PERBANDINGAN METODE *MINIMUM DEMAND* DAN *MODIFIED VOGEL APPROXIMATION* DALAM MENEMUKAN SOLUSI LAYAK AWAL PADA MASALAH TRANSPORTASI

SKRIPSI

HILDA ALIFATIN
H011201014

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

PERBANDINGAN METODE *MINIMUM DEMAND* DAN *MODIFIED VOGEL APPROXIMATION* DALAM MENEMUKAN SOLUSI LAYAK AWAL PADA MASALAH TRANSPORTASI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

HILDA ALIFATIN
H011201014

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

APRIL 2024

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Perbandingan Metode *Minimum Demand* dan *Modified Vogel Approximation* dalam Menemukan Solusi Layak Awal pada Masalah Transportasi

Adalah benar hasil karya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 19 April 2024

METERAI TEMPEL
4E39EALX138073714

HILDA ALIFATIN
NIM. H011201014

ii

PERBANDINGAN METODE *MINIMUM DEMAND* DAN *MODIFIED VOGEL APPROXIMATION* DALAM MENEMUKAN SOLUSI LAYAK AWAL PADA MASALAH TRANSPORTASI

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama

Dr. Khaeruddin, M.Sc.
NIP. 196509141991031003

Pada 19 April 2024

HALAMAN PENGESAHAN

PERBANDINGAN METODE *MINIMUM DEMAND* DAN *MODIFIED VOGEL APPROXIMATION* DALAM MENEMUKAN SOLUSI LAYAK AWAL PADA MASALAH TRANSPORTASI

Disusun dan diajukan oleh

HILDA ALIFATIN
H011201014

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 19 April 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui

Pembimbing Utama

Dr. Khaeruddin, M.Sc.
NIP. 196509141991031003

Ketua Program Studi

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 196804292002121001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	: Hilda Alifatin
NIM	: H011201014
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Perbandingan Metode *Minimum Demand* dan *Modified Vogel Approximation* dalam Menemukan Solusi Layak Awal pada Masalah Transportasi

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian dari persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

1. Ketua : Dr. Khaeruddin, M.Sc. ( )
2. Anggota : Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc ( )
3. Anggota : Prof. Dr. Moh. Ivan Aziz, M.Sc ( )

Ditetapkan : Makassar

Tanggal : 19 April 2024

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT yang selalu melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya kepada penulis sehingga skripsi dengan judul “Perbandingan Metode *Minimum Demand* dan *Modified Vogel Approximation* dalam Menemukan Solusi Layak Awal pada Masalah Transportasi” dapat terselesaikan. Shalawat dan salam semoga senantiasa kita curahkan kepada teladan kita Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga dan para sahabat. Skripsi ini adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada kedua orang tua penulis Bapak **Abdurahim Muhamad** dan Ibu **Wiwik Ngofangare** yang telah membesarkan dan mendidik penulis dengan penuh kesabaran serta selalu mencurahkan kasih sayang yang tak pernah putus, memberikan dukungan dan doa sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini. Begitu pula kepada kedua adik penulis **Wasiq Latifah Anasyah** dan **Nadira Kanaya Putri** yang telah memberikan dukungan pada penulis. Terima kasih telah menjadi sumber motivasi dan kekuatan bagi penulis selama perjalanan akademik ini.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari dukungan dan bantuan banyak pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Untuk itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc**., selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si**., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Bapak **Dr. Khaeruddin., M.Sc.,** selaku pembimbing untuk segala ilmu, nasihat, dan kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia meluangkan waktunya untuk mendampingi penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.
4. Bapak **Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc**., selaku penguji, dan Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc**., selaku penguji dan penasihat akademik penulis

yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penulisan skripsi ini.

5. Bapak/Ibu Dosen Departemen Matematika yang telah membagikan ilmu dan pengalamannya, serta Staf Departemen Matematika atas segala bantuannya.
6. Sahabat-sahabat penulis **Asfi Saiva**, **Afiliani**, dan **Nurfitria Syawalya Usman** (kumpulan para *"anak rajin"*) yang telah membantu, menemani, menyemangati, dan tempat berbagi keluh-kesah penulis selama kurang lebih 4 tahun perkuliahan.
7. Teman-teman penulis **Ayyun**, **Fahira**, **Indah**, **Sisil**, **Wardalisa**, dan **Nurpadian** yang telah membantu dan menjadi teman diskusi penulis selama perkuliahan dan proses penulisan skripsi.
8. Teman-teman **Matematika 2020** atas segala dukungan, kebersamaan, dan kerjasamanya selama ini.
9. Teman-teman **KKN G-110 Posko Matompi** atas segala dukungan, kebersamaan, serta pengalaman yang diperoleh selama proses KKN hingga saat ini.
10. Serta segala pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, kritik dan saran yang membangun diharapkan oleh penulis untuk perbaikan dan pengembangan penelitian lebih lanjut. Akhir kata, semoga hasil penelitian ini dapat bermanfaat bagi kalangan akademisi, praktisi, dan semua pihak.

Makassar, 19 April 2024

Penulis,

Hilda Alifatin

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Hilda Alifatin
NIM	: H011201014
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Nonekslusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Perbandingan Metode *Minimum Demand* dan *Modified Vogel Approximation* dalam Menemukan Solusi Layak Awal pada Masalah Transportasi"

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencatumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada 19 April 2024

Yang menyatakan

Hilda Alifatin

ABSTRAK

Penentuan solusi layak awal untuk masalah transportasi memiliki peran penting dalam memperoleh solusi total biaya transportasi yang minimum. Solusi layak awal yang lebih baik dapat mengurangi jumlah iterasi dalam mencapai solusi optimal. Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan kinerja dan optimalitas solusi layak awal yang dapat diberikan oleh *Minimum Demand Method* (MDM) dan *Modified Vogel Approximation Method* (MVAM) menggunakan uji optmalitas *Modified Distribution (MODI)* yang dibangun dengan bahasa pemrograman MATLAB. Digunakan delapan dataset berupa matriks transportasi dengan ukuran yang berbeda-beda untuk melihat kinerja masing-masing metode pada setiap dataset. Hasil penelitian dengan delapan dataset menunjukkan bahwa MVAM lebih unggul dibandingkan MDM dalam pemberian solusi. MVAM mampu memberikan solusi layak awal yang mendekati atau sama untuk semua dataset dengan minimumnya nilai *relative error* dan jumlah iterasi, sedangkan MDM hanya mampu memberikan solusi layak optimal pada satu dataset dengan ukuran kecil, namun dalam operasinya MDM lebih unggul karena dapat memberikan struktur kerja yang lebih sederhana sehingga memerlukan waktu yang lebih sedikit dibanding MVAM dalam memperoleh solusi layak awal.

Kata kunci: Masalah Transportasi, MDM, MVAM, MODI, MATLAB, Solusi Layak Awal

Judul : Perbandingan Metode *Minimum Demand* dan *Modified Vogel Approximation* dalam Menemukan Solusi Layak Awal pada Masalah Transportasi

Nama : Hilda Alifatin

NIM : H011201014

Program Studi : Matematika

ABSTRACT

Determination of an Initial Feasible Solution (IFS) to a transportation problem plays an important role in obtaining a minimum total transportation cost solution. Better initial feasible solution can result less number of iterations in attaining the minimum total cost solution. This study aims to compare the performance and optimality of the initial feasible solution that can be provided by the Minimum Demand Method (MDM) and the Modified Vogel Approximation Method (MVAM) using the Modified Distribution optimality test (MODI) built with the MATLAB programming language. Seven datasets in the form of transportation matrices of different sizes were used to see the responsiveness of each method on each dataset. The results of the study with eight datasets show that MVAM is superior to MDM in providing solutions. MVAM is able to provide an initial feasible solution that is close to or the same for all datasets with a minimum relative error value and the number iterations, while MDM is only able to provide optimal feasible solutions on one datasets with small sizes, but in its operation MDM is superior because it can provide a simpler work structure, thus requiring less time compared to MVAM in obtaining an initial feasible solution. .

Keywords: Transportation Problem, MDM, MVAM, MODI, MATLAB, Initial Feasible Solution

Title	: Comparison of Minimum Demand and Modified Vogel Approximation Methods in Finding an Initial Feasible Solution for a Transportation Problem
Name	: Hilda Alifatin
Student ID	: H011201014
Study Program	: Mathematics

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemrograman linear merupakan metode matematika untuk mencari solusi optimal dari masalah yang melibatkan variabel keputusan linear dan kendala linear. Masalah transportasi adalah jenis masalah khusus dari pemrograman linear yang berkaitan dengan pengangkutan atau pengiriman barang dari sumber ke tujuan. Masalah transportasi bertujuan untuk meminimumkan biaya transportasi dari sumber ke tujuan dengan memenuhi semua permintaan (Juman & Hoque, 2015). Ketika jumlah persediaan sama dengan jumlah permintaan, masalah transportasi dikatakan sebagai masalah transportasi seimbang (*balanced transportation problem*). Sedangkan, jika jumlah persediaan tidak sama dengan jumlah permintaan maka masalah transportasi tersebut dikatakan sebagai masalah transportasi tak seimbang (*unbalanced transportation problem*).

Biaya transportasi menjadi salah satu komponen yang penting bagi banyak perusahaan karena mereka menghabiskan biaya yang tentunya tidak sedikit dalam mendistribusikan produk dari sumber produksi ke beberapa daerah tujuan. Oleh karena itu, perlu perencanaan yang baik agar biaya transportasi yang dikeluarkan oleh perusahaan bisa seefisien mungkin dan tidak memerlukan biaya yang besar (Juman & Nawarathne, 2019).

Metode transportasi yang tepat tentunya diperlukan untuk mengatasi permasalahan transportasi yang terjadi. Metode transportasi adalah metode yang digunakan untuk mengatur distribusi dari sumber yang menyediakan produk ke tempat-tempat tujuan secara optimal. Alokasi produk ini diatur sedemikian rupa sehingga biaya distribusi yang dikeluarkan adalah minimum dengan memperhatikan adanya perbedaan biaya alokasi dari suatu sumber ke tujuan serta perbedaan banyaknya ketersediaan barang yang ada dan permintaan di tempat tujuan (Septiana dkk., 2017).

Pada dasarnya, terdapat dua tahapan untuk memperoleh solusi optimal dari suatu permasalahan transportasi. Tahap pertama yaitu menentukan solusi layak awal (Ahmed dkk., 2016). Terdapat beberapa metode konvensional yang digunakan untuk mendapatkan solusi layak awal antara lain metode *North West Corner, Least*

Cost, dan *Vogel Approximation*. Secara umum, metode *Vogel Approximation* menghasilkan solusi layak awal terbaik dibandingkan kedua metode lainnya dan metode *North West Corner* menghasilkan solusi terburuk (Taha., 2007). Selanjutnya, untuk mendapatkan hasil yang optimal dilakukan uji optimalitas menggunakan metode *stepping stone* atau *Modified Distribution* (MODI). Nilai yang diperoleh dari solusi layak awal mempengaruhi solusi optimal, oleh karena itu metode yang digunakan dalam mencari solusi layak awal menjadi sangat penting (Karagul & Sahin, 2020). Hasil yang diperoleh dari solusi layak awal bisa lebih dekat atau sama dengan solusi optimal (Amaliah dkk., 2019).

Seiring dengan berkembangnya zaman, banyak ilmuwan yang mengusulkan metode-metode baru dalam mencari solusi layak awal untuk masalah transportasi. Penelitian sebelumnya dilakukan oleh Jamali dkk pada tahun 2020 dengan judul penelitian "*The Minimum Demand Method – A New And Efficient Initial Basic Feasible Solution Method For Transportation Problem*" menjelaskan hasil solusi awal menggunakan *Minimum Demand Method* (MDM) memberikan solusi layak awal yang sama atau lebih dekat dengan solusi optimal dibandingkan dengan *North West Corner Method* (NWCM), *Least Cost Method* (LCM), *Vogel Approximation Method* (VAM) dan *Revised Distribution* (RDI) *method* .

Penelitian terkait selanjutnya yang dilakukan oleh Ullah dkk pada tahun 2016 dengan judul penelitian "*A modified Vogel's approximation method for obtaining a good primal solution of transportation problems*". MVAM merupakan metode modifikasi dari *Vogel Approximation Method* (VAM). Beberapa langkah yang dimodifikasi dari VAM yaitu mencari matriks tereduksi dan penalti dengan cara mencari selisih antara dua nilai terbesar pada setiap baris dan kolom. Pada penelitian diperoleh hasil dimana MVAM memberikan solusi awal yang lebih optimal dibandingkan dengan NWCM, LCM, dan VAM.

Hasil dari solusi layak awal dapat sama atau mendekati solusi optimal. Semakin baik solusi layak awal yang diperoleh dapat mengurangi jumlah iterasi dalam memperoleh solusi optimal. Oleh karena itu, penting menentukan metode dalam mencari solusi layak awal yang efisien. Hal inilah yang menjadi pertimbangan peneliti untuk melakukan penelitian dengan judul **"Perbandingan**

Minimum Demand Method **(MDM) dan** ***Modified Vogel Approximation Method*** **(MVAM) dalam Mencari Solusi Layak Awal untuk Masalah Transportasi"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana perbandingan kinerja antara metode minimum demand dan modified Vogel approximation dalam menemukan solusi layak awal pada masalah transportasi?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah contoh kasus minimasi masalah transportasi seimbang dan tidak seimbang diperoleh dari jurnal untuk masalah yang berukuran kecil dan dibangkitkan secara acak dengan bantuan MATLAB untuk masalah berukuran besar serta menggunakan 8 kasus masalah transportasi, masing-masing tiga data berukuran 4x4, 5x6 dan 2x94 untuk masalah transportasi seimbang, lima data berukuran 2x13, 8x8, 10x10, 14x16 dan 10x94 untuk masalah transportasi tidak seimbang.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui kelebihan dan kekurangan dari masing-masing metode dalam menentukan solusi layak awal dalam masalah transportasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah menambah wawasan mengenai metode *Mimimum Demand* dan *Modified Vogel Approximation* serta mengetahui keunggulan dan kekurangan dari masing-masing metode.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemrograman Linear

Pemrograman linear merupakan salah satu pendekatan matematik yang sering diterapkan manajerial dalam pengambilan keputusan. Tujuan penggunaan pemrograman linear adalah menyusun model yang dapat digunakan dalam pengambilan keputusan alokasi yang optimal dari sumber daya perusahaan ke berbagai tujuan sehingga diperoleh laba maksimum atau biaya yang minimum. Alokasi yang dibuat tergantung dari sumber daya yang tersedia dan permintaan atas sumber daya tersebut (Meflinda&Mahyarni., 2011). Keputusan yang akan diambil dinyatakan sebagai fungsi tujuan (*objective function*), sedangkan kendala-kendala yang dihadapi dalam membuat keputusan tersebut dinyatakan dalam bentuk kendala (*constraints*) (Rangkuti, 2022).

Sesuai dengan model pemrograman linear, maka fungsi tujuan berupa fungsi yang linear dan fungsi kendala berupa sekumpulan ketidaksamaan yang linear. Nilai-nilai variabel keputusan yang dihasilkan dari proses pencapaian tujuan ini disebut sebagai solusi yang layak. Solusi layak dapat memberikan nilai fungsi tujuan yang paling besar untuk kasus maksimum dan paling kecil untuk kasus minimum disebut solusi optimal (Rangkuti, 2022).

2.2 Model Pemrograman Linear

Model pemrograman linear adalah bentuk dan susunan dalam menyajikan masalah-masalah yang akan diselesaikan dengan teknik pemrograman linear. Model pemrograman linear mempunyai tiga unsur utama (Meflinda&Mahyarni., 2011) yaitu:

1. Variabel keputusan (*decision variabel*) yaitu variabel persoalan yang akan mempengaruhi nilai tujuan yang ingin dicapai. Dalam proses pemodelan, penemuan variabel keputusan harus dilakukan terlebih dahulu sebelum merumuskan fungsi tujuan dan kendala-kendalanya.
2. Fungsi tujuan (*objective function*) yang disimbolkan dengan Z yaitu fungsi yang menggambarkan tujuan dalam permasalahan pemrograman linear yang berkaitan dengan pengaturan secara optimal sumber daya untuk memperoleh keuntungan maksimal atau biaya minimum.

3. Kendala (*constraints*) yaitu bentuk penyajian secara matematis batasan-batasan kapasitas yang tersedia yang akan dialokasikan secara optimal ke berbagai kegiatan.

Rangkuti (2022) dalam bukunya menjelaskan bentuk umum model pemrograman linear sebagai berikut:

Maksimumkan

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

dengan kendala atau batasan:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad untuk\ i = 1, 2, 3, \dots, m \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0 \qquad untuk\ j = 1, 2, 3, .., n \tag{2.3}$$

Selain itu terdapat bentuk lain, sebagai berikut:

a) Fungsi tujuan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ ... + c_nx_n$ diminimumkan.
b) Beberapa kendala fungsional dengan ketidaksamaan lebih besar dari atau sama dengan

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ ... + a_{mn}x_n \geq b_m$$

c) Kendala fungsional dalam bentuk persamaan

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ ... + a_{mn}x_n = b_m$$

d) Variabel keputusan memenuhi kendala tidak negatif yaitu

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

keterangan:

Z = fungsi tujuan yang dicari nilai optimalnya (maksimum atau minimum)

c_j = kenaikan nilai Z apabila ada pertambahan tingkat kegiatan x_j dengan satu satuan (unit) atau merupakan keuntungan per unit (masalah maksimasi), biaya per unit (masalah minimasi) kegiatan j terhadap nilai Z

n = macam kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yang tersedia

m = macam batasan sumber atau fasilitas yang tersedia

x_j = banyaknya kegiatan $j(j = 1,2, .., n)$. Variabel x_j ini disebut juga dengan variabel keputusan (*decision variables*)

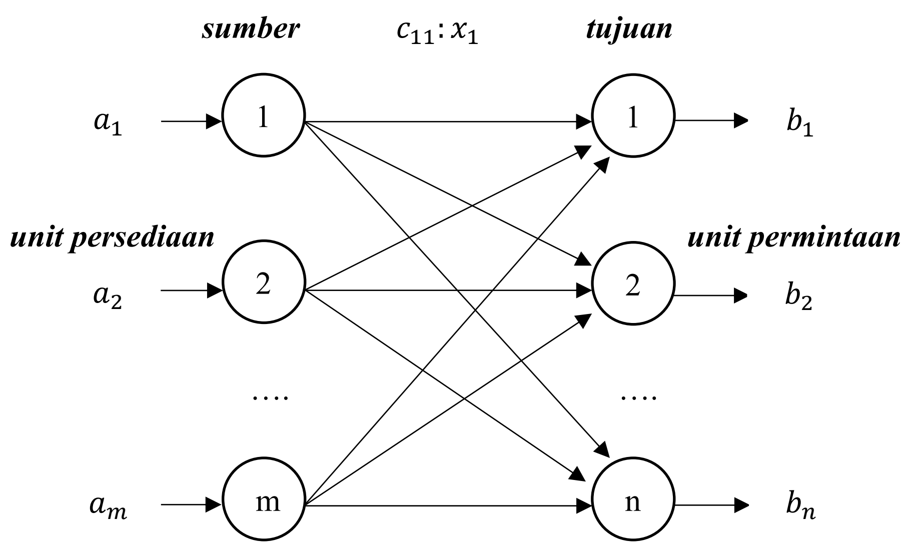
a_{ij} = banyaknya sumber i yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unsur keluaran kegiatan j

b_i = kapasitas sumber i yang tersedia untuk dialokasikan ke setiap unit kegiatan

2.3 Masalah Transportasi

Masalah transportasi adalah jenis masalah khusus dalam pemrograman linear yang membahas distribusi barang dari beberapa sumber ke beberapa tujuan. Fokus utama masalah transportasi adalah bagaimana mengangkut atau mengirimkan barang dari sumber ke tujuan dengan tujuan meminimumkan biaya dengan memastikan bahwa semua permintaan pada tujuan terpenuhi berdasarkan persediaan yang ada. Masalah transportasi pada mulanya dikembangkan oleh Frank Lauren Hitchcock pada tahun 1941 dalam studinya yang berjudul "*The Distributiom of a Product from Several Sources to Numerous Localities*". Pada tahun 1949, Koopmans secara terpisah menerbitkan suatu hasil studi yang berjudul "*Optimum Utilization of Transportation Systems"*. Kedua studi yang dikembangkan oleh Hitchcock dan Koopmans membantu dalam pengembangan metode transportasi yang melibatkan beberapa sumber dan sejumlah tujuan (Juman & Nawarathne, 2019).

Secara umum, model dalam permasalahan transportasi dapat digambarkan seperti pada Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2. 1 Model transportasi dari sumber ke tujuan

Gambar 2.1 memperlihatkan sebuah model transportasi dari sebuah jaringan dengan m sebagai sumber dan n sebagai tujuan. Sumber dan tujuan diwakili dengan sebuah node dan rute pengiriman barang yang menghubungkan sumber ke tujuan diwakili dengan busur yaitu: (Rangkuti, 2022).

- Masing-masing sumber mempunyai kapasitas $a_{i,}$, $i = 1,2,3, \dots, m$
- Masing-masing tujuan mempunyai kapasitas b_j, $j = 1,2,3, \dots, n$
- x_{ij} merupakan jumlah satuan unit yang dikirim dari sumber i ke tujuan j
- c_{ij} merupakan ongkos pengiriman per unit dari sumber i ke tujuan j

Dengan demikian, model umum transportasi dengan total permintaan dan persediaan sebagai berikut.

Fungsi tujuan:

Meminimumkan

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.5}$$

Batasan:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \,, \qquad untuk\ i = 1, 2,3, \dots, m \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \,, \qquad untuk\ j = 1, 2,3, \dots, n \tag{2.7}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad untuk\ semua\ i\ dan\ j \tag{2.8}$$

Dimana:

$Z =$ biaya total transportasi

$x_{ij} =$ jumlah satuan unit yang dikirim dari sumber i ke tujuan j

$c_{ij} =$ ongkos pengiriman per unit dari sumber i ke tujuan j

$a_i =$ banyaknya barang yang tersedia di sumber i

$b_j =$ banyaknya permintaan barang di tujuan j

Persamaan (2.6) menetapkan bahwa jumlah pengiriman dari sebuah sumber tidak dapat melebihi persediaannya. Demikian pula pada persamaan (2.7) mengharuskan bahwa jumlah pengiriman ke sebuah tujuan tidak dapat melebihi permintaannya. Oleh karena itu, batasan tersebut berarti bahwa total persediaan sama dengan total permintaan. Ketika jumlah persediaan sama dengan jumlah permintaan, masalah transportasi tersebut dikatakan sebagai masalah transportasi seimbang (*balanced transportation problem*), yang dapat ditulis sebagai $\sum a_i = \sum b_j$. Sedangkan, ketika total persediaan tidak sama dengan total permintaan maka masalah transportasi tersebut dikatakan sebagai masalah transportasi tak seimbang (*unbalanced transportation problem*).

Jika persediaan lebih besar daripada permintaan maka perlu ditambahkan kolom *dummy* dengan permintaan sebesar $\sum a_i - \sum b_j$ untuk menyeimbangkannya. Hal ini juga berlaku apabila permintaan lebih besar dari persediaan maka perlu ditambahkan baris *dummy* dengan persediaan sebesar $\sum b_j - \sum a_i$. *Dummy* pada tabel transportasi pada dasarnya adalah buatan sehingga biaya distribusinya adalah nol.

Secara umum, model dalam permasalahan transportasi dapat digambarkan dalam suatu tabel khusus yang disebut tabel transportasi. Sumber ditulis dalam baris-baris dan tujuan dalam kolom-kolom. Terdapat $m \times n$ kotak. Biaya transportasi per unit barang c_{ij} ditulis pada kotak kecil di bagian kanan atas tiap kotak. Permintaan dari setiap tujuan berada pada baris paling bawah, sedangkan persediaan setiap sumber berada pada kolom paling kanan. Kotak yang berada pada pojok kiri bawah menunjukkan bahwa persediaan sama dengan permintaan. Variabel x_{ij} pada setiap kotak menunjukkan jumlah barang yang diangkut dari sumber i ke tujuan j. Bentuk umum dari tabel transportasi dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2. 1 Tabel Transportasi

Ke / Dari		Tujuan						Persediaan
		1	2	…	j	…	n	
Sumber	1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
	2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	….	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
	…	…	…	…	…	…	…	…
	m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Permintaan		b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Sumber: Ahmed dkk., 2016

2.5 Metode Minimum Demand

Metode *Minimum Demand* adalah suatu pendekatan untuk menemukan solusi layak awal dalam masalah transportasi yang diperkenalkan oleh Jamali dan rekan pada tahun 2020. Dalam metode ini, penentuan solusi awal difokuskan pada baris permintaan yang memiliki nilai paling kecil. Adapun langkah-langkah *Minimum Demand Method* sebagai berikut:

1. Menyusun jumlah sumber dan tujuan, kapasitas sumber, permintaan tujuan dan biaya pengangkutan ke dalam matriks pada tabel transportasi.
2. Pada baris permintaan, diidentifikasi kuantitas permintaan barang yang minimum, jika terdapat kuantitas permintaan barang minimum yang sama, maka dipilih kuantitas pengiriman barang dengan biaya pengiriman per unit paling rendah.
3. Alokasikan unit sebanyak mungkin ke sel biaya terendah di kolom permintaan.
4. Jika permintaan di kolom telah terpenuhi, lanjutkan ke nilai minimum berikutnya di baris permintaan.
5. Ulangi langkah 2 dan 3 hingga semua permintaan dan persediaan terpenuhi.
6. Menghitung total biaya transportasi

2.6 Metode Modified Vogel Approximation

Modified Vogel's Approximation Method (MVAM) merupakan metode modifikasi dari VAM yang diperkenalkan oleh Ullah dan rekan pada tahun 2016. Menurut Ullah (2016) langkah-langkah *Modified Vogel's Approximation Method* sebagai berikut:

1. Menyusun jumlah sumber dan tujuan, kapasitas sumber, permintaan tujuan dan biaya pengangkutan ke dalam matriks pada tabel transportasi.
2. Mengurangi biaya transportasi terbesar pada setiap baris dengan masing-masing elemen setiap baris tabel transportasi dan letakkan disebelah kiri atas elemen yang sesuai.
3. Mengurangi biaya transportasi terbesar pada setiap kolom dengan masing-masing elemen setiap kolom tabel transportasi dan letakkan disebelah kiri bawah elemen yang sesuai.

4. Membentuk matriks baru yang elemennya adalah penjumlahan dari elemen kiri atas dan kiri bawah pada langkah satu dan langkah dua. Lalu tukar biaya transportasi yang awal dengan matriks tereduksi.
5. Menghitung penalti dengan mencari selisih dua angka terbesar pada setiap baris dan kolom.
6. Memilih nilai penalti tertinggi, jika ada dua atau lebih yang sama, pilih sel dengan biaya transportasi (matriks tereduksi) tertinggi.
7. Mengulangi langkah 4 dan 5 hingga semua alokasi terpenuhi.
8. Memasukkan semua alokasi sel dari matriks tereduksi ke tabel transportasi, lalu hitung hasil solusi layak awal.

2.7 Modified Distribution (MODI) Method

Metode MODI (*Modified Distribution*) adalah metode untuk menguji solusi layak awal masalah transportasi yang diperkenalkan oleh Dantzig pada tahun 1963. Pada Metode MODI, variabel non-basis yang memiliki nilai indeks perbaikan terbesar dipilih untuk pengalokasian ulang. Degeneracy dalam masalah transportasi terjadi apabila jumlah sel yang mendapatkan alokasi pada tabel transportasi kurang dari jumlah baris ditambah jumlah kolom dikurangi satu (m + n - 1). Akibatnya uji optimalitas menggunakan metode MODI tidak dapat diterapkan. Oleh karena itu, diperlukan prosedur tambahan untuk menyelesaikannya. Prosedur yang dimaksud adalah dengan menetapkan salah satu sel kosong dan memberinya alokasi bernilai nol, sehingga jumlah sel yang menerima alokasi sebanyak m + n -1 terpenuhi (Rangkuti, 2022).

Menurut Wijaya pada tahun 2021, langkah-langkah penyelesaian Metode MODI adalah sebagai berikut:

1. Menentukan solusi layak awal dengan metode *North West Corner Method*, *Least Cost Method*, *Vogel's Approximation Method*, dan lain sebagainya
2. Menghitung nilai indeks pada masing-masing baris dan kolom, dengan menggunakan rumus $c_{ij} = R_i + K_j$ dimana R_i adalah nilai indeks pada baris i, K_j adalah nilai indeks pada kolom j dan c_{ij} adalah biaya transportasi dari sumber i ke tujuan j. Pemberian nilai indeks ini harus berdasarkan pada sel yang telah terisi.
3. Mencari sel yang kosong atau belum terisi.

4. Menghitung besarnya nilai indeks perbaikan pada sel-sel kosong tersebut dengan menggunakan rumus $I_{ij} = R_i + K_j - c_{ij}$.
5. Memastikan nilai indeks perbaikan (I_{ij}).

   Jika $\forall I_{ij} \leq 0$, maka solusi yang diperoleh merupakan solusi optimal.

   Jika $\exists I_{ij} > 0$, maka solusi yang diperoleh bukan solusi optimal dan perlu dilakukan evaluasi atau perbaikan alokasi.
6. Memilih sel yang memiliki angka indeks perbaikan terbesar.
7. Mencari jalur terdekat untuk sel yang dipilih pada langkah 5.
8. Memberi tanda positif (+) dan tanda negatif $(-)$ secara bergantian pada tiap sudut sel dari jalur terdekat. Pemberian tanda dimulai dengan tanda positif (+) pada sel kosong.
9. Menentukan maksimum unit yang akan dialokasikan pada sel yang dipilih. Isi terkecil diantara sel yang bertanda negatif $(-)$ pada jalur terdekat menunjukkan jumlah alokasi pada sel kosong yang dipilih. Jumlah ini ditambahkan pada seluruh sel yang bertanda positif (+) dan dikurangkan pada sel yang bertanda negatif $(-)$.
10. Mengulangi langkah dari awal hingga nilai indeks perbaikan I_{ij} bernilai negatif atau 0. Jika $\forall I_{ij} = R_i + K_j - c_{ij} \leq 0$ maka iterasi selesai.

Untuk mempermudah penjelasan, berikut akan diberikan contoh.

Contoh 2.1: (M.Ullah, 2016)

Suatu persoalan memiliki tiga sumber yaitu, $F_1, F_2.\ dan\ F_3$ yang masing-masing memiliki persediaan 100, 30, dan 70. Persediaan produk tersebut akan dikirim ke empat daerah tujuan yaitu $D_1, D_2, D_3,$ dan D_4 yang masing-masing memiliki permintaan 40, 20, 60, dan 80. Tabel 2.2 menunjukkan biaya transportasi dari sumber i ke tujuan j.

Tabel 2. 2 Biaya Transportasi

Sumber	Tujuan			
	D_1	D_2	D_3	D_4
F_1	4	19	22	11
F_2	1	9	14	14
F_3	6	6	16	14

Penyelesaian:

Berdasarkan masalah transportasi pada contoh kasus, akan dibuat tabel transportasi sebagai berikut:

Tabel 2. 3 Tabel Transportasi Awal

Sumber	Tujuan				Supply
	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	4	19	22	11	100
F_2	1	9	14	14	30
F_3	6	6	16	14	70
Permintaan	40	20	60	80	200

Sumber: Data Diolah, 2024

Berdasarkan tabel 2.3 diketahui bahwa jumlah permintaan sama dengan jumlah persediaan sehingga masalah transportasi seimbang.

Model matematika program linear:

1. Fungsi Tujuan:

Minimumkan:

$$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$Z = 4x_{11} + 19x_{12} + 22x_{13} + 11x_{14} + 1x_{21} + 9x_{22} + 14x_{23} + 14x_{24}$$

$$+6x_{31} + 6x_{32} + 16x_{33} + 14x_{34}$$

2. Dengan batasan
   a. Batasan persediaan

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 70$$

b. Batasan permintaan

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80$$

1. Penyelesaian dengan *Minimum Demand Method* (MDM).

Pada baris permintaan, diidentifikasi kuantitas permintaan barang yang minimum. Kuantitas permintaan barang yang paling kecil yaitu $D_2 = 20$, maka dipilih D_2 sebagai *minimum demand*. Pada penyelesaian pertama menyarankan alokasi pada x_{32}, karena $c_{32} = 6$ adalah sel dengan biaya terkecil. Persediaan dan permintaan yang bersangkutan memberikan $x_{32} = 20$, sehingga D_2 sudah terpenuhi dan baris F_3 tersisa 50 seperti yang ditunjukkan pada tabel 2.4 berikut.

Tabel 2. 4 Perhitungan Pertama Menggunakan Metode MDM

Sumber	Tujuan				Persediaan
	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	4	19	22	11	100
F_2	1	9	14	14	30
F_3	6	6 20	16	14	**50**
Demand	40	0	60	80	

Sumber: Data diolah, 2024

Lakukan langkah yang sama dan hentikan proses bila tabel telah terpenuhi sesuai dengan baris persediaan dan kolom permintaan. Berikut tabel solusi layak awal dengan menggunakan metode MDM setelah semua persediaan dan permintaan terpenuhi.

Tabel 2. 5 Solusi Layak Awal Menggunakan Metode MDM

Sumber	Tujuan				Persediaan
	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	4 10	19	22 10	11 80	**100**
F_2	1 30	9	14	14	**30**
F_3	6	6 20	16 50	14	**70**
Permintaan	**40**	**20**	**60**	**80**	

Sumber: Data diolah, 2024

Dengan demikian total biaya transportasi untuk masalah ini adalah:

$Z = 4x_{11} + 22x_{13} + 11x_{14} + 1x_{21} + 6x_{32} + 16x_{33}$

$= (4 \times 10) + (22 \times 10) + (11 \times 80) + (1 \times 30) + (6 \times 20) + (16 \times 50)$

$= 40 + 220 + 880 + 30 + 120 + 800$

$= 2090$

Setelah mendapatkan solusi awal menggunakan *Minimum Demand Method* selanjutnya dilakukan uji optimalitas menggunakan metode MODI dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menghitung nilai indeks pada masing-masing baris dan kolom, dengan menggunakan rumus $c_{ij} = R_i + K_j$ pada sel yang telah terisi. Misalkan $R_1 = 0$, maka diperoleh:

   $c_{11} = R_1 + K_1 \Rightarrow K_1 = c_{11} - R_1 \Rightarrow K_1 = 4 - 0 = 4$

   $c_{13} = R_1 + K_3 \Rightarrow K_3 = c_{13} - R_1 \Rightarrow K_3 = 22 - 0 = 22$

   $c_{14} = R_1 + K_4 \Rightarrow K_4 = c_{14} - R_1 \Rightarrow K_4 = 11 - 0 = 11$

   $c_{21} = R_2 + K_1 \Rightarrow R_2 = c_{21} - K_1 \Rightarrow R_2 = 1 - 4 = -3$

   $c_{32} = R_3 + K_2 \Rightarrow K_2 = c_{32} - R_3 \Rightarrow K_2 = 6 - (-6) = 12$

   $c_{33} = R_3 + K_3 \Rightarrow R_3 = c_{33} - K_3 \Rightarrow R_3 = 16 - 22 = -6$

2. Menghitung besarnya nilai indeks perbaikan pada sel-sel kosong tersebut dengan menggunakan rumus $I_{ij} = R_i + K_j - c_{ij}$.

   $I_{12} = R_1 + K_2 - c_{12} = 0 + 12 - 19 = -7$

$I_{23} = R_2 + K_3 - c_{23} = -3 + 22 - 14 = 5$

$I_{22} = R_2 + K_2 - c_{22} = -3 + 12 - 9 = 0$

$I_{24} = R_2 + K_4 - c_{24} = -3 + 11 - 14 = -6$

$I_{31} = R_3 + K_1 - c_{31} = -6 + 4 - 6 = -8$

$I_{34} = R_3 + K_4 - c_{34} = -6 + 11 - 14 = -9$

3. Memilih sel yang memiliki angka indeks perbaikan terbesar. Sel yang memiliki indeks perbaikan terbesar yaitu sel $(2,3)$ dengan indeks perbaikan 5.
4. Mencari jalur terdekat untuk sel yang dipilih pada langkah 3. Akan dibuat loop $(2,3) \Rightarrow (2,1) \Rightarrow (1,1) \Rightarrow (1,3) \Rightarrow (2,3)$. Seperti pada tabel dibawah ini.

Tabel 2. 6 Jalur Tertutup Perbaikan Pertama Alokasi pada Sel Kosong dari Metode MDM

Sumber	Tujuan				Persediaan
	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	4 (+)10	19	22 10(-)	11 80	**100**
F_2	1 (-)30	9	14 (+)	14	**30**
F_3	6	6 20	16 50	14	**70**
Permintaan	**40**	**20**	**60**	**80**	

Sumber: Data diolah, 2024

5. Menentukan maksimum unit yang akan dialokasikan pada sel yang dipilih. Isi terkecil diantara sel yang bertanda negatif $(-)$ pada jalur terdekat menunjukkan jumlah alokasi pada sel kosong yang dipilih. Jumlah ini ditambahkan pada seluruh sel yang bertanda positif (+) dan dikurangkan pada sel yang bertanda negatif $(-)$. Isi terkecil diantara sel yang bertanda negatif yaitu 10. Sehingga diperoleh tabel baru sebagai berikut.

Tabel 2. 7 Hasil Perbaikan Alokasi

Sumber	Tujuan				Persediaan
	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	4 20	19	22	11 80	**100**
F_2	1 20	9	14 10	14	**30**
F_3	6	6 20	16 50	14	**70**
Permintaan	**40**	**20**	**60**	**80**	

Sumber: Data diolah, 2024

6. Mengulangi langkah 1. Misalkan $R_1 = 0$, maka diperoleh
   $c_{11} = R_1 + K_1 \Rightarrow K_1 = c_{11} - R_1 \Rightarrow K_1 = 4 - 0 = 4$
   $c_{14} = R_1 + K_4 \Rightarrow K_4 = c_{14} - R_1 \Rightarrow K_4 = 11 - 0 = 11$
   $c_{21} = R_2 + K_1 \Rightarrow R_2 = c_{21} - K_1 \Rightarrow R_2 = 1 - 4 = -3$
   $c_{23} = R_2 + K_3 \Rightarrow K_3 = c_{23} - R_2 \Rightarrow K_3 = 14 - (-3) = 17$
   $c_{32} = R_3 + K_2 \Rightarrow K_2 = c_{32} - R_3 \Rightarrow K_2 = 6 - (-1) = 7$
   $c_{33} = R_3 + K_3 \Rightarrow R_3 = c_{33} - K_3 \Rightarrow R_3 = 16 - 17 = -1$
7. Mengulangi langkah 2. Untuk sel yang kosong: $I_{ij} = c_{ij} - R_i - K_j$.

   $I_{12} = R_1 + K_2 - c_{12} = 0 + 7 - 19 = -12$

   $I_{13} = R_1 + K_3 - c_{13} = 0 + 17 - 22 = -5$

   $I_{22} = R_2 + K_2 - c_{22} = -3 + 7 - 9 = -5$

   $I_{24} = R_2 + K_4 - c_{24} = -3 + 11 - 14 = -6$

   $I_{31} = R_3 + K_1 - c_{31} = -1 + 4 - 6 = -3$

   $I_{34} = R_3 + K_4 - c_{34} = -1 + 11 - 14 = -4$

Karena semua nilai pada sel yang kosong bernilai negatif maka biaya transportasi minimum telah diperoleh yaitu:

$$Z = 4x_{11} + 11x_{14} + 1x_{21} + 14x_{23} + 6x_{32} + 16x_{33}$$

$$= (4 \times 10) + (11 \times 80) + (1 \times 30) + (14 \times 10) + (6 \times 20) + (16 \times 50)$$

$= 40 + 880 + 30 + 140 + 120 + 800$

$= 2040$

2. Penyelesaian dengan *Modified Vogel Approximation Method*.

Dengan menggunakan *Modified Vogel Approximation Method*, masalah transportasi seperti pada Tabel 2.3 dapat diselesaikan dengan tahap sebagai berikut:

Tabel 2. 8 Tabel Awal Transportasi

Sumber	Tujuan				Persediaan
	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	4	19	22	11	100
F_2	1	9	14	14	30
F_3	6	6	16	14	70
Permintaan	40	20	60	80	200

Sumber: Data diolah, 2024

Pertama kurangi biaya transportasi terbesar dari masing-masing elemen setiap baris tabel transportasi dan letakkan disebelah kiri atas elemen yang sesuai selanjutnya kurangi biaya transportasi terbesar dari masing-masing elemen setiap kolom tabel transportasi dan letakkan disebelah kiri bawah elemen yang sesuai setelah itu bentuk matriks tereduksi yang elemennya adalah penjumlahan dari elemen kiri atas dan kiri bawah. Tabel 2.9 menunjukkan matriks tereduksi yang telah diperoleh.

Tabel 2. 9 Matriks Tereduksi Baris dan Kolom Biaya Transportasi metode MVAM

Sumber	Tujuan				Persediaan
	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	${}^{18}_{2}4$	${}^{3}_{0}19$	${}^{0}_{0}22$	${}^{11}_{3}11$	100
F_2	${}^{13}_{5}1$	${}^{5}_{10}9$	${}^{0}_{8}14$	${}^{0}_{0}14$	30
F_3	${}^{10}_{0}6$	${}^{10}_{13}6$	${}^{0}_{6}16$	${}^{2}_{0}14$	70
Permintaan	40	20	60	80	200

Sumber: Data diolah, 2024

Setelah mendapatkan matriks tereduksi, akan diubah biaya transportasi awal dengan hasil matriks biaya tereduksi sebagai berikut:

Tabel 2. 10 Matriks Tereduksi Biaya Transportasi metode MVAM

Sumber	Tujuan				Persediaan
	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	20	3	0	14	100
F_2	18	15	8	0	30
F_3	10	23	6	2	70
Permintaan	40	20	60	80	200

Sumber: Data diolah, 2024

Setelah mendapatkan matriks tereduksi, hitung penalti dari setiap baris dan kolom. Nilai penalti didapatkan dari pengurangan dua nilai maksimal dari setiap baris dan kolom kemudian pilih nilai penalti tertinggi. Kemudian pilih penalti dengan nilai terbesar pada baris maupun kolom dan alokasikan sebanyak mungkin pada sel dengan biaya transportasi (matriks tereduksi) tertinggi.

Tabel 2. 11 Perhitungan Pertama Penalti Menggunakan Metode MVAM

Sumber	Tujuan				Persediaan	Penalti
	D_1	D_2	D_3	D_4		
F_1	20	3	0	14	100	6
F_2	18	15	8	0	30	3
F_3	10	23 20	6	2	50	13
Permintaan	40	0	60	80	200	
Penalti	2	8	2	12		

Sumber: Data diolah, 2024

Lakukan langkah ini hingga semua persediaan dan permintaan terpenuhi. Setelah semua persediaan dan permintaan terpenuhi didapatkan tabel sebagai berikut:

Tabel 2. 12 Perhitungan Terakhir Penalti Menggunakan Metode MVAM

Sumber	Tujuan				Persediaan
	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	20 20	3	0	14 80	0
F_2	18 20	15	8 10	0	0
F_3	10	23 20	6 50	2	0
Permintaan	0	0	0	0	0

Sumber: Data diolah, 2024

Setelah semua persediaan dan permintaan terpenuhi, masukkan semua alokasi sel dari matriks tereduksi ke tabel transportasi awal.

Tabel 2. 13 Hasil Akhir Penentuan Solusi Menggunakan Metode MVAM

Sumber	Tujuan				Persediaan
	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	4 20	19	22	11 80	100
F_2	1 20	9	14 10	14	30
F_3	6	6 20	16 50	14	70
Permintaan	40	20	60	80	200

Sumber: Data diolah, 2024

Dengan demikian total biaya transportasi untuk masalah ini adalah:

$$Z = 4x_{11} + 11x_{14} + 1x_{21} + 14x_{23} + 6x_{32} + 16x_{33}$$
$$= (4 \times 10) + (11 \times 80) + (1 \times 30) + (14 \times 10) + (6 \times 20) + (16 \times 50)$$
$$= 40 + 880 + 30 + 140 + 120 + 800$$
$$= 2040$$

Setelah mendapatkan solusi awal menggunakan *Modified Vogel Approximation Method,* selanjutnya dilakukan uji optimalitas menggunakan metode MODI dengan langkah-langkah sebagai berikut.

a. Menghitung nilai indeks pada masing-masing baris dan kolom, dengan menggunakan rumus $c_{ij} = R_i + K_j$ pada sel yang telah terisi. Misalkan $R_1 = 0$, maka diperoleh:

$c_{11} = R_1 + K_1 \Rightarrow K_1 = c_{11} - R_1 \Rightarrow K_1 = 4 - 0 = 4$

$c_{14} = R_1 + K_4 \Rightarrow K_4 = c_{14} - R_1 \Rightarrow K_4 = 11 - 0 = 11$

$c_{21} = R_2 + K_1 \Rightarrow R_2 = c_{21} - K_1 \Rightarrow R_2 = 1 - 4 = -3$

$c_{23} = R_2 + K_3 \Rightarrow K_3 = c_{23} - R_2 \Rightarrow K_3 = 14 - (-3) = 17$

$c_{32} = R_3 + K_2 \Rightarrow K_2 = c_{32} - R_3 \Rightarrow K_2 = 6 - (-1) = 7$

$c_{33} = R_3 + K_3 \Rightarrow R_3 = c_{33} - K_3 \Rightarrow R_3 = 16 - 17 = -1$

b. Mengulangi langkah 2. Untuk sel yang kosong: $I_{ij} = c_{ij} - R_i - K_j$.

$I_{12} = R_1 + K_2 - c_{12} = 0 + 7 - 19 = -12$

$I_{13} = R_1 + K_3 - c_{13} = 0 + 17 - 22 = -5$

$I_{22} = R_2 + K_2 - c_{22} = -3 + 7 - 9 = -5$

$I_{24} = R_2 + K_4 - c_{24} = -3 + 11 - 14 = -6$

$I_{31} = R_3 + K_1 - c_{31} = -1 + 4 - 6 = -3$

$I_{34} = R_3 + K_4 - c_{34} = -1 + 11 - 14 = -4$

Karena semua nilai pada sel yang kosong bernilai negatif maka biaya transportasi minimum telah diperoleh yaitu:

$Z = 4x_{11} + 11x_{14} + 1x_{21} + 14x_{23} + 6x_{32} + 16x_{33}$

$= (4 \times 10) + (11 \times 80) + (1 \times 30) + (14 \times 10) + (6 \times 20) + (16 \times 50)$

$= 40 + 880 + 30 + 140 + 120 + 800$

$= 2040$

Berdasarkan Contoh 2.1 yang diselesaikan menggunakan metode MDM dan MVAM didapatkan kesimpulan bahwa metode MVAM lebih unggul dari MDM karena metode tersebut dapat menghasilkan solusi optimal menggunakan metode *modified distribution* dengan satu iterasi, sehingga solusi fisibel awal langsung optimal.