ANALISIS MODEL DINAMIKA PENYEBARAN ANIMASI JEPANG DENGAN MEMODIFIKASI MODEL EPIDEMI SEIR

SKRIPSI

ILHAM PAKAYA

H011191026

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

ANALISIS MODEL DINAMIKA PENYEBARAN ANIMASI JEPANG DENGAN MEMODIFIKASI MODEL EPIDEMI SEIR

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ILHAM PAKAYA

H011191026

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ilham Pakaya
NIM	: H011191026
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Analisis Model Dinamika Penyebaran Animasi Jepang dengan Memodifikasi Model Epidemi SEIR

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 19 Maret 2024

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL
D4782ALX109013100

Ilham Pakaya

NIM. H01191026

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS MODEL DINAMIKA PENYEBARAN ANIMASI JEPANG DENGAN MEMODIFIKASI MODEL EPIDEMI SEIR

Disusun dan diajukan oleh

ILHAM PAKAYA

H011191026

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 19 maret 2024

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.	**Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**
NIP. 19680114 199412 1 001	**NIP. 19850529 200812 1 002**

Ketua Program Studi

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 19680429 200212 1 001

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sebagai Nabi yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga penyusunan skripsi dengan judul **"Analisis Model Dinamika Penyebaran Animasi Jepang dengan Memodifikasi Model Epidemi SEIR"** dapat diselesaikan sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi serta nasihat dari berbagai pihak. Pada kesempatan kali ini, izinkan penulis menyampaikan terima kasih dan memberikan penghargaan kepada kedua orang tua penulis, Ayah **Alm. Daud Pakaya** dan Ibu **Erna Adam**, yang dengan sabar telah membesarkan dan mendidik penulis, serta senantiasa memberikan do'a dan dukungan baik secara materiel maupun morel sehingga penulis mampu menyelesaikan pendidikan di perguruan tinggi dan mendapat gelar yang insyaAllah dapat dimanfaatkan penulis di kemudian hari. Terima kasih yang sebesar-besarnya juga saya sampaikan kepada kakak saya, **Nonce Pakaya, Nurdin Pakaya, Perlin Pakaya**, dan ayah saya **Ismail Umar** serta seluruh keluarga yang telah memberikan doa, dukungan serta motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, penulis hendak menyampaikan ucapan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

beserta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan begitu banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta para **Staf Departemen Matematika** yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal mengenai persuratan.

3. Bapak **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.** selaku Pembimbing Utama dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Pertama yang dengan sabar dan ikhlas meluangkan waktu ditengah kesibukannya untuk membimbing dan memberi masukkan dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak **Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc., Ph.D.** selaku Penguji sekaligus Pembimbing Akademik selama penulis menempuh Pendidikan S1. Penulis mengucapkan terima kasih karena telah memberikan saran dan masukan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini serta waktu yang telah diberikan dalam membimbing penulis terkait segala hal dalam penyelesaian studi S1 penulis.
5. Ibu **Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** selaku Penguji yang telah banyak memberikan saran dan masukan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
6. Keluarga besar **Pakaya** dan **Adam** yang telah memberikan do'a dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan perkuliahan penulis.
7. Penghuni **Asrama Putera Gorontalo** serta **KKIG Makassar** yang telah menjadi sosok orang tua ataupun keluarga penulis selama menempuh pendidikan di Makassar.
8. Teman-teman **RASIO19, Rey, Muti, Cicit** beserta keluarga besar **HPMIG Makassar** yang telah bersahabat dan menemani penulis serta selalu memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis.
9. **Ikhsan, Toni, Zidan, Reza, Wawan, dan Hanif** yang selalu memberikan dukungan dan bantuan serta tempat untuk meredahkan beban pikiran selama perkuliahan.

10. **Aan, Tasya, Ade, Faika, Rabil, Fatah** dan seluruh **Matematika 2019** yang selalu memberikan bantuan dan solusi selama perkuliahan serta memberikan kenangan yang indah dalam keseharian penulis semasa kuliah.
11. Teman-teman **KKNT PUPR Maros 3 Desa Pajukukang** yang telah membersamai penulis dan banyak membantu penulis selama di lokasi KKN.
12. Teman-teman **POL19ON** dan **MIPA 2019** yang telah menjalin kekerabatan dengan penulis selama berproses di bangku perkuliahan.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang juga telah memberikan doa, dukungan dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, penulis berharap semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapat balasan dari Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 19 Maret 2024

Ilham Pakaya

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ilham Pakaya
NIM	: H011191026
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (***Non-exclusive Royalty- Free Right***) atas karya ilmiah saya yang berjudul

Analisis Model Dinamika Penyebaran Animasi Jepang dengan Memodifikasi Model Epidemi SEIR

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 19 Maret 2024

Yang menyatakan,

Ilham Pakaya

ABSTRAK

Model matematika dapat digunakan untuk memformulasikan suatu fenomena dalam berbagai kasus. Dalam skripsi ini, penulis tertarik untuk membahas model matematika dinamika penyebaran animasi Jepang sesuai dengan keadaan yang terjadi saat ini. Konstruksi model diperoleh dengan memodifikasi model epidemi SEIR yang terbagi menjadi 5 subpopulasi, yaitu *suspected, exposed, infected, quiet,* dan *recovered*. Berdasarkan konstruksi model diperoleh titik kesetimbangan untuk bebas penyakit dan endemik penyakit. Kemudian, penulis menganalisis kestabilan pada titik kesetimbangan sebagai syarat kestabilan berdasarkan parameter yang digunakan. Dengan menggunakan mahasiswa FMIPA Universitas Hasanuddin sebagai sampel penelitian maka berdasarkan data awal, penulis meningkatkan parameter yang masuk ke individu yang menyebarkan animasi Jepang, diperoleh perubahan yang signifikan pada bilangan reproduksi dasar (R_0) sehingga simulasi model menunjukkan mewabahnya animasi Jepang dengan populasi untuk setiap kompartemen konvergen menuju titik kesetimbangan endemik penyakit.

Kata Kunci: model matematika, animasi jepang, model SEIR, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan

Judul	: Analisis Model Dinamika Penyebaran Animasi Jepang dengan Memodifikasi Model Epidemi SEIR
Nama	: Ilham Pakaya
NIM	: H011191026
Program Studi	: Matematika

ABSTRACT

Mathematical models can be used to formulate a phenomenon in various cases. In this thesis, the author is interested in discussing the mathematical model of the dynamics of the spread of Japanese animation in accordance with the current situation. The model construction is obtained by modifying the SEIR epidemic model which is divided into 5 subpopulations, namely suspected, exposed, infected, quiet, and recovered. Based on the model construction, the equilibrium point for disease-free and endemic disease is obtained. Then, the author analyzes the stability of the equilibrium point as a condition of stability based on the parameters used. By using the students of FMIPA Hasanuddin University as the research sample, then based on the initial data, the author increases the parameters that enter the individual spreading Japanese animation, obtained a significant change in the basic reproduction number (R_0) so that the simulation model shows the epidemic of Japanese animation with the population for each compartment converging to the endemic disease equilibrium point.

Keywords: *mathematical model, japanese animation, SEIR model, basic reproduction number, stability analysis*

Title	:	*Model Analysis of the Dynamics of the Spread of Japanese Animation by Modifying the SEIR Epidemic Model*
Name	:	Ilham Pakaya
Student ID	:	H011191026
Study Program	:	*Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Jepang merupakan salah satu negara yang dikategorikan sebagai negara maju. Tidak diragukan lagi bahwa perkembangan negara Jepang tidak terjadi secara kebetulan atau tanpa usaha. Pasca perang dunia II, Jepang mengalami banyak kehancuran sehingga salah satu usaha untuk menstabilkan negaranya adalah dengan melakukan diplomasi melalui elemen budaya. Pendekatan Jepang dengan cara ini bertujuan untuk mengubah diri dan menjadi negara yang besar di bidang ekonomi tanpa melibatkan persaingan di bidang politik. Oleh karena itu, pada era pertengahan tahun 1990-an Jepang mulai memperkenalkan budaya mereka dengan *pop culture* atau budaya populer yang tergambarkan dari produk kesenian, gaya berpakaian, genre musik, makanan tradisional, gaya hidup dan lain sebagainya. Dengan menuangkan kreativitas yang tinggi, Jepang mampu menyebarkan *pop culture* hingga mendunia dan salah satu budaya populer yang terkenal adalah animasi Jepang (Widodo, 2018).

Animasi Jepang atau lebih dikenal dengan sebutan Anime merupakan salah satu produk budaya yang mampu menarik perhatian masyarakat Indonesia baik dari kalangan remaja hingga orang dewasa. Perkembangan animasi Jepang di Indonesia semakin mewabah dengan dibuktikan banyaknya komunitas penggemar animasi Jepang. Pengaruh dari media massa, hubungan sosial, tayangan televisi atau bioskop menjadi faktor penyebab dari penyebaran animasi Jepang (Nugraha dan Hendrastomo, 2016). Namun, kepopuleran animasi Jepang memiliki dampak dimana para penggemarnya yang lekat dengan budaya menghabiskan waktu di depan komputer sehingga orientasi diri pada ruang publik menjadi semakin berkurang. Hal ini menyebabkan kemampuan bersosialisasi kurang memadai yang kemudian membentuk individu yang mengarah pada perilaku “*dissenting personality*” atau dengan kata lain perilaku anti sosial (Kusuma, 2019).

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, matematika memberikan peranan penting dalam bidang kesehatan yaitu untuk memformulasikan suatu fenomena penyebaran penyakit yang dikenal dengan model epidemi. Penelitian tentang modifikasi model epidemi SEIR telah dilakukan oleh Leonardo Lopez dan Xavier Rodo yang membahas tentang modifikasi model SEIR untuk memprediksi wabah *Coronavirus Disease 2019* di Spanyol dan Italia. Penelitian serupa juga dilakukan oleh Zhou Tang dkk yang memprediksi infeksi *Coronavirus* jenis baru berdasarkan model epidemi SEIR yang dimodifikasi. Selain dari penyebaran penyakit, model epidemi juga dapat digunakan untuk memformulasikan kasus fenomena sosial. Adapun penelitian terkait kasus fenomena sosial seperti model epidemi penyebaran berita di Twitter yang diteliti oleh Saeed Abdullah dan Xindong Wu, serta penelitian mengenai model matematika SIR sebagai solusi kecanduan penggunaan media sosial oleh Syafruddin dkk.

Berdasarkan pemaparan di atas, penulis juga tertarik untuk melakukan penelitian tentang fenomena sosial dengan kasus yang berbeda yaitu model matematika pada penyebaran animasi Jepang yang dimana penelitian ini dikembangkan berdasarkan realitas yang terjadi saat ini. Adapun penelitian ini dituangkan dalam judul skripsi “Analisis Model Dinamika Penyebaran Animasi Jepang dengan Memodifikasi Model Epidemi SEIR”. Penelitian ini akan membahas tentang pemodelan kasus penyebaran animasi Jepang kemudian menganalisis titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan kestabilannya serta melakukan simulasi dari model yang digunakan.

I.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka peneliti dapat merumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana parameter model matematika yang digunakan untuk dinamika penyebaran animasi Jepang?

2. Bagaimana analisis kestabilan titik kesetimbangan pada model matematika dinamika penyebaran animasi Jepang?
3. Bagaimana simulasi numerik pada model matematika dinamika penyebaran animasi Jepang?

I.3 Batasan Masalah

Agar penelitian ini terarah dan menghindari terjadinya kesalahan maka diberikan beberapa batasan masalah sebagai berikut:

1. Penyebaran animasi Jepang terjadi pada sistem yang tertutup sehingga ukuran pada populasi konstan dimana tidak ada perpindahan masuk ataupun keluar pada populasi.
2. Perubahan populasi rentan terjadi akibat interaksi dengan populasi terinfeksi, interaksi terjadi secara tidak langsung dengan menyebar melalui media sosial dan sejenisnya.
3. Individu yang berhenti menonton yaitu individu yang tidak menonton lebih dari satu musim atau tiga bulan.

I.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan penelitian ini adalah

1. Mengonstruksi model matematika yang digunakan untuk dinamika penyebaran animasi Jepang.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model matematika dinamika penyebaran animasi Jepang.
3. Membuat simulasi numerik pada model matematika dinamika penyebaran animasi Jepang.

I.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menjadi sumber informasi untuk menambah wawasan tentang model matematika epidemi serta memperdalam dan mengembangkan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mencari solusi dalam permasalahan di kehidupan sehari-hari.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Animasi Jepang

Animasi khas dari negara Jepang memiliki sebutan khusus di kalangan masyarakat yaitu *Anime*. Karakteristik dari anime biasanya memiliki gambar yang berwarna dengan menampilkan karakter yang beragam jenis. Karakter yang ditampilkan juga memiliki perannya masing-masing seperti antagonis, protagonis hingga figuran. Gaya gambar yang digunakan dalam pembuatan anime yaitu mengambil rujukan dari *manga* atau komik khas Jepang (Yamane, 2020).

Animasi Jepang merupakan produk budaya populer Jepang yang dapat diakses dengan mudah yaitu melalui internet. Produk ini mulai populer di Indonesia pada akhir tahun 1980-an dimana saat itu produk ini masih dinikmati dengan menggunakan *dubbing* atau suara pengganti dalam bahasa Indonesia. Setelah munculnya internet, penikmat budaya populer Jepang menjadi lebih mudah untuk mengakses versi aslinya. Hal inilah yang menyebabkan banyak masyarakat yang antusias untuk menonton dan mempelajari budaya Jepang (Wahidati dkk, 2018).

Berkembangnya animasi Jepang di Indonesia memberikan dampak yang memengaruhi kehidupan dari penggemarnya. Dalam penelitian (Hidayat, 2020) menjelaskan tentang subkultur para penggemar *Anime* yang terbentuk dari akulturasi bahasa, tingkah laku, gaya berpakaian, aksesoris, gaya rambut, makanan, nilai moral, dan preferensi kebudayaan yang berakar dari budaya Jepang. Hal tersebut menimbulkan dampak negatif seperti hilangnya rasa nasionalisme pada seseorang dimana mereka cenderung menyukai hal-hal yang berhubungan dengan Jepang dan mempelajari budaya populer Jepang dibandingkan dengan budaya tradisional negaranya sendiri. Dampak lain yaitu *No Life* atau di Jepang sendiri dikenal dengan sebutan *Hikikomori* dimana seseorang menarik diri dari masyarakat dan memilih untuk beraktifitas seorang diri di dalam rumah seperti menelusuri internet dan menonton *Anime* (Hidayat, 2020).

II.2 Persamaan Differensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan matematika yang melibatkan turunan atau diferensial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Raisinghania, 2013). Beberapa contoh dari persamaan diferensial sebagai berikut:

$$dy = (x + \sin x)dx, \tag{2.1}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^5 = e^t, \tag{2.2}$$

$$y = \sqrt{x}\frac{dy}{dx} + \frac{k}{dy/dx}, \tag{2.3}$$

$$k\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)^2, \tag{2.5}$$

$$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/y\partial^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = 0. \tag{2.6}$$

Persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua jenis yaitu persamaan diferensial biasa (*Ordinary differential equations*) dan persamaan diferensial parsial (*Partial differential equations*). Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan terhadap satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan terhadap lebih dari satu variabel bebas (Raisinghania, 2013). Pada contoh di atas, Persamaan (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) merupakan contoh persamaan diferensial biasa dan untuk Persamaan (2.5), (2.6) merupakan contoh persamaan diferensial parsial.

II.3 Sistem Persamaan Differensial

Sistem persamaan diferensial merupakan sebuah sistem yang terdiri atas *n* buah persamaan diferensial dimana *n* merupakan fungsi yang tidak diketahui dan n adalah bilangan bulat positif yang lebih besar sama dengan 2 (Finizio dan Ladas, 1988).

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.7}$$

dengan $\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}$.

Sistem persamaan diferensial (2.7) mempunyai bentuk umum seperti berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned} \tag{2.8}$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan variabel terikat dan t merupakan variabel bebas, sehingga $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t), \dots,$ $x_n = x_n(t)$, dimana untuk $\frac{dx_n}{dt}$ adalah turunan atau derivatif fungsi x_n terhadap t dan f_n adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan t (Neuhauser, 2004).

Jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ pada Sistem (2.8) adalah sistem yang linier dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$, maka sistem diferensial tersebut dikatakan linier. Apabila Sistem (2.8) linier, maka dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,\\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n,\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Selanjutnya sistem persamaan diferensial (2.9) dapat ditulis

$$\dot{x} = Ax \tag{2.10}$$

dengan A matriks ukuran $n \times n$ dan $x \in E; E \subseteq R^n$.

Definisi dari sistem persamaan diferensial didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.1

Diberikan $E \subseteq R^n$, E *himpunan terbuka dan* $f_i \in C(E, R), i = 1,2, \ldots, n$. *Vektor* $x(t) \in R^n$ *disebut penyelesaian Sistem (2.7) pada interval* I *jika* $x(t)$ *diferensiabel pada* I *dan* $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$ *untuk setiap* $t \in I$ *dan* $x(t) \in E$ (Perko, 2001).

II.4 Titik Kesetimbangan

Dalam model penyebaran penyakit terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan penyakit endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah keadaan dimana tidak ada penyakit pada populasi atau dapat dikatakan tidak ada yang terjangkit penyakit tersebut, sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit adalah kondisi suatu penyakit selalu ada dalam suatu populasi yang berarti penyakit tersebut akan terus menginfeksi.

Sistem yang tidak berubah dari waktu ke waktu dapat diartikan setimbang sehingga kesetimbangan pada populasi merupakan jumlah yang tidak berubah dari waktu ke waktu. Definisi titik kesetimbangan dari Sistem (2.7) yaitu sebagai berikut

Definisi 2.2

Titik $\bar{x} \in R^n$ *disebut titik kesetimbangan (titik equilibrium) dari Sistem (2.7) jika* $f(\bar{x}) = 0$ (Perko, 2001).

II.5 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan digunakan untuk menentukan apakah penyakit telah menyebar atau menghilang dari populasi agar dapat mengambil tindakan selanjutnya. Definisi kestabilan titik kesetimbangan dapat dilihat pada Definisi (2.3)

Definisi 2.3

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$ *dan* $x(t, x_0)$ *adalah solusi persamaan* $\dot{x} = f(x)$ *pada saat* t *dengan nilai awal* $x(0) = x_0$.

1. *Titik kesetimbangan $\bar{x}$ disebut stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, kemudian $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.*
2. *Titik kesetimbangan $\bar{x}$ disebut stabil asimtotik jika titik-titik kesetimbangannya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$, asalkan $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.*
3. *Titik kesetimbangan $\bar{x}$ disebut tidak stabil jika titik kesetimbangan tersebut tidak memenuhi (1)* (Olsder dkk, 2011).

II.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dan vektor eigen akan digunakan untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan dari suatu sistem persamaan linier.

Definisi 2.4

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ di $\boldsymbol{R}^n$ disebut sebagai vektor eigen dari A jika $A\boldsymbol{x}$ merupakan perkalian skalar dari $\boldsymbol{x}$, yaitu

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

untuk suatu skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Skalar λ disebut nilai eigen (eigenvalue) dari A dan $\boldsymbol{x}$ dikatakan sebagai vektor eigen (eigenvector) yang bersesuaian dengan λ (Anton dan Rorres, 2014).

Misalkan diberikan matriks A dengan ukuran $n \times n$ maka untuk mencari nilai eigen dari matriks A dapat ditulis

$$Ax = \lambda Ix$$

yang secara ekuivalen diperoleh

$$(\lambda I - A) = 0 \tag{2.11}$$

dengan I adalah matriks identitas.

Persamaan (2.11) mempunyai solusi nontrivial jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0 \tag{2.12}$$

dengan Persamaan (2.12) adalah persamaan karakteristik dari matriks A dan skalar yang memenuhi Persamaan (2.12) adalah nilai eigen dari matriks A.

Dari Persamaan (2.12) matriks A yang berukuran $n \times n$ akan memiliki bentuk polinomial yaitu sebagai berikut

$$det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$$

sehingga persamaan karakteristik A menjadi

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

dengan $c_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3, \dots , n$ (Anton dan Rorres, 2014).

II.7 Matriks Jacobian

Matriks Jacobian dinotasikan dengan J dimana matriks ini digunakan untuk melakukan linearisasi sistem persamaan diferensial non linier. Proses linearisasi yaitu proses untuk mengubah persamaan diferensial non linier ke dalam bentuk persamaan linier yang dilakukan di sekitar titik setimbang. Untuk penjelasan matriks Jacobian dapat dilihat pada Teorema (2.1).

Teorema 2.1

Jika $f: R^n \rightarrow R^n$ terdiferensial di x_0 maka turunan parsial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ dengan $i, j = 1,2,3, \dots, n$, di x_0 ada untuk semua $x \in R^n$ dan

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j$$

Matriks $Df(x_0)$ disebut matriks jacobian dari fungsi $f: R^n \rightarrow R^n$ yang terdiferensial di $x_0 \in R^n$. Untuk selanjutnya $Df(x_0)$ dinotasikan dengan $Jf(x_0)$ (Perko, 2001).

Berdasarkan Teorema (2.1) maka diperoleh untuk matriks Jacobian dari Sistem (2.7) sebagai berikut

$$J\big(f(x)\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Matriks (2.13) dinamakan matriks Jacobian dari f di titik x.

Setelah itu, dilakukan liniearisasi menggunakan metode linierisasi yang dinyatakan dalam Definisi (2.3).

Definisi 2.3

Sistem $\dot{x} = J\big(f(\bar{x})\big)$ *disebut sebagai linierisasi Sistem (2.7) di* $(\bar{x})$ (Meiss, 2007).

Kestabilan titik kesetimbangan pada Sistem (2.7) dapat ditentukan pada proses linierisasi menggunakan nilai eigen matriks Jacobi. Nilai eigen ini dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan karakteristik matriks Jacobian pada titik x.

II.8 Kriteria Routh

Dalam menentukan akar-akar persamaan karakteristik terdapat beberapa permasalahan yang sering muncul. Kriteria Routh adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh akar-akar dengan menjamin suatu persamaan karakteristik tersebut bernilai negatif atau memiliki nilai positif, sehingga dengan tanda negatif atau positif yang diperoleh maka dapat ditentukan sifat kestabilan dari suatu titik ekuilibrium. Kriteria kestabilan Routh dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan diberikan sistem persamaan karakteristik nilai eigen dari suatu matriks A dengan ukuran $n \times n$ yaitu

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \qquad (2.14)$$

dengan $a_n \neq 0$ sebagai koefisien dari persamaan karakteristik. Berdasarkan Persamaan (2.14) maka dapat diketahui akar-akar dengan menyusun tabel Kriteria Routh yang dinyatakan dalam Tabel (2.1).

Tabel 2.1 Tabel Kriteria Routh

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$	0
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$	0
b_1	b_2	b_3	$\cdots$	0
c_1	c_2	c_3	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0
0	0	0	0	0

dengan koefisien $b_i, c_i, \dots, i = 1,2, \dots, n$ didefinisikan sebagai

$$\begin{array}{cccc} b_1 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, & b_2 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, & \cdots & 0, \\ c_1 = \dfrac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1}, & c_2 = \dfrac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1}b_3}{b_1}, & \cdots & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0, \\ 0 & 0 & & 0. \end{array}$$

Perhitungan pada tabel kriteria Routh berhenti sampai kolom pertama menghasilkan nilai nol. Berdasarkan kriteria Routh semua akar-akar dari Persamaan (2.14) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua elemen kolom pertama pada tabel memiliki tanda yang sama yaitu semua bernilai positif atau semua bernilai negatif (Olsder dan Woude, 2011).

II.9 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata penularan oleh individu infektif sekunder akibat interaksi dengan individu infektif primer yang berlangsung di dalam populasi *susceptible*. Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0 sebagai penentu kestabilan dari titik kesetimbangan suatu model. Terdapat tiga kemungkinan R_0 yaitu:

1. $R_0 < 1$ artinya jumlah individu terinfeksi akan berkurang seiring berjalannya waktu sehingga wabah akan berakhir dengan sendirinya.
2. $R_0 = 1$ artinya kasus stabil dimana jumlah individu terinfeksi akan sama sepanjang waktu.
3. $R_0 > 1$ artinya jumlah individu yang terinfeksi meningkat dari waktu ke waktu sehingga menjadi wabah yang berkelanjutan (Giesecke, 2017).

Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan menggunakan matriks generasi selanjutnya dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Melakukan linearisasi pada populasi terinfeksi di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit. Proses linearisasi dapat direpresentasikan menggunakan matriks Jacobian.
2. Dekomposisi matriks Jacobi (J) ke dalam matriks Transmisi (F) dan matriks Transisi (V). Matriks transmisi merupakan matriks yang mendeskripsikan adanya infeksi baru, sedangkan matriks Transisi merupakan matriks yang mendeskripsikan perubahan populasi terinfeksi.
3. Hitung bilangan reproduksi dasar menggunakan $R_0 = \rho(FV^{-1})$ dimana R_0 adalah radius spektral atau nilai eigen terbesar dari matriks (FV^{-1}) (Blyuss dan Kyrychko, 2005).

II.10 Matriks Generasi Selanjutnya

Untuk mencari bilangan reproduksi dasar (R_0) dapat dilakukan dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya. Misalkan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dengan setiap $x_i \geq 0$ merupakan individu yang terinfeksi penyakit pada saat t, y adalah individu yang tidak terinfeksi penyakit, $\mathcal{F}_i$ sebagai matriks yang menyatakan peningkatan laju penyebaran penyakit, dan $\mathcal{V}_i$ sebagai matriks yang menyatakan penurunan laju penyebaran penyakit. Model penyebaran tersebut dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \mathcal{F}_i(x,y) - \mathcal{V}_i(x,y) & i &= 1,2, \dots, n \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{y}_j &= g_j(x,y) & j &= 1,2, \dots, m \quad y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Selanjutnya, dilakukan linearisasi kelas terinfeksi yaitu

$$\dot{x}_i = (\mathcal{F} - \mathcal{V})x \tag{2.16}$$

dengan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ merupakan matriks yang berukuran $n \times n$ didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(0, y_0)\right] \text{ dan } \mathcal{V} = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(0, y_0)\right] \tag{2.17}$$

dengan $(0, y_0)$ adalah titik ekuilibrium bebas penyakit. Kemudian didefinisikan suatu matriks K yaitu

$$K = \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1} \tag{2.18}$$

yang disebut matriks generasi selanjutnya. Nilai dari bilangan reproduksi dasar pada individu rentan adalah radius spektral (nilai eigen absolut dominan) dari matriks K (Driessche dan Watmough, 2002).

II.11 Model Matematika SEIR

Model epidemi SEIR (Susceptible-Exposed-Infectious-Recovered) merupakan model matematika yang dibuat untuk memformulasikan penularan penyakit sehingga dapat menyimpulkan efektifitas dari tindakan masyarakat dalam penanggulangan penyakit. Model epidemi SEIR terdiri dari empat subpopulasi: *Susceptible* (S) adalah golongan individu rentan, *Exposed* (E) yaitu individu yang terpapar penyakit akibat dari berinteraksi dengan individu terinfeksi, *Infected* (I) golongan individu yang terinfeksi penyakit, *Recovered* (R) golongan individu yang sudah sembuh. Misalnya diberikan model SEIR seperti berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu N - \frac{\beta IS}{N} - \mu S,\\
\frac{dE}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \alpha E - \mu E,\\
\frac{dI}{dt} &= \alpha E - \mu I - \gamma I,\\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Model pada (2.19) menjelaskan bahwa individu *susceptible* akan menjadi *exposed* apabila berinteraksi dengan individu *infected* dengan laju β dan perubahan selanjutnya terjadi dari *exposed* ke *infected* dengan laju α kemudian *infected* ke *recovered* dengan laju γ. Populasi diasumsikan konstan dimana $N = S + E + I + R$ sehingga untuk laju kelahiran dan kematian juga konstan. Titik ekuilibrium terbagi menjadi dua yaitu saat tidak ada penyakit pada populasi atau titik bebas penyakit dan titik dimana akan selalu ada penyakit pada populasi atau titik endemik. Dari Model (2.19) akan diperoleh untuk titik bebas penyakit yaitu $(S^*, E^*, I^*, R^*) = \left(\frac{A}{\mu}, 0,0,0\right)$ dan titik endemiknya yaitu sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
S^* &= \frac{N(\beta\gamma + \beta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}{\alpha\beta}, \\
E^* &= -\frac{\mu N(-\alpha\beta + \beta\gamma + \beta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}{\beta(\beta + \mu)\alpha}, \\
I^* &= -\frac{\mu N(-\alpha\beta + \beta\gamma + \beta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}{\alpha(\beta\gamma + \beta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}, \\
R^* &= -\frac{\gamma N(\alpha\beta + \beta\gamma + \beta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}{\alpha(\beta\gamma + \beta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Selanjutnya, dengan mengonstruksi *next generation matrix* dan mencari nilai eigen terbesar dari matriks tersebut maka akan diperoleh nilai eigen terbesar adalah

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \frac{\alpha\beta}{(\gamma + \mu)(\alpha + \mu)} \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma + \alpha\mu + \gamma\mu + \mu^2}.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Berdasarkan hasil analisis menunjukkan bahwa pada Persamaan (2.21) jika $R_0 < 1$ menyebabkan titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dan jika $R_0 > 1$ maka titik endemik stabil asimtotik lokal (Hurint dkk, 2017).