# SKRIPSI

# PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA DUA GRAF SHACKLE

**Disusun dan diajukan oleh**

**MUTMAINNAH MUKHTAR JAYA**

**H011 17 1 310**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**MARET 2024**

# PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA DUA GRAF SHACKLE

## SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin

**MUTMAINNAH MUKHTAR JAYA**

**H011 17 1 310**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**DEPARTEMEN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**

**MARET 2024**

# PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | Mutmainnah Mukhtar Jaya |
| NIM | : | H011171310 |
| Program Studi | : | Matematika |
| Jenjang | : | Strata 1 (S1) |

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

**PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA DUA GRAF SHACKLE**

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

**Makassar, 13 Maret 2024**

10000 METERAI TEMPEL 1B9BDAKX815902916

**Mutmainnah Mukhtar Jaya**
**NIM. H011 17 1 310**

**PELABELAN HARMONIS GANJIL**
**PADA DUA GRAF SHACKLE**

**SKRIPSI**

**MUTMAINNAH MUKHTAR JAYA**
**H011 17 1 310**

**Telah diperiksa dan disetujui**
**Tanggal : 13 Maret 2024**

| | |
|---|---|
| **Pembimbing Utama,** | **Pembimbing Pertama,** |
| **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** | **Edy Saputra Rusdi, S.Si., M.Si.** |
| **NIP. 19700807 200003 1 002** | **NIP. 19910410 202005 3 001** |

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA

**Ketua Program Studi,**

**Dr. Firman, S.Si., M.Si.**
**NIP. 19680429 200212 1 001**

# HALAMAN PENGESAHAN

| | | |
|---|---|---|
| Skripsi ini diajukan oleh | : | |
| Nama | : | Mutmainnah Mukhtar Jaya |
| NIM | : | H011171310 |
| Program Studi | : | Matematika |
| Judul Skripsi | : | Pelabelan Harmonis Ganjil pada Dua Graf *Shackle* |

**Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.**

DEWAN PENGUJI

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ketua | : | Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. | (…………………………….) |
| Sekretaris | : | Edy Saputra Rusdi, S.Si., M.Si. | (…………………………….) |
| Anggota | : | Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si. | (…………………………….) |
| Anggota | : | Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si. | (…………………………….) |

| | | |
|---|---|---|
| Ditetapkan di | : | Makassar |
| Tanggal | : | 13 Maret 2024 |

# KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT atas berkah, rahmat, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **"Pelabelan Harmonis Ganjil pada Dua Graf *Shackle*"** selaku ketentuan untuk menuntaskan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan memperoleh title Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1) **Orang Tua, Keluarga Inti, dan Keluarga Besar** yang menjadi panutan, senantiasa memberikan semangat, doa, materi, bantuan, motivasi, dan dukungan kepada penulis.
2) Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.,** selaku Wakil Dekan Bidang Akademik, Riset, dan Inovasi FMIPA UNHAS yang dengan sabar meluangkan waktunya untuk memberikan bekal ilmu kepada penulis dan membantu penulis dalam pengurusan berkas.
3) Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.,** selaku Ketua Departemen Matematika yang dengan sabar meluangkan waktunya untuk memberikan bekal ilmu kepada penulis dan membantu penulis dalam pengurusan berkas wisuda.
4) Ibu **Naimah Aris, S.Si., M. Math.**, selaku Sekertaris Departemen Matematika yang selalu menjadi panutan, memberikan bantuan, motivasi, dan semangat kepada penulis.
5) Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.,** selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak **Edy Saputra Rusdi, S.Si., M.Si.,** selaku Dosen Pembimbing Kedua yang selalu menjadi panutan, sabar ketika meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan, mendidik, mengarahkan, memberikan nasihat, motivasi, semangat, ilmu kepada penulis, dan bantuan kepada penulis.
6) Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.,** selaku Dosen Penguji Pertama dan Ibu **Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.,** selaku Dosen Penguji Kedua sekaligus Penasehat Akademik yang selalu menjadi panutan, sabar ketika meluangkan

waktunya demi memberikan bimbingan, arahan, nasihat, dan memberikan ilmu kepada penulis.

7) Bapak **A. Muh. Anwar, S.Si., M.Si.,** yang telah memberikan informasi perkuliahan, meyakinkan penulis mengenai penamaan graf $n(Amal(P_2, C_4, P_2))$, dan memberikan saran kepada penulis.
8) Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.,** yang telah memberikan informasi kepada penulis mengenai tata cara dalam penyusunan draf proposal.
9) Seluruh **Dosen Pengajar FMIPA UNHAS** yang dengan sabar meluangkan waktunya untuk memberikan bekal ilmu kepada penulis, seluruh **Karyawan FMIPA UNHAS** dan **Karyawan Program Studi Matematika** yang dengan sabar meluangkan waktunya untuk membantu dalam pengurusan akademik.
10) Seluruh **Karyawan Perpustakaan FMIPA UNHAS** dan **Karyawan Perpustakaan Pusat UNHAS** atas bantuannya dalam pengurusan bebas pustaka.
11) Seluruh **Karyawan Rektorat UNHAS** atas bantuannya dalam pengurusan berkas.
12) Kak **Wardiman Husain** dan Kak **Diah Ayu Pujiwati** yang telah mengirimkan file skripsinya kepada penulis.
13) Kak **Gradina Nur Fauziah** dan Kak **Emiliana Asumpta** yang telah mengirimkan file jurnal tesisnya kepada penulis dan memberikan motivasi kepada penulis.
14) Seluruh teman-teman **Matematika 2017**, teman-teman **Bu#(a)ntu *Squad***, **Tim Kreatif Math 2017**, **HSM**, terkhusus kepada **Mamat, Ifah, Indah, Nisa, Rezky, Riswan, Harry, Iqbal, Ab, Wawan, Heru, Rafika, Teka, Dilla, Indi, Upi, Farah, Ita, Acca, Lumpi, Pira, Eda, Cahyu, Denis, Lecy, Ky, Muto, Fika, Defi, Riska, Sarti, Uni, Ika, Yuni, Hafsah, dan Sumarni** yang telah menghibur penulis, mendengarkan curahan hati salama penulisan skripsi, membantu penulis semasa kepengurusan, memberikan pengalaman sangat berharga kepada penulis, memberikan informasi, saran, arahan, bantuan, menemani penulis ketika bimbingan, menemani penulis mencari skripsi sesuai dengan judul skripsi penulis, menemani penulis ketika menyusun skripsi, menemani penulis ketika mengurus administrasi, mengirimkan file skripsi

kepada penulis, menemani penulis ketika seminar, dan memberikan dukungan selama penyusunan skripsi.

15) **Nova Marliana** yang telah menghibur penulis, mendengarkan curahan hati selama penulisan skripsi, memberikan informasi, saran, arahan, bantuan, menemani penulis ketika bimbingan, menemani penulis ketika menyusun skripsi, dan memberikan motivasi.
16) Teman-teman **Trio WatiM Aasiya** yang telah menghibur penulis semasa penyusunan skripsi, memberikan arahan, motivasi, saran, dan membantu penulis mencari skripsi dengan judul skripsi penulis.
17) **Muflihun Azis, Erwin Syahrul Hidayat, Ilmi Kalam, Ihzanul Wajdi, kakak *service* laptop, dan pegawai *service* laptop** yang telah membantu penulis ketika laptop penulis sedang bermasalah.
18) **Kak Dev, Kak Risty, dan Kak Fani** yang telah memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan bantuan kepada penulis.
19) **Senior, Math 2018, Math 2019, dan Math 2020** yang telah memberikan informasi kepada penulis dan membantu semasa perkuliahan.
20) Pihak-pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah memberikan bantuan dan motivasi kepada penulis.

Kepada semua pihak yang telah membantu penulis, terima kasih atas partisipasinya, semoga Allah SWT membalas kebaikannya. Aamiin yaa rabbal aalamiin.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan penilaian, kritik, dan saran yang membangun untuk perbaikan skripsi ini selanjutnya.

Makassar, 05 Maret 2024

Mutmainnah Mukhtar Jaya

# ABSTRAK

Pelabelan harmonis ganjil merupakan pelabelan dengan himpunan titik bilangan bulat tidak negatif sampai $2q$ – 1 dengan $q$ adalah banyaknya sisi pada *G* dan himpunan sisi bilangan bulat ganjil tidak negatif sampai $2q$ – 1 dengan fungsi pelabelan sisi diperoleh dari perhitungan antara dua titik saling terhubung serta setiap titik dan sisi tidak ada terulang. Graf *Shackle* adalah graf yang menempelkan suatu titik yang terkait antara sembarang titik pada graf pertama dengan sembarang titik pada graf kedua.

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kualitatif dengan tiga tahap, yaitu kajian literatur, pembuatan pola, dan deduktif aksiomatik. Berdasarkan hasil penelitian, terbukti bahwa, pelabelan harmonis ganjil pada graf *n*(*shack*($L_{3,3}, P_2$)) dengan $n \geq 1$ dan graf *n*(*shack*($P_2, C_4, P_2$)) dengan $n \geq 1$ merupakan pelabelan harmonis ganjil dengan fungsi $f$ memenuhi fungsi injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi $f^*$ bijektif, dan $f(v_1) \neq f(v_2)$ untuk setiap titik $v_1 \neq v_2$, serta $f^*(e_1) \neq f^*(e_2)$ untuk setiap sisi $e_1 \neq e_2$.

**Kata Kunci :** Pelabelan Harmonis Ganjil dan Graf *Shackle*

# ABSTRACT

Odd harmonic labeling is a labeling with the set of non-negative integer points up to $2q - 1$ where $q$ is the number of edges in $G$ and the set of odd non-negative integer edges up to $2q - 1$ with the edge labeling function obtained from the calculation between two connected points and each point and edge is not repeated. Shackle graph is a graph that attaches an associated point between any point in the first graph and any point in the second graph.

This research uses a qualitative research method with three stages, namely literature review, pattern making, and axiomatic deduction. Based on the research results, it is proven that, odd harmonic labeling on graph $n(shack(L_{3,3}, P_2))$ with $n \geq 1$ and graph $n(shack(P_2, C_4, P_2))$ with $n \geq 1$ are odd harmonic labelings with the function $f$ satisfies the injective function such that it induces the bijective function $f^*$, and $f(v_1) \neq f(v_2)$ for every vertex $v_1 \neq v_2$ and $f^*(e_1) \neq f^*(e_2)$ for every edge $e_1 \neq e_2$.

**Keywords :** Odd Harmonic Labeling and Shackle Graphs

# DAFTAR ISI

# DAFTAR GAMBAR

# DAFTAR NOTASI

| | | |
|---|---|---|
| $Amal(P_3, C_4, v_1)$ | : | Operasi amalgamasi pada graf lintasan $P_2$ dan graf siklus/lingkaran $C_4$ dengan titik tetap $v_1$. |
| $B$ | : | Blok. |
| $C_n$ | : | Graf siklus/lingkaran berorde *n*. |
| $C_4^{(k)}$ | : | Graf siklus/lingkaran berorde 4 sebanyak *k*. |
| $C_4^{(k)} * P_2 * C_4^{(k)}$ | : | Operasi amalgamasi pada graf siklus/lingkaran dengan orde 4 sebanyak $k$, graf lintasan dengan orde 2, dan graf siklus/lingkaran dengan orde 4 sebanyak *k* dengan memperoleh graf kincir angin belanda. |
| $E(G)$ | : | Himpunan sisi pada graf *G*. |
| $E(G \times H)$ | : | Himpunan sisi pada graf kali *G* dan *H*. |
| $E/e/x$ | : | Himpunan sisi. |
| $e_{n-1}$ | : | Sisi ke-*n*-1 dari suatu graf. |
| $f$ | : | Fungsi. |
| $f : V(G)$ | : | Fungsi pelabelan titik pada graf *G*. |
| $f^*: E(G)$ | : | Fungsi pelabelan sisi pada graf *G*. |
| $f^*(xy)$ | : | Fungsi pelabelan sisi pada sisi *xy*. |
| $G/H$ | : | Graf. |
| $G \times H$ | : | Operasi kali graf *G* dan *H*. |
| $G_i$ | : | Graf terhubung. |
| $kG_i$ | : | Graf amalgamasi. |
| $L_{m,n}$ | : | Graf jaring. |

| | | |
|---|---|---|
| $kL_{m,n}$ | : | Graf ular jaring. |
| $n(shack(L_{3,3}, P_2))$ | : | Graf jaring $L_{3,3}$ dan graf lintasan $P_2$ dengan menerapkan operasi graf *shack* sebanyak *n*. |
| $n(shack(P_2, C_4, P_2))$ | : | Graf lintasan $P_2$, graf siklus/lingkaran $C_4$, dan graf lintasan $P_2$ dengan menerapkan operasi graf *shack* sebanyak *n*. |
| p. | : | Halaman sumber kutipan. |
| pp. | : | Halaman *a*-*b* pada sumber kutipan (*a* dan *b* merupakan variabel pemisalan). |
| $P_n$ | : | Lintasan berorde *n*. |
| $Q$ | : | Banyaknya anggota dari sisi. |
| $Shack(L_{3,3}, P_2)$ | : | Graf jaring $L_{3,3}$ dan graf lintasan $P_2$ dengan menerapkan operasi graf *shack*. |
| *u/v/V* | : | Himpunan titik. |
| $V(G)$ | : | Himpunan titik pada graf *G*. |
| $V(G \times H)$ | : | Himpunan titik pada graf kali *G* dan *H*. |
| $v_n$ | : | Titik ke-*n* pada suatu graf. |
| $\mathbb{Z}$ | : | Himpunan bilangan bulat. |
| $\in$ | : | Elemen atau termuat. |
| $\cup$ | : | Gabungan atau termuat. |
| $\geq$ | : | Kurang dari atau sama dengan. |
| $\subseteq$ | : | Himpunan bagian. |
| $\forall$ | : | Untuk setiap. |
| $\blacksquare$ | : | Pembuktian selesai/terbukti. |

| | | |
|---|---|---|
| $\rightarrow$ | : | Ke/pemetaan. |
| $\Longrightarrow$ | : | Maka. |
| $\theta$ | : | Pemisalan pemetaan satu-satu pada sisi $G_2$. |
| $\therefore$ | : | Jadi. |

# BAB I
# PENDAHULUAN

Bab ini berisi uraian mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

## 1.1 Latar Belakang

Matematika adalah pengetahuan untuk memecahkan permasalahan dalam berbagai bidang kejuruan. Salah satu bagian dari ilmu matematika dengan pertumbuhan sangat cepat, baik secara teori maupun aplikasi adalah teori graf. Pada tahun 1736, Leonard Euler memperkenalkan teori graf. Beliau merupakan seorang pakar matematika dari Swiss dengan memecahkan permasalahan pada jembatan Königsberg (terletak di kota Kaliningrad, Jerman). Jembatan Königsberg memiliki sungai Pregal dengan aliran mengelilingi Pulau Kneiphof dan terbagi menjadi 2 anak sungai.

Graf adalah pasangan himpunan $(V,E)$ dengan $V$ adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik dan $E$ adalah himpunan dari pasangan anggota $V$ yang disebut sisi (Hasmawati, 2020, p. 12). Pelabelan graf adalah salah satu bagian dari teori graf yang telah mengalami perkembangan pesat karena penerapannya dapat digunakan dalam berbagai bidang. Contoh penggunaan pelabelan graf dapat ditemukan pada masalah teori koding, jaringan, kristalografi sinar $X$, kerangka sirkuit, basis informasi, kendaraan, penetapan frekuensi radio, dan berbagai bidang lainnya.

Terdapat beberapa jenis pelabelan graf, salah satunya adalah pelabelan harmonis. Pelabelan harmonis dipublikasikan pertama kali pada tahun 1980 oleh R. L. Graham dan N. J. Sloane. Misal $G(V,E)$ suatu graf dan $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,...,q\text{-}1\}$ dengan $q$ adalah banyaknya sisi pada $G$, fungsi $f$ disebut pelabelan harmonis jika $f$ injektif dan terdapat fungsi $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1,2,...,q\text{-}1\}$ didefinisikan sebagai $f^*(uv) = f(x) + f(y) \pmod q$ bijektif untuk setiap $uv$, dan $f(v_1) \neq f(v_2)$ untuk setiap titik $v_1 \neq v_2$, serta $f^*(e_1) \neq f^*(e_2)$ untuk setiap sisi $e_1 \neq e_2$ (Pujiwati, 2020, pp. 9-10).

Penelitian mengenai pelabelan harmonis berkembang menjadi pelabelan harmonis ganjil (*odd harmonious*). Pada tahun 2009, Liang dan Bai melakukan penelitian mengenai pelabelan graf dengan fokus pelabelan harmonis ganjil.

Misal $G(V,E)$ suatu graf dan $f$ : $V(G) \rightarrow \{0,1,2,3,...,2q\text{-}1\}$ dengan $q$ adalah banyaknya sisi pada $G$, fungsi $f$ disebut pelabelan harmonis ganjil jika $f$ injektif dan terdapat fungsi $f^*$ : $E(G) \rightarrow \{1,3,5,...,2q\text{-}1\}$ didefinisikan sebagai $f^*(xy) = f(x) + f(y)$ bijektif untuk setiap $uv$, dan $f(v_1) \neq f(v_2)$ untuk setiap titik $v_1 \neq v_2$, serta $f^*(e_1) \neq f^*(e_2)$ untuk setiap sisi $e_1 \neq e_2$ (Pujiwati, 2020, p. 11).

Beberapa hasil penelitian terdahulu yang membahas pelabelan harmonis ganjil, yaitu Alyani dkk (2013) melakukan penelitian tentang pelabelan harmonis ganjil pada graf $kC_n$ untuk beberapa nilai $n$ (Alyani dkk, 2013, p. 225). Firmansah & Yuwono (2017) melakukan penelitian tentang pelabelan harmonis ganjil pada graf ular jaring (Firmansah & Yuwono, 2017, p. 88). Firmansah & Syaifuddin (2018) melakukan penelitian tentang pelabelan harmonis ganjil pada operasi amalgamasi 2 graf kincir angin belanda, yaitu $C_4^{(k)} * P_2 * C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ dan amalgamasi $k$ graf kincir angin belanda $C_4^{(r)} * P_2 * C_4^{(r)} * ... * C_4^{(r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ (Firmansah & Syaifuddin, 2018, p. 38).

Berdasarkan beberapa penelitian terdahulu yang telah diuraikan dapat disimpulkan bahwa, tidak semua graf dapat diberi label sesuai sifat-sifat pelabelan harmonis ganjil. Oleh karena itu, sebagai pengembangan dari penelitian sebelumnya, peneliti melakukan penelitian dengan judul "**Pelabelan Harmonis Ganjil pada Dua Graf *Shackle***". Penelitian ini melibatkan dua tipe graf, yaitu graf $n(shack(L_{3,3},P_2))$ dengan $n \geq 1$ dan graf $n(shack(P_2,C_4,P_2))$ dengan $n \geq 1$ merupakan pelabelan harmonis ganjil. Graf $shack(L_{3,3},P_2)$ terinspirasi pada graf jaring $L_{3,3}$ dengan peneliti Firmansah & Yuwono tahun 2017. Pada penelitian ini, peneliti menggunakan graf jaring $L_{3,3}$ dan menambahkan graf lintasan $P_2$ dengan menerapkan operasi graf *shackle* sebanyak $n$ blok. Sementara itu, graf $shack(P_2,C_4,P_2)$ terinspirasi pada penamaan graf $C_4^{(k)} * P_2 * C_4^{(k)}$ dan graf $C_4^{(r)} * P_2 * C_4^{(r)} * ... * C_4^{(r)}$ dengan peneliti Firmansah & Syaifuddin tahun 2018. Namun, penelitian ini menggunakan gambar yang berbeda. Graf tersebut mengalami modifikasi dengan cara membuat graf lintasan $P_2$ di awal, menambahkan graf siklus $C_4$, kemudian menambahkan graf lintasan $P_2$ dengan menerapkan operasi graf *shackle* sebanyak $n$ blok.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang diteliti adalah apakah graf $n(shack(L_{3,3},P_2))$ dengan $n \geq 1$ dan graf $n(shack(P_2,C_4,P_2))$ dengan $n \geq 1$ merupakan pelabelan harmonis ganjil ?.

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang diteliti membahas mengenai pelabelan harmonis ganjil pada dua graf *shackle*, yakni graf $n(shack(L_{3,3},P_2))$ dengan $n \geq 1$ dan graf $n(shack(P_2,C_4,P_2))$ dengan $n \geq 1$.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian, yaitu untuk mengetahui graf $n(shack(L_{3,3},P_2))$ dengan $n \geq 1$ dan graf $n(shack(P_2,C_4,P_2))$ dengan $n \geq 1$ merupakan pelabelan harmonis ganjil.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diteliti sebagai berikut :

1. Membagikan informasi dan pemahaman mengenai pelabelan harmonis ganjil.
2. Sebagai daftar bacaan bagi peneliti pelabelan harmonis ganjil.
3. Memberikan motivasi bagi peneliti lain untuk meningkatkan penelitiannya mengenai pelabelan harmonis ganjil dengan menggunakan jenis-jenis graf yang berbeda.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Penyusunan skripsi ada 5 bab. Penyusunan skripsi yang diterapkan sebagai berikut :

1. Bab I. Pendahuluan, menguraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.
2. Bab II. Tinjauan Pustaka, menguraikan tentang konsep pada pembahasan, yakni definisi graf, terminologi graf, operasi graf, jenis-jenis graf, fungsi, dan pelabelan graf.

3. Bab III. Metodologi Penelitian, menguraikan tentang metode penelitian, lokasi dan waktu penelitian, tahapan penelitian, dan diagram bagan alur penelitian.
4. Bab IV. Pembahasan, menguraikan tentang hasil dari tugas akhir yang membahas mengenai graf $n(shack(L_{3,3},P_2))$ dengan $n \geq 1$ dan graf $n(shack(P_2,C_4,P_2))$ dengan $n \geq 1$ merupakan pelabelan harmonis ganjil.
5. Bab V. Penutup, menguraikan tentang kesimpulan dari pengerjaan tugas akhir dan saran bagi peneliti untuk menyusun skripsi.

# BAB II
# TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menguraikan tentang konsep pembahasan, meliputi definisi graf, terminologi graf, operasi graf, jenis-jenis graf, fungsi, dan pelabelan graf.

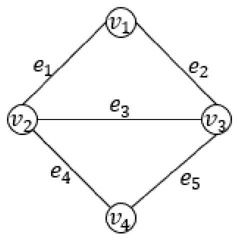
## 2.1 Graf

Subbab ini menguraikan tentang graf yang akan digunakan pada subbab berikutnya.

**Definisi 2.1.1** *(Graf secara umum) Graf adalah pasangan himpunan* ($V$,$E$) *dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan dari pasangan tidak terurut dari anggota-anggota V disebut sisi. Jika graf* ($V$,$E$) *dinotasikan G, dengan kata lain* $G = (V,E)$, *maka* $V = V(G)$ *dan* $E = E(G)$, *sehingga graf* $G = (V(G),E(G))$. *(Graf secara matematika) Graf* $G = (V(G),E(G))$ *dengan* $V(G) = \{u : u$ *disebut titik*$\}$ *dan* $E(G) = \{(u,v) : u,v \in V(G)\}$ *dengan* $(u,v)$ *disebut sisi, rusuk atau garis. Selanjutnya, sisi u,v ditulis uv* (Hasmawati, 2020, p. 12).

**Definisi 2.1.2** *Graf G adalah graf dengan himpunan titik* $V(G) = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ *dan himpunan sisi* $E(G) = \{e_1 = (v_1v_2),e_2 = (v_2v_3),\ldots,e_n = (v_{n-1}v_n)\}$ *untuk n adalah jumlah titik. Variabel titik pada graf dapat dibuat seperti a,b,c,...,v,w,... bilangan asli* 1,2,3,..., *atau gabungan keduanya. Sedangkan, sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v dinyatakan dengan* $(u,v)$ *atau dinyatakan dengan lambang* $e_1,e_2,\ldots$. *Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan titik u dan v, maka e dapat ditulis sebagai* $e = (u,v)$ *atau* $e = (uv)$ (Munir, 2016).

**Contoh 2.1.1**




**Gambar 2.1** Graf *G*

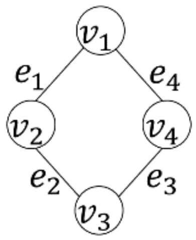
Pada Gambar 2.1, representasi graf $G$ pada himpunan titik $V(G)$ = $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G)$ = $\{e_1 = (v_1 v_2), e_2 = (v_1 v_3), e_3 = (v_2 v_3), e_4 = (v_2 v_4), e_5 = (v_3 v_4)\}$.

## 2.2 Terminologi Graf

Subbab ini menguraikan tentang terminologi graf yang akan digunakan pada subbab berikutnya.

**Definisi 2.2.1** *Kardinalitas adalah banyaknya anggota pada suatu himpunan. Kardinalitas dinotasikan dengan* | |. *Jika p(G) adalah orde (jumlah titik) dan q(G) adalah ukuran (jumlah sisi), maka p(G)* = $|V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$ (Hasmawati, 2020, p. 13).

**Contoh 2.2.1**

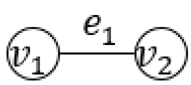



**Gambar 2.2** Graf $C_4$

Berdasarkan Gambar 2.2, graf $C_4$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan jumlah titik $p(C_4) = |V(C_4)| = 4$ serta himpunan sisi $E(C_4) = \{e_1 = (v_1 v_2), e_2 = (v_2 v_3), e_3 = (v_3 v_4), e_4 = (v_4 v_1)\}$ dan jumlah sisi $q(C_4)$ = $|E(C_4)| = 4$.

**Definisi 2.2.2** *Sisi $e$ dikatakan bersisian/terkait dengan titik $v$ jika titik $v$ merupakan salah satu dari ujung sisi $e$. Dengan kata lain, untuk sembarang sisi $e = (v_1 v_2)$, sisi e dikatakan bersisian dengan titik $v_1$ dan $v_2$* (Daniel & Taneo, 2019, p. 11).

**Contoh 2.2.2**

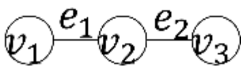



**Gambar 2.3** Graf $P_2$

Berdasarkan Gambar 2.3, sisi $e_1$ dikatakan bersisian/terkait dengan titik $v_1$ dan $v_2$ atau dengan kata lain $e_1 = (v_1 v_2)$.

**Definisi 2.2.3** *Duah buah titik $u$ dan $v$ dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi* (Daniel & Taneo, 2019, p. 11).

**Contoh 2.2.3**



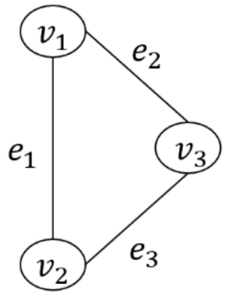

**Gambar 2.4** Graf $P_3$

Berdasarkan Gambar 2.4, titik yang bertetangga pada graf $P_3$ sebagai berikut :

1. Titik $v_1$ bertetangga dengan titik $v_2$
2. Titik $v_2$ bertetangga dengan titik $v_1$ dan $v_3$
3. Titik $v_3$ bertetangga dengan titik $v_2$

**Definisi 2.2.4** *Dua buah sisi $e_1$ dan $e_2$ dikatakan bertetangga jika keduanya bersisian dengan titik yang sama* (Daniel & Taneo, 2019, p. 12).

**Contoh 2.2.4**



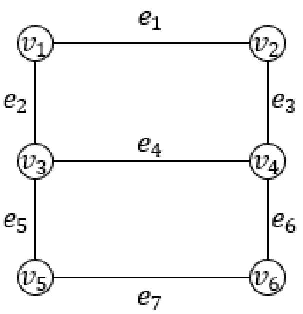

**Gambar 2.5** Graf $C_3$

Berdasarkan Gambar 2.5, titik yang bertetangga pada graf $C_3$ sebagai berikut :

1. Sisi $e_1$ = $(v_1v_2)$ bertetangga dengan sisi $e_2$ = $(v_1v_3)$ karena sisi $e_1$ dan $e_2$ bersisian/terkait dengan titik yang sama pada titik $v_1$
2. Sisi $e_1$ = $(v_1v_2)$ bertetangga dengan sisi $e_3$ = $(v_2v_3)$ karena sisi $e_1$ dan $e_3$ bersisian/terkait dengan titik yang sama pada titik $v_2$
3. Sisi $e_2$ = $(v_1v_3)$ bertetangga dengan sisi $e_3$ = $(v_2v_3)$ karena sisi $e_2$ dan $e_3$ bersisian/terkait dengan titik yang sama pada titik $v_3$

**Definisi 2.2.5** *Graf $G$ dikatakan terhubung (connected) jika untuk setiap dua titik u dan v selalu terdapat lintasan yang memuat titik u dan v* (Hasmawati, 2020, p. 44).

**Contoh 2.2.5**

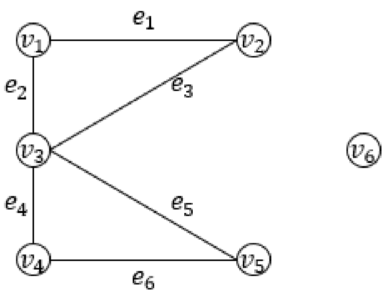



**Gambar 2.6** Graf Terhubung

Berdasarkan Gambar 2.6, graf tersebut dikatakan graf terhubung, karena terdapat lintasan antara setiap pasangan titik.

**Definisi 2.2.6** *Graf G dikatakan tidak terhubung (disconnected) jika untuk setiap dua titik u dan v tidak terdapat lintasan yang memuat titik u dan v* (Hasmawati, 2020, p. 44).

**Contoh 2.2.6**

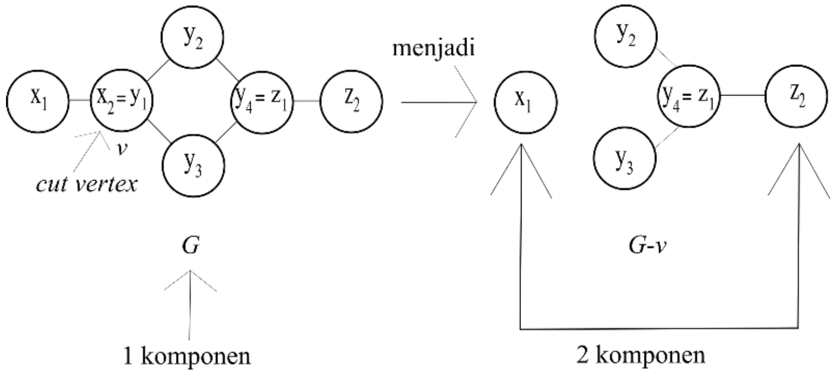



**Gambar 2.7** Graf Tidak Terhubung

Berdasarkan Gambar 2.7, graf tersebut dikatakan graf tidak terhubung, karena tidak terdapat lintasan penghubung antara titik $v_2$ dengan titik $v_6$, begitupula pada titik $v_5$ dengan titik $v_6$.

**Definisi 2.2.7** *Titik v ∈ V(G) adalah titik potong (cut vertex) dari graf G jika graf G-v adalah graf tidak terhubung dan memiliki jumlah komponen yang lebih banyak dibandingkan graf G* (Fauziah, 2017, p. 20).

**Contoh 2.2.7**

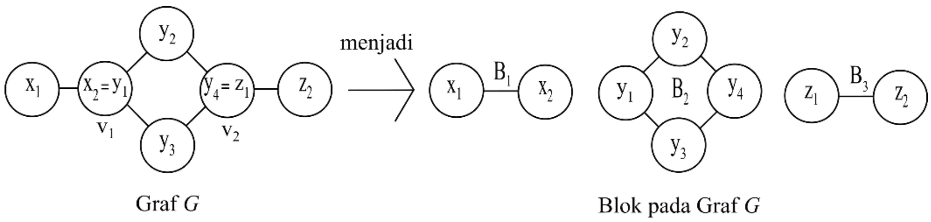



**Gambar 2.8** Konstruksi titik *v* merupakan *cut vertex* dari *G*

Berdasarkan Gambar 2.8, titik $v$ merupakan titik potong dari $G$ karena jika titik $v$ dan semua sisi penghubung dihapus, maka graf $G - v$ menjadi graf tidak terhubung dan memiliki lebih banyak komponen terhubung dari graf $G$.

**Definisi 2.2.8** *Misalkan G suatu graf. Graf G disebut graf tidak dapat dipisahkan jika graf tersebut bukan graf trivial, terhubung, dan tidak memiliki titik potong. Sebuah blok dari suatu graf adalah subgraf maksimal dari G dengan tidak memiliki titik dapat dipisahkan* (Balakrishnan & Ranganathan, 2012, pp. 59-60).

Contoh blok dapat dilihat pada Gambar 2.9.




**Gambar 2.9** Konstruksi Blok pada Graf *G*

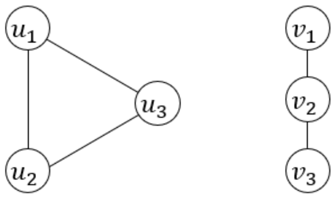
## 2.3 Operasi Graf

Subbab ini menguraikan tentang operasi graf yang akan digunakan pada subbab berikutnya.

**Definisi 2.3.1** *Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik V*(*G*) *dan himpunan sisi E*(*G*) *serta H adalah graf dengan himpunan titik V*(*H*) *dan himpunan sisi E*(*H*), *maka graf kali antara G dan H ditulis G × H adalah graf dengan himpunan titik* $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ (Hasmawati, 2020, pp. 28-29) *dan himpunan sisi* $E(G \times H) = E(G) \times V(H) \cup V(G) \times E(H)$ (Gross & Yellen, 2004).

**Contoh 2.3.1**

Misalkan graf $G = C_3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_3) = \{u_1,u_2,u_3\}$ dan himpunan sisi $E(C_3) = \{u_1u_2,u_1u_3,u_2u_3\}$. Misalkan graf $H = P_3$ merupakan graf dengan himpunan titik $V(P_3) = \{v_1,v_2,v_3\}$ dan himpunan sisi $E(P_3) = \{v_1v_2,v_2v_3\}$, maka himpunan titik dan sisi graf $C_3 \times P_3$ sebagai berikut :




$G : C_3$ $\quad$ $H : P_3$

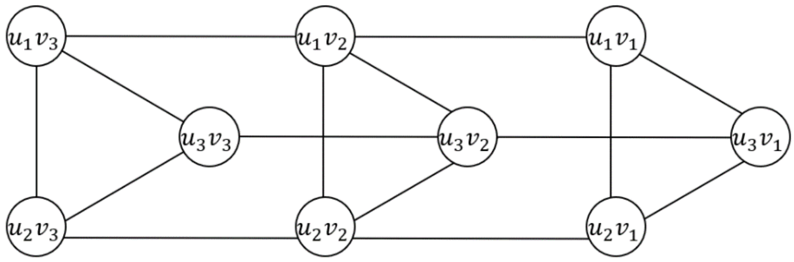
**Gambar 2.10** Graf $C_3$ dan $P_3$

$$\begin{aligned} V(C_3 \times P_3) &= V(C_3) \times V(P_3) \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \times \{v_1, v_2, v_3\} \\ &= \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, u_3v_1, u_3v_2, u_3v_3\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} E(C_3 \times P_3) &= E(G) \times V(H) \cup V(G) \times E(H) \\ &= \{u_1u_2,u_2u_3,u_3u_1\} \times \{v_1,v_2,v_3\} \cup \{u_1,u_2,u_3\} \times \{v_1v_2, v_2v_3\} \\ &= \left\{\begin{matrix} u_1v_1u_2v_1, u_1v_1u_3v_1, \\ u_2v_1u_3v_1, u_1v_2u_2v_2, \\ u_1v_2u_3v_2, u_2v_2u_3v_2, \\ u_1v_3u_2v_3, u_1v_3u_3v_3, \\ u_2v_3u_3v_3 \end{matrix}\right\} \cup \left\{\begin{matrix} u_1v_1u_1v_2, u_1v_2u_1v_{3,} \\ u_2v_1u_2v_2, u_2v_2u_2v_3, \\ u_3v_1u_3v_2, u_3v_2u_3v_3 \end{matrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{matrix} u_1v_1u_2v_1, u_1v_1u_3v_1, u_2v_1u_3v_1, u_1v_1u_1v_2, u_3v_1u_3v_2, \\ u_2v_1u_2v_2, u_1v_2u_2v_2, u_1v_2u_3v_2, u_2v_2u_3v_2, u_1v_2u_1v_3, \\ u_3v_2u_3v_3, u_2v_2u_2v_3, u_1v_3u_2v_3, u_1v_3u_3v_3, u_2v_3u_3v_3 \end{matrix}\right\} \end{aligned}$$

sebagai ilustrasi dapat dilihat pada gambar berikut :



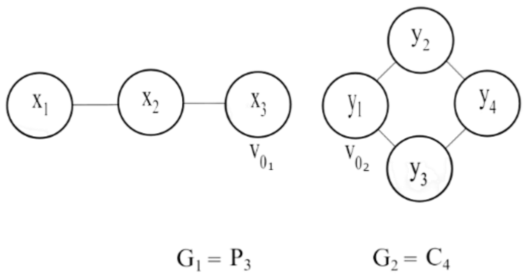

**Gambar 2.11** Graf $C_3 \times P_3$

Jadi, Gambar 2.10 adalah gambar dari graf $C_3$ dengan himpunan titik $V(C_3)$ = $\{u_1,u_2,u_3\}$ dan himpunan sisi $E(C_3)$ = $\{u_1u_2,u_1u_3,u_2u_3\}$ serta gambar dari graf $P_3$ dengan himpunan titik $V(P_3)$ = $\{v_1,v_2,v_3\}$ dan himpunan sisi $E(P_3)$ = $\{v_1v_2,v_2v_3\}$. Gambar 2.11 adalah gambar dari graf $C_3 \times P_3$ dengan himpunan titik $V(C_3 \times P_3)$ = $\{u_1v_1,u_1v_2,u_1v_3,u_2v_1,u_2v_2,u_2v_3,u_3v_1,u_3v_2,u_3v_3\}$ dan himpunan sisi $E(C_3 \times P_3)$ = $\{u_1v_1u_2v_1,u_1v_1u_3v_1,u_2v_1u_3v_1,u_1v_1u_1v_2,u_3v_1u_3v_2, u_2v_1u_2v_2,u_1v_2u_2v_2,u_1v_2u_3v_2,u_2v_2u_3v_2,u_1v_2u_1v_3,u_3v_2u_3v_3,u_2v_2u_2v_3, u_1v_3u_2v_3,u_1v_3u_3v_3,u_2v_3u_3v_3\}$.

**Definisi 2.3.2** *Misalkan* $G_i : G_1, G_2, \dots, G_n$ *adalah masing-masing graf terhubung pada masing-masing titik tetap* $v_{0_i} : v_{0_1}, v_{0_2}, \dots, v_{0_n} \in V(G_i) : V(G_1),V(G_2),\dots,V(G_n)$ *dengan* $i$ = 1,2,...,$n$ *untuk suatu n. Amalgamasi graf* $G_1; G_2; \dots; G_n$ *pada titik tetap* $v_{0_1}, v_{0_2}, \dots, v_{0_n}$ *dinotasikan dengan Amal*$(G_1, G_2, \dots, G_n, v_{0_1}; v_{0_2}; \dots; v_{0_n})$ *adalah menggabungkan semua unsur-unsur (titik dan sisi) pada* $G_1, G_2, \dots, G_n$ *dengan* $v_{0_i} = v_{0_n}, \forall i, n \in \{1,2,\dots,n\}$ *menjadi satu graf dan satu titik tetap. Jika* $G_i = G_n = G, \forall i, n \in\{1,2,...,n\}$, *maka graf Amal*$(G_1;G_2;\dots;G_n,v_{0_1};v_{0_2};\dots;v_{0_n})$ *dapat ditulis Amal*$(nG_n,v_{0_i})$ *dengan* $i$ = 1,2,...,$n$ (Hasmawati, 2020, p. 30).

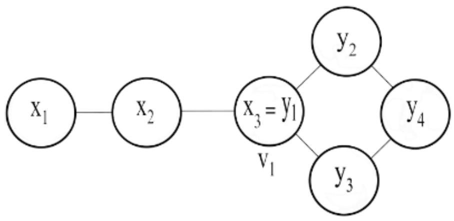
**Contoh 2.3.2**

Misalkan graf $G_1 = P_3$ adalah graf terhubung dengan titik tetap $x_3$ dalam himpunan titik $V(P_3)$ = $\{x_1,x_2,x_3\}$ dan himpunan sisi $E(P_3)$ = $\{x_1x_2,x_2 x_3\}$. Misalkan graf $G_2 = C_4$ adalah graf terhubung dengan titik tetap $y_1$ dalam himpunan titik $V(C_4)$ = $\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ dan himpunan sisi $E(C_4)$ = $\{y_1y_2,y_1y_3,y_2y_4,y_3y_4\}$. Gambar graf $P_3$ dan $C_4$ sebagai berikut :




**Gambar 2.12** Graf $P_3$ dan $C_4$

Jika graf $G_1$ digabungkan dengan graf $G_2$, maka titik tetap $x_3$ pada $G_1$ dan titik tetap $y_1$ pada $G_2$ menjadi satu titik tetap $v_1$, sehingga diperoleh graf *Amal*$(P_3; C_4, v_1)$ dengan himpunan titik *V*(*Amal*($P_3$;$C_4$,$v_1$)) = {$x_1$,$x_2$,$v_1$,$y_2$,$y_3$, $y_4$} dan himpunan sisi *E*(*Amal*($P_3$;$C_4$,$v_1$)) = {$x_1x_2$,$x_2v_1$,$v_1y_2$,$v_1y_3$,$y_2y_4$,$y_3$ $y_4$}. Graf *Amal*$\left(G_1; G_2, v_{0_1}; v_{0_2}\right)$ atau graf *Amal*$(P_3; C_4, v_1)$ dengan $v_1 = (x_3 = y_1)$ dapat dilihat pada Gambar 2.13.




**Gambar 2.13** Graf *Amal*$(P_3; C_4, v_1)$

**Definisi 2.3.3** *Misalkan $G_0$, $G_j$, dan $G_k$ adalah graf terhubung nontrivial dengan $v_0 \in G_0$, $v_1^j, v_2^j \in G_j$ dan $v_k \in G_k$ untuk j* = 1,2,...,*k* - 1 *untuk suatu bilangan asli k. Operasi shackle titik pada graf terhubung nontrivial $G_0$, $G_j$, dan $G_k$ adalah mengambil semua titik dan sisi pada graf $G_0$, $G_j$, dan $G_k$ dengan $v_0 = v_1^1$, $v_2^1 = v_1^2$,..., $v_2^i = v_1^{i+1}$, $v_2^{k-1} = v_k$.*

*Shackle titik graf terhubung nontrivial $G_0$, $G_j$, dan $G_k$ dinotasikan shack($G_0$, $G_j$, $G_k$ : $v_0 = v_1^1$,...,$v_2^i = v_1^{i+1}$,...,$v_2^{k-1} = v_k$). Jadi, jika diberikan $G_i$, $G_j$, dan $G_k$, maka diperoleh shack($G_i$,$G_j$:$v_i = v_j$). Selanjutnya, menempelkan suatu titik yang terkait di shack($G_i$,$G_j$:$v_i = v_j$) sebut x ≠ $v_j$ pada suatu titik yang terkait di $G_k$ sebut $v_k$, sehingga diperoleh shack($G_i$,$G_j$,$G_k$ : $v_i = v_j$,x = $v_k$).*

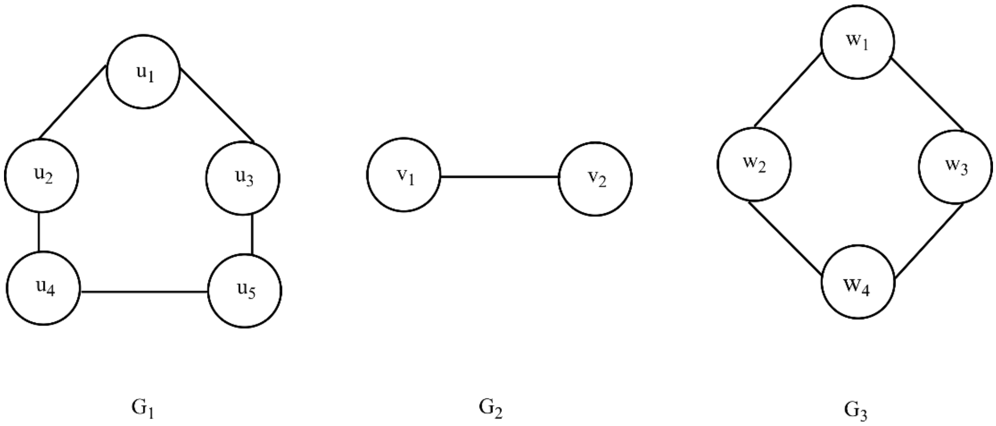
*Operasi shackle titik serupa dengan operasi amalgamasi titik yang beruntun, yakni shack($G_i$,$G_j$:$v_i = v_j$) serupa dengan Amal($G_i$;$G_j$:$v_i$;$v_j$) dan shack($G_i$,$G_j$,$G_k$ : $v_i = v_j$, x = $v_k$)* serupa [*Amal*(*Amal*($G_i$;$G_j$ : $v_j$);$G_k$ : *x*;$v_k$)]

*dengan x titik di Amal*($G_i$;$G_j$:$v_j$) yang berbeda dengan $v_j$. *Titik* $v_i$ *dan* $v_k$ *disebut titik keterkaitan* (*linkage vertex*)/*bersisian.*

*Jadi, misalkan diberikan graf-graf terhubung nontrivial* $G_1$,$G_2$,...,$G_k$ *dengan titik tetap berturut-turut* $v_1$;$u_1$, $v_2$;$u_2$, $v_3$;$u_3$, $v_4$;...;$u_i$,$v_{i+1}$;...$u_{k-2}$,$v_{k-1}$; $v_k$. *Titik* $u_i$,$v_{i+1}$ *adalah titik pada graf* $G_{i+1}$, *untuk i* = 1,2,...,*k* - 2. *Graf yang dibangun oleh graf-graf terhubung nontrivial* $G_1$,$G_2$,...,$G_k$ *pada titik-titik* $v_1$;$u_1$, $v_2$;$u_2$,$v_3$;$u_3$, $v_4$;...;$u_i$,$v_{i+1}$;...$u_{k-2}$,$v_{k-1}$;$v_k$ *melalui operasi shackle adalah shack*($G_1$,$G_2$,...,$G_k$ : $v_1 = u_1$,$v_2 = u_2$,...,$v_i = u_i$,...,$v_{k-1} = v_k$). *Operasi shackle titik pada graf* $G_1$,$G_2$,...,$G_k$ *hanya ditulis shack*($G_1$,$G_2$,...,$G_k$). *Dengan demikian, operasi shackle titik menghasilkan bermacam-macam graf dengan struktur berbeda* (Hasmawati, 2023, pp. 42-43).

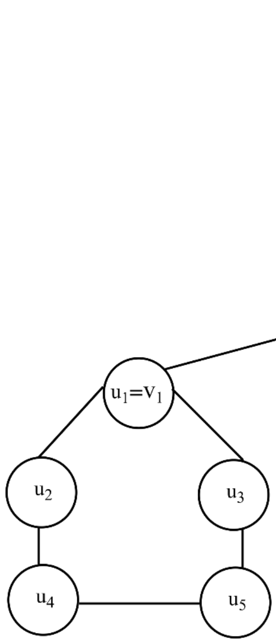
**Contoh 2.3.3**

Diberikan graf $G_1$,$G_2$, dan $G_3$ seperti berikut :




**Gambar 2.14** Graf Sederhana $G_1$, $G_2$, dan $G_3$

Graf pada Gambar 2.14 adalah graf hasil *shackle* titik antara $G_1$,$G_2$,dan $G_3$ pada titik $u_1 = v_1$ dan $w_4 = v_2$, yakni graf *shack*($G_1$,$G_2$,$G_3$:$u_1 = v_1$,$w_4 = v_2$).




**Gambar 2.15** Operasi *Shackle* Titik $G_1$, $G_2$, dan $G_3$

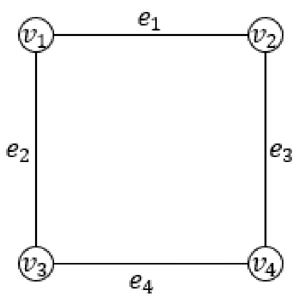
Operasi *shackle* titik antara $G_1$,$G_2$, dan $G_3$ hasilnya bermacam-macam, tergantung dititik mana mau dihubungkan. Adapun salah satu graf hasil *shackle* titik antara $G_1$,$G_2$, dan $G_3$ dapat dilihat pada Gambar 2.15.

## 2.4 Jenis-Jenis Graf

Subbab ini menguraikan tentang jenis-jenis graf yang akan digunakan pada subbab berikutnya.

**Definisi 2.4.1** *Graf sederhana (simple graph) adalah graf yang tidak memiliki gelang dan atau sisi ganda* (Daniel & Taneo, 2019, p. 7).

**Contoh 2.4.1**



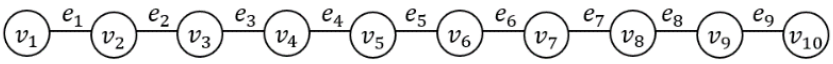

**Gambar 2.16** Graf Sederhana $C_4$

Berdasarkan Gambar 2.16, graf $C_4$ disebut graf sederhana, sebab tidak mempunyai *loop* dan atau sisi ganda.

**Definisi 2.4.2** *Graf lintasan (path) dengan n titik dinotasikan dengan $P_n$ merupakan graf dengan orde (jumlah titik) n dan panjang (jumlah sisi) n*-1

(Hasmawati, 2020, p. 43). *Himpunan titik* $V(P_n) = \{v_1,v_2,...,v_n\}$ *dan himpunan sisi* $E(P_n) = \{e_1 = (v_1v_2), e_2 = (v_2v_3),...,e_n = (v_{n-1}v_n)\}$.

**Contoh 2.4.2**

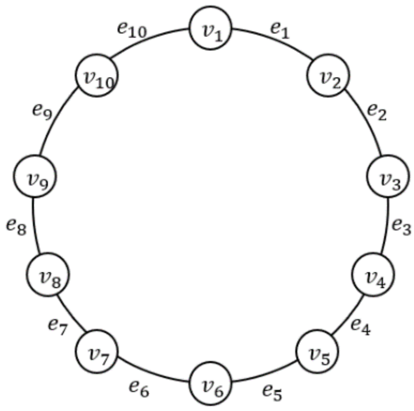



**Gambar 2.17** Graf Lintasan $P_{10}$

Berdasarkan Gambar 2.17, graf lintasan $P_{10}$ dengan 10 titik merupakan graf dengan orde 10 dan panjang 9. Himpunan titik $V(P_{10}) = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6, v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$ dan himpunan sisi $E(P_{10}) = \{e_1 = (v_1v_2), e_2 = (v_2v_3), e_3 = (v_3v_4), e_4 = (v_4v_5), e_5 = (v_5v_6), e_6 = (v_6v_7), e_7 = (v_7v_8), e_8 = (v_8v_9), e_9 = (v_9v_{10})\}$.

**Definisi 2.4.3** *Graf siklus (cycle graph) dengan n titik dinotasikan dengan* $C_n$ *merupakan graf dengan orde (jumlah titik) n* $\geq$ *3 dan panjang (jumlah sisi) n* (Hasmawati, 2020, p. 43). *Himpunan titik* $V(C_n) = \{v_1,v_2,...,v_n\}$ *dan himpunan sisi* $E(C_n) = \{e_1 = (v_1v_2), e_2 = (v_2v_3),...,e_n = (v_{n-1}v_n)\}$.

**Contoh 2.4.3**



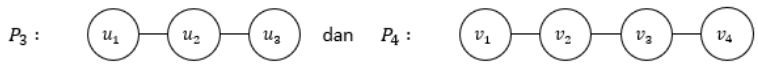

**Gambar 2.18** Graf Siklus $C_{10}$

Berdasarkan Gambar 2.18, graf siklus $C_{10}$ dengan 10 titik merupakan graf dengan orde 10 dan panjang 10. Himpunan titik $V(C_{10}) = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5, v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$ dan himpunan sisi $E(C_{10}) = \{e_1 = (v_1v_2), e_2 = (v_2v_3), e_3 = (v_3v_4), e_4 = (v_4v_5), e_5 = (v_5v_6), e_6 = (v_6v_7), e_7 = (v_7v_8), e_8 = (v_8v_9), e_9 = (v_9v_{10})\}$.

**Definisi 2.4.4** *Graf jaring* $L_{m,n}$ *adalah graf yang terbentuk dari operasi kali graf lintasan* $P_m \times P_n$ (Firmansah & Yuwono, 2017, p. 88).

**Contoh 2.4.4**

Misalkan $G_1$ = $P_3$ dengan himpunan titik $V(P_3)$ = $\{u_1,u_2,u_3\}$ dan himpunan sisi $E(P_3)$ = $\{u_1u_2,u_2u_3\}$. Misalkan $G_2$ = $P_4$ himpunan titik $V(P_4)$ = $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ dan himpunan sisi $E(P_4)$ = $\{v_1v_2,v_2v_3,v_3v_4\}$. Misalkan graf jaring $L_{3,4}$ adalah graf yang terbentuk dari operasi kali graf lintasan $P_3 \times P_4$. Gambar graf $P_3$ dan $P_4$ adalah sebagai berikut :




**Gambar 2.19** Graf $P_3$ dan $P_4$

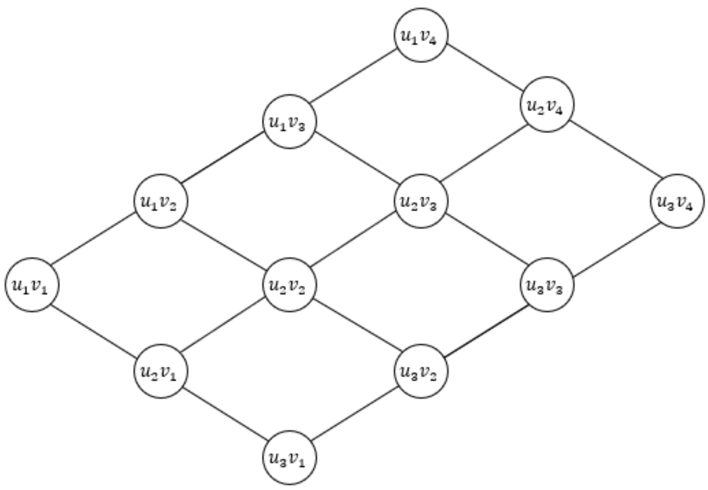
Berdasarkan Gambar 2.19, himpunan titik dan sisi melalui operasi kali pada graf $P_3$ dan graf $P_4$ adalah sebagai berikut :

$$V(P_3 \times P_4) = \left\{ \begin{matrix} u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_1v_4, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, u_2v_4, u_3v_1, \\ u_3v_2, u_3v_3, u_3v_4 \end{matrix} \right\}$$

dan

$$E(P_3 \times P_4) = \left\{ \begin{matrix} u_1v_1u_1v_2, u_1v_1u_2v_1, u_1v_2u_1v_3, u_1v_2u_2v_2, u_1v_3u_1v_4, \\ u_1v_3u_2v_3, u_1v_4u_2v_4, u_2v_1u_2v_2, u_2v_1u_3v_1, u_2v_2u_2v_3, \\ u_2v_2u_3v_2, u_2v_3u_2v_4, u_2v_3u_3v_3, u_2v_4u_3v_4, u_3v_1u_3v_2, \\ u_3v_2u_3v_3, u_3v_3u_3v_4 \end{matrix} \right\}$$

sebagai ilustrasi dapat dilihat pada gambar berikut.

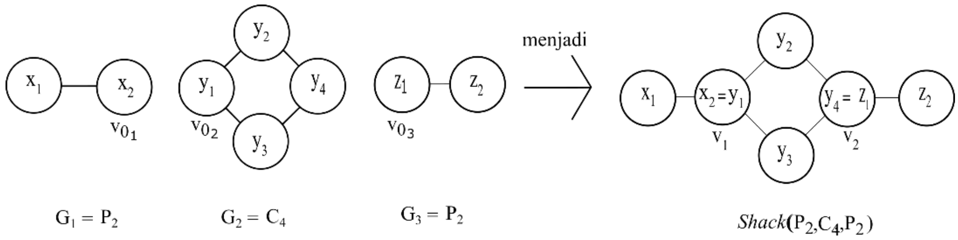



**Gambar 2.20** Graf Jaring $L_{3,4}$

Jadi, Gambar 2.19 adalah gambar dari graf $P_3$ dengan himpunan titik $V(P_3)$ = $\{u_1,u_2,u_3\}$ dan himpunan sisi $E(P_3)$ = $\{u_1u_2,u_2u_3\}$ serta gambar dari graf $P_4$ dengan himpunan titik $V(P_4)$ = $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ dan himpunan sisi $E(P_4)$ = $\{v_1v_2,v_2v_3,v_3v_4\}$. Gambar 2.20 adalah gambar graf jaring $L_{3,4}$ dengan himpunan titik $V(P_3 \times P_4)$ = $\{u_1v_1,u_1v_2,u_1v_3,u_1v_4,u_2v_1,u_2v_2,u_2v_3,u_2v_4,u_3v_1,u_3v_2,u_3v_3,u_3v_4\}$ dan himpunan sisi $E(P_3 \times P_4)$ = $\{u_1v_1u_1v_2,u_1v_1u_2v_1,u_1v_2u_1v_3,u_1v_2u_2v_2,u_1v_3u_1v_4,u_1v_3u_2v_3,u_1v_4u_2v_4,u_2v_1u_2v_2,u_2v_1u_3v_1,u_2v_2u_2v_3,u_2v_2u_3v_2,u_2v_3u_2v_4,u_2v_3u_3v_3,u_2v_4u_3v_4,u_3v_1u_3v_2,u_3v_2u_3v_3,u_3v_3u_3v_4\}$.

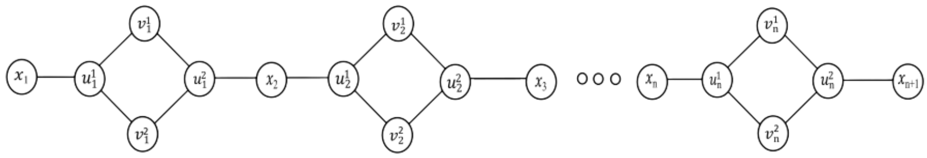
**Definisi 2.4.5** *Graf shackle adalah graf yang dikonstruksi oleh graf-graf terhubung nontrivial $G_1, G_2, \dots, G_k$ sehingga untuk setiap s,t* ∈ [1,*k*] *dengan* |*s-t*| ≥ 2, *graf $G_s$ dan $G_t$ tidak memiliki titik keterkaitan dan untuk setiap i* ∈ [1,*k*-1], *graf $G_i$ dan $G_{i+1}$ memiliki tepat satu titik keterkaitan* (*linkage vertex*). *Titik keterkaitan sebanyak k*-1 *tersebut semuanya berbeda. Graf shackle dibangun oleh graf-graf terhubung nontrivial $G_1, G_2, \dots, G_k$ dinotasikan shack*($G_1, G_2, \dots, G_k$). *Jika untuk setiap i,j graf $G_i = G_j = H$, graf shack*($G_1, G_2, \dots, G_k$) *hanya ditulis shack*(*H*,*k*) (Hasmawati, 2023, pp. 248-249).

**Definisi 2.4.6** *Misalkan $G_1$ = $P_2$ adalah graf terhubung dengan titik keterkaitan $x_2$ dalam himpunan titik V*($P_2$) = $\{x_1,x_2\}$ *dan himpunan sisi E*($P_2$) = $\{x_1x_2\}$. *Misalkan $G_2$ = $C_4$ adalah graf terhubung dengan titik keterkaitan $y_1$ dalam himpunan titik* $V(C_4)$ = $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ *dan himpunan sisi* $E(C_4) = \{y_1y_2, y_1y_3, y_2y_4, y_3y_4\}$. *Misalkan $G_3$ = $P_2$ adalah graf terhubung dengan titik keterkaitan $z_1$ dalam himpunan titik V*($P_2$) = $\{z_1,z_2\}$ *dan himpunan sisi E*($P_2$) = $\{z_1z_2\}$. *Jika graf $G_1$ digabungkan dengan graf $G_2$ dan graf $G_2$ digabungkan dengan graf $G_3$, maka titik keterkaitan $x_2$ pada $G_1$ dan titik keterkaitan $y_1$ pada $G_2$ menjadi satu titik keterkaitan $v_1$ serta titik keterkaitan $y_4$ pada $G_2$ dan titik keterkaitan $z_1$ pada $G_3$ menjadi satu titik keterkaitan $v_2$, sehingga* diperoleh *graf shack*($P_2$,$C_4$,$P_2$).



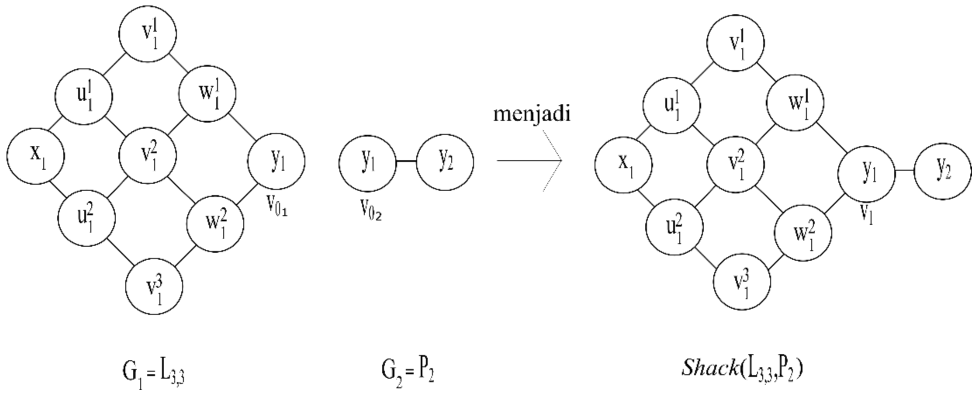

**Gambar 2.21** Graf *shack*($P_2$,$C_4$,$P_2$)

**Definisi 2.4.7** *Graf n(shack($P_2$,$C_4$,$P_2$)) dengan n* $\geq 1$ *adalah graf terhubung dengan n blok yang memiliki titik potong blok berupa graf lintasan $P_2$ dan setiap n blok isomorfik dengan shack($P_2$,$C_4$,$P_2$).*



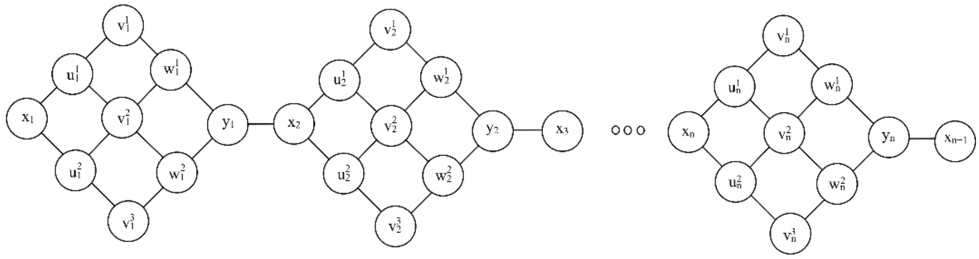
**Gambar 2.22** Graf *n*(*shack*($P_2$,$C_4$,$P_2$)) dengan $n \geq 1$

**Definisi 2.4.8** *Misalkan $G_1 = L_{3,3}$ adalah graf terhubung dengan titik keterkaitan $y_1$ dalam himpunan titik $V(L_{3,3})$ dan himpunan sisi $E(L_{3,3})$. Misalkan $G_2 = P_2$ adalah graf terhubung dengan titik keterkaitan $y_1$ dalam himpunan titik $V(P_2)$ dan himpunan sisi $E(P_2)$. Jika graf $G_1$ dan $G_2$ digabungkan, maka titik keterkaitan $y_1$ pada $G_1$ dan titik keterkaitan $y_1$ pada $G_2$ menjadi satu titik keterkaitan $v_1$, sehingga diperoleh graf shack($L_{3,3}$,$P_2$).*




**Gambar 2.23** Graf *shack*($L_{3,3}$,$P_2$)

**Definisi 2.4.9** *Graf n(shack*($L_{3,3}$,$P_2$)) dengan *n* $\geq 1$ *adalah graf terhubung dengan n blok yang memiliki titik potong blok berupa graf $P_2$ dan setiap n blok isomorfik dengan shack($L_{3,3}$, $P_2$).*



**Gambar 2.24** Graf *n*(*shack*($L_{3,3}$,$P_2$)) dengan $n \geq 1$

## 2.5 Pelabelan Graf

Subbab ini menguraikan tentang pelabelan graf yang akan digunakan pada subbab berikutnya.

**Definisi 2.5.1** *Pelabelan graf adalah suatu pemetaan dari himpunan elemen-elemen pada graf (titik dan sisi) ke suatu himpunan bilangan, umumnya bilangan bulat positif atau bilangan non-negatif yang disebut label* (Marr & Wallis, 2013, p. 10).

Jika domain pemetaannya merupakan himpunan titik, maka pelabelannya disebut pelabelan titik (*vertex labelling*). Jika domain pemetaannya merupakan himpunan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan sisi (*edge labelling*).

**Contoh 2.5.1**

Misalkan graf $C_5$ dengan

$$\begin{aligned} \text{himpunan titik } V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \\ \text{himpunan sisi } E &= \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}, \\ f : V(G) &= \{0,1,2,3,4\}, \text{ dan} \\ f^* : E(G) &= \{0,1,2,3,4\}, \end{aligned}$$

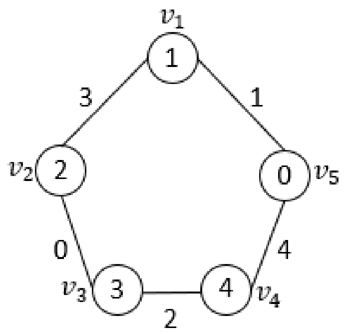
maka $f : V \to \{0,1,2,3,4\}$ ke suatu pelabelan graf. Karena

$$\begin{aligned} &f(v_1) = 1, && f(v_2) = 2, \\ &f(v_3) = 3, && f(v_4) = 4, \\ &f(v_5) = 0, \end{aligned}$$

dan $f^* : E(G) \to \{0,1,2,3,4\}$ ke suatu pelabelan graf, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &f^*(v_1v_2) = 3, && f^*(v_2v_3) = 0, \\ &f^*(v_3v_4) = 2, && f^*(v_4v_5) = 4, \\ &f^*(v_5v_1) = 1. \end{aligned}$$

Pelabelan $f$ dan $f^*$ diilustrasikan pada Gambar 2.25. ■




**Gambar 2.25** Graf $C_5$

Selanjutnya akan didefinisikan salah satu jenis pelabelan graf, yaitu pelabelan harmonis.

**Definisi 2.5.2** *Misal G*(*V*,*E*) *suatu graf dan f* : *V*(*G*) → {0,1,2,…,*q*-1} *dengan q adalah banyaknya sisi pada G, fungsi f disebut pelabelan harmonis jika f injektif dan terdapat fungsi* $f^*$ : *E*(*G*) → {0,1,2,…,*q*-1} *didefinisikan sebagai* $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ (*mod q*) *bijektif untuk setiap uv*, *dan* $f(v_1) \neq f(v_2)$ *untuk setiap titik* $v_1 \neq v_2$, *serta* $f^*(e_1) \neq f^*(e_2)$ *untuk setiap sisi* $e_1 \neq e_2$.

**Contoh 2.5.2**

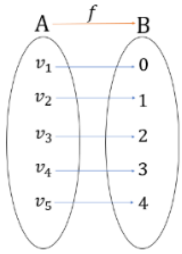
Misalkan graf $C_5$ dengan

$$\begin{aligned}
\text{himpunan titik } V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \\
\text{himpunan sisi } E &= \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}, \\
q &= |E(C_5)| \\
&= 5, \\
\text{mod}(q) &= \text{mod}(5), \\
f : V(C_5) &= \{0,1,2,\ldots,q - 1\} \\
&= \{0,1,2,\ldots,5 - 1\} \\
&= \{0,1,2,3,4\}, \text{ dan} \\
f^* : E(C_5) &= \{0,1,2,\ldots,q - 1\} \\
&= \{0,1,2,\ldots,5 - 1\} \\
&= \{0,1,2,3,4\},
\end{aligned}$$

maka $f : V(C_5) \rightarrow \{0,1,2,3,4\}$ ke suatu pelabelan graf. Karena

$$f(v_1) = 0, \qquad f(v_2) = 1,$$
$$f(v_3) = 2, \qquad f(v_4) = 3,$$
$$f(v_5) = 4,$$

(Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.26 memperlihatkan pembuktian $f(v_i)$ dengan $i$ = 1,2,3,4,5, yaitu $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$, dan $f(v_5)$ memenuhi fungsi injektif sebagai berikut :




**Gambar 2.26** Fungsi Injektif $f(v_i)$ pada Graf $C_5$

)

sedemikian sehingga menghasilkan fungsi bijektif $f^* : E(C_5) \to \{0,1,2,3,4\}$ dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)(\text{mod}\, q)$ ke suatu pelabelan graf, sehingga diperoleh

$f^*(v_1v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ (mod 5) = (0 + 1) mod 5 = 1 mod 5 = 1,

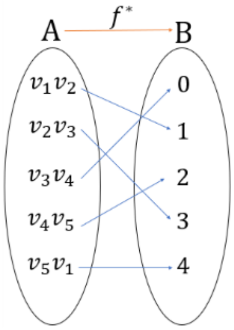
$f^*(v_2v_3) = f(v_2) + f(v_3)$ (mod 5) = (1 + 2) mod 5 = 3 mod 5 = 3,

$f^*(v_3v_4) = f(v_3) + f(v_4)$ (mod 5) = (2 + 3) mod 5 = 5 mod 5 = 0,

$f^*(v_4v_5) = f(v_4) + f(v_5)$ (mod 5) = (3 + 4) mod 5 = 7 mod 5 = 2,

$f^*(v_5v_1) = f(v_5) + f(v_1)$ (mod 5) = (4 + 0) mod 5 = 4 mod 5 = 4.

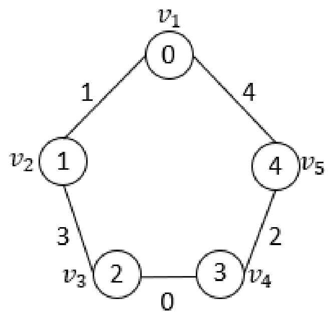
(Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.27 memperlihatkan $f^*$ memenuhi fungsi bijektif sebagai berikut :




**Gambar 2.27** Fungsi Bijektif $f^*$ pada Graf $C_5$

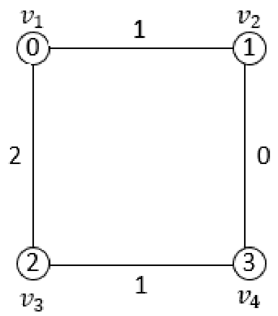
)

Jadi, fungsi $f$ memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi $f^*$ yang bijektif, dan $f(v_1) \neq f(v_2)$ untuk setiap titik $v_1 \neq v_2$, serta $f^*(e_1) \neq f^*(e_2)$ untuk setiap sisi $e_1 \neq e_2$. Akibatnya, graf $C_5$ adalah pelabelan harmonis dan dapat dilihat pada Gambar 2.28. ∎.




**Gambar 2.28** Pelabelan Harmonis pada Graf $C_5$

**Contoh 2.5.3**




**Gambar 2.29** Tidak Termasuk Pelabelan Harmonis pada Graf $C_4$

Pada Gambar 2.29 menunjukkan graf $C_4$ memiliki 4 titik, 4 sisi, dan modulo 4. Setiap label sisi dari graf $C_4$ merupakan hasil dari perhitungan label titik yang saling berkaitan pada setiap sisi dan masing-masing label titiknya berbeda. Graf $C_4$ tidak termasuk pelabelan harmonis karena terdapat label sisi yang bernilai sama, yakni terdapat 2 label sisi yang bernilai 1.

Selanjutnya akan didefinisikan salah satu jenis pelabelan harmonis, yaitu pelabelan harmonis ganjil.

**Definisi 2.5.3** *Misal* $G(V,E)$ *suatu graf dan* $f : V(G) \rightarrow \{0,1,2,\ldots,2q\text{-}1\}$ *dengan q adalah banyaknya sisi pada G, fungsi f disebut pelabelan harmonis ganjil jika f injektif dan terdapat fungsi* $f^* : E(G) \rightarrow \{1,3,5,\ldots,2q\text{-}1\}$ *didefinisikan sebagai* $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ *bijektif untuk setiap uv, dan* $f(v_1) \neq f(v_2)$ *untuk setiap titik* $v_1 \neq v_2$, *serta* $f^*(e_1) \neq f^*(e_2)$ *untuk setiap sisi* $e_1 \neq e_2$.

**Contoh 2.5.4**

Misalkan graf $shack(P_2, C_4, P_2)$ dengan

himpunan titik $V$ = $\{x_1, u_1^1, v_1^1, v_1^2, u_1^2, x_2\}$,

himpunan sisi $E$ = $\{x_1u_1^1, u_1^1v_1^1, v_1^1u_1^2, u_1^2v_1^2, v_1^2u_1^1, u_1^2 x_2\}$,

$$
\begin{aligned}
q &= |E(shack(P_2, C_4, P_2))| \\
&= 6, \\
f : V(shack(P_2, C_4, P_2)) &= \{0,1,2,...,2q - 1\} \\
&= \{0,1,2,...,(2.6) - 1\} \\
&= \{0,1,2,...,12 - 1\} \\
&= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}
\end{aligned}
$$

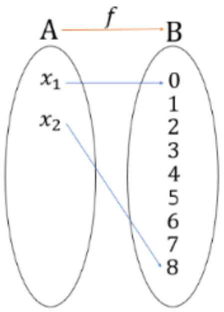
(himpunan titik tidak diambil semua, karena hanya bilangan tertentu yang akan menghasilkan himpunan sisi ganjil), dan

$$
\begin{aligned}
f^* : E(shack(P_2, C_4, P_2)) &= \{1,3,5,...,2q - 1\} \\
&= \{1,3,5,...,(2.6) - 1\} \\
&= \{1,3,5,...,12 - 1\} \\
&= \{1,3,5,7,9,11\},
\end{aligned}
$$

maka, $f : V(shack(P_2, C_4, P_2)) \rightarrow \{0,1,2,...,11\}$ ke suatu pelabelan graf. Karena

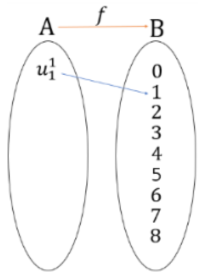
$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= 0, & f(u_1^1) &= 1, \\
f(v_1^1) &= 2, & f(u_1^2) &= 3, \\
f(v_1^2) &= 6, & f(x_2) &= 8,
\end{aligned}
$$

(Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.30 memperlihatkan $f(x_i)$ dengan $i$ = 1,2, yaitu $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ memenuhi fungsi injektif sebagai berikut :



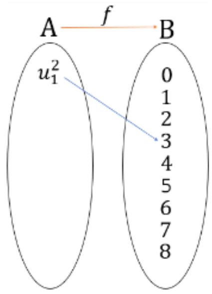

**Gambar 2.30** Fungsi Injektif $f(x_i)$ pada Graf *shack*$(P_2, C_4, P_2)$

Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.31 memperlihatkan $f(u_i^1)$ dengan $i$ = 1, yaitu $f(u_1^1)$ memenuhi fungsi injektif sebagai berikut :



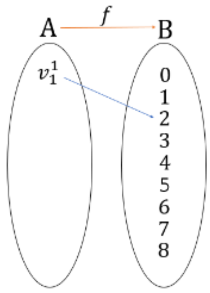

**Gambar 2.31** Fungsi Injektif $f(u_i^1)$ pada Graf *shack*$(P_2, C_4, P_2)$

Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.32 memperlihatkan $f(u_i^2)$ dengan $i$ = 1, yaitu $f(u_1^2)$ memenuhi fungsi injektif sebagai berikut :



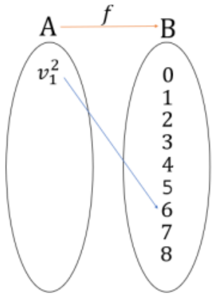

**Gambar 2.32** Fungsi Injektif $f(u_i^2)$ pada Graf *shack*$(P_2, C_4, P_2)$

Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.33 memperlihatkan $f(v_i^1)$ dengan $i$ = 1, yaitu $f(v_1^1)$ memenuhi fungsi injektif sebagai berikut :



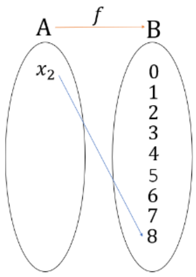

**Gambar 2.33** Fungsi Injektif $f(v_i^1)$ pada Graf *shack*$(P_2, C_4, P_2)$

Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.34 memperlihatkan $f(v_i^2)$ dengan $i$ = 1, yaitu $f(v_1^2)$ memenuhi fungsi injektif sebagai berikut :




**Gambar 2.34** Fungsi Injektif $f(v_i^2)$ pada Graf *shack*$(P_2, C_4, P_2)$

Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.35 memperlihatkan $f(x_{i+1})$ dengan $i$ = 1, yaitu $f(v_1^2)$ memenuhi fungsi injektif sebagai berikut :



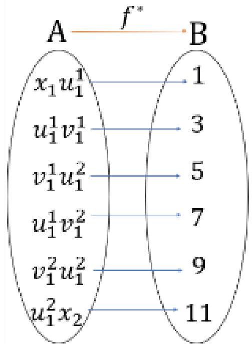

**Gambar 2.35** Fungsi Injektif $f(x_{i+1})$ pada Graf *shack*$(P_2, C_4, P_2)$

)

sedemikian sehingga menghasilkan fungsi bijektif $f^*$ : $E$(s$hack(P_2, C_4, P_2)$) → {1,3,5,...,11} dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ ke suatu pelabelan graf, sehingga diperoleh

$$\begin{array}{lllllll} f^*(x_1u_1^1) & = & f(x_1) + f(u_1^1) & = & 0 + 1 & = & 1, \\ f^*(u_1^1v_1^1) & = & f(u_1^1) + f(v_1^1) & = & 1 + 2 & = & 3, \\ f^*(v_1^1u_1^2) & = & f(v_1^1) + f(u_1^2) & = & 2 + 3 & = & 5, \\ f^*(u_1^2v_1^2) & = & f(u_1^2) + f(v_1^2) & = & 3 + 6 & = & 9, \\ f^*(v_1^2u_1^1) & = & f(v_1^2) + f(u_1^1) & = & 1 + 6 & = & 7, \\ f^*(u_1^2x_2) & = & f(u_1^2) + f(x_2) & = & 3 + 8 & = & 11. \end{array}$$

(Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.36 memperlihatkan $f^*$ memenuhi pemetaan bijektif sebagai berikut :

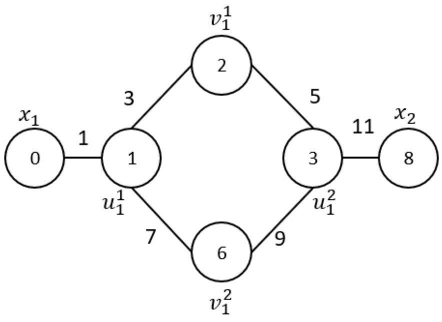



**Gambar 2.36** Fungsi Bijektif $f^*$ pada Graf *shack*$(P_2, C_4, P_2)$

)

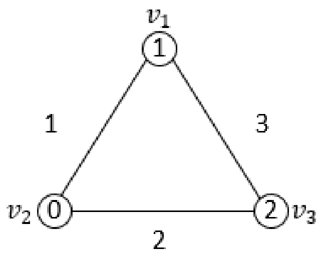
Jadi, fungsi *f* memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi $f^*$ yang bijektif, dan $f(v_1) \neq f(v_2)$ untuk setiap titik $v_1 \neq v_2$, serta

$f^*(e_1) \neq f^*(e_2)$ untuk setiap sisi $e_1 \neq e_2$. Akibatnya, graf $shack(P_2, C_4, P_2)$ adalah pelabelan harmonis ganjil dan dapat dilihat pada Gambar 2.37. ■




**Gambar 2.37** Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf $shack(P_2, C_4, P_2)$

**Contoh 2.5.5**




**Gambar 2.38** Tidak Termasuk Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf $C_3$

Pada Gambar 2.38 menunjukkan graf $C_3$ memiliki 3 titik dan 3 sisi. Setiap label sisi dari graf $C_3$ merupakan hasil dari perhitungan label titik saling berkaitan pada setiap sisi dan masing-masing label titiknya tidak ada sama. Graf $C_3$ tidak termasuk pelabelan harmonis ganjil karena terdapat label sisi bernilai genap, yakni terdapat label sisi bernilai 2.