BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF $P_n \odot W_m$

SKRIPSI

TASYA WIRAZ MIFTAHULJANNAH AZWAR

H011171517

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MARET 2024

BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF $P_n \odot W_m$

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

TASYA WIRAZ MIFTAHULJANNAH AZWAR

H011171517

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MARET 2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf $P_n \odot W_m$

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 15 Maret 2024

METERAI TEMPEL
9FBEDALX075788237

Tasya Wiraz Miftahuljannah Azwar
NIM H011171517

BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF $P_n \odot W_m$

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**
NIP. 196412311990032007	**NIP. 199210062020016001**

Ketua Program Studi

Dr. Firman, S.Si., M.Si
NIP. 196804292002121001

Pada 15 Maret 2024

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Tasya Wiraz Miftahuljannah Azwar
NIM	: H011171517
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Bilangan Terhubung Pelangi Pada Graf $P_n \odot W_m$

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	(..............................)
Sekretaris	: Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.	(..............................)
Anggota	: Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.	(..............................)
Anggota	: Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	(..............................)

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 15 Maret 2024

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Bilangan Terhubung Pelangi Pada Graf $P_n \odot W_m$"** yang merupakan tugas akhir sebagai syarat untuk menyelesaikan studi pada jenjang strata satu (S1) Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Shalawat serta salam tak lupa senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW sebagai teladan terbaik dalam menjalani kehidupan.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi. Oleh karena itu, penulis menyampaikan rasa terima kasih yang teristimewa kepada Ibunda **Wirda Masyita** dan Ayahanda **Muh. Azwar Djawad**, yang telah membesarkan dengan kasih sayang dan memberikan doa serta motivasi bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih pula atas doa, motivasi serta dukungan yang diberikan adik-adik penulis **Naval Wiraz** dan **Nayla Wiraz**. Pada kesempatan ini pula, penulis ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan **Bapak Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
3. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si**. selaku pembimbing utama dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah sabar meluangkan waktu ditengah kesibukannya dalam memberikan dukungan dan bantuan dalam proses pengerjaan skripsi ini.
4. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan bantuan, nasihat, saran dan masukan kepada penulis selama masa perkuliahan di Program Studi Matematika.

5. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** dan Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si**. selaku penguji yang telah memberikan banyak saran dan masukan yang membangun dalam proses penyempurnaan skripsi ini.
6. **Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika** yang telah mendidik, membimbing, dan memberikan ilmunya kepada penulis. Serta seluruh staf yang telah membantu dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
7. Sahabat penulis **Ita** yang senantiasa menemani, membantu, memberi dukungan, waktu dan tenaga dan semua yang telah diberikan kepada penulis selama ini.
8. Sahabat **Bandar** diantaranya **Farah dan Nanda**, yang selalu memberi semangat, menemani, berbagi ilmu dan cerita selama masa perkuliahan hingga sekarang.
9. Teman-teman **Fika, Kade, Kaye, Sarti** yang telah membantu dan memberikan semangat untuk penulis dalam menyusun skripsi ini.
10. Segenap keluarga **Himatika FMIPA Unhas**, terkhusus untuk teman-teman **Diskrit 2017** dan **Gengbel** yang selama ini selalu mendukung, memberikan motivasi, membantu selama perkuliahan, memberikan ilmu dan pengalaman suka maupun duka dalam roda organisai pada masa perkuliahan.
11. Seluruh keluarga terkhusus untuk Alm. Nenek dan para tante penulis yang sudah menjaga, memberikan masukan, mendoakan serta mengurus penulis selama masa perkuliahan.
12. Kepada semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, terima kasih atas doa, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
13. Terakhir untuk diri saya sendiri terima kasih karena sudah kuat, bertahan, dan hidup. *Thank you for believing in me.*

Dengan kerendahan hati, mohon maaf yang sebesar-besarnya apabila terdapat banyak kekurangan dalam penyusunan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi para pembacanya.

Makassar, 15 Maret 2024

Tasya Wiraz Miftahuljannah Azwar

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Tasya Wiraz Miftahuljannah Azwar
NIM	: H011171517
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Nonekslusif** ***(Non-exclusive Royalty-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

"Bilangan Terhubung Pelangi Pada Graf $P_n \odot W_m$"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal,

Yang menyatakan

(Tasya Wiraz Miftahuljannah Azwar)

ABSTRAK

Misalkan G adalah graf terhubung yang non-trivial. Suatu lintasan $u-v$ di G dikatakan lintasan pelangi jika tidak ada sisi pada lintasan tersebut yang memiliki warna yang sama. Graf G dikatakan graf terhubung pelangi jika setiap dua titik pada G memiliki lintasan pelangi. Bilangan terhubung pelangi dari G, dinotasikan $rc(G)$, adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai sisi-sisi di G sedemikian sehingga G menjadi bersifat graf terhubung pelangi. Graf korona G dan H dinotasikan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dengan menggandakan graf H sebanyak n, sebut $H_1, H_2, \dots, H_i$ dengan $i = 1,2,\dots,n$ kemudian titik i di G dihubungkan ke setiap titik di H_i. Dalam skripsi ini dikaji bagaiman mewarnai sisi pada graf $P_n \odot W_m$ sehingga graf tersebut bersifat terhubung pelangi dan menentukan bilangan terhubung pelagi dari graf tersebut. Hasil yang diperoleh yaitu pewarnaan sisi dari graf $P_n \odot W_m$ dan bilangan terhubung dari $P_n \odot W_m$ adalah $rc(P_n \odot W_m) = 2n - 1$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.

Kata Kunci: Lintasan pelangi, bilangan terhubung pelangi, korona, graf lintasan, graf roda.

ABSTRACT

Let G be a nontrivial connected graph. A path $u - v$ *path in* G *is called a rainbow path if no edges may have the same color. Graph* G *is called rainbow connected if every two different vertices in* G *are connected by rainbow path. The rainbow connection number of* G*, denoted by* $rc(G)$*, is the smallest number of colors required to coloring the edges in* G *to make the graph* G *to be rainbow connected. Corona graph* G *and* H *denoted by* $G \odot H$ *is graph that obtained from* n *copies of graph* H*, say* $H_1, H_2, \dots, H_i$ *with* $i = 1,2, \dots, n$ *then joining vertex* i *in* G *to every vertex in* H_i*. This thesis discussed how to coloring edges in* $P_n \odot W_m$ *so that graph* $P_n \odot W_m$ *rainbow connected and to determine the rainbow connection number of that graph. The result shows rainbow coloring of* $P_n \odot W_m$ *and rainbow connection number of* $P_n \odot W_m$ *is* $rc(P_n \odot W_m) = 2n - 1$ *for* $n \geq 2$ *and* $m \geq 3$.

Keywords: *rainbow path, rainbow connection number, corona, path graph, wheel graph.*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

$V(G)$	: Himpunan titik dari graf G
$E(G)$	: Himpunan sisi dari graf G
$d(u, v)$	: Jarak antara titik u dan v
K_n	: Graf lengkap dengan n titik
C_n	: Graf siklus dengan n titik
P_n	: Graf lintasan dengan n titik
W_n	: Graf roda dengan n titik
$e(v)$	: Eksentrisitas titik v
$diam(G)$	: Diameter dari graf G
$P_n \odot W_m$	: Graf Korona P_n dan W_m
$c(e)$	: Pewarnaan pelangi pada sisi e
$rc(G)$	: Bilangan terhubung pelangi dari graf G

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika sebagai induk dari ilmu pengetahuan setiap zaman selalu mengalami perkembangan. Salah satu disiplin ilmu dari matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh seorang matematikawan dari Swiss bernama L. Euler (1736) adalah Teori Graf. Graf dapat digunakan dalam menyederhanakan berbagai persoalan dengan menggambarkan titik *(vertex)* untuk mewakili objek sedangkan hubungan antara objeknya digambarkan dengan garis yang biasa disebut sisi *(edge)*.

Salah satu kajian dalam teori graf yaitu pewarnaan graf. Pewarnaan pada graf sering diaplikasikan pada kehidupan sehari-hari seperti penjadwalan mata kuliah, penjadwalan keberangkatan pesawat, bus dan masih banyak lagi contoh lainnya. Pewarnaan dibagi menjadi tiga yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Seiring berkembangnya teori graf, muncul berbagai macam hasil penelitian baru terkait konsep pewarnaan dalam teori graf. Salah satunya yaitu *terhubung pelangi (Rainbow Connection)*. Konsep *bilangan terhubung pelangi* pertama kali dikenalkan oleh Chartrad dkk. pada tahun 2008. Dalam [1] dituliskan terhubung pelangi adalah pemberian warna pada sisi graf, dimana dua sisi yang bertetangga boleh mempunyai warna sama. Sebuah lintasan pada suatu graf dikatan lintasan pelangi jika tidak ada dua sisi di lintasan tersebut yang memiliki warna yang sama. Pewarnaan seperti ini disebut pewarnaan pelangi, dan pemberian warna minimal dalam suatu graf G disebut bilangan terhubung pelangi yang dinotasikan dengan $rc(G)$.

Beberapa peneliti yang mengkaji bilangan terhubung pelangi antara lain Chartrand dkk. (2008) pada penilitiannya mengenai *rainbow connection number* pada beberapa graf salah satunya untuk graf siklus C_n dengan hasil penelitian

$$rc(C_n) = \begin{cases} 1, & untuk\ n = 3 \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & untuk\ n \geq 4 \end{cases}$$ [2].

Pada tahun 2018, Fitri Anggalia dengan hasil penelitian untuk *rainbow connection number* pada graf kipas F_n, graf buku segiempat $\mathfrak{B}_n$, dan graf tribun $\mathfrak{T}_n$ adalah

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & untuk\ n = 2 \\ 2, & untuk\ 3 \leq n \leq 6, \\ 3, & untuk\ n \geq 7 \end{cases}$$

$$rc(\mathfrak{B}_n) = \begin{cases} 2, & untuk\ n = 1 \\ 3, & untuk\ n = 2\ dan\ n = 3, \\ 4, & untuk\ n \geq 4 \end{cases}$$

dan

$$rc(\mathfrak{T}_n) = 2n \text{ [3].}$$

Alfi Maulani, Soya F.Y.O, dkk (2019) dalam salah satu peneltiannya menemukan bahwa *rainbow connection number* untuk graf korona $C_m \odot P_n$ dan $F_m \odot P_n$ adalah

$$rc(C_m \odot P_n) = \begin{cases} 4, & untuk\ m = 3, n \geq 2 \\ \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 3, & untuk\ m > 3, n \geq 2 \end{cases}$$

dan

$$rc(F_m \odot P_n) = rc(F_m) + 3, untuk\ m \geq 3, n \geq 2 \text{ [4] [5].}$$

Dari hasil yang telah ada, diketahui bahwa bilangan terhubung pelangi untuk korona lintasan dan roda belum dikaji. Karenanya pada penelitian ini, akan di tentukan bilangan terhubung pelangi pada hasil korona graf lintasan P_n dan graf roda W_m. Hasil dari penelitian ini dituangkan dalam bentuk tulisan skripsi dengan judul “Bilangan Terhubung Pelangi Pada Graf $P_n \odot W_m$”.

1.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah berdasarkan latar belakang di atas yaitu

1. Bagaimana mewarnai sisi-sisi pada graf $P_n \odot W_m$, sedemikian sehingga setiap dua titik pada $P_n \odot W_m$ selalu terdapat lintasan pelangi.
2. Menentukan bilangan terhubung pelangi pada graf $P_n \odot W_m$.

1.3. Batasan Masalah

Penelitian ini adalah pembahasan menentukan bilangan terhubung pelangi pada graf $P_n \odot W_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menentukan bilangan terhubung pelangi pada graf $P_n \odot W_m$.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menambah pengetahuan tentang teori graf terkhusus pada kajian bilangan terhubung pelangi. Serta dapat menjadi referensi untuk peniliti lain terkait bilangan terhubung pelangi.

1.6. Sistematika Penulisan

Bab 1 Pendahuluan

Pendahuluan berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelian, manfaat penelitian, dan sistematika penelitian.

Bab 2 Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka berisi tentang graf dan terminologi graf, diameter pada graf, operasi dalam graf, jenis-jenis graf dan bilangan terhubung pelangi.

Bab 3 Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian berisi tentang jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

Bab 4 Hasil dan Pembahasan

Pada bab 4 ini berisi tentang hasil dan pembahasan mengenai bentuk umum dari bilangan terhubung pelangi pada graf $P_n \odot W_m$.

Bab 5 Kesimpulan

Penutup berisi tentang kesimpulan berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya dan saran.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang beberapa teori dan konsep dasar graf meliputi pengertian graf, diameter pada graf, operasi dalam graf, jenis-jenis graf, dan bilangan terhubung pelangi.

2.1. Graf dan Terminologi Graf

Definisi atau pengertian terkait graf lebih banyak merujuk ke buku Pengantar dan Jenis-Jenis Graf oleh Hasmawati (2020) dan buku Matematika Diskrit oleh Rinaldi Munir (2010).

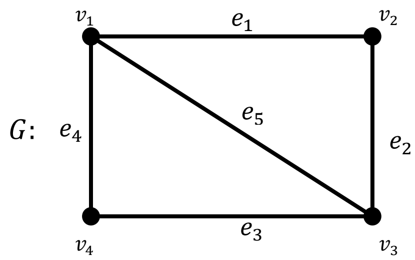
Definisi 2.1.1 [6] Graf G adalah pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga yang anggotanya disebut titik (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan yang tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*).

Pada definisi graf di atas, dapat disimpulkan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ boleh kosong. Suatu graf memungkinkan tidak mempunyai sisi satu pun, tetapi harus memiliki minimal satu titik. Graf yang hanya mempunyai satu titik dan tidak mempunyai sisi dinamakan graf trivial. Sedangkan graf yang memiliki dua titik atau lebih disebut graf tak trivial [7].

Misalkan G adalah suatu graf dengan titik $u, v \in V(G)$ dan sisi $e \in E(G)$. Jika e adalah sisi yang menghubungkan titik u dan v, atau ditulis $e = uv$ maka dikatakan bahwa titik u bertetangga dengan titik v dan sisi e terkait dengan titik u, demikian juga sisi e terkait dengan titik v.

Banyaknya titik di $V(G)$ disebut *order* (orde) dari G dan dilambangkan dengan p, sedangkan banyaknya sisi di $E(G)$ disebut *size* (ukuran) dari G dan dilambangkan dengan q.

Contoh 2.1.1 diberikan graf G sebagai berikut



Gambar 2. 1 Graf *G*

Gambar 2. 1 menunjukkan Graf G yang mempunyai order atau $p = 4$ dan ukuran atau $q = 5$ dengan himpunan titik $\big(V(G)\big)$dan himpunan sisi $(E(G))$ masing-masing adalah:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_1v_3\}.$$

Selanjutnya, karena sisi e_1 menghubungkan titik v_1 dan v_2 maka ditulis $v_1v_2 = e_1$. Demikian juga untuk sisi e_2, e_3, e_4, dan e_5 sehingga dapat ditulis $v_2v_3 = e_2$, $v_3v_4 = e_3$, $v_4v_1 = e_4, v_1v_3 = e_5$. Jadi sisi $E(G)$ dapat juga ditulis sebagai $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Lintasan dengan titik awal v_1 ke titik tujuan v_n di dalam graf G adalah barisan berselang-seling antara titik dan sisi yang berbentuk $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n$ [7]. Panjang lintasan adalah banyaknya sisi dalam lintasan tersebut. Contohnya dapat dilihat di Gambar 2.1 lintasan $v_1e_1v_2e_2v_3$ pada graf G memiliki panjang 2. Graf G dikatakan terhubung apabila untuk setiap dua titik pada graf tersebut terdapat suatu lintasan. Sebaliknya, sebuah graf G disebut tidak terhubung jika terdapat dua titik yang tidak termuat dalam lintasan manapun pada graf G.

2.2. Diameter pada Graf

Diameter pada suatu graf mempunyai karakter sendiri yang bisa diketahui berdasarkan konsep jarak dalam teori graf. Pengertian jarak dalam teori graf tidak berkaitan dengan panjang garis secara geometri melainkan banyaknya sisi pada lintasan terpendek yang menghubungkan dua titik. Jadi jarak antara dua titik u dan

v, dinotasikan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan $u - v$ terpendek atau disebut juga $u - v$ geodesic.

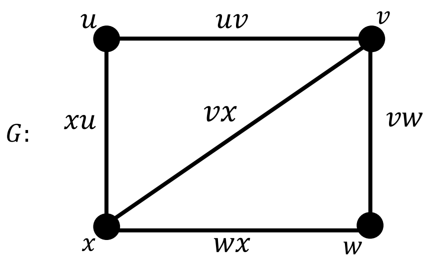
Untuk menentukan diameter suatu graf, terlebih dahulu dicari eksentrisitas suatu titik. Pengertian dari eksentrisitas dan diameter secara formal diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 [6] Misalkan G adalah graf terhubung dan $v \in V(G)$. Eksentrisitas titik v, dinotasikan $e(v)$, didefinisikan sebagai $e(v) = maks\{d(u, v): u, v \in V(G)\}$.

Definisi 2.2.2 [8] Diameter dari graf G, dinotasikan $diam(G)$, adalah maksimum jarak dari seluruh pasang titik di graf G atau dapat dituliskan $diam(G) = maks\{e(v): v \in V(G)\}$.

Contoh 2.2.1

Diberikan Graf G sebagai berikut



Gambar 2. 2 Graf G

Gambar 2.2 menunjukkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{uv, vw, wx, xu, vx\}$. Karena $d(u, v) = 1, d(u, w) = 2$, dan $d(u, x) = 1$ maka $e(u) = maks\{1,2,1\} = 2$. Demikian juga karena $d(v, w) = 1$, $d(v, x) = 1$, dan $d(w, x) = 1$ maka $e(v) = maks\{1,1,1\} = 1, e(w) = maks\{1,2,1\} = 2, e(x) = maks\{1,1,1\} = 1$. Karena $diam(G) = maks\{e(u), e(v), e(w), e(x)\} = maks\{2,1,2,1\} = 2$ maka diameter dari graf G adalah $diam(G) = 2$.

2.3. Operasi dalam Graf

Dalam graf terdapat beberapa operasi yaitu operasi gabungan, penjumlahan, perkalian, amalgamasi, korona, dan shackle. Dalam penelitian ini hanya dibahas operasi gabung, jumlah dan korona.

Definisi 2.3.1 [6] Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$, maka:

1. Graf gabung *(union graph)* antara graf G dan H ditulis $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

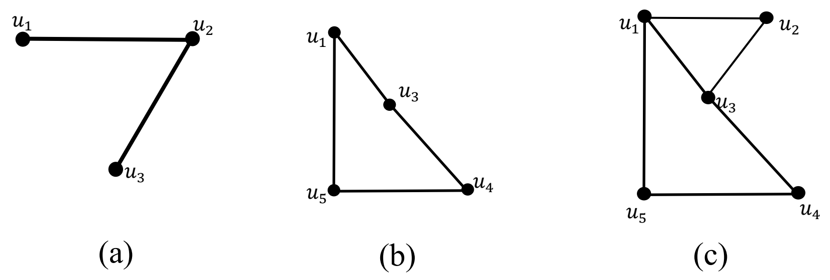
Contoh 2.3.1.1 Misalkan G adalah graf dengan $V(G)$ dan $E(G)$ masing-masing dinyatakan sebagai berikut:

- $V(G) = \{u_1, u_2, u_3\}$
- $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3\}$.

Misalkan pula H adalah graf dengan $V(H)$ dan $E(H)$ masing-masing dinyatakan sebagai berikut:

- $V(H) = \{u_1, u_3, u_4, u_5\}$
- $E(H) = \{u_1u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1\}$.

Maka Graf $G \cup H$ mempunyai himpunan titik $V(G \cup H) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1\}$. Graf G, graf H, dan Graf $G \cup H$ dapat dilihat pada gambar 2. 3 dibawah ini.



Gambar 2. 3 (a) Graf G (b) Graf H (c) Graf $G \cup H$

2. Graf jumlah antara graf G dan H ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv: u \in V(G), v \in V(H)\}$.

Contoh 2.3.1.2 Misalkan G adalah graf dengan $V(G)$ dan $E(G)$ masing-masing dinyatakan sebagai berikut:

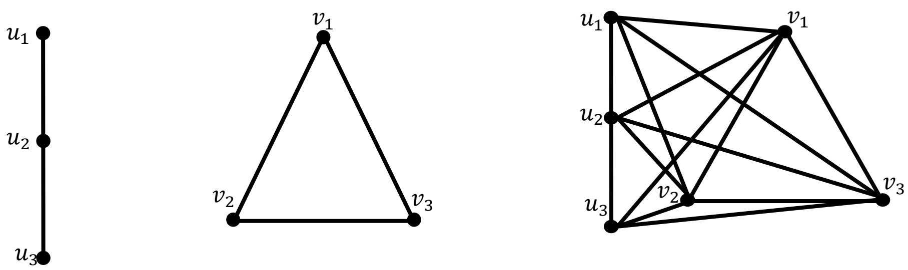
- $V(G) = \{u_1, u_2, u_3\}$
- $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3\}$.

Misalkan pula H adalah graf dengan $V(G)$ dan $E(G)$ masing-masing dinyatakan sebagai berikut:

$V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$

$E(H) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$.

Maka Graf $G + H$ mempunyai himpunan titik $V(G + H) = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = \{u_1u_2, u_2u_3, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\} \cup \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_{2,}\ u_2v_3, u_3v_1, u_3v_2, u_3v_3\}$. Graf G, graf H, dan Graf $G + H$ dapat dilihat pada gambar 2. 4 dibawah ini.



(a) (b) (c)

Gambar 2. 4 (a) Graf G (b) Graf H (c) Graf $G + H$

Definisi 2.3.2 [9] Misalkan G graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m. Graf korona G dan H dinotasikan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dengan menggandakan graf H sebanyak n, sebut $H_1, H_2, \ldots, H_i$ dengan $i = 1,2, \ldots, n$ kemudian titik i di G dihubungkan ke setiap titik di H_i. Titik dan sisi dar graf hasil operasi korona $G \odot H$ adalah:

$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} V(H_i)$, dan

$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} E(H_i) \cup \{iu_i | u_i \in V(H_i)\}$.

Contoh 2. 3. 2 Misalkan Graf P_2 dengan $V(P_2) = \{1,2\}$ dan $E(P_2) = \{12\}$ serta Graf W_3 dengan $V(W_3) = \{p, q, r, s\}$ dan $E(W_3) = \{pq, qr, rp, ps, qs, rs\}$. Maka diperoleh $V(W_{3i}) = \{p_i, q_i, r_i, s_i\}$ sehingga Graf $P_2 \odot W_3$ mempunyai himpunan titik

$V(P_2 \odot W_3) = V(P_2) \cup \bigcup_{i \in V(P_2)} V(W_{3i})$

$V(P_2 \odot W_3) = \{1,2\} \cup V(W_{31}) \cup V(W_{32})$

$V(P_2 \odot W_3) = \{1,2\} \cup \{p_1, q_1, r_1, s_1\} \cup \{p_2, q_2, r_2, s_2\}$

$V(P_2 \odot W_3) = \{1,2, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2\}$

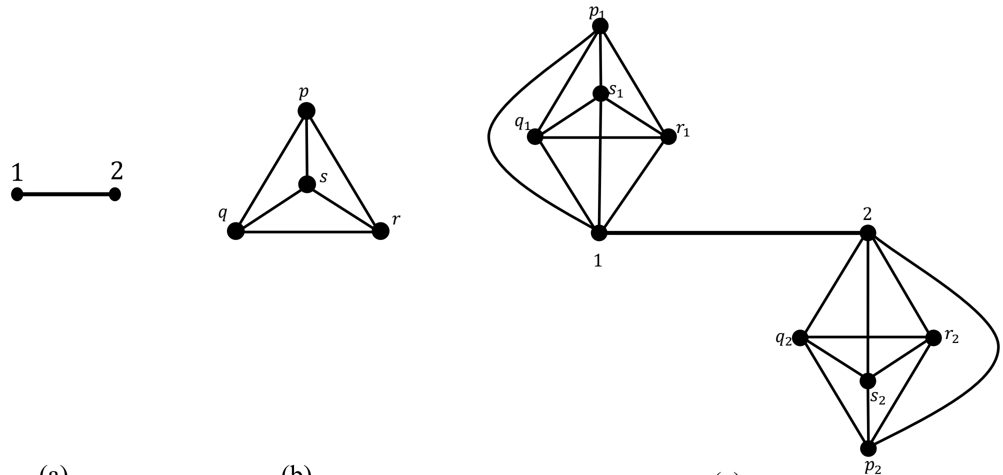
dan himpunan sisi

$E(P_2 \odot W_3) = E(P_2) \cup \bigcup_{i \in V(P_2)} E(W_{3i}) \cup \{iu_i | u_i \in V(W_{3i})\}$

$E(P_2 \odot W_3) = E(P_2) \cup E(W_{31}) \cup \{1p_1, 1q_1, 1r_1, 1s_1\} \cup E(W_{32})$
$\cup \{2p_2, 2q_2, 2r_2, 2s_2\}$

$E(P_3 \odot C_3) = \{12\} \cup \{p_1q_1, q_1r_1, r_1p_1, p_1s_1, q_1s_1, r_1s_1\} \cup \{1p_1, 1q_1, 1r_1, 1s_1\}$
$\cup \{p_2q_2, q_2r_2, r_2p_2, p_2s_2, q_2s_2, r_2s_2\} \cup \{2p_2, 2q_2, 2r_2, 2s_2\}$

$E(P_3 \odot C_3) = \{12, 1p_1, 1q_1, 1r_1, 1s_1, 2p_2, 2q_2, 2r_2, 2s_2,$
$p_1q_1, q_1r_1, r_1p_1, p_1s_1, q_1s_1, r_1s_1, p_2q_2, q_2r_2, r_2p_2, p_2s_2, q_2s_2, r_2s_2\}.$



(a) (b) (c)

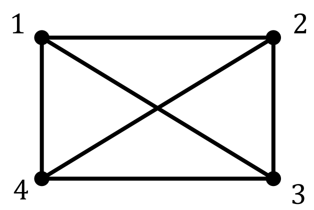
Gambar 2. 5 (a) Graf P_2 (b) Graf W_3 (c) Graf $P_2 \odot W_3$

2.4. Jenis-jenis Graf

Graf juga dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis berdasarkan ciri-ciri khusus dari suatu graf. Berikut ini diberikan definisi graf berdasarkan jenisnya.

Definisi 2.4.1 [6] Graf G disebut graf lengkap jika setiap dua titik pada graf G bertetangga. Graf lengkap yang memiliki *n* titik dinotasikan K_n.

Contoh 2.4.1 Misalkan $V(G) = \{1,2,3,4\}$ dan $E(G) = \{12,13,14,23,24,34\}$. Dapat dikertahui bahwa $\forall u, v \in V(G), uv \in E(G)$. Jadi G graf lengkap dengan 4 titik dinotasikan K_4.



Gambar 2. 6 Graf lengkap K_4

Definisi 2.4.2 [6] Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1},\ i = 1,2,\dots,n-1$. Graf berorde n yang hanya terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan dan dinotasikan P_n.

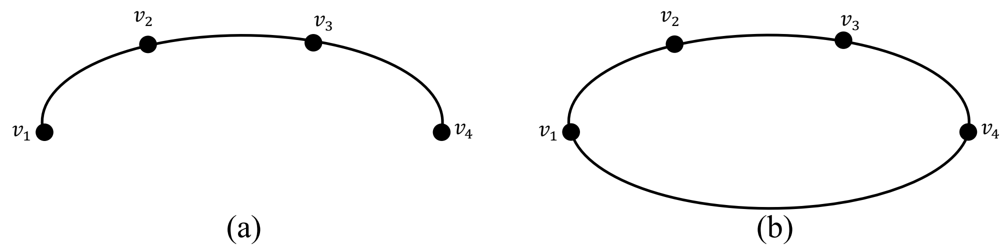
Contoh 2.4.2 Misalkan Graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$. Maka G dikatakan graf lintasan dengan orde 4 yang

Gambar 2. 7 Graf Lintasan P_4

dinotasikan P_4.

Definisi 2.4.3 [6] Misalkan $P_n: v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dengan panjang $n-1$. Siklus C_n dengan panjang $n,\ n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$. Graf yang hanya terdiri atas satu siklus disebut graf siklus.

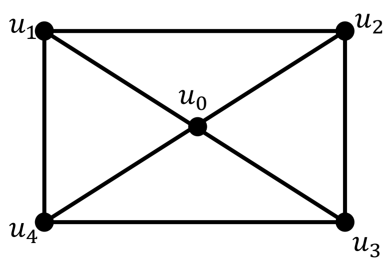
Contoh 2.4.3 Misalkan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$, maka graf $G_1 = P_4$ adalah graf lintasan berorde 4 dengan panjang 3. Apabila $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\} \cup \{v_4v_1\}$, maka Graf G_1 dikatan graf siklus dan dinotasikan C_4.



Gambar 2. 8 (a) Graf P_4 (b) Graf C_4

Definisi 2.4.4 [6] Graf Roda (*Wheel)* adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x dengan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n + 1$ dinotasikan W_n. Untuk $n \geq 3$, graf roda W_n dapat ditulis sebagai $W_n = C_n + K_1$.

Contoh 2.4.4 Misalkan Graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan himpunan sisi $E(W_4) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1, u_1u_0, u_2u_0, u_3u_0, u_4u_0\}$. Karena graf G adalah graf siklus C_4 yang ditambahkan satu titik pusat u_0 dan bertetangga dengan semua titik di C_4, maka Graf G dikatakan graf roda yang dinotasikan dengan W_4.



Gambar 2. 9 Graf W_4

2.5. Bilangan Terhubung Pelangi

Konsep bilangan terhubung pelangi pertama kali dikenalkan oleh Chartrad dkk. pada tahun 2008 yang merupakan pengembangan dari pewarnaan sisi.

Definisi 2.5.1 [10] Misalkan G adalah graf terhubung yang non-trivial. Suatu lintasan $u - v$ di G dikatakan lintasan pelangi *(rainbow path)* jika tidak ada sisi pada lintasan tersebut yang memiliki warna yang sama. Graf G dikatakan graf terhubung pelangi (*rainbow connection graph)* jika setiap dua titik pada G memiliki lintasan pelangi.

Pewarnaan pada graf terhubung pelangi ini disebut sebagai pewarnaan pelangi (*rainbow coloring)*. Pada pembahasan ini pewarnaan pelangi dinotasikan sebagai $c(e)$ dengan $c: E(G) \to \{1,2, \ldots, k\}, k \in \mathbb{N}$, dimana e akan didefinisikan dan k adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk membuat graf G menjadi graf terhubung pelangi. Bilangan terhubung pelangi dari G dinotasikan $rc(G)$ adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai sedemikian sehingga G menjadi bersifat graf terhubung pelangi. Pada Teorema 2.5.1 berikut diberikan hubungan antara $diam(G), rc(G)$ dan banyak ukuran q pada suatu graf terhubung G.

Teorema 2.5.1 [1] Jika G adalah graf terhubung tak trivial dengan ukuran q, maka

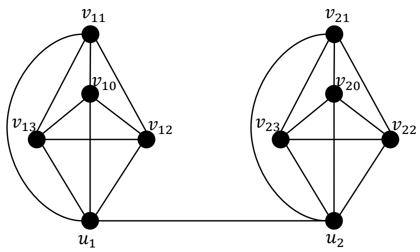
$$diam(G) \leq rc(G) \leq q.$$

Misalkan G graf dengan pewarnaan sisi $c: E(G) \to \{1,2, \ldots, k\}, k \in \mathbb{N}$, maka $diam(G) = k$. Berarti ada dua titik di graf G misal titik u dan v yang dihubungkan lintasan $u - v$ dengan panjang k. Oleh karena jarak $u - v$ adalah jarak terpanjang, sehingga minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G sedemikian sehingga setiap dua titik u dan v di G terdapat *rainbow path* $u - v$ adalah k-warna. Oleh karena itu $rc(G) \geq k$ maka $diam(G) \leq rc(G) \leq q$.

Penelitian ini akan menentukan bilangan terhubung pelangi untuk graf hasil operasi korona antara graf lintasan P_n dan graf roda W_m. Karena itu diberikan contoh penentuan bilangan terhubung pelagi pada graf korona lintasan P_n dan graf roda W_m untuk n dan m yang kecil.

Contoh 2.5.1 Penentuan bilangan terhubung pelangi pada graf $P_2 \odot W_3$.

Untuk $n = 2$ dan $m = 3$, gambar dari graf $P_2 \odot W_3$ adalah sebagai berikut:



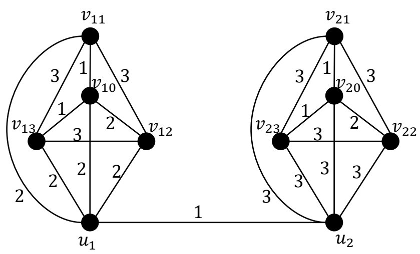
Gambar 2. 10 Graf $P_2 \odot W_3$

Dari Gambar 2. 8, dapat dibuat tabel jarak untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_2 \odot W_3$ sebagai berikut

Tabel 2. 1 Jarak Setiap Dua Titik dan Eksentrisitas Setiap Titik pada Graf $P_2 \odot W_3$

$d(u,v)$												
Titik u	Titik v											$e(u)$
		v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{20}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	u_1	u_2	
	v_{10}		1	1	1	3	3	3	3	1	2	3
	v_{11}	1		1	1	3	3	3	3	1	2	3
	v_{12}	1	1		1	3	3	3	3	1	2	3
	v_{13}	1	1	1		3	3	3	3	1	2	3
	v_{20}	3	3	3	3		1	1	1	2	1	3
	v_{21}	3	3	3	3	1		1	1	2	1	3
	v_{22}	3	3	3	3	1	1		1	2	1	3
	v_{23}	3	3	3	3	1	1	1		2	1	3
	u_1	1	1	1	1	2	2	2	2		1	2
	u_2	2	2	2	2	1	1	1	1	1		2

Berdasarkan Tabel 2. 1, maka diperoleh $diam(P_2 \odot W_3) = maks\ e(u) = 3$. Sehingga berdasarkan Teorema 2.5.1 diperoleh bahwa $rc(P_2 \odot W_3) \geq 3$. Selanjutnya, akan dibuktikan $rc(P_2 \odot W_3) = 3$. Misalkan diberikan 3 warna pada graf $P_2 \odot W_3$, dengan $c: E(P_2 \odot W_3) \rightarrow \{1,2,3\}$ adalah pewarnaan seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 2. 11 Graf $P_2 \odot W_3$ dengan Pewarnaan Sisi-3

Dari Gambar 2. 9, maka akan dicari lintasan pelangi untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_2 \odot W_3$ dengan panjang (u, v) seperti yang dijelaskan pada tabel berikut.

Tabel 2. 2 Lintasan Pelangi untuk Setiap Dua Titik pada Graf $P_2 \odot W_3$

$d(u,v)$						
Titik u	Titik v					
		v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	u_1
	v_{10}		$v_{10}v_{11}$	$v_{10}v_{12}$	$v_{10}v_{13}$	$v_{10}u_1$
	v_{11}	$v_{11}v_{10}$		$v_{11}v_{12}$	$v_{11}v_{13}$	$v_{11}u_1$
	v_{12}	$v_{12}v_{10}$	$v_{12}v_{11}$		$v_{12}v_{13}$	$v_{12}u_1$
	v_{13}	$v_{13}v_{10}$	$v_{13}v_{11}$	$v_{13}v_{12}$		$v_{13}u_1$
	v_{20}	$v_{20}u_2u_1v_{10}$	$v_{20}u_2u_1v_{11}$	$v_{20}u_2u_1v_{12}$	$v_{20}u_2u_1v_{13}$	$v_{20}u_2u_1$
	v_{21}	$v_{21}u_2u_1v_{10}$	$v_{21}u_2u_1v_{11}$	$v_{21}u_2u_1v_{12}$	$v_{21}u_2u_1v_{13}$	$v_{21}u_2u_1$
	v_{22}	$v_{22}u_2u_1v_{10}$	$v_{22}u_2u_1v_{11}$	$v_{22}u_2u_1v_{12}$	$v_{22}u_2u_1v_{13}$	$v_{22}u_2u_1$
	v_{23}	$v_{23}u_2u_1v_{10}$	$v_{23}u_2u_1v_{11}$	$v_{23}u_2u_1v_{12}$	$v_{23}u_2u_1v_{13}$	$v_{23}u_2u_1$
	u_1	u_1v_{10}	u_1v_{11}	u_1v_{12}	u_1v_{13}	
	u_2	$u_2u_1v_{10}$	$u_2u_1v_{11}$	$u_2u_1v_{12}$	$u_2u_1v_{13}$	u_2u_1

Tabel 2. 3 Lanjutan Tabel 2. 2 Lintasan Pelangi untuk Setiap Dua Titik pada Graf $P_2 \odot W_3$

$d(u,v)$						
Titik u	Titik v					
		v_{20}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	u_2
	v_{10}	$v_{10}u_1u_2v_{20}$	$v_{10}u_1u_2v_{21}$	$v_{10}u_1u_2v_{22}$	$v_{10}u_1u_2v_{23}$	$v_{10}u_1u_2$
	v_{11}	$v_{11}u_1u_2v_{20}$	$v_{11}u_1u_2v_{21}$	$v_{11}u_1u_2v_{22}$	$v_{11}u_1u_2v_{23}$	$v_{11}u_1u_2$
	v_{12}	$v_{12}u_1u_2v_{20}$	$v_{12}u_1u_2v_{21}$	$v_{12}u_1u_2v_{22}$	$v_{12}u_1u_2v_{23}$	$v_{12}u_1u_2$
	v_{13}	$v_{13}u_1u_2v_{20}$	$v_{13}u_1u_2v_{21}$	$v_{13}u_1u_2v_{22}$	$v_{13}u_1u_2v_{23}$	$v_{13}u_1u_2$
	v_{20}		$v_{20}v_{21}$	$v_{20}v_{22}$	$v_{20}v_{23}$	$v_{20}u_2$
	v_{21}	$v_{21}v_{20}$		$v_{21}v_{22}$	$v_{21}v_{23}$	$v_{21}u_2$
	v_{22}	$v_{22}v_{20}$	$v_{22}v_{21}$		$v_{22}v_{23}$	$v_{22}u_2$
	v_{23}	$v_{23}v_{20}$	$v_{23}v_{21}$	$v_{23}v_{22}$		$v_{23}u_2$
	u_1	$u_1u_2v_{20}$	$u_1u_2v_{21}$	$u_1u_2v_{22}$	$u_1u_2v_{23}$	u_1u_2
	u_2	u_2v_{20}	u_2v_{21}	u_2v_{22}	u_2v_{23}	

Tabel di atas menunjukkan bahwa untuk setiap dua titik u dan v pada graf $P_2 \odot W_3$ terdapat lintasan pelangi $u - v$. Jadi terdapat 3 pewarnaan pelangi pada graf $P_2 \odot W_3$ dengan kata lain $rc(P_2 \odot W_3) \leq 3$. Karena $rc(P_2 \odot W_3) \geq 3$ dan $rc(P_2 \odot W_3) \leq 3$ maka $rc(P_2 \odot W_3) = 3$. Bilangan terhubung pelangi $rc(P_n \odot W_m)$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ akan di kaji dalam penelitian ini.