

**KEBERADAAN *ABSORBING SET* PADA MODEL
SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL
KEMOSTAT**

SKRIPSI



ARIQAH MUMTAZAH

H011 20 1 005

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2024

**KEBERADAAN *ABSORBING SET* PADA MODEL
SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL
KEMOSTAT**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu
Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

**ARIQAH MUMTAZAH
H011 20 1 005**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
MEI 2024**

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul

Keberadaan *Absorbing Set* pada Model Persamaan Diferensial Parsial Kemostat

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 2 Mei 2024



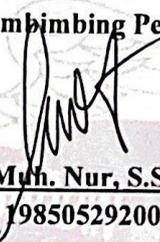
**KEBERADAAN ABSORBING SET PADA MODEL SISTEM
PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL KEMOSTAT**

disetujui oleh:

Pembimbing Utama,

Pembimbing Pertama


Naimah Aris, S.Si., M.Math.
NIP. 197110031997022001


Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.
NIP. 198505292008121002

Pada 2 Mei 2024

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : Ariqah Mumtazah
NIM : H011201005
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Keberadaan *Absorbing Set* pada Model Persamaan Differensial Parsial Kemostat

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua : Naimah Aris, S.Si., M.Math. (197110031997022001)
Sekretaris : Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si. (198505292008121002)
Anggota : Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si. (198009042003122001)
Anggota : Dr. Muhammad Zakir, M.Si. (196402071991031013)

Ditetapkan di : Makassar
Tanggal : 2 Mei 2024

HALAMAN PENGESAHAN

**KEBERADAAN ABSORBING SET PADA MODEL SISTEM PERSAMAAN
DIFFERENSIAL PARSIAL KEMOSTAT**

Disusun dan diajukan oleh

ARIQAH MUMTAZAH

H011201005

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka
Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal, 2 Mei 2024

Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

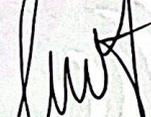
Menyetujui,

Pembimbing Utama,



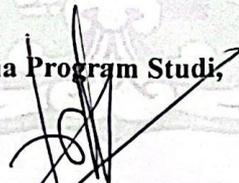
Naimah Aris, S.Si., M.Math.
NIP. 197110031997022001

Pembimbing Pertama



Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.
NIP. 198505292008121002

Ketua Program Studi,



Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 196804292002121001



KATA PENGANTAR

Puji syukur atas kehadiran Allah *Subhanahu Wa ta'ala* yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad *Sallallahu 'Alaihi Wasallam*, sebagai Nabi yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga penyusunan skripsi yang berjudul “Keberadaan *Absorbing Set* pada Model Persamaan Diferensial Parsial Kemostat” ini dapat diselesaikan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua penulis, ayah kebanggaan penulis **Prof. Dr. M. Djidin, M.Ag.** dan Ibu kesayangan penulis **Dra. Sitti Amaliah** yang telah membesarkan dan mendidik penulis, serta senantiasa memberikan doa, dukungan, dan materi sehingga penulis bisa sampai di titik ini. Terima kasih kepada kakak kesayangan penulis **Faidhul Rahman, S.Kom** dan **Muhammad Fuad, S.Hum** serta seluruh keluarga yang telah memberikan doa dan dukungan dalam penyelesaian skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin sekaligus Tim Penguji dan Dosen Penasehat Akademik penulis selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat, saran, dan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Ibu **Naimah Aris, S.Si., M.Math.**, dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.** selaku Dosen Pembimbing yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas banyak memberikan ilmu yang bermanfaat dan meluangkan waktu untuk membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
4. Ibu **Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.**, dan Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** selaku Tim Penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan masukan dan kritikan yang membangun terhadap penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta Bapak dan Ibu Staff Departemen Matematika yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.
6. Teman-teman seperjuangan **Matematika 2020, HORIZONTAL** dan **HIMATIKA** yang senantiasa memberikan bantuan dan dukungan moril kepada penulis, serta memberikan momen berharga bagi penulis selama masa studi sarjana.
7. Teman-teman seperjuangan penulis **Lunarseva Makassar, Aisyah Luthfiah, Andi Muthiah Nur Inayah Rahman, Rifat Hanifah, Shofyah Amnur, Almira Umar, Jihan Nazmi, Zakirah Nuryani, Zahra Adilah Nurdin, Fuad Fahri Rizqullah, Arya Thalib, Rizky Pelu** dan **Moh. Taufik Yusuf** yang telah mewarnai dunia perkuliahan penulis, senantiasa memberikan dukungan, tidak kenal lelah peduli dan menasihati penulis selama masa studi sarjana.
8. Teman-teman seperjuangan penulis, **Adelin Mangetan, Wardah Hidayah, Alifia Nurul Khairiyah, Vivie Luthviana, Sitti Nurhalisa**, dan **Egidia** yang senantiasa kebersamaan, menginspirasi, teman berbagi pikiran, dan memberikan dukungan kepada penulis selama masa studi sarjana.
9. Teman-teman seperjuangan penulis **TPS ME 20, Nawa Ehza Fadhila, Nur Talitha Putri Hasilawanto, Ummul Qura, Muhammad Ahnaf Yusuf**, dan **Nuralifa Rezky Mustika** yang telah menjadi *partner* penulis selama tiga

tahun di divisi Tim Pengelola Soal *Mathematics Event*.

10. Teman-teman seperjuangan penulis **Kampus Mengajar angkatan 5, Einun Dhiya Lestari, Cindy Natalia, dan Wenny Satriani** yang senantiasa menjadi teman berbagi pikiran dan berdiskusi banyak hal.
11. Teman-teman seperjuangan **Volunteer Aktivist Sosial Indonesia, Fatimah Azzahra, Fatimatuzzahra, Ari, Intan Permatasari, Rahid, Zulfikar Meijang dan Putra** yang senantiasa memberikan tawa dan cerita berharga kepada penulis selama proses menjadi *volunteer*.
12. Teman seperjuangan **Kuliah Kerja Nyata (KKN TTG G.109 Posko 4 Desa Bonto-Bontoa Bantaeng)** yang telah memberikan warna baru dalam masa perkuliahan penulis dan senantiasa mendukung penulis.
13. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebut satu persatu, terima kasih untuk segala dukungan, doa, motivasi, inspirasi, dan partisipasi yang diberikan kepada penulis.

Akhir kata, penulis berharap semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapatkan balasan dari Allah *Subhanahu Wa ta'ala*. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK
KEPENTINGAN AKADEMISI**

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ariqah Mumtazah
Nim : H011201005
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya saya yang berjudul:

**Keberadaan Absorbing Set pada Model Sitem Persamaan Diferensial
Kemostat**

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolah dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada, 2 Mei 2024

Yang menyatakan,

Ariqah Mumtazah

ABSTRAK

Sistem persamaan diferensial parsial kemostat adalah model yang menjadi tiruan alam sederhana untuk menggambarkan dinamika perilaku mikroorganisme dalam lingkungannya. Perilaku jangka panjang suatu masalah nilai awal dan nilai batas yang telah memenuhi kondisi *well-posed* dapat digambarkan melalui keberadaan *global attractor* dari sistem dinamika tersebut. Keberadaan *global attractor* dapat dibuktikan salah satunya dengan menunjukkan keberadaan *absorbing set*. Metode yang digunakan dalam menentukan keberadaan *absorbing set* model matematika sistem persamaan diferensial parsial kemostat adalah metode ketidaksamaan energi. Pendekatan dengan metode ini menggunakan ruang L^2 . Hasil dari metode ketidaksamaan energi ini telah membuktikan bahwa untuk nilai awal s_0 dan u_0 yang diambil pada sebarang bola buka $B(0, R)$ yang berpusat di 0 dan jari-jari R di ruang L^2 , maka solusi $s(x, t)$ dan $u(x, t)$ akan termuat dalam himpunan terbatas $B_0 \subset H$ untuk t menuju tak berhingga sedemikian sehingga $\|s(x, t)\|_{L^2} \leq C$ dan $\|u(x, t)\|_{L^2} \leq \bar{C}$ untuk untuk setiap $t \geq t_{H_1}$ dan $t \geq t_{H_2}$. Jadi, keberadaan *absorbing set* dari model matematika sistem persamaan diferensial parsial kemostat terbukti.

Kata Kunci: kemostat, mikroorganisme, metode ketidaksamaan energi, keberadaan, *absorbing set*

ABSTRACT

System of chemostat partial differential equations is a model that is used as a simple imitation of nature to describe the dynamic behavior of microorganisms in their environment. The long-term behavior of an initial and boundary value problem which has been fulfilled the well-posed conditions can be described through the existence of a global attractor of the dynamics system. The existence of global attractor can be proven by showing the existence of absorbing set. The method used in determining the existence of absorbing set of mathematical model of chemostat partial differential equation system is energy inequality method. The approach with this method uses L^2 space. The results of this energy inequality method have proven that for initial values s_0 and u_0 taken on any open ball $B(0, R)$ centered at 0 and radius R in L^2 space, the solutions $s(x, t)$ and $u(x, t)$ will be contained in the finite set $B_0 \subset H$ for t towards infinity such that $\|s(x, t)\|_{L^2} \leq C$ and $\|u(x, t)\|_{L^2} \leq \bar{C}$ for every $t \geq t_{H_1}$ and $t \geq t_{H_2}$. So, the existence of absorbing set of the mathematical model of chemostat partial differential equations system is proved.

Keywords: *chemostat, microorganism, energy inequality method, existence, absorbing set*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR.....	vi
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR	ix
ABSTRAK	x
ABSTRACT.....	xi
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR LAMBANG	xiv
DAFTAR GAMBAR.....	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah.....	4
1.4 Tujuan Penelitian.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 <i>State of The Art</i>	6
2.2 Ruang Vektor	8
2.3 Ruang Bernorma	14
2.4 Ruang Banach	18
2.5 Ruang Hasil Kali Dalam	20
2.6 Persamaan Diferensial Parsial.....	23
2.7 Model Matematika Sistem Kemostat.....	24
2.8 Semigrup.....	26
2.9 <i>Absorbing Set</i>	27
2.10 Ketidaksamaan Diferensial Energi	28

BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	30
3.1 Jenis Penelitian.....	30
3.2 Tempat dan Waktu Penelitian.....	30
3.3 Metode Pengumpulan Data.....	30
3.4 Tahapan Penelitian.....	30
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	32
4.1 Model Matematika Sistem Kemostat.....	32
4.2 <i>Absorbing Set</i>	32
BAB V PENUTUP.....	43
5.1 Kesimpulan.....	43
5.2 Saran.....	43
DAFTAR PUSTAKA.....	45

DAFTAR LAMBANG

$s(x, t)$: Konsentrasi nutrisi pada waktu t (g/L)
$u(x, t)$: Konsentrasi mikroorganisme pada waktu t (g/L)
K	: Laju pengenceran (L/h)
$\mu(s)$: Laju konsumsi mikroorganisme (h^{-1})
m	: Laju pertumbuhan maksimum (h^{-1})
a	: Konstanta Michaelis-Menten
$\frac{\partial s}{\partial r}$: Laju perubahan nutrisi terhadap waktu ($g/L/h$)
$\frac{\partial u}{\partial t}$: Laju perubahan mikroorganisme terhadap waktu ($g/L/h$)

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Perangkat Kemostat.....6

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Manusia sangat dekat dengan mikroorganisme, makhluk-makhluk kecil yang tersebar di lingkungan bahkan di dalam tubuh manusia. Mereka hidup di sekitar, seperti di udara, air, dan tanah. Beberapa mikroorganisme berperan dalam menjaga kesehatan, seperti bakteri usus yang membantu pencernaan. Namun, beberapa mikroorganisme juga dapat menyebabkan penyakit jika tidak dikontrol dengan baik. Oleh karena itu, dalam mendukung kesehatan dan keseimbangan lingkungan maka penting untuk memahami interaksi yang terjadi pada mikroorganisme, baik keberlanjutan maupun kepunahannya (Gonzales dan Aranda, 2023)

Salah satu alat yang digunakan untuk mempelajari dinamika perilaku mikroorganisme adalah kemostat. Perangkat kemostat pertama kali diusulkan oleh Jacques Monod pada tahun 1950 yang menjadi sebuah alat laboratorium yang digunakan untuk meneliti pertumbuhan mikroorganisme dalam lingkungan dengan sumber daya terbatas (Harmand dkk., 2017)

Kemostat dianggap sebagai ekosistem kecil yang menjadi tiruan alam sederhana untuk mempelajari perilaku mikroba pada keadaan tetap. Banyak peneliti tertarik mengkajinya dalam beberapa aplikasi, seperti dalam pengolahan air limbah (Riviere, 1977), meneliti mikroorganisme yang telah mengalami perubahan genetik (Stephanopoulos dkk., 1979), pemodelan usus besar mamalia (Freter, 1983), dan juga dalam ilmu ekologi dan lingkungan (Rurangwa dkk., 2015).

Ilmuwan telah menghabiskan banyak waktunya untuk meneliti pertumbuhan mikroorganisme dalam kemostat. Penelitian dinamika perilaku mikroorganisme dalam kemostat tentunya membutuhkan proses eksperimen yang kompleks dan harus dilakukan berkali-kali untuk mendapatkan hasil yang optimal. Sehingga dibutuhkan kajian teoritis yang lebih efisien untuk memahami lebih jauh bagaimana perilaku mikroorganisme tersebut. Pendekatan pemodelan matematika merupakan

salah satu metode untuk mengkaji seberapa jauh faktor-faktor tersebut berpengaruh pada dinamika kemostat.

Secara kuantitatif telah banyak penelitian yang membahas model kemostat dengan asumsi-asumsi yang berbeda. Namun umumnya model tersebut diberikan dalam bentuk persamaan diferensial biasa dan dibangun dengan kondisi berdasarkan kondisi *well-stirred* kemostat, yaitu cairan nutrisi diaduk secara terus-menerus untuk menciptakan lingkungan homogen di seluruh sistem. Distribusi nutrisi menjadi merata sehingga memberikan kondisi pertumbuhan yang stabil karena semua mikroorganisme memperoleh makanan dengan jumlah yang sama (Nie dan Wang, 2015). Namun, model tersebut pada perkembangannya tidak natural karena tidak sesuai dengan kondisi di alam, dimana terjadi persaingan pada mikroorganisme dalam memperebutkan makanan.

Nie dan Wang (2015) kemudian melakukan penelitian terhadap mikroorganisme dalam kemostat dengan kondisi *unstirred* kemostat, dimana cairan nutrisi tidak diaduk secara merata. Hal ini menciptakan gradien nutrisi yang berbeda di seluruh sistem. Sebagian area mungkin memiliki konsentrasi nutrisi yang lebih tinggi atau lebih rendah dari yang lainnya. Gradien nutrisi yang terjadi karena difusi menciptakan lingkungan yang lebih kompleks, mencerminkan adanya kompetisi mikroorganisme dalam kondisi yang lebih realistis. Berdasarkan penelitian laboratorium yang dilakukan oleh paper tersebut, diperoleh model sistem persamaan diferensial parsial kemostat yang meninjau perubahan laju pertumbuhan mikroorganisme tidak hanya dipengaruhi oleh waktu tapi juga konsentrasi nutrisi yang berbeda di setiap area dalam kemostat dan adanya proses difusi yang terjadi didalamnya. Seperti pada umumnya model sistem PDP yang berbentuk sistem persamaan diferensial parsial tak linier, akan sulit ditentukan solusinya. Untuk mendekati solusi, metode numerik merupakan metode yang sering digunakan (Khan dkk., 2023). Beberapa paper juga mendekati solusi model dengan menggunakan *fixed point* teori (Lan dan Lin, 2021).

Menurut Hadamard (2003), PDP yang dijamin keberadaan dan ketunggalan solusi lemahnya akan memenuhi kondisi *well-posed*. Sistem dinamik suatu PDP yang sudah dijamin *well-posed*, bisa dideskripsikan oleh himpunan operator yang

disebut semigrup. Dengan menggunakan konsep semigrup, dapat dianalisis sifat-sifat kualitatif dan kuantitatif dari solusi PDP, termasuk kestabilan, konvergensi, dan perilaku jangka panjang dari sistem. Penerapan semigrup dalam analisis sistem dinamik dari PDP sangat berguna karena memungkinkan untuk mengubah persamaan diferensial menjadi bentuk operator yang lebih mudah untuk dianalisis, serta menyediakan kerangka kerja matematika yang kokoh untuk memahami sifat-sifat dari solusi-solusi sistem.

Konsep yang meninjau perilaku jangka panjang sistem dapat dianalisis dengan menentukan keberadaan *global attractor* dari semigrup solusi dari sistem persamaan diferensial parsialnya. *Global attractor* adalah suatu himpunan tak kosong A yang invarian, kompak, dan menarik setiap himpunan terbatas di dalam A . Keberadaan *global attractor* dapat dibuktikan keberadaannya salah satunya dengan menunjukkan keberadaan *absorbing set*, yaitu suatu himpunan bagian dalam ruang fase suatu sistem dinamik yang pada akhirnya akan menyerap (memuat) hasil peta dari semua himpunan-himpunan terbatas pada ruang fasenya. (Aris dkk., 2018)

Keberadaan *absorbing set* pada sistem kemostat telah dibahas pada paper Zhu H dkk. (2023). Namun pada paper tersebut fokus membahas analisis stabilitas dan bifurkasi dengan menunjukkan keberadaan solusi umum positif dari model kemostat persamaan diferensial fraksional. Penjelasan tentang *absorbing set* tidak dijelaskan secara detail. Selain itu, model sistemnya juga dikonstruksi menjadi sistem persamaan diferensial parsial berbentuk parabolik sehingga pada penelitian ini akan dibuktikan secara detail dan dituangkan dalam bentuk penelitian yang berjudul,

“Keberadaan *Absorbing Set* pada Model Sistem Persamaan Diferensial Kemostat”

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dikaji pada penelitian ini adalah bagaimana membuktikan bahwa terdapat *absorbing set* pada model sistem persamaan diferensial parsial kemostat?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis membatasi model sistem persamaan diferensial parsial kemostat dengan ruang solusi hanya pada L^2 .

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah membuktikan bahwa model sistem persamaan diferensial parsial kemostat memiliki *absorbing set* yang menyerap solusi-solusi lainnya di ruang L^2 .

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Memperluas pengetahuan dan pengembangan keilmuan dalam bidang ilmu matematika, secara khusus dalam analisis.
2. Sebagai sarana penulis dalam mengembangkan ilmu pengetahuan yang selama ini menjadi bidang ilmu yang dipelajari.
3. Sebagai rujukan bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya dan dapat mengembangkan ilmu matematika di bidang analisis khususnya tentang keberadaan *global attractor*.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari lima bagian. Masing-masing bagian dibagi ke dalam subbab dengan rincian sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan yang memberikan gambaran singkat mengenai penelitian ini.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini berisikan pemaparan secara singkat mengenai konsep dasar yang mendukung pembahasan masalah, yaitu teori-teori dasar dalam analisis fungsional, persamaan diferensial parsial, model matematika kemostat, serta definisi dan teorema mengenai keberadaan *absorbing set*.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini berisikan metode dan tahapan-tahapan yang digunakan dalam menunjukkan keberadaan *absorbing set* pada model matematika sistem kemostat.

BAB IV PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan disajikan pembahasan dari tugas akhir ini yaitu menunjukkan keberadaan *absorbing set* pada model matematika sistem kemostat.

BAB V PENUTUP

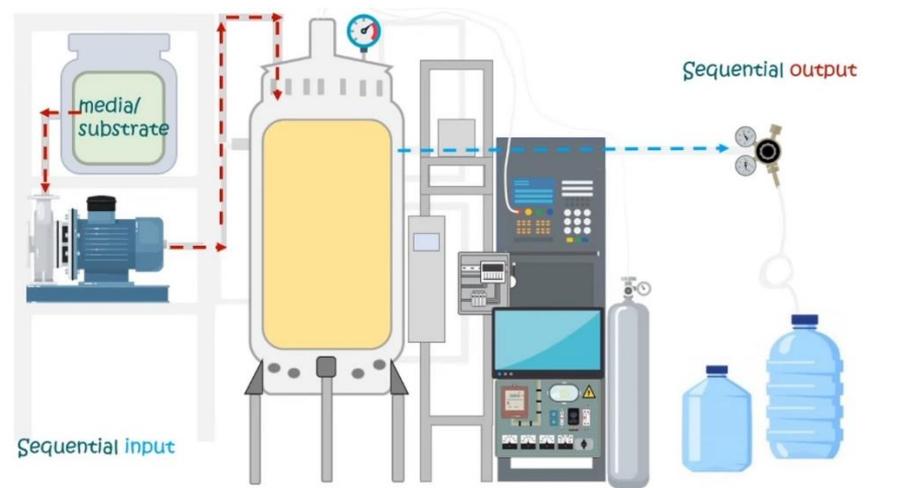
Dalam bab ini berisi tentang kesimpulan hasil penelitian dan saran yang ditunjukkan bagi para peneliti agar bisa mengembangkan penelitian ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 *State of The Art*

Kemostat adalah sebuah alat laboratorium yang digunakan untuk meneliti pertumbuhan mikroorganisme dalam lingkungannya. Perangkat ini dirancang untuk menciptakan kondisi sederhana yang stabil sehingga dianggap sebagai model ideal karena merupakan tiruan alam dalam mempelajari ekosistem mikroorganisme pada keadaan seimbang (Harmand dkk., 2017). Perangkat ini terdiri dari tiga wadah yang saling terhubung dengan pompa, yaitu wadah pakan, wadah kultur, dan wadah pengumpul. Substrat yang disimpan di dalam wadah pakan dipompa ke dalam wadah kultur, tempat interaksi antara substrat dan spesies mikroorganisme terjadi. Selanjutnya aliran wadah kultur dipompa ke wadah pengumpul untuk menjaga volume wadah kultur tetap konstan. Ini memastikan bahwa populasi mikroorganisme tetap stabil dan tidak mengalami fluktuasi yang tidak diinginkan. Selain itu, konsentrasi substrat juga dapat diatur dengan tepat dan dipertahankan pada tingkat yang optimal untuk pertumbuhan mikroorganisme. (Gonzales dan Aranda, 2023). Perangkat kemostat dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Perangkat Kemostat

Sumber : Harmand dkk., 2017

Masalah persamaan sistem kemostat ini telah banyak dikaji oleh para ahli.

Mereka mencoba mengembangkan model matematika yang menggambarkan dinamika pertumbuhan mikroorganisme dalam kemostat dalam bentuk persamaan diferensial biasa. Pada kemostat, konsentrasi substrat dan populasi mikroorganisme akan berubah seiring waktu. Laju perubahan konsentrasi nutrisi dipengaruhi oleh beberapa faktor seperti laju aliran masukan substrat, laju konsumsi oleh mikroorganisme, dan laju penghilangan. Demikian pula populasi mikroorganisme tumbuh dengan laju tertentu dan dipengaruhi oleh konsentrasi nutrisi (Harmand dkk., 2017).

Model kemostat ini telah banyak dikaji oleh para ilmuwan. Secara umum, mereka mengkaji kemostat dalam bentuk persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial biasa orde fraksional serta menentukan solusinya menggunakan metode numerik, seperti yang dilakukan Zeinadini (2017) dalam papernya yang mengkaji solusi numerik persamaan diferensial orde fraksional model kemostat tiga dimensi dengan menggunakan *Nonstandard Finite Difference* (NSFD) dan metode *Runge-Kutta* orde empat.

Beberapa peneliti mengembangkan model kemostat dalam bentuk persamaan diferensial biasa dengan asumsi yang berbeda-beda, seperti pada paper Zhu dkk. (2023) membangun model kemostat dalam bentuk persamaan diferensial biasa dan fraksional yang memperhitungkan adanya penghambatan pertumbuhan mikroba pada konsentrasi substrat yang tinggi, serta membuktikan keberadaan absorbing set dan solusi global positifnya. Model kemostat yang lebih realistis yang mempertimbangkan pertumbuhan mikroorganisme lain pada dinding wadah kultur diberikan oleh Caraballo dkk. (2021). Penulis membuktikan keberadaan dan keunikan solusi positif global untuk model tersebut, serta mengkaji dinamika acak di dalam *absorbing set*.

Paper-paper tersebut mengkaji kemostat menggunakan persamaan diferensial biasa dimana model yang berdasarkan model klasik Monod dengan kondisi *well-stirred chemostat*, yaitu cairan nutrisi diaduk secara merata untuk menciptakan lingkungan homogen di seluruh sistem. Namun, model tersebut pada perkembangannya tidak natural karena tidak sesuai dengan kondisi di alam. Maka pada paper Nie dkk. (2015) memodelkan sistem yang lebih realistis dengan

menggunakan persamaan diferensial parsial dengan istilah *unstirred chemostat* dimana terjadi difusi yang menciptakan lingkungan yang lebih kompleks, mencerminkan adanya kompetisi mikroorganisme dalam kondisi yang lebih realistis.

Berdasarkan penelitian laboratorium yang dilakukan tersebut, maka pada penelitian ini akan dibangun model sistem PDP sistem dengan kondisi *unstirred chemostat*, yang modelnya akan berbentuk sistem persamaan diferensial parsial tak linier karena perubahan laju pertumbuhan mikroorganisme tidak hanya dipengaruhi oleh waktu tapi juga konsentrasi substrat yang berbeda di setiap area di kemostat dan adanya proses difusi yang terjadi di dalamnya.

Model sistem PDP dari kemostat yang akan dikaji memiliki bentuk persamaan diferensial parsial parabolik. Keberadaan *absorbing set* dari model ini akan dikaji seperti yang diberikan pada paper Parshad dkk. (2017). Namun, belum ada penelitian yang membahas keberadaan *absorbing set* pada model sistem PDP kemostat ini. Oleh karena itu, pada penelitian ini digunakan paper-paper dengan bentuk sistem yang hampir sama sebagai rujukan, diantaranya paper yang diberikan oleh Monica (2022) tentang transpor impuls listrik sinapsis dan model sistem PDP *FitzHugh-Nagumo*. Dalam papernya, penulis menunjukkan bahwa dengan menggunakan fungsi energi yang sesuai untuk memastikan keberadaan solusi terbatas dan *absorbing set* dalam ruang fasa pada sistemnya. Penelitian lain oleh Moulay dkk. (2022) memfokuskan pada persamaan termistor nonlinier tiga kali lipat. Masalah termistor adalah model sistem PDP yang menggambarkan difusi suhu yang dihasilkan ketika arus listrik mengalir melalui suatu material. Dalam papernya, penulis membuktikan adanya *absorbing set* dan *global attractor* terhadap masalah tersebut.

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.1 Misalkan X adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Jika X memenuhi sifat-sifat berikut dengan $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka X dikatakan ruang vektor Riil.

1. Berlaku $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in X$ dan $\alpha\mathbf{x} \in X$ (tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar).

2. Berlaku $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
3. Berlaku $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.
4. Terdapat vektor $\mathbf{0} \in X$ sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.
5. Terdapat $-\mathbf{x} \in X$ sedemikian sehingga $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
6. Berlaku $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
7. Berlaku $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.
8. Berlaku $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$.
9. Untuk setiap $\mathbf{x} \in X$ berlaku $\mathbf{1}\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

(Kreyszig, 1989)

Salah satu contoh ruang vektor adalah ruang $L^2(\Omega)$.

Definisi 2.2 Diberikan $\Omega \subset \mathbb{R}$. Untuk $p = 2$, ruang $L^2(\Omega)$ didefinisikan sebagai himpunan $L^2(\Omega) = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ dengan } f \text{ terukur dan } \int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty\}$.

(Kreyszig, 1989)

Contoh 2.1 Ruang $L^2(\Omega)$ merupakan ruang vektor.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa ruang $L^2(\Omega)$ memenuhi sifat-sifat ruang vektor.

1. Akan ditunjukkan bahwa $(f + g) \in L^2(\Omega)$ dan $(\alpha f) \in L^2(\Omega)$.

Pertama, ambil sebarang $f, g \in L^2(\Omega)$. Akibatnya,

$$\int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty \text{ dan } \int_{\Omega} g(x)^2 dx < \infty.$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq 2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$|f(x) + g(x)|^2 \leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^2.$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^2 \max\{|f(x)|^2, |g(x)|^2\} \\
 &\leq 2^2(f(x)^2 + g(x)^2). \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (2.1) dan sifat integral, diperoleh

$$\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^2 dx \leq 2^2 \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx + \int_{\Omega} g(x)^2 dx \right).$$

Karena $\int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty$ dan $\int_{\Omega} g(x)^2 dx < \infty$, maka

$$\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^2 dx < \infty.$$

Jadi terbukti bahwa $(f + g) \in L^2(\Omega)$.

Kedua, ambil sebarang $(\alpha f) \in L^2(\Omega)$ dengan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Akibatnya,

$$\int_{\Omega} |\alpha f(x)|^2 dx < \infty.$$

Perhatikan bahwa,

$$|\alpha f(x)|^2 = \alpha^2 f(x)^2. \tag{2.2}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (2.2) dan sifat integral, diperoleh

$$\int_{\Omega} |\alpha f(x)|^2 dx = \alpha^2 \int_{\Omega} f(x)^2 dx.$$

Karena $\alpha^2 \int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty$, maka $\int_{\Omega} |\alpha f(x)|^2 dx < \infty$.

Jadi terbukti bahwa $(\alpha f) \in L^2(\Omega)$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $f + g = g + f$.

Ambil sebarang $f, g \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f(x)^2 dx + \int_{\Omega} g(x)^2 dx &= \int_{\Omega} (f(x)^2 + g(x)^2) dx \\
 &= \int_{\Omega} (g(x)^2 + f(x)^2) dx \\
 &= \int_{\Omega} g(x)^2 dx + \int_{\Omega} f(x)^2 dx.
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $f + g = g + f$.

3. Akan ditunjukkan bahwa $f + (g + h) = (f + g) + h$.

Ambil sebarang $f, g, h \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)^2 dx + \left(\int_{\Omega} g(x)^2 dx + \int_{\Omega} h(x)^2 dx \right) \\ &= \int_{\Omega} f(x)^2 dx + \int_{\Omega} (g(x)^2 + h(x)^2) dx \\ &= \int_{\Omega} ((f(x)^2 + g(x)^2) + h(x)^2) dx \\ &= \int_{\Omega} (f(x)^2 + g(x)^2) dx + \int_{\Omega} h(x)^2 dx \\ &= \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx + \int_{\Omega} g(x)^2 dx \right) + \int_{\Omega} h(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $f + (g + h) = (f + g) + h$.

4. Akan ditunjukkan bahwa terdapat vektor $\mathbf{0} \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga

$$f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f = f.$$

Ambil sebarang $f, g \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga $f + g = f$.

Perhatikan bahwa,

$$\int_{\Omega} f(x)^2 dx + \int_{\Omega} g(x)^2 dx = \int_{\Omega} f(x)^2 dx$$

sehingga

$$\int_{\Omega} g(x)^2 dx = \int_{\Omega} f(x)^2 dx - \int_{\Omega} f(x)^2 dx$$

$$\int_{\Omega} g(x)^2 dx = \int_{\Omega} \mathbf{0} dx = 0 < \infty.$$

Oleh karena itu diperoleh bahwa $g(x) = \mathbf{0} \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga

$$f + \mathbf{0} = f \tag{2.3}$$

dan dengan menggunakan sifat (2) diperoleh

$$f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f. \tag{2.4}$$

Dari persamaan (2.3)-(2.4), terbukti bahwa

$$f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f = f.$$

5. Akan ditunjukkan terdapat $-f \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga

$$f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}.$$

Ambil sebarang $f \in L^2(\Omega)$. Pilih $\alpha = -1$ pada sifat (1) diperoleh,

$$-\int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty.$$

Akibatnya,

$$\int_{\Omega} f(x)^2 dx + \left(-\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right) = \int_{\Omega} \mathbf{0} dx = 0$$

dan dengan menggunakan sifat komutatif pada sifat (2) untuk setiap $f \in L^2(\Omega)$, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)^2 dx + \left(-\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right) &= \left(-\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right) + \int_{\Omega} f(x)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{0} dx = 0. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa,

$$f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}.$$

6. Akan ditunjukkan bahwa $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

Ambil sebarang $f, g \in L^2(\Omega)$ dengan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\alpha(f + g)(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\alpha(f(x) + g(x))|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\alpha|^2 |(f(x) + g(x))|^2 dx \\ &= \alpha^2 \int_{\Omega} |(f(x) + g(x))|^2 dx \\ &\leq \alpha^2 2^2 \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx + \int_{\Omega} g(x)^2 dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha^2 \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx + \int_{\Omega} g(x)^2 dx \right) \\
&= \left(\int_{\Omega} \alpha^2 f(x)^2 dx + \int_{\Omega} \alpha^2 g(x)^2 dx \right) \\
&= \int_{\Omega} |\alpha f(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\alpha g(x)|^2 dx < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

7. Akan ditunjukkan bahwa $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$.

Ambil sebarang $f \in L^2(\Omega)$ dengan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |(\alpha + \beta)f(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\alpha(f(x)) + \beta(f(x))|^2 dx \\
&\leq 2^2 \left(\int_{\Omega} \alpha^2 f(x)^2 dx + \int_{\Omega} \beta^2 f(x)^2 dx \right) \\
&\leq \left(\int_{\Omega} \alpha^2 f(x)^2 dx + \int_{\Omega} \beta^2 f(x)^2 dx \right) \\
&= \int_{\Omega} \alpha^2 f(x)^2 dx + \int_{\Omega} \beta^2 f(x)^2 dx \\
&= \int_{\Omega} |\alpha f(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\beta f(x)|^2 dx < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$.

8. Akan ditunjukkan bahwa $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.

Ambil sebarang $f \in L^2(\Omega)$ dengan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\alpha(\beta f(x))|^2 dx &= \int_{\Omega} |\alpha\beta(f(x))|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} (\alpha\beta)^2 f(x)^2 dx \\
&= \int_{\Omega} |\alpha\beta(f(x))|^2 dx < \infty
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.

9. Akan ditunjukkan bahwa $1f = f$.

Ambil sebarang $f \in L^2(\Omega)$ dengan skalar $\alpha = 1$ dan dengan menggunakan sifat perkalian diperoleh,

$$1f = (1) \int_{\Omega} |f|^2 dx = \int_{\Omega} |f|^2 dx = f.$$

Jadi terbukti bahwa $1f = f$.

Karena semua sifat ruang vektor terpenuhi, maka $L^2(\Omega)$ merupakan ruang vektor.

2.3 Ruang Bernorma

Definisi 2.3 Misalkan X ruang vektor dengan lapangan Riil. Norma didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ untuk setiap $\mathbf{x} \in X$.
2. $\|\mathbf{x}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dan untuk setiap $\mathbf{x} \in X$.
3. $\|c\mathbf{x}\| = |c| \|\mathbf{x}\|$ untuk setiap $\mathbf{x} \in X$ dan $c \in \mathbb{R}$.
4. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

(Kreyszig, 1989)

Contoh 2.2 Fungsi $\|\cdot\|$ yang didefinisikan pada $L^2(\Omega)$ sebagai berikut:

$$\|f(x)\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

untuk setiap $f \in L^2(\Omega)$ merupakan norma di ruang $L^2(\Omega)$.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$.

Perhatikan bahwa $f(x)^2 \geq 0$.

Selanjutnya, karena integral dari fungsi positif merepresentasikan suatu luasan yang selalu tidak bernilai negatif untuk setiap x di Ω , maka

$$\int_{\Omega} f(x)^2 dx \geq 0.$$

Akibatnya,

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

2. Akan ditunjukkan $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = \mathbf{0}$.

Pertama, akan dibuktikan bahwa jika $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ maka $f(x) = \mathbf{0}$.

Asumsikan $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, sehingga

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Karena $\int_{\Omega} f(x)^2 dx = 0$, maka haruslah $f(x) = \mathbf{0}$.

Kedua, akan dibuktikan jika $f(x) = \mathbf{0}$ maka $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Perhatikan bahwa,

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Karena $f(x) = \mathbf{0}$, akibatnya

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{0}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Jadi terbukti bahwa $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = \mathbf{0}$.

3. Akan ditunjukkan $\|\alpha f(x)\|_{L^2(\Omega)} = |\alpha| \|f(x)\|_{L^2(\Omega)}$.

Perhatikan bahwa,

$$\|\alpha f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (\alpha f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Berdasarkan sifat nilai mutlak, diperoleh

$$\begin{aligned} \|\alpha f(x)\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |\alpha|^2 f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\alpha|^2 \int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|f(x)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\|\alpha f(x)\|_{L^2(\Omega)} = |\alpha| \|f(x)\|_{L^2(\Omega)}$.

4. Akan ditunjukkan $\|f(x) + g(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(x)\|_{L^2(\Omega)}$.

Berdasarkan ketaksamaan Minkowski, diperoleh

$$\begin{aligned} \|f(x) + g(x)\|_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (|f(x) + g(x)|)^2 dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(x)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Karena fungsi $\|\cdot\|$ memenuhi 4 sifat norma, maka dapat disimpulkan $(L^2(\Omega), \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

Definisi 2.4 Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma dengan $x_0 \in X$. Persekitaran- ε dalam \mathbb{R} didefinisikan sebagai himpunan $V_{\varepsilon}(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$.

Contoh 2.3 Misalkan $X = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma dengan $\|x - x_0\| = |x - x_0|$ untuk setiap $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Persekitaran- ε dalam \mathbb{R} adalah

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon}(x_0) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \|x - x_0\| = |x - x_0| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} \\ &= (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Jadi, persekitaran- ε dalam \mathbb{R} merupakan interval buka $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Definisi 2.5 Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma. Himpunan $A \subset X$ dengan $A \neq \emptyset$ dikatakan terbatas jika terdapat $k > 0$ sedemikian sehingga

$$\|x - x_0\| \leq k, \text{ untuk setiap } x, x_0 \in A.$$

(Kreyszig, 1989)

Contoh 2.4 Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma dengan $\|x - x_0\| = |x - x_0|$ untuk setiap $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Himpunan $A = [0,1] \subset X$ merupakan himpunan terbatas karena terdapat $k = 1$ sehingga $\|x - x_0\| \leq k$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

Definisi 2.6 Ambil titik di $x_0 \in X$ dan bilangan riil $r > 0$ diberikan dalam tiga kasus yaitu,

$$1. B(x_0; r) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\} \quad (\text{Bola buka})$$

$$2. \bar{B}(x_0; r) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\} \quad (\text{Bola tutup})$$

$$3. S(x_0; r) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| = r\} \quad (\text{Bola})$$

dengan x_0 adalah pusat bola dan r adalah jari-jari bola.

(Kreyszig, 1989)

Definisi 2.7 Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma dan $A \subset X$. Subhimpunan A dikatakan buka jika untuk setiap $x_0 \in A$ terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $V_\varepsilon(x_0) \subseteq A$. Subhimpunan A dikatakan tutup jika $X - A$ buka, dengan $X - A = \{x \in X, x \notin A\}$. Selanjutnya $X - A$ ditulis A^c .

(Kreyszig, 1989)

Contoh 2.5 Diketahui ruang bernorma $X = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ dan $\|x - x_0\| = |x - x_0|$ untuk setiap $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Himpunan $D = \{x_0 \in \mathbb{R} \mid 0 < x_0 < 1\} \subset X$ buka di X .

Bukti:

Ambil sebarang $x_0 \in D$.

Pilih $\varepsilon = \min \{x_0, 1 - x_0\}$.

(i) Kasus 1: untuk $\varepsilon = \min \{x_0, 1 - x_0\} = x_0$, maka $\varepsilon = x_0$ dan

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(x_0) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon + x_0 < x < \varepsilon + x_0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon + x_0 < x < (1 - x_0) + \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -x_0 + x_0 < x < 1 - x_0 + x_0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}. \end{aligned}$$

Jadi, $V_\varepsilon(x_0) \subseteq D$.

(ii) Kasus 2: $\varepsilon = \min \{x_0, 1 - x_0\} = 1 - x_0$, maka $\varepsilon = 1 - x_0$ dan

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(x_0) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon + x_0 < x < \varepsilon + x_0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon + (1 - x_0) < x < \varepsilon + x_0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - (\varepsilon + x_0) < x < 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}.
\end{aligned}$$

Jadi, $V_\varepsilon(x_0) \subseteq D$.

Berdasarkan (i) dan (ii), diperoleh bahwa himpunan D buka di X karena untuk setiap $x_0 \in D$ terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $V_\varepsilon(x_0) \subseteq D$.

2.4 Ruang Banach

Definisi 2.8 Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma. X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{u_n\}$ dalam X konvergen ke suatu $x \in X$. Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach.

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.6 Ruang $L^2(\Omega)$ merupakan ruang Banach.

Langkah 1. Menunjukkan ruang $L^2(\Omega)$ adalah ruang bernorma.

Berdasarkan pada Contoh 2.2 telah ditunjukkan bahwa fungsi $\|\cdot\|$ memenuhi 4 sifat norma, sehingga disimpulkan bahwa $(L^2(\Omega), \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

Langkah 2. Menunjukkan $L^2(\Omega)$ adalah ruang lengkap.

Untuk menunjukkan $L^2(\Omega)$ lengkap, maka perlu ditunjukkan bahwa suatu barisan Cauchy $\{u_n\}$ konvergen ke barisan $u \in L^2(\Omega)$ yang dibuktikan melalui teorema berikut:

Teorema 2.1 (Teorema Riesz-Fischer) Ruang bernorma $L^2(\Omega)$ merupakan ruang yang lengkap.

Bukti:

Untuk kasus $L^2(\Omega)$, maka cukup hanya ditunjukkan bahwa untuk setiap barisan Cauchy $\{u_n\}$ di $L^2(\Omega)$, maka terdapat sebuah barisan $u \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga barisan u_n konvergen ke suatu $u \in L^2(\Omega)$.

Karena $\{u_n\}$ adalah barisan Cauchy, maka dapat ditemukan sub barisan u_{n_j} dan dengan memilih $\varepsilon = 2^{-j} > 0$ sedemikian sehingga

$$\|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_{L^2} < 2^{-j}.$$

Diperoleh

$$\left\| \sum_{j=1}^k |u_{n_{j+1}} - u_{n_j}| \right\|_{L^2} < \sum_{j=1}^k 2^{-j} < 1.$$

Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Selanjutnya didefinisikan

$$v(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k |u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x)|.$$

Dengan menggunakan lemma Fatou, akibatnya

$$\|v\|_{L^2} \leq 1.$$

Sehingga mengakibatkan $v(x) < \infty$ untuk hampir disetiap titik dan barisan berikut

$$u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x))$$

jelas konvergen untuk hampir disetiap titik x . Karena jumlah parsial dari barisan ini hanya $u_{n_{k+1}}(x)$, maka dapat didefinisikan suatu fungsi $u(x)$ untuk hampir disetiap titik $x \in (0,1)$ dengan

$$u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j}(x).$$

Akhirnya, dapat ditunjukkan bahwa $u \in L^2(\Omega)$ maka $\|u_n - u\|_{L^2} \rightarrow 0$,

Pilih suatu nilai N sedemikian sehingga

$$\|u_n - u_m\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N.$$

Dengan menggunakan lemma Fatou, akibatnya

$$\|u - u_{n_j}\|_{L^2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k} - u_{n_j}\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Karena $n_j \geq N$, maka $u - u_{n_j} \in L^2(\Omega)$. Perhatikan bahwa,

$$u = (u - u_{n_j}) + u_{n_j} \text{ dengan } u_{n_j} \in L^2$$

maka diperoleh $u \in L^2(\Omega)$. Untuk $n > N$, pilih j sedemikian sehingga $n_j \geq N$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^2} &\leq \|u_n - u_{n_j}\|_{L^2} + \|u_{n_j} - u\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap barisan Cauchy $\{u_n\}$ di $L^2(\Omega)$, maka terdapat sebuah barisan $u \in L^2(\Omega)$ sedemikian sehingga barisan u_n konvergen ke suatu $u \in L^2(\Omega)$.

Karena barisan u_n konvergen ke u di ruang $L^2(\Omega)$, maka ruang $L^2(\Omega)$ adalah ruang yang lengkap. Selanjutnya karena ruang $L^2(\Omega)$ adalah ruang bernorma dan lengkap maka dapat disimpulkan $L^2(\Omega)$ merupakan ruang Banach.

2.5 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 2.9 Misalkan X ruang vektor atas lapangan Riil. Hasil kali dalam pada X adalah suatu fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
2. $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ dan $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{0}$ jika dan hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(Kreyszig, 1989)

Definisi 2.10 Suatu ruang Hilbert adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap dengan norma yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

(Kreyszig, 1989).

Contoh 2.7 Fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ yang didefinisikan pada $L^2(\Omega)$ sebagai berikut:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

untuk setiap $f, g \in L^2(\Omega)$ merupakan ruang Hilbert.

Bukti:

Langkah 1. Menunjukkan bahwa fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ yang didefinisikan pada $L^2(\Omega)$ memenuhi 4 sifat ruang hasil kali dalam

$$\begin{aligned} \text{(i) } \langle f + g, h \rangle &= \int_{\Omega} (f(x) + g(x))h(x) dx \\ &= \int_{\Omega} (f(x)h(x) + g(x)h(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x)h(x)dx + \int_{\Omega} g(x)h(x) dx \\ &= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \langle \alpha f, g \rangle &= \int_{\Omega} \alpha f(x)g(x)dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \\ &= \alpha \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii) } \langle g, f \rangle &= \int_{\Omega} g(x)f(x)dx \\ &= \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \\ &= \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

(iv) $\langle f, f \rangle \geq 0$ dan $\langle f, f \rangle = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$.

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \int_{\Omega} f(x)f(x)dx \\ &= \int_{\Omega} (f(x))^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\langle f, f \rangle \geq 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$\langle f, f \rangle = 0 \text{ jika dan hanya jika } f = 0.$$

Pertama, jika $\langle f, f \rangle = 0$ maka akan ditunjukkan $f(x) = 0$.

Perhatikan bahwa,

$$\langle f, f \rangle = \int_{\Omega} f(x)f(x) dx = \int_{\Omega} (f(x))^2 dx = 0.$$

Karena $\int_{\Omega} (f(x))^2 dx = 0$ maka haruslah $(f(x))^2 = 0$. Akibatnya $f(x) = 0$.

Kedua, jika $f(x) = 0$ maka akan ditunjukkan $\langle f, f \rangle = 0$.

Karena $f(x) = 0$ maka diperoleh $(f(x))^2 = 0$ sehingga dapat ditulis

$$\langle f, f \rangle = \int_{\Omega} f(x)f(x)dx = \int_{\Omega} (f(x))^2 dx = \int_{\Omega} (0)^2 dx = 0$$

Jadi terbukti bahwa fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ yang didefinisikan pada $L^2(\Omega)$ memenuhi 4 sifat ruang hasil kali dalam.

Langkah 2. Menunjukkan $L^2(\Omega)$ adalah ruang lengkap.

Sebelum menunjukkan kelengkapan ruang $L^2(\Omega)$, Terlebih dahulu didefinisikan norma yang diinduksi dari ruang hasil kali dalam.

Ambil sebarang $f, g \in L^2(\Omega)$, maka

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Untuk $f = g$, diperoleh

$$\langle f, f \rangle = \int_{\Omega} f(x)f(x)dx$$

$$\langle f, f \rangle = \int_{\Omega} (f(x))^2 dx$$

$$\sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{\Omega} (f(x))^2 dx}$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\Omega} (f(x))^2 dx}.$$

Sehingga barisan cauchy $\{u_n\}$ di ruang $L^2(\Omega)$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n > N$ maka

$$\|u_m - u_n\| = \sqrt{\int_{\Omega} |u_m - u_n|^2 dx} < \varepsilon.$$

Berdasarkan Teorema Riesz-Fischer (2.1), maka diketahui bahwa ruang $L^2(\Omega)$ lengkap. Karena $L^2(\Omega)$ memenuhi aturan hasil kali dalam dan $L^2(\Omega)$ lengkap maka $L^2(\Omega)$ merupakan ruang Hilbert.

2.6 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah persamaan-persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan tersebut haruslah melibatkan paling sedikit dua variabel bebas (Ayres, 1992). Sebagai contoh diberikan persamaan diferensial parsial berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ dengan } u = u(x, t)$$

Pada persamaan variabel u merupakan variabel terikat, sedangkan x dan y merupakan variabel bebas. Karena u bergantung pada x dan t . maka untuk mencari nilai $\frac{\partial u}{\partial x}$, u akan diturunkan terhadap x dan t akan menjadi konstanta. Sedangkan untuk mencari nilai $\frac{\partial u}{\partial t}$, u akan diturunkan terhadap t dan x akan menjadi konstanta

Dalam Persamaan Diferensial Parsial perlu diketahui notasi-notasi berikut

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

Suatu Persamaan Diferensial Parsial (PDP) disebut linear jika tidak ada perkalian antar variabel terikat dan derivatifnya. Selain itu, koefisien pada suatu persamaan tersebut hanya tergantung pada variabel bebas. Sedangkan suatu PDP disebut non linear jika variabel terikat u dan turunan parsialnya berpangkat lebih dari satu dengan koefisien konstanta atau koefisien yang tergantung pada variabel terikat.

Orde dari suatu Persamaan Diferensial Parsial merupakan tingkat tertinggi dari turunan parsialnya. Berikut beberapa contoh Persamaan Diferensial Parsial (PDP) dengan orde tertentu.

Contoh 2.8

- (1) $a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$ (PDP Orde 2 & Linear).
- (2) $2u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial x} = 3x$ (PDP Orde 2 & Non Linear).

Bentuk umum PDP Orde 2 Linear dengan dua variabel sebagai berikut

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0.$$

PDP ini terbagi dalam 3 tipe

- (1) Persamaan Diferensial Eliptik,

Persamaan (2.1) dikatakan persamaan eliptik jika $B^2 - 4AC < 0$.

Contoh: Persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

- (2) Persamaan Diferensial Parabolik,

Persamaan (2.1) dikatakan persamaan diferensial parabolik jika $B^2 - 4AC = 0$.

Contoh: Persamaan Model Sistem Kemostat

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = K \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \mu(s)u \\ \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu(s)u \end{cases}$$

- (3) Persamaan Diferensial Hiperbolik

Persamaan (2.1) dikatakan persamaan diferensial hiperbolik jika $B^2 - 4AC > 0$.

Contoh: Persamaan Gelombang

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2.7 Model Matematika Sistem Kemostat

Dalam dunia ilmu pengetahuan, banyak model matematika yang telah dibuat untuk memprediksi dan mempelajari sistem biologis. Untuk melihat keberlanjutan dan kepunahan suatu mikroorganisme, dibutuhkan suatu alat khusus salah satunya

kemostat. Kemostat adalah sebuah alat laboratorium yang digunakan untuk pertumbuhan mikroorganisme dalam lingkungannya (Novick dan Szilard, 2015).

Dalam sistem ini, konsentrasi substrat (s) dan populasi mikroorganisme (x) berubah seiring waktu. Laju perubahan konsentrasi nutrisi dipengaruhi oleh beberapa faktor seperti laju aliran masukan nutrisi, laju konsumsi oleh mikroorganisme, dan laju penghilangan. Demikian pula populasi mikroorganisme tumbuh dengan laju tertentu dan dipengaruhi oleh konsentrasi nutrisi. (Jerome dkk., 2017).

Bentuk umum dari model kemostat klasik sebagai berikut :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = K(s_{in} - s) - \mu(s)u \\ \frac{du}{dt} = (\mu(s) - K)u, \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan $s(x, t)$ dan $u(x, t)$ masing-masing merupakan konsentrasi substrat dan spesies, K menunjukkan laju pengenceran/aliran masuk, s_{in} konsentrasi masukan dari substrat dan $\mu(s)$ menggambarkan fungsi konsumsi spesies. Terdapat berbagai kemungkinan untuk mendefinisikan fungsi konsumsi dalam model kemostat. Fungsi konsumsi menggambarkan bagaimana spesies mengonsumsi nutrisi dalam lingkungan yang diberikan. Salah satu jenis fungsi konsumsi yang paling umum digunakan dalam model kemostat adalah tipe Monod yang dimodifikasi menjadi fungsi tipe Haldane sebagai berikut

$$\mu(s) = \frac{msu}{a + s}$$

Namun, dalam perkembangannya, model persamaan diferensial biasa tidak mencerminkan keadaan yang sebenarnya, oleh karena itu dalam paper Lan dan Lin (2021) mengkonstruksikan model kemostat menjadi sistem persamaan diferensial parsial berikut:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = K \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \mu(s)u \\ \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu(s)u, \end{cases} \quad (2.2)$$

dengan :

$s(x, t)$: Konsentrasi nutrisi pada waktu t (g/L)

$u(x, t)$: Konsentrasi mikroorganisme pada waktu t (g/L)

K : Laju pengenceran (L/h)

$\mu(s)$: Laju konsumsi mikroorganisme (h^{-1})

m : Laju pertumbuhan maksimum (h^{-1})

a : Konstanta Michaelis-Menten

$\frac{\partial s}{\partial r}$: Laju perubahan nutrisi terhadap waktu ($g/L/h$)

$\frac{\partial u}{\partial t}$: Laju perubahan mikroorganisme terhadap waktu ($g/L/h$)

Model matematika Persamaan (2.3) memiliki nilai koefisien $A = D, B = 0$, dan $C = 0$, maka diperoleh nilai $B^2 - 4AC = 0$ yang berarti bahwa persamaan termasuk persamaan diferensial tipe Parabolik. Persamaan tersebut juga termasuk PDP non-linear karena terdapat perkalian antar variabel terikat dan derivatifnya.

Pada titik awal (saat $t = 0$), konsentrasi nutrisi dan mikroorganisme bernilai non-negatif dapat dituliskan sebagai syarat awal berikut:

$$s(x, 0) = s_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Saat waktu mulai berjalan, sistem kemostat memenuhi syarat batas berikut;

$$s_x(0, t) = s^0, \quad s_x(1, t) + \gamma s(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) + \gamma u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

Syarat batas $s_x(0, t) = s^0$ menunjukkan bahwa pada tepi kiri sistem kemostat, konsentrasi nutrisi memiliki gradien yang konstan dan bernilai positif sebesar s^0 . Ini menggambarkan kondisi di mana nutrisi masuk ke dalam sistem pada tepi kiri dengan laju aliran s^0 . Sedangkan untuk $s_x(1, t) + \gamma s(1, t) = 0$, menunjukkan bahwa pada tepi kanan sistem kemostat, aliran keluar diimbangi oleh laju aliran masuk yang dikendalikan oleh parameter γ . Syarat batas ini mencerminkan kondisi

di mana terdapat aliran keluar dari sistem pada tepi kanan, namun aliran ini diatur oleh parameter γ sehingga terdapat keseimbangan antara aliran masuk dan keluar dari sistem kemostat. Ini menunjukkan pada tepi kanan kemostat konsentrasi substratnya stabil dan bernilai nol. Diasumsikan juga bahwa akan selalu ada substrat pada posisi x dan waktu t .

(Jerome dkk., 2017)

2.8 Absorbing Set

Definisi 2.11 Misalkan $B(0, R)$ bola buka dengan pusat 0 dan radius $R > 0$ di H . Himpunan terbatas $B_0 \subset H$ disebut *absorbing set* jika untuk setiap nilai awal $z_0 \in B(0, R) \subset H$ terdapat $t_H = t_H(R)$ sedemikian sehingga

$$z(x, t) \in B_0, \quad \forall t \geq t_H$$

dimana $z(x, t)$ adalah solusi yang dimulai dari z_0 .

(Giorgi dan Pata, 1998)

Lemma 2.1. Untuk setiap z_0 elemen himpunan terbatas B subset H , terdapat $t_H = t_H(R) \geq 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $t \geq t_H$ dipenuhi

$$\|z(t, z_0)\| \leq C$$

dengan $C > 0$.

(Ammi, 2023)

Ketaksamaan Poincare`

Definisi 2.12 Misalkan p , $1 \leq p < \infty$, dan Ω adalah himpunan terbatas, maka terdapat konstanta C , bergantung pada Ω dan p . Sehingga untuk setiap fungsi u dalam ruang Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, berlaku

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

(Hunter, 2014)

Gronwall Lemma

Lemma 2.2 Misalkan u suatu fungsi kontinu dan a, b suatu konstanta positif yang memenuhi pertidaksamaan berikut

$$u' \leq au + b \quad \text{pada } (0, T)$$

maka u memenuhi pointwise estimate

$$u(t) \leq e^{A(t)}u(0) + \int_0^t b(s)e^{A(t)-A(s)}ds, \quad \forall t \in [0, T)$$

dengan $A(t) := \int_0^t a(s)ds$.

(Paris, 2019)

Beberapa contoh kasus dalam *Gronwall Lemma* sebagai berikut:

1. $u' \leq a(t)u + b(t) \Rightarrow u(t) \leq u(0)e^{A(t)}$.
2. $u' \leq au + b \Rightarrow u(t) \leq u(0)e^{at} + \frac{b}{a}$.
3. $u' \leq au + b(t) \Rightarrow u(t) \leq u(0)e^{a(t)} + \int_0^t e^{a(t-s)}b(s)ds$.
4. $u' + b(t) \leq a(t)u, a, b \geq 0 \Rightarrow u(t) + \int_0^t b(s)ds \leq u(0)e^{A(t)}$.

2.9 Ketidaksamaan Differensial Energi

Teorema 2.2 (Ketidaksamaan Diferensial Energi)

$$\frac{dE}{dt} + C_1E(t) \leq C_2 \quad \forall t \geq 0$$

dimana $E(t)$ adalah fungsi energi tertentu dari solusi u , dan setara dengan norma (atau norma kuadrat) solusi di H , dan C_1, C_2 adalah dua konstanta positif yang tidak bergantung dari data awal u_0 , dengan

$$E(t) \leq E(0)e^{-C_1t} + \frac{C_2}{C_1} \quad \forall t \geq 0.$$

$E(0)$ merujuk pada nilai awal dari fungsi energi tertentu dari solusi u pada waktu awal $t = 0$. Dalam konteks ini, $E(0)$ dibatasi oleh suatu konstanta yang tergantung pada himpunan terbatas B dari data awal. Artinya, nilai $E(0)$ tidak dapat melebihi batas tertentu yang tergantung pada himpunan B . Maka akan ada waktu tertentu $t_1(B)$ yang bergantung pada B , di mana untuk setiap $t \geq t_1(B)$, energi $E(t)$ akan terbatas oleh $\frac{2C_2}{C_1}$

$$E(t) \leq \frac{2C_2}{C_1}$$

Hal ini menyiratkan bahwa setelah waktu $t_1(B)$ tertentu, semua orbit yang dimulai

dari himpunan terbatas B akan secara seragam masuk ke dalam bola penyerap dengan radius $\frac{2c_2}{c_1}$.

(Zheng dan Songmu, 2004)