy* pada baris atau kolom sehingga kasus akan menjadi seimbang. Hal ini mengakibatkan terdapat tugas tertentu yang diabaikan atau tidak dilaksanakan karena tugas tersebut diberikan kepada pekerja *dummy* (Dhouib, 2023). Namun, dalam kehidupan nyata, tidak mungkin sebuah perusahaan mengabaikan tugas yang ada karena kurangnya pekerja (Rabbani dkk., 2019).

Para peneliti telah mengusulkan berbagai pendekatan untuk menyelesaikan masalah penugasan tidak seimbang, seperti Rabbani dkk. (2019) mengusulkan metode Hungarian Modifikasi dengan mencari baris yang hanya memiliki satu angka nol dan mencoret angka nol lainnya sesuai dengan kolom yang bersangkutan. Kemudian Betts dan Vasko (2016) menciptakan keseimbangan dengan menggandakan agen (pekerja) dan menambahkan beberapa tugas tiruan yang kemudian diselesaikan dengan metode Hungarian. Kumar (2006) mempartisi matriks tidak seimbang menjadi beberapa matriks seimbang yang kemudian diselesaikan menggunakan metode Hungarian. Selanjutnya, Yadaiah dan Haragopal (2016) juga mempartisi matriks tidak seimbang menjadi beberapa matriks seimbang yang kemudian diselesaikan menggunakan metode Lexi-search. Dari beberapa pendekatan yang diusulkan, metode Hungarian Modifikasi memberikan solusi terbaik dengan total biaya paling minimum (Rabbani dkk., 2019).

Metode Hungarian Modifikasi merupakan metode yang digunakan khusus untuk masalah penugasan tidak seimbang. Metode Hungarian Modifikasi dapat menyelesaikan masalah penugasan tak seimbang dengan cara menyelesaikan dalam satu matriks (tabel) penugasan tanpa penambahan *dummy*. Metode ini memberikan kebijakan kepada pengambil keputusan sedemikian rupa sehingga semua tugas dapat dilaksanakan dan biaya keseluruhan dapat diminimumkan (Rabbani dkk., 2021).

Menurut Rahayu dkk. (2018), secara umum masalah penugasan dapat dimodelkan dalam bentuk model pemrograman linear yang memiliki satu fungsi tujuan, yaitu mengoptimalkan total biaya penugasan setiap pekerja. Namun, saat ini masalah penugasan telah dikembangkan menjadi masalah penugasan yang memiliki fungsi tujuan banyak (multi-tujuan), yaitu tidak hanya mengoptimalkan

total biaya penugasan saja, tetapi sekaligus mengoptimalkan pendapatan, jarak, waktu, kualitas, dan lain sebagainya. Masalah seperti ini biasa ditemukan pada perusahaan produksi untuk mengoptimalkan biaya produksi, waktu produksi, jarak pengiriman produk, kualitas produk, dan lain-lain.

Berdasarkan permasalahan diatas, maka dilakukan penelitian yang berjudul **“PENERAPAN METODE HUNGARIAN MODIFIKASI DALAM MENGATASI MASALAH PENUGASAN TIDAK SEIMBANG MULTI-TUJUAN”** yang diharapkan mampu menjadi solusi dalam mengatasi masalah penugasan.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah bagaimana hasil solusi optimal dari masalah penugasan tidak seimbang dan multi-tujuan menggunakan Metode Hungarian Modifikasi?

1.3. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Jumlah pekerja lebih sedikit dari jumlah tugas ($m < n$).
2. Data yang digunakan adalah data random.
3. Fungsi tujuan yang digunakan yaitu meminimumkan total biaya dan waktu penugasan.

1.4. Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah mengetahui solusi optimal dari masalah penugasan tidak seimbang dan multi-tujuan menggunakan Metode Hungarian Modifikasi.

1.5. Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai sarana untuk menambah wawasan dan pengetahuan dalam mengaplikasikan metode-metode yang telah diberikan selama perkuliahan khususnya pada masalah penugasan. Selain itu, hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi dan dijadikan sebagai bahan acuan untuk penelitian selanjutnya dengan metode yang sama.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemrograman Linear

Pemrograman linear merupakan suatu metode yang digunakan untuk membuat keputusan di antara berbagai alternatif kegiatan pada waktu kegiatan-kegiatan tersebut dibatasi oleh kegiatan tertentu. Keputusan yang diambil dinyatakan sebagai fungsi tujuan (*objective function*) (Rangkuti, 2013).

Menurut Fikri dkk. (2021) secara umum terdapat tiga unsur utama dalam model pemrograman linear sebagai berikut:

1. Variabel keputusan, yaitu variabel persoalan yang akan mempengaruhi nilai tujuan yang hendak dicapai. Dalam proses pemodelan, penemuan variabel keputusan harus dilakukan terlebih dahulu sebelum merumuskan fungsi tujuan dan kendalanya.
2. Fungsi tujuan, yaitu fungsi yang hendak dicapai dan harus diwujudkan ke dalam sebuah fungsi matematika linear. Selanjutnya fungsi ini dimaksimumkan atau diminimumkan terhadap kendala-kendala yang ada dan dinyatakan dengan (Z).
3. Kendala fungsional, yaitu manajemen menghadapi berbagai kendala untuk mewujudkan tujuan-tujuannya.

Adapun bentuk umum dari model pemrograman linear adalah sebagai berikut (Rangkuti, 2022):

Mengoptimalkan:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j \quad (2.1)$$

dengan kendala:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j \leq/\geq/= b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j \leq/\geq/= b_2$$

⋮

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j \leq/\geq/= b_i$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j \geq 0$$

keterangan:

Z : Fungsi Tujuan

x_j : Variabel keputusan ke- j

c_j : Koefisien fungsi tujuan ke- j

b_j : Kapasitas kendala ke- i

a_{ij} : Koefisien kendala ke- i untuk variabel keputusan ke- j

Tujuan dari pemrograman linear berkaitan dengan masalah optimalisasi suatu model linear, yaitu menentukan nilai minimum atau maksimum dengan keterbatasan sumber daya yang tersedia (Utami dkk, 2019).

2.2 Masalah Penugasan (*Assignment Problem*)

Masalah penugasan merupakan kasus khusus dari pemrograman linear dimana sumber-sumber dialokasikan kepada kegiatan atau tujuan. Masalah ini dapat dianalogikan sebagai penugasan m buah sumber (pekerja) ke n tujuan (tugas) dimana setiap pekerja memiliki kompetensi yang berbeda untuk melakukan setiap tugas. Tujuan dari masalah penugasan adalah untuk menetapkan setiap tugas kepada pekerja yang tepat agar total pengeluaran sumber daya untuk menyelesaikan semua tugas dapat diminimumkan (Bao dkk., 2007).

Pada masalah penugasan terdapat suatu biaya c_{ij} yang berkaitan dengan pekerja ke- i ($i=1,2,\dots,m$) yang melakukan tugas ke- j ($j=1,2,\dots,n$) sehingga tujuannya adalah untuk menentukan tugas yang harus dilakukan oleh seorang pekerja agar total biaya dapat diminimumkan (Dutta dan Pal, 2015). Satuan untuk c_{ij} dapat berupa rupiah, km, jam atau apapun yang sesuai dengan masalah yang dihadapi (Harini, 2017).

Bentuk umum masalah penugasan dalam tabel dapat dilihat pada Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2. 1 Tabel Penugasan

Pekerja	Tugas					
	1	2	...	j	...	n
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mn}

(Sumber: Dutta dan Pal, 2015)

keterangan:

n : Jumlah tugas yang akan diselesaikan

m : Jumlah pekerja yang akan menyelesaikan tugas

c_{ij} : Biaya yang diperlukan pekerja i menyelesaikan tugas j

Berdasarkan penyelesaiannya, masalah penugasan dibagi menjadi dua yaitu masalah meminimumkan biaya, waktu, jarak, atau sebagainya dan memaksimalkan keuntungan. Berdasarkan bentuk matriksnya, terdapat dua jenis permasalahan pada penugasan yaitu masalah penugasan seimbang (*balance*) dan masalah penugasan tidak seimbang (*unbalanced*). Masalah penugasan disebut seimbang jika jumlah pekerja (m) sama dengan jumlah tugas (n). Sedangkan, masalah penugasan disebut tidak seimbang jika jumlah pekerja lebih sedikit dari pada jumlah tugas maupun jumlah pekerja lebih banyak dari pada jumlah tugas (Annapurna dan Yesaswini, 2021). Masalah penugasan dapat diselesaikan dengan beberapa metode seperti metode Enumerasi, metode Simpleks, metode Transportasi, dan metode Hungarian. Dari beberapa metode tersebut, metode Hungarian merupakan metode yang terkenal dan sering digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan (Dutta dan Pal, 2015).

2.2.1 Masalah Penugasan Sederhana

Masalah penugasan sederhana adalah masalah penugasan yang hanya memiliki satu fungsi tujuan yang akan dioptimalkan, yaitu meminimumkan atau memaksimalkan suatu sumber daya (biaya, waktu, atau jumlah produksi) yang digunakan untuk menyelesaikan tugas (Rahayu dkk., 2018).

Adapun bentuk umum masalah penugasan sebagai berikut (Hillier dan Lieberman, 2005):

Minimumkan:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.2)$$

dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.4)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika pekerja } i \text{ mengerjakan tugas } j \\ 0, & \text{jika pekerja } i \text{ tidak mengerjakan tugas } j \end{cases}$$

keterangan:

Z : Fungsi tujuan

n : Jumlah tugas yang akan diselesaikan

m : Jumlah pekerja yang akan menyelesaikan tugas

x_{ij} : Penugasan pekerja i ke tugas j

c_{ij} : Biaya yang diperlukan pekerja i menyelesaikan tugas j

2.2.2 Masalah Penugasan Multi-Tujuan

Masalah penugasan multi-tujuan adalah suatu permasalahan penugasan yang memiliki beberapa fungsi tujuan yang akan dioptimalkan terhadap jenis-jenis sumber daya yang dimiliki oleh pekerja dalam menyelesaikan tugasnya. Model masalah penugasan ini tidak hanya mengoptimalkan total biaya penugasan saja, tetapi sekaligus mengoptimalkan pendapatan, jarak, waktu, kualitas, dan lain sebagainya (Rahayu dkk., 2018). Dapat diketahui bahwa satuan untuk mengukur setiap sumber daya sangat berbeda. Misalnya biaya dan waktu dimana satuan untuk mengukur biaya yaitu rupiah atau yang berkaitan dengan uang sedangkan waktu yaitu detik, jam, hari atau tahun. Hal tersebut tentu berbeda, sehingga untuk menyamakan langsung biaya ke dalam fungsi tujuan yang diukur oleh waktu penugasan saja, maupun menyamakan langsung waktu ke dalam fungsi tujuan yang diukur oleh biaya penugasan saja tidak dapat dilakukan (Bao dkk., 2007). Oleh karena itu, untuk mengoptimalkan beberapa sumber daya secara bersamaan, dapat

dilakukan dengan mengubah fungsi multi-tujuan menjadi satu fungsi tujuan (Rahayu dkk., 2018).

Langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah penugasan multi-tujuan adalah sebagai berikut (Basriati dkk., 2023):

1. Melakukan normalisasi data dengan cara menentukan nilai maksimum dari tiap tujuan, kemudian setiap nilai dari masing-masing tujuan dibagi dengan nilai maksimum tersebut:

$$S = \frac{\text{nilai data}}{\text{nilai data maksimum}}$$

2. Memodifikasi fungsi multi-tujuan menjadi satu fungsi tujuan dengan menentukan bobot tiap tujuan. Diasumsikan bobot dari semua fungsi tujuan memiliki kepentingan yang sama sehingga $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \frac{1}{\omega}$ dimana ω adalah banyaknya tujuan.
3. Menentukan solusi optimal masalah penugasan multi-tujuan menggunakan Metode Hungarian Modifikasi.

Adapun bentuk umum masalah penugasan multi-tujuan adalah sebagai berikut (Rahayu dkk., 2018):

Minimumkan:

$$Z = \omega_1 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{1ij}x_{ij} + \omega_2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{2ij}x_{ij} + \dots + \omega_k \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{kij}x_{ij} \quad (2.5)$$

dengan kendala:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.7)$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k = 1$$

$$\omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika pekerja } i \text{ mengerjakan tugas } j \\ 0, & \text{jika pekerja } i \text{ tidak mengerjakan tugas } j \end{cases}$$

keterangan :

Z : Fungsi tujuan

$\omega_1, \omega_2, \omega_k$: Banyaknya tujuan

n : Jumlah tugas yang akan diselesaikan

m : Jumlah pekerja yang akan menyelesaikan tugas

x_{ij} : Penugasan dari pekerja i ke tugas j

$c_{1ij}, c_{2ij}, c_{kij}$: Parameter masing-masing fungsi tujuan dari pekerja i ke tugas j

2.2.3 Masalah Penugasan Tidak Seimbang (*Unbalanced*)

Masalah penugasan tidak seimbang adalah masalah untuk menemukan alokasi optimal dari sejumlah pekerja (m) ke sejumlah tugas (n) dimana $m \neq n$ (Rabbani dkk., 2019). Menurut Dhouib (2023) untuk mengatasi masalah penugasan tak seimbang menggunakan metode Hungarian, maka sejumlah baris atau kolom *dummy* perlu ditambahkan sehingga jumlah tugas akan sama dengan jumlah pekerja. *Dummy* pada dasarnya adalah buatan sehingga biaya penugasan adalah nol. Namun, dengan adanya penambahan *dummy* maka beberapa tugas akan diabaikan atau tidak dikerjakan. Oleh karena itu, untuk mengatasi masalah penugasan yang tidak seimbang tanpa mengabaikan tugas, salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode Hungarian Modifikasi (Rabbani dkk., 2019).

Masalah penugasan tidak seimbang dapat dimodelkan sebagai berikut (Rabbani dkk., 2019):

Minimumkan:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.8)$$

dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika pekerja } i \text{ mengerjakan tugas } j \\ 0, & \text{jika pekerja } i \text{ tidak mengerjakan tugas } j \end{cases}$$

Persamaan (2.9) mengindikasikan bahwa pekerja dapat mengerjakan lebih dari satu tugas dan persamaan (2.10) membatasi bahwa tidak ada tugas yang sama yang dapat dikerjakan lebih dari satu pekerja.

2.3. Metode Hungarian Modifikasi

Metode Hungarian Modifikasi merupakan bentuk modifikasi dari metode Hungarian yang diusulkan oleh Rabbani dkk. (2019) untuk mengatasi masalah penugasan tidak seimbang dengan memungkinkan satu pekerja dapat mengerjakan beberapa tugas. Letak perbedaan metode Hungarian Modifikasi dengan metode Hungarian adalah jika jumlah tugas lebih banyak dari jumlah pekerja maka tugas dilakukan oleh pekerja tertentu tanpa penambahan *dummy* sehingga tidak terdapat tugas yang tidak dikerjakan. Perbedaan lainnya juga terletak pada cara pemilihan nol tunggal dimana pada metode Hungarian dipilih berdasarkan baris atau kolom sedangkan metode Hungarian Modifikasi dipilih hanya berdasarkan baris.

Adapun langkah-langkah metode Hungarian Modifikasi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menyusun tabel penugasan.
2. Menentukan nilai minimum di setiap kolom dan kurangkan dengan nilai dari masing-masing kolom. Hal ini membuat setidaknya terdapat satu nol di setiap kolom.
3. Menentukan nilai minimum di setiap baris dan kurangkan dengan nilai dari masing-masing baris.
4. Uji optimalisasi. Caranya dengan menarik garis horizontal atau vertikal yang melewati seluruh nilai nol. Jika jumlah garis sama dengan jumlah baris, maka dilanjutkan ke langkah 7. Jika jumlah garis tidak sama dengan jumlah baris, maka dilanjutkan ke langkah 5.
5. Jika jumlah garis tidak sama dengan jumlah baris, maka pilih nilai minimum pada tabel yang tidak dilewati garis.
 - a. Setiap nilai yang tidak dilewati garis akan dikurangkan dengan nilai minimum yang telah dipilih.
 - b. Setiap nilai yang terletak di setiap perpotongan garis akan ditambahkan dengan nilai minimum yang telah dipilih.
6. Ulangi langkah 4 dan 5 sampai jumlah garis menjadi sama dengan baris

7. Menetapkan tugas kepada pekerja dengan mencari baris yang hanya memiliki satu angka nol. Pilih angka nol tersebut dan coret angka nol lainnya yang sesuai dengan kolom yang bersangkutan.
8. Jika terdapat baris yang memiliki dua atau lebih angka nol, maka tetapkan nilai yang memiliki biaya minimum dalam tabel penugasan awal.
9. Ulangi langkah 7 dan 8 sampai semua tugas telah teralokasi.

2.4. MATLAB

MATLAB (*Matrix Laboratory*) merupakan perangkat lunak yang digunakan untuk pemrograman, analisis, serta komputasi teknis dan matematis berbasis matriks. Bahasa pemrograman yang kini dikembangkan oleh MathWorks Inc. menggabungkan pemrograman, komputasi, dan visualisasi dengan fitur yang mudah digunakan. Keunggulan utama menggunakan MATLAB adalah Tugas yang melibatkan Matriks dan Vektor akan lebih mudah dan efisien terutama untuk matriks dengan ukuran yang cukup besar (Santosa, 2017). Selain itu, analisis dan eksplorasi data, pengembangan algoritma, pemodelan dan simulasi, visualisasi plot 2D dan 3D, hingga pengembangan aplikasi antar muka dapat dilakukan menggunakan MATLAB. Pada MATLAB terdapat banyak toolbox seperti sistem kontrol, pengolahan sinyal, logika fuzzy, optimasi, pengolahan citra digital, jaringan syaraf tiruan, bioinformatika, simulasi, dan berbagai teknologi lainnya. Toolbox ini digunakan untuk menyelesaikan masalah pada bidang atau aplikasi tertentu (Tjolleng, 2017). Selain bekerja dengan matriks, MATLAB juga dapat digunakan untuk membangkitkan bilangan random dalam rentang $[0,1]$ dengan menggunakan perintah *rand* (Santosa, 2017). Untuk bilangan random dengan rentang yang lebih besar dapat menggunakan perintah *randi*.

2.5. Contoh Kasus Masalah Penugasan Tidak Seimbang dan Multi-Tujuan

Misalkan suatu perusahaan memiliki 3 karyawan (A_1, A_2, A_3) yang akan menyelesaikan 4 tugas (T_1, T_2, T_3, T_4). Berikut diberikan data biaya dan waktu produksi:

Tabel 2. 2 Biaya dan Waktu Produksi

Pekerja		Tugas			
		T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	C _{ij}	328	338	239	832
	T _{ij}	6	6	10	10
A ₂	C _{ij}	480	923	461	538
	T _{ij}	6	6	8	10
A ₃	C _{ij}	567	660	969	591
	T _{ij}	8	9	10	10

Tabel 2.2 menunjukkan biaya dan waktu produksi yang dibutuhkan oleh 3 karyawan untuk menyelesaikan 4 jenis tugas. Dimana C_{ij} adalah biaya dan T_{ij} adalah waktu yang diperlukan setiap pekerja untuk menyelesaikan tugas. Berdasarkan tabel tersebut, akan dicari solusi optimal dari masalah penugasan tidak seimbang dan multi-tujuan menggunakan metode Hungarian Modifikasi sehingga perusahaan dapat meminimumkan waktu dan biaya produksi.

Penyelesaian:

Dalam menyelesaikan masalah penugasan multi-tujuan terdapat beberapa proses optimasi yang dapat dilakukan untuk dijadikan bahan pertimbangan menentukan keputusan (Basriati, 2023), yaitu:

a. Penyelesaian dengan Hanya Mempertimbangkan Biaya Produksi

Apabila proses penyelesaian penugasan hanya mempertimbangkan biaya, yaitu bagaimana menetapkan tugas agar total biaya dapat diminimumkan, maka fungsi tujuan berdasarkan Persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\text{minimumkan } C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}$$

Karena proses penyelesaian hanya mempertimbangkan biaya, maka untuk solusi optimal waktu produksi mengikuti solusi optimal yang diperoleh pada biaya.

Selanjutnya, untuk mencari solusi optimal dilakukan menggunakan metode Hungarian Modifikasi pada data biaya produksi dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1

Menyusun tabel atau matriks biaya penugasan seperti pada Tabel 2.3

Tabel 2. 3 Biaya Produksi

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	328	338	239	832
A ₂	480	923	461	538
A ₃	567	660	969	591

Langkah 2

Tentukan nilai minimum di setiap kolom dan kurangkan dengan nilai dari masing-masing kolom. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.4.

Tabel 2. 4 Penentuan Nilai Minimum untuk Kolom

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	294
A ₂	152	585	222	0
A ₃	239	322	730	53

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 3

Menentukan nilai minimum di setiap baris dan kurangkan dengan nilai dari masing-masing baris. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.5.

Tabel 2. 5 Penentuan Nilai Minimum untuk Baris

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	294
A ₂	152	585	222	0
A ₃	186	269	677	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 4

Tarik garis horizontal atau vertikal untuk menutupi setiap nilai nol seperti yang ditunjukkan pada Tabel 2.6. Karena jumlah garis tidak sama dengan jumlah baris, maka dilanjutkan ke langkah 5.

Tabel 2. 6 Menarik Garis Horizontal atau Vertikal

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	294
A ₂	152	585	222	0
A ₃	186	269	677	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 5

Pilih nilai terkecil yang tidak dilewati oleh garis dari setiap nilai pada Tabel 2.6. Nilai terkecilnya adalah 152, maka:

- Kurangkan 152 dari setiap nilai dalam Tabel 2.6
- Tambahkan 152 ke nilai yang terletak di setiap perpotongan garis, dan diperoleh hasil seperti pada Tabel 2.7.

Tabel 2. 7 Hasil Pengurangan dan Penambahan Nilai Terkecil

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	446
A ₂	0	433	70	0
A ₃	34	117	525	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 6

Ulangi langkah 4 untuk menggambarkan jumlah minimum garis. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.8. Karena jumlah garis sama dengan jumlah baris, maka solusi sudah optimal dan dilanjutkan ke langkah 7.

Tabel 2. 8 Hasil Solusi Optimal

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	446
A ₂	0	433	70	0
A ₃	34	117	525	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 7

Menetapkan tugas ke pekerja dengan mencari baris yang hanya memiliki satu angka nol pada Tabel 2.8. Karena baris ketiga memiliki satu angka nol, maka pilih angka nol tersebut dan coret angka nol lainnya yang terdapat pada kolom keempat.

Selanjutnya baris kedua juga memiliki satu angka nol, maka pilih angka nol tersebut dan coret angka nol lainnya pada kolom pertama. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.9.

Tabel 2. 9 Penetapan Tugas ke Pekerja

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	446
A ₂	0	433	70	0
A ₃	34	117	525	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 8

Karena baris pertama memiliki dua angka nol, maka pilih angka nol yang memiliki nilai minimum dalam tabel penugasan awal pada Langkah 1. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.10.

Tabel 2. 10 Penetapan Tugas ke Pekerja

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	446
A ₂	0	433	70	0
A ₃	34	117	525	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 9

Ulangi langkah 7 dan 8 sampai semua tugas teralokasi. Hasil semua alokasi dapat dilihat pada Tabel 2. 11.

Tabel 2. 11 Hasil Penugasan Optimal

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	446
A ₂	0	433	70	0
A ₃	34	117	525	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Berdasarkan hasil perhitungan setelah menggunakan Metode Hungarian Modifikasi, maka diperoleh penugasan optimal sebagai berikut:

Pekerja A₁ mengerjakan tugas T₂ dan T₃

Pekerja A₂ mengerjakan tugas T₁

Pekerja A₃ mengerjakan tugas T₄

Dengan menyesuaikan Tabel 2.3, maka diperoleh:

Total biaya minimum adalah :

$$\text{Min } C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij}x_{ij} = 338 + 239 + 480 + 591 = 1.648$$

Total waktu minimum adalah :

$$\text{Min } T = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 t_{ij}x_{ij} = 6 + 10 + 6 + 10 = 32$$

b. Penyelesaian dengan Hanya Mempertimbangkan Waktu Produksi

Apabila proses penyelesaian penugasan hanya mempertimbangkan waktu produksi, yaitu bagaimana menetapkan tugas agar total waktu dapat diminimumkan, maka berdasarkan Persamaan (2.8) fungsi tujuan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\text{minimumkan } T = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 t_{ij}x_{ij}$$

Karena hanya mempertimbangkan waktu, maka untuk solusi optimal biaya produksi mengikuti solusi optimal yang diperoleh pada waktu.

Selanjutnya, untuk mencari solusi optimal dilakukan menggunakan metode Hungarian Modifikasi pada data biaya produksi dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1

Menyusun tabel atau matriks waktu penugasan seperti pada Tabel 2.12.

Tabel 2. 12 Waktu Produksi

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	6	6	10	10
A ₂	6	6	8	10
A ₃	8	9	10	10

Langkah 2

Tentukan nilai minimum di setiap kolom dan kurangkan dengan nilai dari masing-masing kolom. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.13.

Tabel 2. 13 Penentuan Nilai Minimum untuk Kolom

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	2	0
A ₂	0	0	0	0
A ₃	2	3	2	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 3

Menentukan nilai minimum di setiap baris dan kurangkan dengan nilai dari masing-masing baris seperti pada Tabel 2.14.

Tabel 2. 14 Penentuan Nilai Minimum untuk Baris

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	2	0
A ₂	0	0	0	0
A ₃	2	3	2	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 4

Tarik garis horizontal atau vertikal untuk menutupi setiap nilai nol seperti yang ditunjukkan pada Tabel 2.15. Karena jumlah garis sama dengan jumlah baris, maka solusi sudah optimal.

Tabel 2. 15 Menarik Garis Horizontal atau Vertikal

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	2	0
A ₂	0	0	0	0
A ₃	2	3	2	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 5

Menetapkan tugas ke pekerja dengan mencari baris yang hanya memiliki satu angka nol pada Tabel 2.15. Karena baris ketiga memiliki satu angka nol, maka pilih angka nol tersebut dan coret angka nol lainnya yang terdapat pada kolom keempat. Selanjutnya baris kedua juga memiliki satu angka nol, maka pilih angka nol tersebut dan coret angka nol lainnya pada kolom pertama. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.16.

Tabel 2. 16 Penetapan Tugas ke Pekerja

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	2	\emptyset
A ₂	\emptyset	0	0	\emptyset
A ₃	2	3	2	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 6

Karena baris pertama memiliki dua angka nol, maka pilih angka nol yang memiliki nilai minimum dalam tabel penugasan awal pada Langkah 1. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.17.

Tabel 2. 17 Penetapan Tugas ke Pekerja

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	\emptyset	2	\emptyset
A ₂	\emptyset	0	0	\emptyset
A ₃	2	3	2	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 7

Ulangi langkah 5 dan 6 sampai semua tugas teralokasi. Hasil semua alokasi dapat dilihat pada Tabel 2. 18.

Tabel 2. 18 Hasil Penugasan Optimal

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	\emptyset	2	\emptyset
A ₂	\emptyset	0	0	\emptyset
A ₃	2	3	2	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Berdasarkan hasil perhitungan setelah menggunakan Metode Hungarian Modifikasi, maka diperoleh penugasan optimal sebagai berikut:

Pekerja A₁ mengerjakan tugas T₁

Pekerja A₂ mengerjakan tugas T₂ dan T₃

Pekerja A₃ mengerjakan tugas T₄

Dengan menyesuaikan Tabel 2.3, maka diperoleh:

Total biaya :

$$\text{Min } C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij}x_{ij} = 328 + 923 + 461 + 591 = 2.003$$

Total waktu :

$$\text{Min } T = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 t_{ij}x_{ij} = 6 + 6 + 8 + 10 = 30$$

c. Penyelesaian yang Mempertimbangkan Biaya dan Waktu Produksi Secara Bersamaan

Apabila proses penyelesaian penugasan mempertimbangkan dua sumber daya yaitu biaya dan waktu produksi, maka tujuannya adalah bagaimana meminimumkan total biaya dan waktu operasi secara bersamaan. Langkah pertama untuk memecahkan masalah seperti ini adalah dengan menormalisasikan semua data dengan cara membagi data biaya dan data waktu pada Tabel 2.2 dengan data maksimum biaya dan waktu masing-masing. Nilai maksimum untuk data biaya adalah 969 dan nilai maksimum untuk data waktu adalah 10. Hasil normalisasi semua data dapat dilihat pada Tabel 2.19.

Tabel 2. 19 Hasil Normalisasi Data Biaya dan Waktu

Pekerja		Tugas			
		T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	C _{ij}	0,3385	0,3488	0,2466	0,8586
	T _{ij}	0,6	0,6	1	1
A ₂	C _{ij}	0,4954	0,9525	0,4757	0,5552
	T _{ij}	0,6	0,6	0,8	1
A ₃	C _{ij}	0,5851	0,6811	1	0,6099
	T _{ij}	0,8	0,9	1	1

Normalisasi data tidak mempengaruhi hasil keputusan dari masalah penugasan. Karena jika setiap elemen/nilai dari suatu tabel penugasan dikalikan atau dibagi dengan sebuah nilai skalar yang sama dengan setiap nilai pada tabel penugasan maka penetapan dari masalah penugasan tersebut tetap sama karena mempunyai perbandingan yang sama.

Karena proses penyelesaian mempertimbangkan biaya dan waktu produksi secara bersamaan, maka berdasarkan Persamaan (2.5) fungsi tujuan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\text{minimumkan } C, T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij}x_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 t_{ij}x_{ij}$$

dimana c_{ij} dan t_{ij} masing-masing mewakili normalisasi biaya dan waktu produksi.

Langkah berikutnya adalah memodifikasi fungsi multi-tujuan menjadi satu fungsi tujuan dengan menetapkan bobot dari masing-masing tujuan terlebih dahulu. Dengan menggunakan hasil normalisasi data biaya dan waktu pada Tabel 2.19 dan menetapkan bobot dari masing-masing tujuan yaitu $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 2. 20 Hasil Pembobotan Data Biaya dan Waktu

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0,4692	0,4744	0,6233	0,9293
A ₂	0,5477	0,7763	0,6379	0,7776
A ₃	0,6926	0,7906	1	0,805

(Sumber : Data diolah, 2024)

Selanjutnya, untuk mencari solusi hasil penetapan total biaya dan waktu dilakukan menggunakan metode Hungarian Modifikasi pada data Tabel 2.20 dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1

Menyusun tabel atau matriks penugasan seperti pada Tabel 2.20.

Langkah 2

Tentukan nilai minimum di setiap kolom dan kurangkan dengan nilai dari masing-masing kolom. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.21.

Tabel 2. 21 Penentuan Nilai Minimum untuk Kolom

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	0,1517
A ₂	0,0785	0,3019	0,0146	0
A ₃	0,2234	0,3162	0,3767	0,0274

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 3

Menentukan nilai minimum di setiap baris dan kurangkan dengan nilai dari masing-masing baris seperti pada Tabel 2.22.

Tabel 2. 22 Penentuan Nilai Minimum untuk Baris

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	0,1517
A ₂	0,0785	0,3019	0,0146	0
A ₃	0,196	0,2888	0,3493	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 4

Tarik garis horizontal atau vertikal untuk menutupi setiap nilai nol seperti yang ditunjukkan pada Tabel 2.23. Karena jumlah garis tidak sama dengan jumlah baris, maka dilanjutkan ke langkah 5.

Tabel 2. 23 Menarik Garis Horizontal atau Vertikal

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	0,1517
A ₂	0,0785	0,3019	0,0146	0
A ₃	0,196	0,2888	0,3493	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 5

Pilih nilai terkecil yang tidak dilewati oleh garis dari setiap nilai pada Tabel 2.23. Nilai terkecilnya adalah 0,0146, maka:

- a. Kurangkan 0,0146 dari setiap nilai dalam Tabel 2.19
- b. Tambahkan 0,0146 ke nilai yang terletak di setiap perpotongan garis, dan diperoleh hasil seperti pada Tabel 2.24.

Tabel 2. 24 Hasil Pengurangan dan Penambahan Nilai Terkecil

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	0,1663
A ₂	0,0639	0,2873	0	0
A ₃	0,1814	0,2742	0,3347	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 6

Ulangi langkah 4 untuk menggambarkan jumlah minimum garis. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.25. Karena jumlah garis sama dengan jumlah baris, maka solusi sudah optimal dan dilanjutkan ke langkah 7.

Tabel 2. 25 Hasil Solusi Optimal

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	0,1663
A ₂	0,0639	0,2873	0	0
A ₃	0,1814	0,2742	0,3347	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 7

Menetapkan tugas ke pekerja dengan mencari baris yang hanya memiliki satu angka nol pada Tabel 2.25. Karena baris ketiga memiliki satu angka nol, maka pilih angka nol tersebut dan coret angka nol lainnya yang terdapat pada kolom keempat. Selanjutnya baris kedua juga memiliki satu angka nol, maka pilih angka nol tersebut dan coret angka nol lainnya pada kolom ketiga. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.26.

Tabel 2. 26 Penetapan Tugas ke Pekerja

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	\emptyset	0,1663
A ₂	0,0639	0,2873	0	\emptyset
A ₃	0,1814	0,2742	0,3347	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 8

Karena baris pertama memiliki dua angka nol, maka pilih angka nol yang memiliki nilai minimum dalam tabel penugasan awal pada Langkah 1. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.27.

Tabel 2. 27 Penetapan Tugas ke Pekerja

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	\emptyset	0,1663
A ₂	0,0639	0,2873	0	\emptyset

A ₃	0,1814	0,2742	0,3347	0
----------------	--------	--------	--------	----------

(Sumber : Data diolah, 2024)

Langkah 9

Ulangi langkah 7 dan 8 sampai semua tugas teralokasi. Hasil semua alokasi dapat dilihat pada Tabel 2. 28.

Tabel 2. 28 Hasil Penugasan Optimal

Pekerja	Tugas			
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
A ₁	0	0	0	0,1663
A ₂	0,0639	0,2873	0	0
A ₃	0,1814	0,2742	0,3347	0

(Sumber : Data diolah, 2024)

Berdasarkan hasil perhitungan setelah menggunakan Metode Hungarian Modifikasi, maka diperoleh penugasan optimal sebagai berikut:

Pekerja A₁ mengerjakan tugas T₁ dan T₂

Pekerja A₂ mengerjakan tugas T₃

Pekerja A₃ mengerjakan tugas T₄

Dengan menyesuaikan Tabel 2.3, maka diperoleh:

Total biaya :

$$Min C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij}x_{ij} = 338 + 338 + 461 + 591 = 1.718$$

Total waktu :

$$Min T = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 t_{ij}x_{ij} = 6 + 6 + 8 + 10 = 30$$

Hasil keseluruhan yang diperoleh dari Contoh 2.6, disajikan pada Tabel 2.29 berikut:

Tabel 2. 29 Hasil Proses Optimasi Contoh 2.6

No	Objective	Total Biaya	Total Waktu
1.	Hanya Mempertimbangkan Biaya	1.648	32

2.	Hanya Mempertimbangkan Waktu	2.003	30
3.	Mempertimbangkan keduanya secara bersamaan	1.718	30

Sumber : Data diolah (2024)

Berdasarkan Tabel 2.29 dapat dilihat bahwa proses optimasi yang mempertimbangkan kedua sumber daya secara bersamaan menunjukkan hasil yang terbaik dengan total biaya sebesar 1.718 dan total waktu 30 dengan alokasi pekerja A₁ mengerjakan tugas T₁, T₂, pekerja A₂ mengerjakan tugas T₃, dan pekerja A₃ mengerjakan tugas T₄.