SKRIPSI

DIMENSI METRIK GRAF DODECAHEDRAL YANG DIMODIFIKASI

HERU PERMANA

H011171516

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS HASANUDDINMAKASSAR

MEI 2024

DIMENSI METRIK GRAF DODECAHEDRAL YANG DIMODIFIKASI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

HERU PERMANA

H011171516

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MEI 2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh

Dimensi Metrik Graf Dodecahedral yang Dimodifikasi

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah

Makassar, 16 Mei 2024

Heru Permana

NIM H011171516

DIMENSI METRIK GRAF DODECAHEDRAL YANG DIMODIFIKASI

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.**
NIP. 197008072000031002	**NIP. 199012282018031001**

Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si., M.Si
NIP. 196804292002121001

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Heru Permana
NIM	: H011171516
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Dimensi Metrik Graf Dodecahedral yang Dimodifikasi

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	(....................)
Sekretaris	: Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.	(....................)
Anggota	: Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	(....................)
Anggota	: Dra. Nur Erawaty, M.Si.	(....................)

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 15 mei 2024

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi Rabbil Alamin. Dengan memanjatkan puja dan puji syukur atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Dimensi Metrik Graf Dodecahedral yang Dimodifikasi**" sebagai salah satu persyaratan akademik untuk meraih gelar sarjana pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, bimbingan, dan nasehat dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa terima kasih yang tak terhingga dan teristimewa kepada orang tua penulis, Ayahanda **Dadang** dan Ibunda **Iyar Sumiati** yang telah membesarkan dan dengan sabar dalam mendidik dan memberikan motivasi serta selalu mendoakan setiap langkah dan proses penulis dalam mencari ilmu dengan segala pengorbanan yang telah diberikan. Terima kasih atas segala bentuk bantuan baik secara langsung maupun tidak langsung kepada kakak **Ikar Permana** dan adik **Diara**. Disamping itu, izinkan penulis untuk menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan Bapak **Dr. Eng. Amiruddin,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku penasehat akademik sekaligus dosen pembimbing utama yang dengan sabar dan tulus meluangkan begitu banyak waktunya demi memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
4. **Bapak Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si,** selaku dosen pembimbing pertama yang dengan sabar dan tulus meluangkan waktu di tengah berbagai kesibukan dan memberikan begitu banyak masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
5. **Ibu Prof. Dr Hasmawati, M.Si,** selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
6. **Ibu Dra. Nur Erawati, M.Sc** selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan kritikan yang membangun demi perbaikan skripsi penulis.
7. **Bapak** dan **Ibu dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, semoga Bapak dan Ibu dosen selalu dalam rahmat

dan lindungan Allah SWT, sehingga ilmu yang telah diajarkan dapat bermanfaat bagi penulis di kemudian hari.

8. Terima kasih kepada **Ikhwa masjid kampus Unhas** atas segala support sistemnya selama saya berada di kampus Unhas, sahabatdi **KKI Al-Nur, Riyadi, Kiki Jannah, Puat** sebagai teman seperjuangan dari SMA
9. **24/7 Lucknut** yang selalu hadir menemani terutama kakanda **Ky** sebagai seperjuangan di Lab terapan dan Math 2017 yang telah memberikan warna perkuliahan penulis serta memberi semangat kepada penulis selama mengerjakan skripsi.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dan memberikan doa serta motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini. Dengan segala kerendahan hati, penulis menerima kritik dan saran demi tercapainya kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya bagi penulis. Aamiin Ya Robbal Alamin

Makassar, 15 mei 2024

Heru Permana

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Heru Permana
NIM	: H011171516
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalty-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

"Dimensi Metrik Graf Dodecaheral yang Dimodifikasi"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal,

Yang menyatakan

(Heru Permana)

ABSTRAK

Misalkan terdapat suatu graf terhubung G dengan himpunan titik V dan S adalah himpunan bagian dari V. Himpunan S dikatakan himpunan pembeda jika untuk setiap titik pada V memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap S. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dari graf G dinamakan dimensi metrik dari graf G, dan dinotasikan dengan $\dim(\mathrm{G})$.

Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai dimensi metrik graf dodecahedral yang dimodifikasi $(G\mathfrak{D})$, dimana $n = 6k$, untuk $k\ bilangan\ asli$. Hasil yang diperoleh pada penelitian ini adalah $\dim(G\mathfrak{D}_n) = 3$.

Kata kunci: *dimensi metrik, himpunan pembeda, graf* G, *graf dodecahedral yang dimodifikasi.*

ABSTRACT

Let G is a connected graph with a set of vertices V and S is a subset of V. The set S is called the resolving set on G if every vertex on the V has a different representation of S. Resolving set with cardinality minimum of G is called metric dimention on graph G. Denoted by $dim(G)$.

In this case, we will discuss the metric dimension of a modified dodecahedral graph $(G\mathfrak{D}_n)$, where $n = 6k,$ for k being a natural number. The obtained result of this research is $dim(G\mathfrak{D}_n) = 3$.

Keyword: *metric dimension, resolving set, graph G, modified dodecahedral graph.*

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang begitu banyak penerapannya, terutama di era digital, banyak permasalahan yang begitu rumit dapat diselesaikan menggunakan matematika dengan cara yang sederhana. Dalam matematika terdapat berbagai topik khusus, salah satunya adalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh matematikawan asal Swiss Leonhard Euler yang membahas tentang permasalahan jembatan Konigsberg. Dimana dalam permasalahan tersebut harus melintasi tujuh jembatan dalam sekali jalan tanpa harus melalui jembatan yang sama lebih dari satu kali dan bertolak di daratan yang sama. Publikasi dari masalah ini dikenal dengan teori graf.

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk merepresentasikan atau menyatakan suatu permasalahan agar lebih mudah dimengerti atau diselesaikan. Beberapa pokok bahasan dalam teori graf salah satunya adalah dimensi metrik. Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater (1975), [1] dan Harary dan Melter pada tahun 1976 dalam publikasinya *on the metric dimension of a graph*. [2] [3, p. 89] dimensi metrik dapat pula digunakan dalam bidang lain seperti kimia, optimasi kombinasi dan navigasi robot.

Dimensi metrik menjadi sangat menarik untuk dikaji karena aplikasinya yang sangat banyak, seperti yang sudah disebutkan di atas, antara lain adalah navigasi robot, suatu robot harus dapat memindahkan dirinya dari suatu titik ke titik lainya, tanpa ada kerancuan dengan menerjemahkan petunjuk yang didapat dari titik-titik berbeda. Pemilihan titik-titik berbeda itulah yang membutuhkan konsep himpunan pembeda yang merupakan cikal bakal dari basis, dimana kardinalitas dari basis disebut dimensi. Sedangkan basis adalah himpuan pembeda dengan kardinalitas minimum. Karena pembahasan basis pada graf ini melibatkan definisi jarak(metrik) maka dimensinya disebut dimeni metrik.

Dalam menentukan dimensi metrik pada graf, ada beberapa konsep yang digunakan. Pertama adalah konsep jarak antara dua titik pada suatu graf. Misalkan

u dan v adalah setiap titik pada graf terhubung G, maka jarak antara titik u dan v pada G dinotasikan dengan $d(u, v)$. Konsep lainnya adalah himpunan pembeda (*separated set*). Suatu himpunan bagian S dari himpunan titik pada G disebut himpunan pembeda pada G jika setiap titik di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap S. Himpunan pembeda minimum (*minimum separated set*) adalah himpunan pembeda dengan anggota (*kardinalitas*) yang minimum dan basis adalah himpunan pembeda minimum sedangkan dimensi metrik adalah jumlah anggota dari basis tersebut. Dimensi metrik dinotasikan dengan $dim(G)$ [4, p. 1].

Beberapa penelitian dengan pembahasan dimensi metrik, yaitu Fitri Ramadhani dan syarifuddin melakukan penelitian tentang dimensi metrik dari graf barbel $B_{2n}, n \geq 3$ [3], Khalil, O.A (2010) meneliti tentang Graf Buku(yang merupakan hasil kali graf bintang dan graf lintasan dengan Panjang 2), Iswadi (2011) meneliti tentang graf dimensi metrik hasil corona dua graf dengan membandingkannya terhadap dimensi metrik graf-graf penyusunnya, dan graf-graf yang sudah diketahui dimensi metriknya [5], Fadelyah Eka Anjani Sukmana (2021)melakukan penelitian tentang penentuan dimensi metrik graf kincir [4] dan Itsnaini Nur pada tahun 2022 menentukan dimensi metrik dari amalgamasi titik pusat graf roda dengan graf siklus [6].

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, belum ada peneliti yang melakukan penelitian terhadap dimensi metrik graf dodecahedral yang dimodifikasi. Dimana graf ini pertama kali diteliti oleh Nurlindah, dkk. pada pembahasan yang berbeda, yakni nilai total ketidakteraturan titik graf dodecahedral yang dimodifikasi. *Graf dodecahedral yang dimodifikasi dengan 2n titik dan 4n sisi dimana n ≥ 6 yang dinotasikan dengan* $G\mathfrak{D}_n$ *adalah graf yang dibentuk dari graf dodecahedral dengan sisi pada titik bagian dalam.*

Selanjutnya akan didefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf dodecahedral yang dimodifikasi sebagai berikut:

$$V(G\mathfrak{D}n) = \{v_i, u_i | 1 \leq i \leq n\} \text{ dan}$$

$$E(G\mathfrak{D}n) = \{v_1v_2, v_{n-1}v_n, u_1u_2, u_{n-1}u_n\} \cup \{v_iv_{i+2}, u_iu_{i+2} | 1 \leq i \leq n-2\}$$
$$\cup \{v_iu_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iu_{i+1} | i = 2, n-2\} \cup \{u_iu_{i+3} | i = 1, n-3\}$$
$$\cup \{u_iu_{i+4} | i = 1,2, \dots, n-4\}, n \geq 6 \text{ [7].}$$

Oleh karena itu, penulis tertarik melakukan penelitian ini dengan judul **"Dimensi Metrik Graf Dodecahedral Yang Dimodifikasi."**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah yang akan dibahas adalah bagaimana menentukan dimensi metrik pada Graf Dodecahedral yang Dimodifikasi?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini penulis hanya membahas tentang dimensi metrik pada graf dodecahedral yang dimodifikasi dengan notasi $G\mathfrak{D}_n$, dimana $n = 6k$, $k \in N$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yang akan dibahas adalah untuk menentukan dimensi metrik pada graf dodecahedral yang dimodifikasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui tentang dimensi metrik dari graf dodecahdral yang dimodifikasi.
2. Untuk menambah pemahaman dan penguasaan pembaca tentang dimensi metrik
3. Dapat menjadi referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait dimensi metrik.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas beberapa materi yang akan menjadi landasan teori untuk menjelaskan dimensi metrik pada graf dodecahedral yang dimodifikasi.

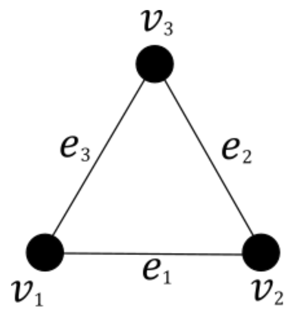
2.1 Pengertian Graf

Seperti yang sudah disinggung di atas, teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Euler pada tahun 1736. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Secara formal definisi graf sebagai berikut.

Definisi 2.1 *Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan pasangan dari anggota-anggota V yang disebut sisi.* [8]

Biasanya, dalam suatu graf G, kita menggunakan notasi $V(G)$ untuk mencantumkan kumpulan titik atau simpul dalam graf tersebut, dan $E(G)$ untuk merujuk pada kumpulan sisi atau tepi dalam graf tersebut. Jumlah elemen dalam $V(G)$ biasa disebut dengan *order* dan dilambangkan sebagai $|V|$ sedangkan jumlah elemen dalam $E(G)$ disebut sebagai *size* atau ukuran dan dilambangkan sebagai $|E|$. Sebagai contoh, jika kita memiliki u dan v sebagai elemen dari $V(G)$ sisi yang menghubungkan u dan v biasanya ditulis sebagai $e = (u, v)$ namun dalam kasus ini kita akan menggunakan notasi $e = uv$.

Contoh 2.1.1 Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$ dengan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_1$, jelas bahwa jumlah titik (*order*) dari graf G adalah 3 dengan notasi $|V| = 3$ dan *size* dari graf G adalah 3 dengan notasi $|E| = 3$. Bentuk graf G dapat dilihat pada gambar 2.1.1 berikut.



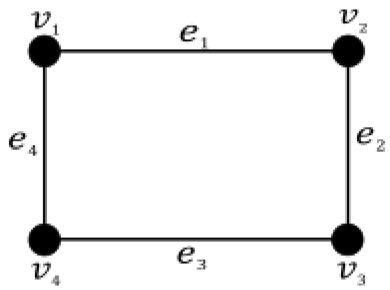
Gambar 2. 1.1 Graf G

2.2 Terminologi Graf

Dalam proses mempelajari graf, terdapat beberapa istilah yang terkait dengan graf. Berikut akan dijelaskan beberapa istilah yang akan digunakan.

Definisi 2.2.1 Misalkan graf G dengan $u, v \in V(G)$, jika $e = uv$ merupakan sebuah sisi dalam G, maka titik u dan titik v disebut sebagai bertetangga *(adjacent)*, sedangkan titik u disebut terkait *(incident)* dengan sisi e, dan sisi e disebut terkait dengan titik v. [9]

Contoh 2.2.1 Misalkan suatu graf G memiliki himpunan titik v_1, v_2, v_3, dan v_4. Dengan sisi e_1, e_2, e_3, e_4, dimana $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4$ dan $e_4 = v_4v_1$. Jika titik v_1, v_2, v_3, dan v_4 terkait dengan sisi e maka titik v_1, v_2, v_3, dan v_4 dikatakan bertetangga.



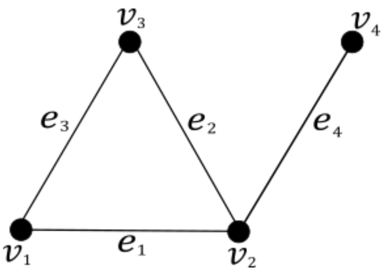
Gambar 2.2 1 Graf G dengan 4 titik

Pada Gambar 2.2.1, jelas terlihat bahwa titik v_1 tidak bertetangga dengan titik v_3, titik v_4 terkait dengan sisi e_4 dan sisi e_4 terkait dengan titik v_1 tetapi titik v_1 tidak terkait dengan sisi e_3, demikian juga sebaliknya, yaitu sisi e_3 tidak terkait dengan titik v_1.

Definisi 2.2.2 *Derajat (degree) dari suatu titik* v_i pada graf G adalah *banyaknya sisi* $x \in E(G)$ *yang terkait dengan titik* v_i *dan dinotasikan dengan* $deg(v)$. [9]

Suatu titik yang memiliki derajat minimum titik di G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimum titik di G dinotasikan dengan $\Delta(G)$, suatu titik yang berderajat 0 disebut titik terisolasi dan suatu titik yang berderajat 1 disebut titik ujung. [9]

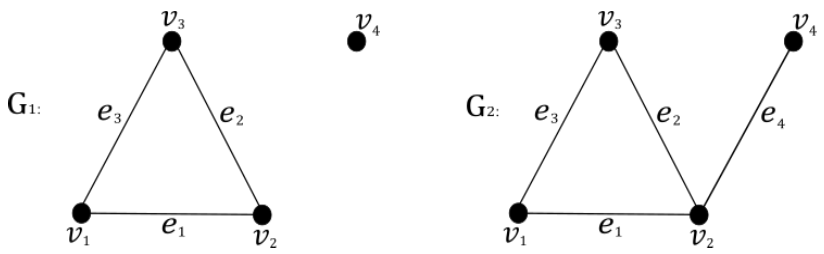
Contoh 2.2.2 Graf G pada gambar 2.2.2 berikut dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_1$ dan $e_4 = v_2v_4$. Memiliki $deg(v_1) = 2$, $deg(v_2) = 3$, $deg(v_3) = 2$, dan $deg(v_4) = 1$. Sedemikian sehingga diperoleh $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$.



Gambar 2.2 2 Graf Berderajat

Definisi 2.2.3 *Misalkan G adalah graf dengan* $u, v \in V(G)$. *Graf G disebut graf terhubung (connected) jika setiap dua titik yang berbeda di G terdapat lintasan yang memuat titik* u *dan* v. [9]

Contoh 2.2.3 Misalkan terdapat dua buah graf G_1 dan G_2, dengan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$ dngan $e_1 = v_1v_1, e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_1$ dan $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dengan $e_1 = v_1v_1, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_1, e_4 = v_2v_4$. Seperti pada gambar dibawah.

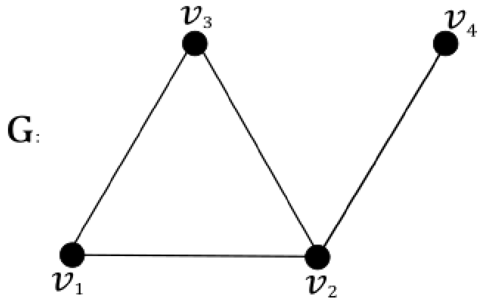


Gambar 2.2 3 Graf terhubung dan tidak terhubung

Pada Gambar 2.2.3 untuk G_1 merupakan graf tidak terhubung karena terdapat titik v_4 yang tidak mengandung lintasan ke titik lainnya dan G_2 merupakan graf terhubung. Karena semua titiknya saling terhubung oleh minimal satu lintasan.

Definisi 2.2.4 *Jarak* $d(u, v)$ *adalah panjang lintasan terpendek antara* u *dan* v *pada graf G.* [10]

Contoh 2.2.4



Gambar 2.2 4 Graf G

Pada Gambar 2.2.4 diperoleh jarak antara titik sebagai berikut

$d(v_1, v_1) = 0, d(v_1, v_2) = 1,\quad d(v_1, v_3) = 1,\quad d(v_1, v_4) = 2,$
$d(v_2, v_3) = 1, d(v_2, v_2) = 0, d(v_2, v_4) = 1,\ d(v_3, v_3) = 0,\ d(v_3, v_4) = 2,$
$d(v_4, v_4) = 0.$

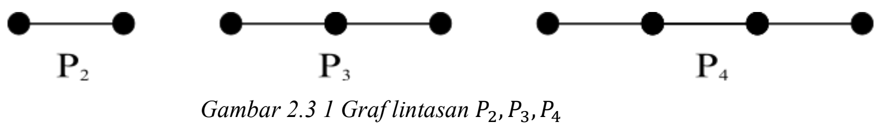
2.3 Jenis-Jenis Graf

Pada subbab ini akan dibahas beberapa jenis graf yang akan diguakan dalam penulisan skripsi ini.

Definisi 2.3.1 *Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari barisan titik dan sisi yang berbentuk* $v_1, e_{1,} v_2, e_2, v_3, e_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$. *Sedemikian sehinggga* $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$ *adalah sisi-sisi dari graf G.* [9]

Graf lintasan dinotasikan dengan P_n dengan orde n dan berukuran $n-1$. Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas satu lintasan maksimal. Jika setiap dua titik u dan v selalu terdapat lintasan yang memuat titik u dan v di G maka graf G dikatakan terhubung (*connected*). [8]

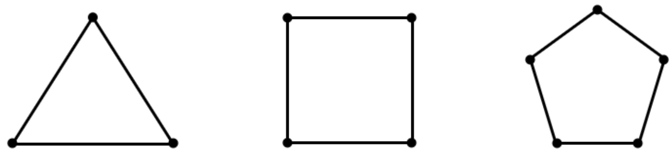
Contoh 2.3.1:



Gambar 2.3 1 Graf lintasan P_2, P_3, P_4

Definisi 2.3.2 *Graf siklus (cycle) dengan* n *titik dan* n *sisi dimana* $n \geq 3$, *dinotasikan dengan* C_n *adalah Graf dengan himpunan titik* $V(C_n) = V(P_n)$ *dan sisi* $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$.

Contoh 2.3.2:

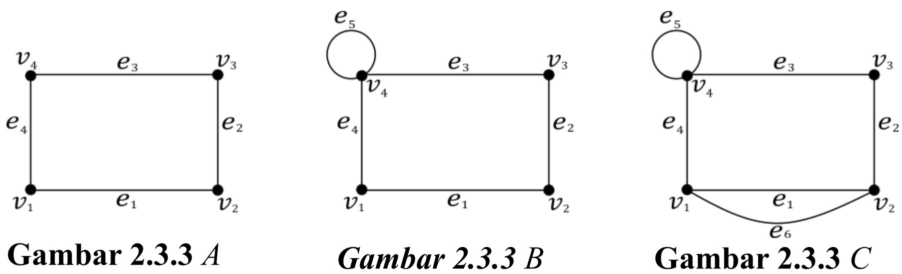


Gambar 2.3 2 Graf siklus C_3, C_4, C_5

Definisi 2.3.3 *Graf sederhana adalah suatu graf dimana setiap sisi $e = uv \in E(G)$ menghubungkan dua titik yang berbeda, artinya $u \neq v$ dan tidak terdapat sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama artinya $uv = vu$.*

Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung *loop (gelang)* dan *sisi ganda (multiple edge)*. *Loop* adalah sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama, sedangkan *sisi ganda (multiple edge)* sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama.

Contoh 2.3.3



Gambar 2.3 3 Graf Sederhana

Dari Gambar 2.3.3 di atas dapat kita lihat bahwa gambar [A] merupakan contoh graf sederhana, sedangkan gambar [B] dan [C] bukan merupakan graf sederhana karena memiliki loop dan sisi ganda.

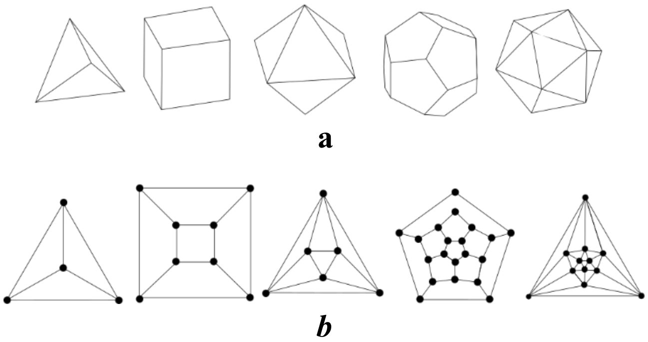
2.4 Graf Platonik

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai pengertian-pengertian yang berkaitan dengan graf dodecahedral yang dimodifikasi.

Definisi 2.4.1 *Graf Platonik adalah suatu ruang tiga dimensi dimana semua permukaannya terdiri dari poligon yang memiliki bentuk dan ukuran yang sama, sehingga permukaan tersebut bertemu pada setiap titik yang sama.* [11]

Graf Platonik merupakan graf sederhana karena terbangun dari graf yang tidak memiliki loop dan sisi ganda yang dibentuk dari bangun polyhedron yang semua permukaannya merupakan bangun segi-n beraturan, graf platonik dinotasikan dengan ${P_n}^d$ dengan n adalah jumlah sisi pada polyhedron dan d adalah derajat titik. [12]

Terdapat 5 platonik solid diantaranya

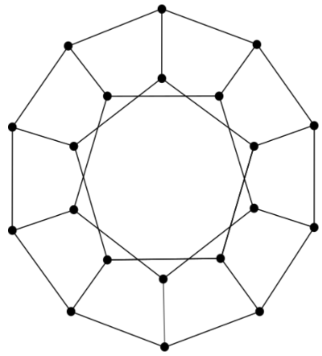


Gambar 2.4 1 Gambar (a) Platonik solid (b) graf Platonik

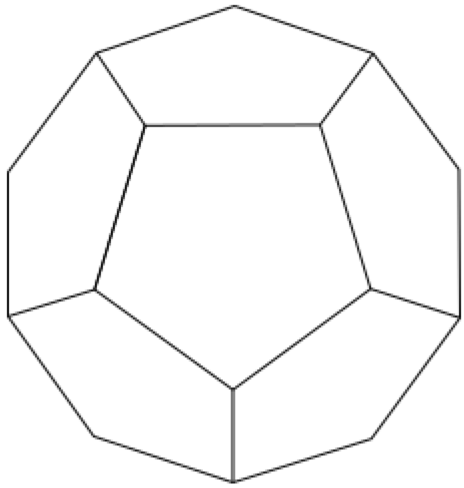
Bangun ruang tiga dimensi yang disebut bangun ruang platonik, dalam bahasa Inggris disebut *platonik solid.*

Definisi 2.4.2 *Graf Dodecahedral adalah platonik solid yang berhubungan dengan konektivitas dari titik dodecahedron.*

Dalam istilah sifat Dodecahedral atau yang merujuk pada sesuatu yang memiliki 12 permukaan bidang. Dodecahedron, disisi lain, adalah sebuah objek tiga dimensi yang memiliki 12 permukaan datar. Dodecahedron memiliki segi lima sebagai permukaan dan merupaka salah satu padatan platonik (platonik solid). Graf Dodecahedral merupakan Graf Petersen yang diperumum dengan $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$, dimana m adalah jumlah sisi dan n adalah jumlah titik. Lebih khusus lagi, $GP(n, k)$, dimana GP adalah graf Petersen, n adalah banyaknya titik luar (sama dengan banyaknya titik dalam), dan k adalah loncatan sisi dalam, serta memiliki $2n$ *order* dan $3n$ *size.* [7]



Gambar 2.4 2 Graf Dodecahedral atau Graf Petersen yang diperumum GP(10,2)

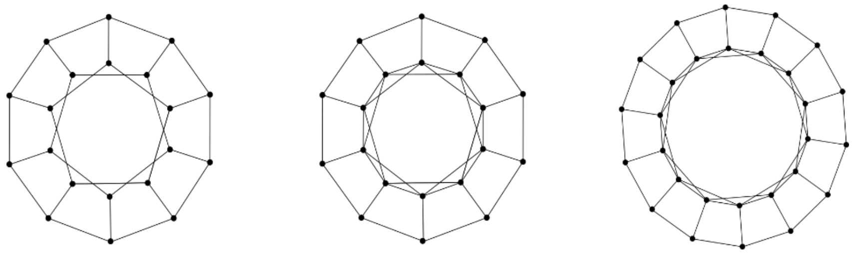


Gambar 2.4 3 Dodecahedron

Definisi 2.3.4 *Graf Dodecahedral yang dimodifikasi dengan* $2n$ *titik dan* $4n$ *sisi dimana* $n \geq 6$ *dinotasikan dengan* $G\mathfrak{D}n$ *adalah graf yang dibentuk dari graf dodecahedral dengan sisi pada titik bagian dalam.* [7]

Selanjutnya akan didefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf Dodecahedral yang dimodifikasi. Himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$V(G\mathfrak{D}n) = \{v_i, u_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(G\mathfrak{D}n) = \{v_1v_2, v_{n-1}v_n, u_1u_2, u_{n-1}u_n\} \cup \{v_iv_{i+2}, u_iu_{i+2} | 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{v_iu_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iu_{i+1} | i = 2, n-2\} \cup \{u_iu_{i+3} | i = 1, n-3\} \cup \{u_iu_{i+4} | i = 1,2,\ldots,n-4\}, n \geq 6$



[A] [B] [C]

Gambar 2.4 2 Graf Dodecahedral Yang Dimodifikasi

Pada gambar di atas sebuah contoh Graf Dodecahedral yang berderajat 3 pada 20 titik dan 30 sisi seperti pada Gambar 2.3.4 [A]. Pada penelitian yang dilakukan Nurlindah dkk, mereka memodifikasi Graf Dodecahedral dengan menambahkan 10 sisi sehingga jumlah titik yang berderajat 3 menjadi berderajat 5 yang mana penambahan 10 sisi terebut seperti pada Gambar 2.3.4 [B] selanjutnya mereka mengumumkan (*generalitation*) menjadi sebuah graf baru dengan menambahkan beberapa titik seperti pada Gambar 2.3.4 [C].

2.5 Dimensi Metrik

Pada subbab ini akan dijelaskan istilah-istilah yang berkaitan dengan dimensi metrik suatu graf.

Definisi 2.5.1 *Misalkan* $G = (V, E)$ *adalah suatu graf terhubung sederhana, dan* $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\} \subseteq V$. *Representasi dari* $v \in V$ *terhadap* S *adalah pasangan terurut n-tuple yaitu* $r(v|S) = (d(v, s_1), d(v, s_2), \dots, d(v, s_n))$. [13]

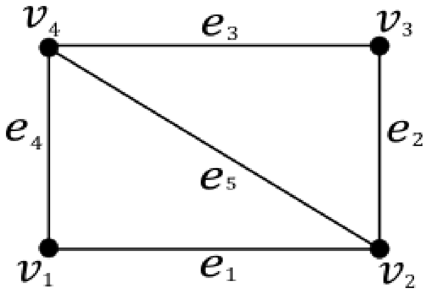
Definisi 2.5.2 *Himpunan* S *disebut himpunan pembeda pada graf* G *jika setiap dua titik yang berbeda pada* G *mempunyai representasi yang berbeda terhadap* S. [13]

Definisi 2.5.3 *Himpunan pembeda yang memiliki anggota (kardinalitas) yang minimum disebut himpunan pembeda minimum (minimum separated set) pada graf* G. [13]

Definisi 2.5.4 *Basis dari suatu graf* G *adalah himpunan pembeda minimum dari* G. [13]

Definisi 2.5.5 *Dimensi metrik adalah kardinalitas basis dari* G *yang dinotasikan dengan* $dim(G)$. [13]

Contoh 2.5:



Gambar2.5 1 Graf G

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Misalkan dipilih $S_1 = \{v_1\}$, maka representasi setiap titik di G adalah

$$r(v_1|S) = \big(d(v_1, v_1)\big) = (0)$$

$$r(v_2|S) = \big(d(v_2, v_1)\big) = (1),$$

$$r(v_3|S) = \big(d(v_3, v_1)\big) = (2),$$

$$r(v_4|S) = \big(d(v_4, v_1)\big) = (1).$$

Karena terdapat dua titik yang sama, maka S_1 bukan merupakan himpunan pembeda. Untuk setiap satu titik yang diambil sebagai himpunan pembeda, maka pasti terdapat dua titik di G dengan representasi sama. Sehingga $|S| > 1$ atau $|S| \geq 2$.

Misal dipilih $S_2 = \{v_1, v_2\}$, maka representasi setiap titik di G adalah

$$r(v_1|S_2) = \Big(\big(d(v_1, v_1)\big), \big(d(v_1, v_2)\big)\Big) = (0{,}1),$$

$$r(v_2|S_2) = \Big(\big(d(v_2, v_1)\big), \big(d(v_2, v_2)\big)\Big) = (1{,}0),$$

$$r(v_3|S_2) = \Big(\big(d(v_3, v_1)\big), \big(d(v_3, v_2)\big)\Big) = (2{,}1),$$

$$r(v_4|S_2) = \Big(\big(d(v_4, v_1)\big), \big(d(v_4, v_2)\big)\Big) = (1{,}1).$$

Karena tidak terdapat dua titik dengan representasi sama, maka S_2 merupakan himpunan pembeda. Karena $|S_2| = 2$ maka S_2 merupakan himpunan dengan kardinalitas minimum. Sehingga $dim(G) = 2$.

Teorema 2.5.1 Jika G suatu graf terhubung dengan orde n, maka $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$, [14]