DIMENSI METRIK GRAF HASIL OPERASI KALI GRAF LENGKAP ORDE DUA TERHADAP GRAF BARBEL

SKRIPSI

SYAHRIL

H011181024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

FEBRUARI 2024

DIMENSI METRIK GRAF HASIL OPERASI KALI GRAF LENGKAP ORDE DUA TERHADAP GRAF BARBEL

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

SYAHRIL

H011181024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

FEBRUARI 2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Kali Graf Lengkap Orde Dua Terhadap Graf Barbel

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 15 Februari 2024

Syahril
H011181024

LEMBAR PENGESAHAN

Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Kali Graf Lengkap Orde Dua Terhadap Graf Barbel

Disusun dan diajukan oleh:

SYAHRIL

H011181024

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 15 Februari 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Hasmawati, M. Si.
NIP. 196412311990032007

Pembimbing Pertama,

Nur Rohmah Oktaviani P., S. Si, M. Si.
NIP. 199210062020016001

Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S. Si., M. Si.
NIP. 196804292002121001

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur senantiasa penulis panjatkan atas kehadirat Allah *subhanahu Wa Ta'ala*, atas limpahan rahmat, nikmat serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan sebaik-baiknya. Penulisan skripsi yang berjudul **"Dimensi Metrik pada Graf Hasil Operasi Kali Graf Lengkap Orde Dua terhadap Graf Barbel",** disusun dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, arahan, serta bantuan dari berbagai pihak selama proses penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulisan menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya terutama kepada kedua orang tua penulis, Ayahanda **Usdar** dan Ibunda **Rosiana** serta keluarga besar besar penulis yang senantiasa mendoakan penulis, memberikan nasihat, perhatian, serta dukunganmaterial maupun moral. Penulis juga ingin menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
2. **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
3. **Dr. Firman, S.Si., M.Si**., selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA Universaitas Hasanuddin.
4. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.,** selaku dosen pembimbing utama yang telah menyediakan waktu , tenaga, pikiran dan selalu sabar dalam membimbing penulis selama proses penyusunan skripsi ini.
5. Ibu **Nur Rohmah Oktaviani S.Si., M.Si.,** selaku dosen pembimbing pertama yang juga selalu menyediakan waktu, tenaga dan pikiran dalam membimbing penulis selama proses penyusunan skripsi ini.

6. **Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D.,** selaku pembimbing akademik sekaligus dosen penguji yang senantia membimbing penulis selama perkuliahan serta memberikan kritikan dan saran dalam proses penyusunan skripsi ini.
7. **Dr. Muh. Nur. S.Si., M.Si.,** selaku dosen penguji yang telah memberikan kritikan dan saran dalam penyusunan skripsi ini.
8. Seluruh **Tenaga Pendidik/Dosen** Departemen Matematika FMIPA Universaitas Hasanuddin yang telah memberikan ilmu-ilmu yang sangat bermanfaat bagi penulis.
9. Seluruh **Staf Depatemen Matematika** yang turut bekerja sama membantu dalam hal administrasi dan persuratan dalam penulisan skripsi ini.
10. Teman seperjuangan penulis terutama Nasra, Saskia, Hana, Hardi, Angput, Leo,Dandung, Iis, Itsnaini, Isra, Ayu, Nanna, Hijrah, Gresye serta seluruh teman-teman **Matematika 2018** yang senantia membantu penulis selama masa perkuliahan hingga pada tahap penyusunan skripsi ini.
11. Teman-teman **Integral 2018** dan **MIPA 2018** yang telah memberikan semangat dan selalu senantiasa membersamai penulis.
12. Teman-teman **Pakarena 11**, secara khusus kepada Rifqy, Oda, Angel, Afni, Rista, Erni, Mimi, Wawan yang selalu membantu dan sabar dalam menghadapi tingkah laku penulis yang sangat *random*.
13. Keluarga besar **UKM Seni Tari Unhas** khususnya Kakanda Madi, Nanda, Egi, Andil, Aan, Anggi, Restu, Aqelah, Cipan, Difa, Mei, Qhiswa, Iin, Hilya, Noni, Mili, Ibnu, Dillah, Kiki, Fahrul, Akmal yang telah memberikan dukungan, semangat, dan kenyaman di UKM Seni Tari Unhas serta memberikan ilmu dalam hal berkesenian dan berorganisasi.
14. Semua pihak yang telah membantu dan belum sempat penulis sampaikan satu per satu.
15. Kepada diri sendiri yang telah berjuang dan sabar dalam melewati banyaknya rintangan dalam proses penyusunan skripsi ini. Maaf atas segala kelelahan, keluhan, kesusahan dan masalah serta kesedihan. Tetap semangat dan jangan lupa untuk selalu terseyum dan sebarkan energi positif kepada lingkungan

sekitarmu. Jangan mudah menyerah dan terus berusaha karena perjuanganmu masih panjang.

Penulis berharap kepada Allah *subhanahu Wa Ta'ala* agar membalas kebaikan semua pihak yang telah membantu . Penulis masih menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam penyusunan skripsi ini karena tidak ada yang sempurna tanpa adanya kritikan dan saran yang membangun. Oleh karena itu, dibutuhkan kritik, saran, dan usulan demi perbaikan di masa yang akan datang.. Akhir kata, Semoga skripsi ini dapat membawa manfaat yang besar bagi perkembangan ilmu pengetahuan kedepannya.

Makassar, 15 Februari 2024

Penulis.

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR

UNTUK KEPERLUAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Syahril
Nim	; H011181024
Program Studi	; Matematika
Departemen	; Matematika
Fakultas	; Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royaliti Nonekslusif (Non-exclusive Royalty-Free Right)** atas karya ilmiah yang berjudul:

"Dimensi Metrik Draf Hasil Operasi Kali Graf Lengkap Orde Dua Terhadap Graf Barbel"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan), Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengolah dalam bentuk pangkalan data (database), merawat dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 15 Februari 2024.

Yang Menyatakan,

Syahril

Abstrak

Salah satu topik pembahasan dalam teori graf adalah Dimensi metrik. Dimensi metrik dari suatu graf G merupakan banyaknya himpunan pembeda minimum atau basis dari $G.$ Himpunan terurut W disebut himpunan pembeda jika setiap titik pada graf G memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dari G disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G. Kardinalitas dari himpunan pembeda minimum tersebut disebut dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $\dim(G)$. Pada penelitian ini, dibahas mengenai dimensi metrik dari graf hasil operasi kali graf lengkap orde dua terhadap graf barbel, dimana $n \geq 3.$ Hasil penelitian menyatakan bahwa dimensi metrik dari graf hasil operasi kali graf lengkap orde dua terhadap graf barbel, dengan $n \geq 3$ adalah $dim(K_2 \times B_{2n}) = 2$ untuk n ganjil dan $dim(K_2 \times B_{2n}) = 3$ untuk n genap.

Kata Kunci: Himpunan Pembeda, Dimensi Metrik, Graf Lengkap, Graf Barbel, Operasi Kali

Abstract

One of the topics discussed in graph theory is metric dimension. The metric dimension of a graph G is the number of minimum resolving sets or basis of G. An ordered set W is called a resolving set if each vertex in the graph G have different representations that respect to W. The resolving set with minimum cardinality of G is called the minimum resolving set or basis of G. The cardinality of the minimum resolving set is called the metric dimension of G and is denoted by $dim(G)$. In this final research, we discuss the metric dimension of the graph of the product of a second-order complete graph over a barbell graph, where $n \geq 3$. The result states that the metric dimension of the product of a second-order complete graph on a barbell graph, with $n \geq 3$ is $dim(K_2 \times B_{2n}) = 2$ for n odd and $dim(K_2 \times B_{2n}) = 3$ for n even.

Keyword; *Resolving Set, Metric Dimension, Complete Graph, Barbell Graph, Product Operation*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai latar belakang penelitian yang berkaitan dengan masalah yang akan diteliti, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan serta manfaat dari dilakukannya penelitian ini.

1.1. Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu anggota dari ilmu eksakta yang memiliki peranan sangat penting bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan ilmu yang dapat melatih kemampuan untuk berpikir secara kritis, logis, kreatif, cermat, dan teliti sehingga dapat menjadi pemecah masalah yang baik. Salah satu cabang dari matematika yang dapat mendukung tercapainya kemampuan tersebut adalah teori graf (Tuhfatul & Syifaul, 2022).

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan (Fitri & Syafruddin, 2019). Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek dan hubungan objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf dengan menyatakan objek sebagai titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis (Putri F.A dkk, 2019). Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong dengan elemen-elemennya disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan dengan elemen-elemennya adalah pasangan tak terurut dua elemen berbeda dari V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dari graf G dinotasikan dengan $E(G)$(Tuhfatul & Syifaul, 2022).

Salah satu topik penelitian dalam teori graf yang telah berkembang adalah dimensi metrik. Topik ini pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 dan secara terpisah oleh Melter & Harary tahun 1976 pada jurnal yang berjudul *on the metrik dimension of a graph* (Tuhfatul & Syifaul, 2022). Misalkan G adalah suatu graf terhubung dan u dan v adalah titik-titik dalam G, maka panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G dinotasikan $d(u, v)$. Jika $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ adalah suatu himpunan terurut dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik v di $V(G)$, maka representasi dari titik v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$, maka W disebut himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dari G disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G. Kardinalitas dari himpunan pembeda minimum tersebut disebut dengan dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $dim(G)$. Konsep dimensi metrik sering diaplikasikan dalam beberapa permasalahan seperti pada pemasangan sensor kebakaran dan penemuan sumber sebaran dalam suatu jaringan (Tuhfatul & Syifaul, 2022).

Pada beberapa penelitian sebelumnya telah ditemukan dimensi metrik untuk beberapa graf misalnya Chartrand (2000) menemukan hasil dimensi metrik dari graf lintasan P_n, graf lengkap K_n dan graf siklus C_n. Fitri & Syafruddin pada tahun 2019 menemukan dimensi metrik dari graf barbel B_{2n} yaitu 2. Kemudian Saskia dalam tugas akhirnya berhasil menemukan dimensi metrik dari hasil operasi kali dari graf lengkap orde dua K_2 dengan graf Sarang Lebah $HC(n)$ yaitu 3. Dari beberapa hasil penelitian tersebut, timbul ide untuk mencari dimensi metrik dari graf barbel B_{2n} yang dioperasikan dengan graf lengkap orde dua menggunakan operasi kali. Oleh karena itu, penulis termotivasi untuk mengkaji lebih dalam mengenai penelitiaan ini sebagai tugas akhir dengan judul "Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Kali Graf Lengkap Orde Dua Terhadap Graf Barbel".

1.2. Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas yaitu bagaimana pemilihan himpunan pembeda minimum dalam penentuan dimensi metrik graf hasil operasi kali graf lengkap orde dua terhadap graf barbel $(K_2 \times B_{2n})$, dengan $B_{2n} = 2C_n + \{x_n y_n\}$.

1.3. Batasan Masalah

Graf barbel merupakan graf yang dibentuk dengan menambahkan satu sisi

$x_n y_n$ pada gabungan dua buah graf siklus C_{n_1} dan C_{n_2} dimana $n_1, n_2 \geq 3$ serta $n_1 = n_2$. Sehingga batasan masalah dalam penentuan dimensi metrik graf hasil operasi kali graf lengkap orde dua terhadap graf barbel $(K_2 \times B_{2n})$, dengan $B_{2n} = 2C_n + \{x_n y_n\}$ terbatas untuk $n \geq 3$.

1.4. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu untuk menentukan bentuk umum dari dimensi metrik graf hasil operasi kali graf lengkap orde dua terhadap graf barbel $K_2 \times B_{2n}$, dengan $B_{2n} = 2C_n + \{x_n y_n\}$ untuk $n \geq 3$.

1.5. Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian di atas, diharapkan penelitian ini dapat memberikan pengetahuan baru mengenai teori graf khususnya pada topik dimensi metrik, baik bagi penulis maupun pembaca. Selain itu, penelitian ini diharapkan juga dapat menjadi referensi bagi peneliti lain dalam mengkaji dimensi metrik.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II ini akan dijelaskan beberapa materi yang mendukung penulisan skripsi ini, antara lain konsep dasar teori graf dan jenis-jenisnya, operasi pada graf serta dimensi metrik pada suatu graf.

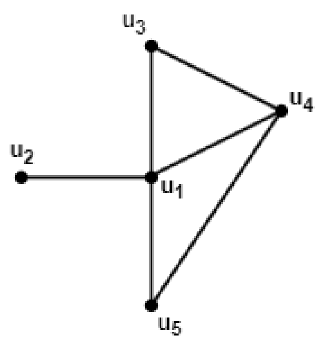
2.1 Konsep Dasar Graf

Terdapat beberapa penulis yang memberikan definisi graf yang dituangkan dalam sebuah buku. Berikut definisi graf sederhana yang merujuk pada buku Pengantar dan Jenis-jenis Graf.

Definisi 2.1 Graf sederhana G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$ dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong yang anggotanya disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak berurutan dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (Hasmawati, 2020).

Orde (*order*) dari graf G dinyatakan dengan simbol p yakni banyaknya anggota dari $V(G)$ dan ukuran (*size*) dari G dinyatakan dengan simbol q yakni banyaknya anggota dari $E(G)$. Jadi orde graf G adalah banyaknya titik pada G dan ukuran graf G adalah banyaknya sisi pada G.

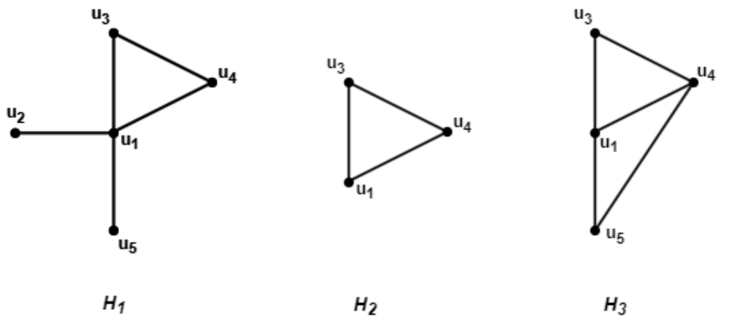
Contoh 2.1 Diberikan suatu graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_1u_4, u_1u_5, u_3u_4, u_4u_5\}$ seperti gambar berikut.



Gambar 2.1 Graf G

Karena banyaknya titik pada graf G atau $|V(G)| = 5$ dan banyaknya sisi pada graf G atau $|(G)| = 6,$ maka $p(G) = 5$ dan $q(G) = 6$.

Definisi 2.2 Misalkan dua graf$H = (V(H), E(H))$ dan $G = (V(G), E(G))$. Graf H disebut subgraf dari G, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.



Gambar 2.2 Subgraf dari Graf G

Definisi 2.3 Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. jika $x = v_i v_j$, maka dikatakan bahwa:

a) Titik v_i bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_j.

b) Sisi x terkait (*incident*) dengan titik v_i, demikian pula untuk titik v_j

Definisi 2.4 Derajat suatu titik v_i dalam graf G dilambangkan "$d(v_i)$" adalah banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i.

Definisi 2.5 Misakan u dan v adalah dua titik dalam graf G. Jarak titik u dan v ditulis $d(u, v)$ yang memenuhi:

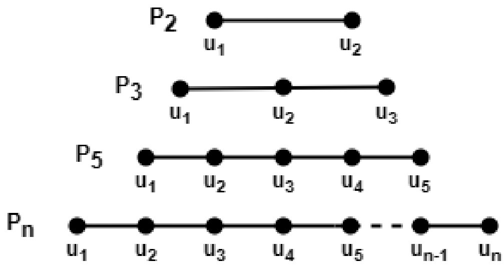
$$d(u,v) = \begin{cases} 0, & jika\, u = v \\ k, & jika\, panjang\ lintasan\ terpendek\ u - v\ adalah\ k \\ \infty, & jika\ tidak\ ada\ lintasan\ dari\ u\ ke\ v \end{cases}$$

2.2 Jenis - jenis Graf

Berikut akan dijelaskan beberapa graf khusus sebagai berikut:

a) Graf Lintasan

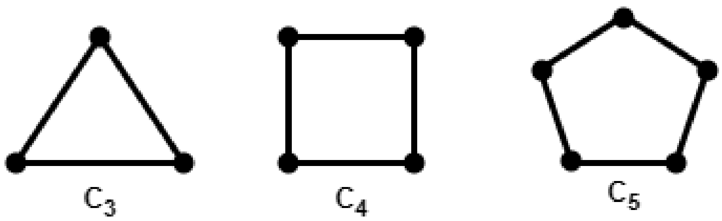
Definisi 2.6 Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_{n-1}, e_{n-1}, v_n dengan $e_i = v_i v_{i+1}$, $i = 1,2, ..., n - 1$. Graf yang hanya terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan dan dinotasikan P_n apabila berorde n.



Gambar 2.3 Graf Lintasan

b) Graf Siklus

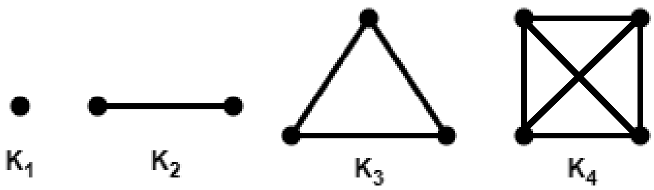
Definisi 2.7 Misalkan P_n: v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_{n-1}, e_{n-1}, v_n adalah lintasan berorde n dengan panjang $n-1$. Siklus C_n dengan panjang $n, n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $(C_n) = (P_n)$ dan himpunan sisi $(C_n) = (P_n) \cup \{v_n v_1\}$ (Hasmawati, 2020). Graf siklus adalah graf yang hanya terdiri atas satu siklus.



Gambar 2.4 Graf Siklus

c) Graf Lengkap

Definisi 2.8 Graf lengkap adalah salah satu graf khusus yang setiap dua titiknya bertetangga. Akibatnya, setiap titik pada graf lengkap mempunyai derajat yang sama. Graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama disebut graf regular. Graf regular berderajat r dinotasikan $r - reguler$. Berdasarkan notasi ini, graf lengkap $K_n = (n-1) - reguler$ (Hasmawati, 2020).

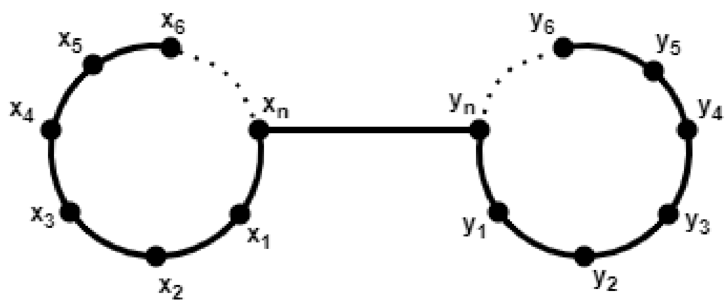


Gambar 2.5 Graf Lengkap K_1, K_2, K_3, K_4

Pada gambar 2.4 dapat dilihat bahwa graf lengkap K_2 memiliki bentuk yang sama dengan graf lintasan P_2 begitupula dengan graf lengkap K_3 memiliki bentu yang sama dengan graf siklus C_3. Adapun untuk graf lengkap K_1 yang hanya memiliki satu titik dan tidak mempunyai sisi disebut juga dengan graf trivial.

d) Graf Barbel

Definisi 2.9 Graf barbel $B_{2n} = 2C_n + \{x_n y_n\}$, $n \geq 3$ didefinisikan sebagai graf yang berasal dari dua graf C_{n_1} dan C_{n_2} , dengan cara menambahkan satu sisi $x_n y_n$ ke graf $C_{n_1} \cup C_{n_2}$ (Fitri & Syafruddin, 2019).



Gambar 2.6 Graf Barbel $B_{2n} = 2C_n + \{x_n y_n\}$

Pada Gambar 2.6 dapat dilihat bahwa Graf barbel dibentuk dari gabungan dua graf siklus $C_{n_1} \cup C_{n_2}$ yang memiliki orde yang sama ($n_1 = n_2$) dengan $V(C_{n_1}) = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ dan $V(C_{n_2}) = y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Kemudian dari hasil penggabungan tersebut diberikan tambahan sisi $x_n y_n$ dengan $x_n \in V(C_{n_1})$ dan $y_n \in V(C_{n_2})$. Adapun himpunan titik dan himpunan sisi graf barbel $B_{2n} = 2C_n + \{x_n y_n\}$ adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
V(B_{2n}) &= V(C_{n_1}) \cup V(C_{n_2}) \\
&= \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \\
E(B_{2n}) &= E(C_{n_1}) \cup E(C_{n_2}) \cup \{x_n y_n\} \\
&= \{x_i x_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1} \mid 1 \leq i \\
&\qquad \leq n-1\} \cup \{x_n y_n\}
\end{aligned}
$$

2.3 Operasi Pada Graf

Terdapat banyak operasi graf yang dapat digunakan diantaranya operasi gabung, operasi jumlah dan operasi kali. Berikut definisi dari ketiga operasi tersebut.

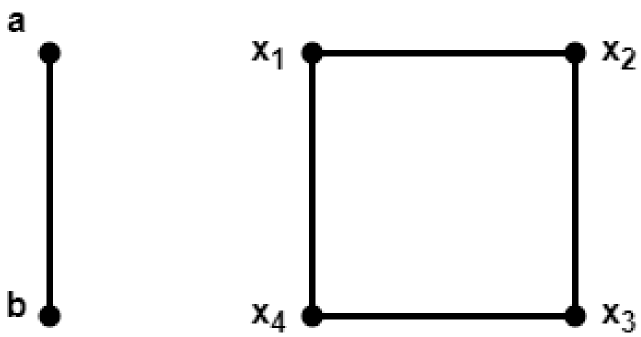
Definisi 2.10 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Maka,

a) Graf gabung (*union graph*) antara G dan H ditulis $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

b) Graf jumlah antara G dan H ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv, u \in V(G), \in (H)\}$.

c) Graf kali $G \times H$ adalah graf dengan himpunan titik $(G \times H) = (G) \cup (H)$ dan himpunan sisi $(G \times H)$ adalah himpunan $\{xy | x = u_1v_1, \ = u_2v_2; u_1 = u_2\ dan\ v_1v_2 \in (H)\ \ atau\ v_1 = v_2\ dan\ u_1u_2 \in E(G)\}$.

Contoh 2.2 Diberikan graf lengkap K_2 dengan himpunan titik $V(K_2)= \{a, b\}$ dan himpunan sisi $E(K_2) = \{ab\}$, serta graf siklus C_4 dengan himpunan titik $V(C_4)= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan himpunan sisi $E(C_4) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_1x_4\}$ sebagai berikut:



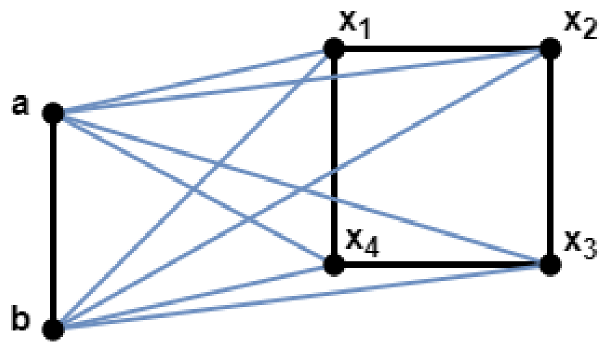
Gambar 2.7 Graf K_2 dan Graf C_4

a) Graf gabung $K_2 \cup C_4$ mempunyai himpunan titik $V(K_2 \cup C_4) = \{V(K_2) \cup V(C_4)\} = \{a, b, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan himpunan sisi $(K_2 \cup C_4) = \{ab, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_1x_4\}$.

b) Graf jumlah $K_2 + C_4$ mempunyai himpunan titik $V(K_2 + C_4) = \{a, b, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

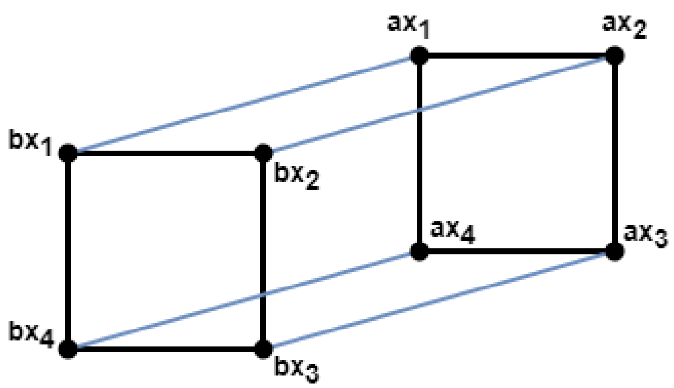
dan memiliki himpunan sisi $E(K_2 + C_4) =$

$\{ab, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_1x_4, ax_1, ax_2, ax_3, ax_4, bx_1, bx_2, bx_3, bx_4\}$



Gambar 2.8 Graf $K_2 + C_4$

Graf kali $K_2 \times C_4$ mempunyai himpunan titik $(K_2 \times C_4) = \{ax_1, ax_2, ax_3, ax_4, bx_1, bx_2, bx_3, bx_4\}$ dan himpunan sisi $E(K_2 \times C_4) = \{ax_1ax_2, ax_2ax_3, ax_3ax_4, ax_1ax_4, ax_1bx_1, ax_2bx_2, ax_3bx_3, ax_4bx_4, bx_1bx_2, bx_2bx_3, bx_3bx_4, bx_1bx_4\}$.



Gambar 2.9 Graf $K_2 \times C_4$

2.4 Isomorfisma Graf

Berikut diberikan definisi isomorfisma pada suatu graf.

Definisi 2.11 Diberikan dua graf $(V(G_1), E(G_1))$ dan $(V(G_2), E(G_2))$. Suatu pemetaan satu-satu θ dari $V(G_1)$ ke dalam $V(G_2)$dikatakan *isomorphisme* dari $(V(G_1), E(G_1))$ ke $(V(G_2), E(G_2))$, apabila memenuhi untuk setiap $u, v \in V(G_1)$ dengan $(u, v) \in E(G_1)$ jika hanya jika $\theta(u), \theta(v) \in E(G_2)$. Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan *isomorph*, jika ada *isomorphism* antara G_1 dan G_2.

Adapun makna dari Definisi 2.11 diuraikan sebagai berikut:

1. Terdapat fungsi satu-satu dan onto antara titik-titik pada kedua graf tersebut.
2. Misalkan sisi e terkait dengan titik u dan v di G_1, maka sisi e' di G_2 yang berkoresponden di G_1 harus terkait dengan titik u' dan v' di G_2. Dalam hal ini, titik u' adalah peta dari titik u dan titik v' adalah peta dari titik v.
3. Graf G_1 dan G_2 adalah isomorfik jika simpul-simpulnya dapat diurut dengan cara sedemikian rupa sehingga matriks ketetanggaan (*adjacency*) $M(G_1)$ dan $M(G_2)$ sama .

2.5 Dimensi Metrik

Dimensi metrik dari suatu graf G merupakan banyaknya himpunan pembeda minimum atau basis dari G. Untuk lebih jelasnya akan diberikan definisi dimensi metrik sebagai berikut.

Definisi 2.12 Jika $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ adalah suatu himpunan terurut dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik v di $V(G)$, maka representasi dari titik v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$, maka W disebut himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dari G disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G. Kardinalitas dari himpunan pembeda minimum tersebut disebut dengan dimensi metrik dari G, dan dinotasikan dengan (G) (Tuhfatul & Syifaul, 2022).

Teorema 2.1 Jika G suatu graf terhubung dengan orde n, maka

a. $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$

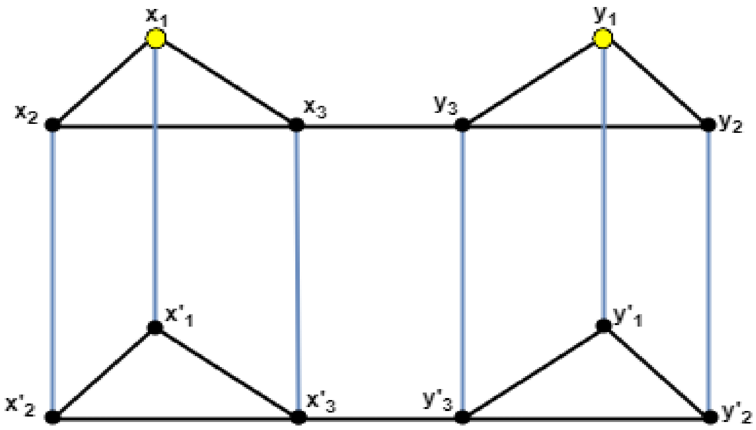
b. Jika $n \geq 2, dim(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$

Teorema 2.2 *For any graph G,*

$$dim(G) \leq dim(K_2 \times G) \leq dim(G) + 1,$$ (Hernando et all, 2005)

Teorema 2.3 Misalkan $n \geq 3$ dan terdapat graf $B_{2n} = 2C_n + \{x_n y_n\}$, maka $dim(B_{2n}) = 2$.

Contoh 2.3 Diberikan graf $K_2 \times B_6$ seperti pada gambar dibawah dengan himpunan titik $(K_2 \times B_6) = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, x'_1, x'_2, x'_3, y'_1, y'_2, y'_3\}$ dan himpunan sisi $E(K_2 \times B_6) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3, y_1y_2, y_2y_3, y_1y_3, x_3y_3, x'_1x'_2, x'_2x'_3, x'_1x'_3, y'_1y'_2, y'_2y'_3, y'_1y'_3, x'_3y'_3, x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3, y_1y_2, y_2y_3, y_1y_3\}$,



Gambar 2.10 Graf $K_2 \times B_6$

Dari Teorema 2.1 dikatakan bahwa $dim\ (G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$. Karena graf $K_2 \times B_6$ bukan merupakan graf lintasan (P_n), maka $dim\ (K_2 \times B_6) \neq 1$. Oleh karena itu $(K_2 \times B_6) \geq 2$. Selanjutnya dapat dipilih subset dari $(K_2 \times B_6)$, yaitu $W = \{x_1, y_1\}$ sehingga diperoleh representasi untuk setiap titik terhadap graf $K_2 \times B_6$ pada W adalah sebagai berikut:

$$r(x_1|W) = [d(x_1, x_1), d(x_1, y_1)] = [0,3]$$

$$r(x_2|W) = [d(x_2, x_1), d(x_2, y_1)] = [1,3]$$

$$r(x_3|W) = [d(x_3, x_1), d(x_3, y_1)] = [1,2]$$

$$r(y_1|W) = [d(y_1, x_1), d(y_1, y_1)] = [3,0]$$

$$r(y_2|W) = [d(y_2, x_1), d(y_2, y_1)] = [3,1]$$

$$r(y_3|W) = [d(y_3, x_1), d(y_3, y_1)] = [2,1]$$

$$r(x'_1|W) = [d(x'_1, x_1), d(x'_1, y_1)] = [1,4]$$

$$r(x'_2|W) = [d(x'_2, x_1), d(x'_2, y_1)] = [2,4]$$

$$r(x'_3|W) = [d(x'_3, x_1), d(x'_3, y_1)] = [2,3]$$

$$r(y'_1|W) = [d(y'_1, x_1), d(y'_1, y_1)] = [4,1]$$

$$r(y'_2|W) = [d(y'_2, x_1), d(y'_2, y_1)] = [4,2]$$

$$r(x'_1|W) = [d(x'_1, x_1), d(x'_1, y_1)] = [1,4]$$

Dari representasi titik di atas diperoleh bahwa W adalah himpunan pembeda dari graf $(K_2 \times B_6)$ karena tidak terdapat representasi titik yang sama untuk setiap titik pada graf $(K_2 \times B_6)$, maka diperoleh batas atas dimensi metrik graf $(K_2 \times B_6)$ adalah $dim(K_2 \times B_6) \leq 2$. Sehingga berdasarkan uraian di atas diperoleh dimensi metrik dari graf $(K_2 \times B_6)$ adalah $dim(K_2 \times B_6) = 2$.

Berikut beberapa hasil penelitian mengenai dimensi metrik yang disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 2.1 Beberapa hasil penelitian mengenai dimensi metrik.

Graf	Hasil $dim\ (G)$	Keterangan Sumber
Graf Lintasan (P_n)	$dim\ (P_n) = 1$	Chartrand (2000)
Graf Siklus (C_n)	$dim\ (C_n) = 2, n \geq 3$	Chartrand (2000)
Graf Lengkap (K_n)	$dim\ (K_n) = n - 1$	Chartrand (2000)

Graf Tangga (L_n)	$dim(L_n) = 2$ untuk $n \geq 2$	Adawiyah R, Megahnia.(2021)
Graf ($K_2 \times HC(n)$)	$dim(K_2 \times HC(n)) = 3$	Saskia N.J, 2023
Graf ($P_n \times P_m$)	$dim\ (P_n \times P_m) = 2$	Hernando et. al, 2005
Graf ($P_{m_1} \times P_{m_2} \times \ldots \times P_{m_d}$)	$dim(P_{m_1} \times P_{m_2} \times \ldots \times P_{m_d}) = d$	Hernando et. al, 2005
Graf ($P_m \times K_n$)	$dim\ (P_m \times K_n) = n - 1, untuk\ n \geq 3$	Hernando et. al, 2005
Graf ($P_m \times C_n$)	$dim(P_m \times C_n) = \begin{cases} 2, & n\ odd \\ 3, & n\ even\ and\ m \neq 1 \end{cases}$	Hernando et. al, 2005
Graf ($C_m \times C_n$)	$dim(C_m \times C_n) = \begin{cases} 4, & m \times n\ even \\ 3, & otherwise \end{cases}$	Hernando et. al, 2005
Graf ($K_m \times C_n$) untuk $m \geq 4$	$dim(K_m \times C_n) = \begin{cases} m, & m = 4\ and\ n\ odd \\ m - 1, & otherwise \end{cases}$	Hernando et. al, 2005
Graf ($K_m \times K_n$) untuk$m \geq 4$	$dim(K_m \times K_n) = \begin{cases} n - 1, & 2m - 2 < n \\ \left\lceil \frac{2m + 2n - 1}{3} \right\rceil, & 2m - 2 \geq n \end{cases}$	Hernando et. al, 2005
Graf ($P_n \times P_m$) $\odot K_1$	$dim(P_n \times P_m) \odot K_1 = 3$	Purwati D & Rudianto B, 2019
Graf ($K_n \times P_m$) $\odot K_1$	$dim(K_n \times P_m) \odot K_1 = \begin{cases} n - 1, & n \geq 4 \\ 3, & n = 3 \end{cases}$	Rahmi R & Zulakmal, 2016

Selanjutnya, dalam penelitian skripsi ini akan dikaji penentuan dimensi metrik pada graf hasil kali graf lengkap orde dua K_2 terhadap graf barbel B_{2n}. Adapun untuk tahapan serta alur kerja dalam penelitian ini akan dijelaskan pada Bab III.