BILANGAN *r*-KROMATIK DARI PEWARNAAN TITIK *r*-DINAMIS PADA GRAF SISIR

SKRIPSI

HERYATI NUR FATIMAH SARI

H011191020

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA & ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

OKTOBER 2023

BILANGAN *r*-KROMATIK DARI PEWARNAAN TITIK *r*-DINAMIS PADA GRAF SISIR

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

HERYATI NUR FATIMAH SARI

H011191020

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

OKTOBER 2023

LEMBAR PENGESAHAN

BILANGAN *r*-KROMATIK DARI PEWARNAAN TITIK
_r_-DINAMIS PADA GRAF SISIR

Disusun dan diajukan oleh:

HERYATI NUR FATIMAH SARI
H011191020

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
Pada tanggal, 27 Oktober 2023
Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.	**Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**
NIP. 19580802 198403 1 002	**NIP. 19680601 199512 2 001**

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

iv

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Heryati Nur Fatimah Sari

Nim : H011191020

Program Studi : Matematika

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya yang berjudul

Bilangan *r*-Kromatik dari Pewarnaan Titik *r*-Dinamis pada Graf Sisir

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa tulisan skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 27 Oktober 2023

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL

10000

E145AAJX866254230

Heryati Nur Fatimah Sari

NIM: H011191020

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan atas rahmat dan taufik dari Allah *Subhanahu wa Ta'ala* atas segala berkah dan kemudahan dari-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **"Bilangan *r*-Kromatik dari Pewarnaan Titik *r*-Dinamis pada Graf Sisir**" sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Shalawat serta salam juga senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah, Muhammad *Shallallahu 'Alaihi wa Sallam*.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya doa, bimbingan, bantuan, dukungan, serta nasehat dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, izinkan penulis mengucapkan terima kasih dan memberikan penghargaan kepada kedua orang tua penulis, Bapak **Saripuddin, SE** dan Ibu **Waslia** yang dengan sabar mendoakan, membesarkan, dan mendidik penulis. Terima kasih kepada **Kakak** dan **Adik** saya, **Kakek** dan **Nenek**, **Om** dan **Tante**, serta seluruh keluarga yang dengan ikhlas memberi doa dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si.,** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswi di Program Studi Matematika serta **Para Staff Departemen Matematika** yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.
3. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** Dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si, M.Si** selaku Dosen Pembimbing yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas

meluangkan banyak waktu, pikiran, dan perhatian ditengah kesibukan dan prioritasnya untuk mengajar, membimbing dan memberikan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

4. Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc** dan Ibu **Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si** selaku Tim Penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan masukan dan kritikan yang membangun terhadap penyelesaian penulisan skripsi ini.
5. Teman-teman Prodi **Matematika 2019** yang telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini.
6. Semua pihak yang dengan tulus dan ikhlas memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan dapat bernilai ibadah dan mendapatkan balasan yang lebih baik dari Allah *Subhanahu wa Ta'ala.* Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 27 Oktober 2023

Heryati Nur Fatimah Sari

ABSTRAK

Misalkan G adalah graf dengan pasangan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pewarnaan titik r-dinamis pada graf G adalah pemberian warna pada titik-titik graf G sedemikian sehingga untuk setiap titik v menerima setidaknya min $\{r, d(v)\}$ warna untuk titik ketetanggaannya. Jumlah minimum warna yang digunakan pada pewarnaan titik r-dinamis pada graf G disebut bilangan kromatik r-dinamis dinotasikan $\chi_r(G)$. Pada penelitian ini akan ditentukan pola pewarnaan dan bilangan kromatik r-dinamis pada graf sisir $P_n \odot K_1$, graf pusat dari graf sisir $C(P_n \odot K_1)$, graf tengah dari graf sisir $M(P_n \odot K_1)$, graf garis dari graf sisir $L(P_n \odot K_1)$, graf sub-divisi dari graf sisir $S(P_n \odot K_1)$, dan graf para-line dari graf sisir $P(P_n \odot K_1)$.

Kata Kunci: Pewarnaan r-dinamis, bilangan kromatik, graf sisir, graf pusat, graf tengah, graf garis, graf sub-divisi, graf para-line.

Judul	: Bilangan r-Kromatik dari Pewarnaan Titik r-Dinamis pada Graf Sisir
Nama	: Heryati Nur Fatimah Sari
NIM	: H011191020
Program Studi	: Matematika

ABSTRACT

Let G be a graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. An r-dynamic vertex coloring of a graph G is a assigning colors to the vertices of G such that for every vertex v receives at least $min\ \{r, d(v)\}$ colors in its neighbors. The minimum color used in r-dynamic vertex coloring of graph G is called the r-dynamic chromatic number denoted as $\chi_r(G)$. In this research we well determine the coloring pattern and the r-dynamic chromatic number of the comb graph $P_n \odot K_1$, central graph of comb graph $C(P_n \odot K_1)$, middle graph of comb graph $M(P_n \odot K_1)$, line graph of comb graph $L(P_n \odot K_1)$, sub-division graf of comb graph $S(P_n \odot K_1)$, and para-line graph of comb graph $P(P_n \odot K_1)$.

Keywords: *r-Dynamic coloring, chromatic number, comb graph, central graph, middle graph, line graph, sub-division graph, para-line graph.*

Title : *r-Chromatic Number On r-Dynamic Vertex Coloring Of Comb Graph*

Name : *Heryati Nur Fatimah Sari*

Student ID : *H011191020*

Study Program : *Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

G	Graf
$V(G)$	Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	Himpunan titik pada graf
u, v, w	Titik pada graf
$uv = e$	Sisi pada graf
$n = \|V\|$	Banyaknya titik
$d(v)$	Derajat titik v
$\Delta(G)$	Derajat terbesar pada graf G
$\delta(G)$	Derajat terkecil pada graf G
P_n	Graf lintasan dengan n titik
K_n	Graf lengkap dengan n titik
C_n	Graf sikel dengan n titik
$c(u)$	Pewarnaan pada titik u
k	Bilangan paling minimum untuk mewarnai titik pada graf
$\chi(G)$	Bilangan kromatik pada graf G
$\chi_d(G)$	Bilangan kromatik dinamis pada graf G
$\chi_r(G)$	Bilangan kromatik r-dinamis pada graf G
N	Himpunan warna
$N(v)$	Himpunan semua titik yang bertetangga dengan v
$\left\|c\big(N(v)\big)\right\|$	Banyaknya warna ketetanggan titik v
$\odot$	Operasi korona graf
$C(G)$	Graf pusat dari graf G
$M(G)$	Graf tengah dari graf G
$L(G)$	Graf garis dari graf G
$P_n \odot K_1$	Graf Sisir
$C(P_n \odot K_1)$	Graf pusat dari graf sisir
$M(P_n \odot K_1)$	Graf tengah dari graf sisir
$L(P_n \odot K_1)$	Graf garis dari graf sisir
$S(P_n \odot K_1)$	Graf sub-divisi dari graf sisir
$P(P_n \odot K_1)$	Graf para-line dari graf sisir

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu bagian dari matematika diskrit yang penggunaannya untuk menyatakan hubungan sebuah objek dengan objek yang lain. Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh matematikawan dari Swiss bernama Leonhard Euler. Dalam tulisannya kala itu, Euler memberikan ilustrasi jembatan Konigsberg dengan empat daratannya sebagai titik dan ketujuh jembatannya sebagai sisi dengan hasil penelitian bahwa tidak mungkin untuk melewati ketujuh jembatan tersebut masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat semula.

Teori graf dalam aplikasinya dapat dikatakan cukup esensial karena mencakup berbagai macam lini, seperti jaringan komunikasi, transportasi, digital, komputer, dan lain sebagainya. Mudahnya, teori graf dapat digunakan pada kondisi dimana terdapat relasi antar-objek yang dapat dipresentasikan ke dalam himpunan titik dan himpungan sisi.

Dewasa ini, teori graf mulai banyak mengalami perkembangan. Satu dari sekian topik teori graf yang populer untuk dikaji adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf terbagi menjadi tiga jenis antara lain pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Lebih jauh, pada pewarnaan graf juga dikenal sebuah konsep pewarnaan r-dinamis. Fierera dan Sugeng (2021) mendefinisikan pewarnaan r-dinamis yaitu misalkan r merupakan bilangan bulat positif, pewarnaan r-dinamis dengan k-warna pada suatu graf G adalah pewarnaan tepat titik dengan k-warna pada graf G sedemikian sehingga untuk setiap titik v menerima setidaknya $\min\{r, d(v)\}$ warna untuk titik ketetanggaannya. Nilai minimal k untuk graf G pada pewarnaan r-dinamis dengan k-warna disebut dengan bilangan kromatik r-dinamis pada graf G, dinotasikan dengan $\chi_r(G)$.

Penelitian-penelitian pada topik pewarnaan r-dinamis telah banyak dikaji. Beberapa penelitiannya antara lain oleh H. Lai dan B. Montgomery (2001) dalam penelitiannya yang berjudul "*Dynamic Coloring of Graph*" kemudian ditahun berikutnya H. Lai, B. Montgomery, dan H. Poon (2003) membuat artikel dengan judul "*Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number*". Kedua penelitian tersebut membahas mengenai pewarnaan dinamis, batas atas pewarnaan dinamis, dan bilangan kromatik dinamis. Pengembangan konsep pewarnaan dinamis menjadi pewarnaan *r*-dinamis juga dapat ditemukan pada penelitian tersebut. Oleh M. Alishahi (2012) dengan judul penelitiannya "*Dynamic Chromatic Number of Regular Graphs*" mengkaji tentang pewarnaan *r*-dinamis pada graf dan hipergraf. Kemudian penelitian yang dilakukan oleh Ali Taherkhani (2015) dengan judul "*On r-Dynamic Chromatic Number of Graphs*" yang mengkaji bilangan kromatik *r*-dinamis pada graf. Tarmidzi (2015) meneliti tentang "Nilai Kromatik dan Pewarnaan Titik *r*-Dinamis pada Graf Khusus dan Operasi Shakel". Penelitian oleh Adelia, dkk (2020) tentang "Pewarnaan Titik *r*-Dinamis pada Graf Hasil Operasi *Edge Corona*" yang mengkaji tentang pewarnaan titik *r*-dinamis pada graf lintasan dengan graf lengkap, graf bintang, dan graf sapu. Fierera dan Sugeng (2021) melakukan penelitian yang membahas tentang "Pewarnaan Simpul *r*-Dinamis pada Graf Teratai T_n.

Berdasarkan hasil kajian yang telah dikemukakan oleh banyak peneliti, penulis dalam hal ini juga tertarik untuk mengkaji tentang pewarnaan titik *r*-dinamis pada graf, terkhusus pada graf sisir. Pada penelitian yang akan penulis lakukan, penulis akan mengkaji tentang pewarnaan titik *r*-dinamis dan bilangan kromatik *r*-dinamis pada graf sisir serta menuangkan hasilnya dalam bentuk tulisan skripsi dengan judul "**Bilangan *r*-Kromatik dari Pewarnaan *r*-Dinamis pada Graf Sisir"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, rumusan masalah skripsi ini adalah:

1. Bagaimana mencari pola pewarnaan *r*-dinamis pada graf sisir $P_n \odot K_1$, graf pusat dari graf sisir $C(P_n \odot K_1)$, graf tengah dari graf sisir $M(P_n \odot K_1)$, graf garis dari graf sisir $L(P_n \odot K_1)$, graf sub-divisi dari graf sisir $S(P_n \odot K_1)$, dan graf para-line dari graf sisir $P(P_n \odot K_1)$.
2. Bagaimana menentukan bilangan *r*-kromatik pada graf sisir $P_n \odot K_1$, graf pusat dari graf sisir $C(P_n \odot K_1)$, graf tengah dari graf sisir $M(P_n \odot K_1)$,

graf garis dari graf sisir $L(P_n \odot K_1)$, graf sub-divisi dari graf sisir $S(P_n \odot K_1)$, dan graf para-line dari graf sisir $P(P_n \odot K_1)$.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Menemukan pola pewarnaan titik r-dinamis pada graf sisir $P_n \odot K_1$, graf pusat dari graf sisir $C(P_n \odot K_1)$, graf tengah dari graf sisir $M(P_n \odot K_1)$, graf garis dari graf sisir $L(P_n \odot K_1)$, graf sub-divisi dari graf sisir $S(P_n \odot K_1)$, dan graf para-line dari graf sisir $P(P_n \odot K_1)$.
2. Menentukan bilangan r-kromatik pada graf sisir $P_n \odot K_1$, graf pusat dari graf sisir $C(P_n \odot K_1)$, graf tengah dari graf sisir $M(P_n \odot K_1)$, graf garis dari graf sisir $L(P_n \odot K_1)$, graf sub-divisi dari graf sisir $S(P_n \odot K_1)$, dan graf para-line dari graf sisir $P(P_n \odot K_1)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Menambah wawasan dan pengetahuan mengenai pewarnaan graf.
2. Sebagai tambahan kepustakaan dalam bidang kajian pewarnaan r-dinamis dan bilangan kromatik r-dinamis pada graf.
3. Konsep pewarnaan r-dinamis dapat diaplikasikan pada permasalahan jaringan listrik dan computer, serta *scheduling*.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dipaparkan beberapa teori graf yang akan digunakan di dalam skripsi ini, diantaranya yaitu pengertian dan teori dasar graf, jenis-jenis graf, pewarnaan graf, graf sisir, graf pusat, graf tengah, graf garis, graf sub-divisi, dan graf para-line.

2.1 Pengertian dan Teori Dasar Graf

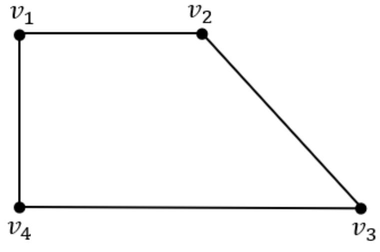
Definisi 2.1.1 (Slamin, 2009). Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut u, v dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G.

Dua buah titik u dan v pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika terdapat sebuah sisi e yang menghubungkan antara u dan v atau ditulis $e = uv$. Dengan kata lain yaitu titik u dan v $(uv \in V(G))$ dikatakan bertetangga apabila terdapat sisi $e \in E(G)$ yang menghubungkan kedua titik tersebut. Kondisi $uv = e \in E(G)$ mengakibatkan titik u dan v bersisian (*incident*) dengan sisi e (Chartrand dan Zhang, 2011).

Contoh 2.1 Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan

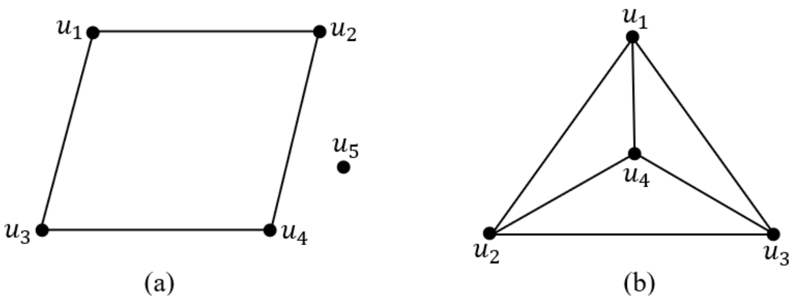
$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$.



Gambar 2.1 Graf G

Berdasarkan Gambar 2.1, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan titik v_4. Titik v_1 dan titik v_2 dikatakan bertetangga karena terdapat sisi v_1v_2 yang menghubungkan kedua titik tersebut. Begitupun pada titik v_1 dan v_4, kedua titik ini bertetangga karena terdapat sisi v_1v_4 yang menghubungkannya. Sementara itu, titik v_1 dan v_3 tidak bertetangga. Dari Gambar 2.1, sisi v_1v_2 bersisian dengan titik v_1 dan v_2, tetapi sisi tersebut tidak bersisian dengan titik v_3 dan v_4.

Suatu graf G memiliki himpunan titik $V = V(G)$, himpunan sisi $E = E(G)$. Himpunan ketetanggan suatu titik v, dinotasikan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan titik v. Derajat dari sebuah titik v pada graf G adalah banyaknya titik yang bertetangga dengan titik v, dinotasikan dengan $d(v)$. Jika sebuah titik v tidak bertetangga dengan sebarang titik lainnya (berderajat 0), maka v disebut dengan titik terisolasi. Adapun jika setiap titik pada graf G memiliki derajat yang sama, maka graf G disebut dengan graf reguler atau graf teratur. Derajat terkecil pada suatu graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$. Sedangkan derajat terbesar dari suatu graf G dinotasikan dengan Δ(G). Pada Gambar 2.2 bagian (a) ditunjukkan sebuah titik u_5 pada graf G_1 adalah titik terisolasi. Sementara pada Gambar 2.2 bagian (b) ditunjukkan contoh graf reguler atau graf teratur.



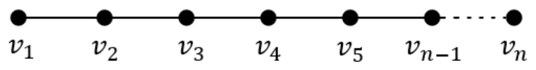
Gambar 2.2 a) Graf G_1 dan (b) Graf Reguler G_2

2.2 Jenis-Jenis Graf

Berikut beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam penelitian ini:

Definisi 2.2.1 (Hasmawati, 2020). Graf lintasan berorde n dinotasikan P_n adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_iv_{i+1}$, $i = 1,2, \dots, n-1$.

Graf lintasan hanya terdiri dari satu lintasan, dengan $n \geq 2$. Terdiri dari n titik dan $n-1$ sisi. Graf lintasan P_n dapat dilihat pada Gambar 2.3.



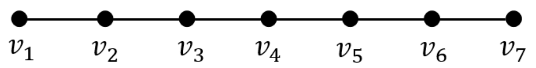
Gambar 2.3 Graf Lintasan P_n

Contoh 2.2 Misalkan terdapat graf lintasan P_7 dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(P_7) = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan

$E(P_7) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7\}$.

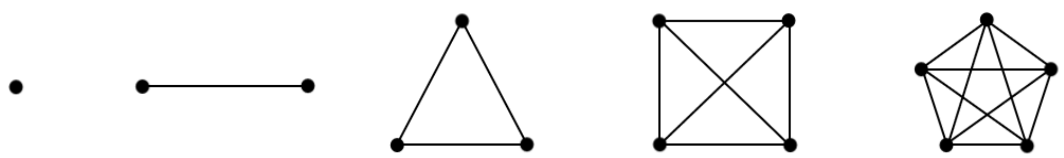
Maka graf lintasan P_7 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.4 Graf Lintasan P_7

Definisi 2.2.2 (Novian, 2017) Graf lengkap adalah graf yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya.

Graf lengkap dinotasikan K_n adalah suatu graf G yang memiliki himpunan titik $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(K_n) = \{v_iv_j | i, j \in 1,2, \dots, n : i \neq j\}$. Graf lengkap K_n dengan n titik memiliki jumlah sisi $\frac{n(n-1)}{2}$. Contoh graf lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf Lengkap K_1, K_2, K_3, K_4, dan K_5

Definisi 2.2.3 (Alfian Y. H, dkk., 2015**)** Graf sikel (*cycle*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua.

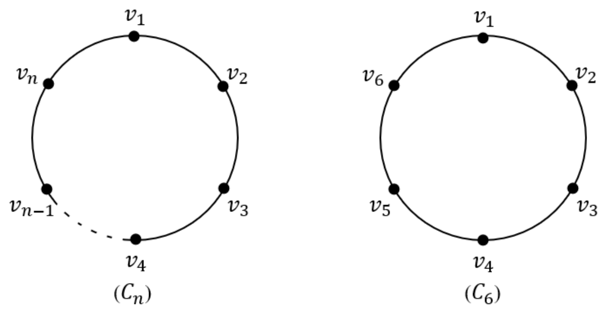
Graf sikel dinotasikan C_n adalah graf yang mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E(C_n)$ =$\{v_1v_2, v_2v_3 \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. Graf sikel dengan n titik memiliki $n-1$ sisi. Graf sikel C_n dapat dilihat pada Gambar 2.6.

Contoh 2.3 Misalkan terdapat graf sikel C_6 dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(C_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan

$E(C_6) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1\}$.

Maka graf sikel C_6 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.6 Graf Sikel C_n dan Graf Sikel C_6

2.3 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada objek berupa titik, sisi, dan/atau wilayah pada graf. Pemberian label warna dapat dipresentasikan dengan memberikan bilangan bulat positif $(1,2,3, \dots, k)$ atau dengan memberikan warna yang sebenarnya seperti hijau, biru, dan lain-lain pada objek graf. Perlu diketahui bahwa dalam pewarnaan graf setiap objek yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Selain itu, banyaknya macam warna yang digunakan harus seminimal mungkin.

Definisi 2.3.1 (D. Tarmidzi, 2015) Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G dinotasikan $\chi(G)$ adalah bilangan k terkecil atau minimum pada graf G sehingga dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

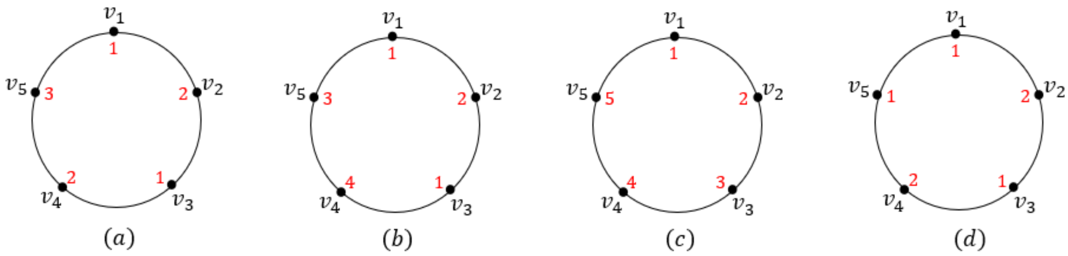
Bilangan kromatik merupakan tujuan utama dari pewarnaan titik pada suatu graf. Definisi 2.3.1 menunjukkan bilangan bulat positif k terkecil untuk mewarnai graf G sedemikian sehingga dua titik yang bertetangga tidak diwarnai dengan warna yang sama. Jika graf G dapat diberi warna sebanyak k-warna, maka dapat dikatakan bahwa graf G disebut k-*colorable*. Jika bilangan kromatik $\chi(G) = k$, maka graf G dapat disebut sebagai graf G k-kromatik.

Contoh 2.6 Misalkan terdapat graf sikel C_5 dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(C_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan

$E(C_5) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$.

Berikut adalah pewarnaan titik pada graf sikel C_5 dengan beberapa warna.



Gambar 2.7 Pewarnaan Titik Graf Sikel C_5

Pada Gambar 2.7 (a), tampak bahwa graf roda sikel C_5 adalah 3-*colorable* karena banyaknya warna yang diberi adalah 3-warna. Sementara pada Gambar 2.7 (b), graf roda sikel C_5 adalah 4-*colorable* karena banyaknya warna yang diberi adalah 4-warna. Sedangkan pada Gambar 2.7 (c), graf roda sikel C_5 adalah 5-*colorable* karena banyaknya warna yang diberi adalah 5-warna. Gambar (d) secara tidak langsung membuktikan bahwa graf sikel C_5 hanya dapat diwarnai dengan warna $3 \leq k \leq 5$. Terlihat pada Gambar 2.7, ketika graf hanya diberi 2 warna maka akan terdapat titik yang bertetangga yang memiliki warna sama. Dalam pewarnaan graf pula, pewarnaan yang tepat (*proper coloring*) yaitu ketika banyaknya macam warna yang digunakan seminimal mungkin, sehingga dari Gambar 2.7 disimpulkan bahwa pewarnaan titik graf sikel C_5 yang memenuhi adalah gambar (a) 3-*colorable*. Karena dapat diwarnai sebanyak 3-warna, maka bilangan kromatiknya adalah $\chi(G) = 3$, atau dengan kata lain graf sikel C_5 3-kromatik.

2.3.1 Pewarnaan Titik

Definisi 2.3.2 (Chartrand dan Zhang, 2009). Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna pada titik-titik graf G, satu warna untuk setiap titik, sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda.

Pewarnaan titik adalah suatu fungsi $c : (V(G)) \rightarrow N$, dengan N adalah bilangan positif, sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang saling bertetangga. Perhatikan **Contoh 2.6** pada Gambar 2.7 (a), tampak bahwa titik-titik yang bertetangga pada graf sikel C_5 tersebut tidak memiliki warna yang sama. Fungsi $c : V(G) \to N$ pada graf sikel C_5 pada Contoh 2.6 didefinisikan sebagai berikut:

$$c(v_1) = 1, c(v_2) = 2, c(v_3) = 1, c(v_4) = 2, c(v_5) = 3.$$

2.3.2 Pewarnaan r-Dinamis pada Graf

Pewarnaan *r*-dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan dinamis yang dilakukan oleh Lai dan Montgomery pada tahun 2001. Pewarnaan dinamis dengan *k*-warna atau pewarnaan *k*-warna dinamis pada graf G didefinisikan sebagai pewarnaan tepat (*proper coloring*) sehingga untuk setiap titik v berderajat minimal dua setidaknya mempunyai lebih dari satu warna yang berbeda pada setiap titik-titik ketetanggaannya. Nilai *k* terkecil yang diperoleh agar graf G memenuhi kondisi pewarnaan *k*-warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, dinotasikan dengan $\chi_d(G)$. Pewarnaan dinamis kemudian digeneralisasikan menjadi pewarnaan *r*-dinamis.

Definisi 2.3.3 (Fierera dan Sugeng, 2021) Misalkan r merupakan bilangan bulat positif. Pewarnaan r-dinamis dengan k-warna pada suatu graf G adalah pewarnaan tepat titik dengan k-warna pada graf G sedemikian sehingga untuk setiap titik v menerima setidaknya $\min\{r, d(v)\}$ warna untuk titik ketetanggaannya. Nilai minimal k untuk graf G pada pewarnaan r-dinamis dengan k-warna disebut dengan bilangan kromatik r-dinamis pada graf G, dinotasikan dengan $\chi_r(G) = k$.

Bilangan kromatik pada pewarnaan 1-dinamis ($r = 1$) merupakan bilangan kromatik pada graf G atau $\chi(G)$. Bilangan kromatik 2-dinamis disebut bilangan kromatik dinamis $\chi_d(G)$ dan bilangan kromatik r-dinamis disebut $\chi_r(G)$.

Definisi 2.3.4 (Lai dan Montgomery, 2001). Pewarnaan titik *r*-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari $V(G)$ ke himpunan warna sedemikian sehingga memenuhi kondisi:

a) Jika $uv \in (E(G))$ maka $c(u) \neq c(v)$ dan
b) $\forall v \in V(G), \left|c\big(N(v)\big)\right| \geq \min\{r, d(v)\}$

dengan $N(v)$ menunjukkan himpunan semua titik yang bertetangga dengan v, $d(v)$ ialah derajatnya dan r adalah bilangan bulat positif. Kondisi a) mencirikan pewarnaan yang tepat disebut sebagai kondisi *adjacency* dan kondisi b) adalah kondisi r-*adjacency* (K. Kalaiselvi, dkk, 2021).

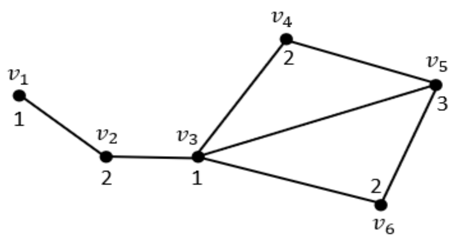
Contoh 2.7 Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan

$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_3\}$.

Akan ditunjukkan pewarnaan titik *r*-dinamis dan bilangan kromatik *r*-dinamis pada graf G.

Untuk $r = 1$



Gambar 2.8 Pewarnaan Titik 1-Dinamis pada Graf G

Didefinisikan fungsi dari $c : V(G) \rightarrow N$ sebagai berikut:

$$c(v_1) = c(v_3) = 1, c(v_2) = c(v_4) = c(v_6) = 2, c(v_5) = 3$$

Dari **Definisi 2.3.4** syarat a) terlihat bahwa $c(v_i) \neq c(v_j)$ untuk v_i yang bertetangga dengan v_j. Dari syarat b) ditunjukkan sebagai berikut:

$N(v_1) = \{v_2\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_1)) = c(v_2) = \{2\}$ sehingga $|c(N(v_1))| = 1 \geq \min\{r, d(v_1)\} = \min\{1,1\} = 1$.

$N(v_2) = \{v_1, v_3\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_2)) = \{1\}$ sehingga $|c(N(v_2))| = 1 \geq \min\{r, d(v_2)\} = \min\{1,2\} = 1$.

$N(v_3) = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_3)) = \{2,3\}$ sehingga $|c(N(v_3))| = 2 \geq \min\{r, d(v_3)\} = \min\{1,4\} = 2$.

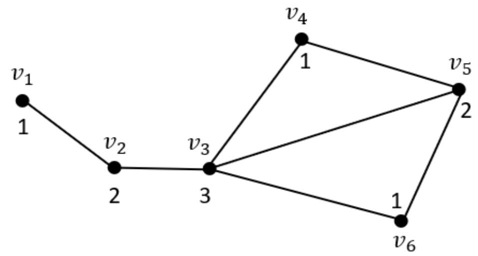
$N(v_4) = \{v_3, v_5\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_4)) = \{1,3\}$ sehingga $|c(N(v_4))| = 2 \geq \min\{r, d(v_4)\} = \min\{1,2\} = 2$.

$N(v_5) = \{v_3, v_4, v_6\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_5)) = \{1,2\}$ sehingga $|(c(N(v_5))| = 2 \geq \min\{r, d(v_5)\} = \min\{1,3\} = 2$.

$N(v_6) = \{v_3, v_5\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_6)) = \{1,3\}$ sehingga $|(c(N(v_6))| = 2 \geq \min\{r, d(v_6)\} = \min\{1,2\} = 2.$

Karena banyaknya warna itu adalah yang paling sedikit adalah tiga, maka bilangan kromatik dari $\chi_1(G) = 3$.

Untuk $r = 2$



Gambar 2.9 Pewarnaan Titik 2-Dinamis pada Graf G

Didefinisikan fungsi dari $c : V(G) \rightarrow N$ sebagai berikut

$$c(v_1) = c(v_4) = c(v_6) = 1, c(v_2) = c(v_5) = 2, c(v_5) = 2$$

Dari **Definisi 2.3.4** syarat a) terlihat bahwa $c(v_i) \neq c(v_j)$ untuk v_i yang bertetangga dengan v_j. Dari syarat b) ditunjukkan sebagai berikut:

$N(v_1) = \{v_2\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_1)) = \{2\}$ sehingga $|c(N(v_1))| = 1 \geq \min\{r, d(v_1)\} = \min\{2,1\} = 1.$

$N(v_2) = \{v_1, v_3\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_2)) = \{1,3\}$ sehingga $|c(N(v_2))| = 2 \geq \min\{r, d(v_2)\} = \min\{2,2\} = 2.$

$N(v_3) = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_3)) = \{2,1\}$ sehingga $|c(N(v_3))| = 2 \geq \min\{r, d(v_3)\} = \min\{2,4\} = 2.$

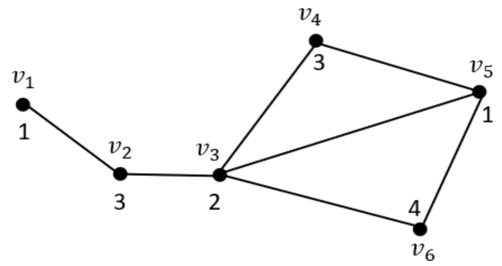
$N(v_4) = \{v_3, v_5\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_4)) = \{3,2\}$ sehingga $|c(N(v_4))| = 2 \geq \min\{r, d(v_4)\} = \min\{2,2\} = 2.$

$N(v_5) = \{v_3, v_4, v_6\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_5)) = \{3,1\}$ sehingga $|(c(N(v_5))| = 2 \geq \min\{r, d(v_5)\} = \min\{2,3\} = 2.$

$N(v_6) = \{v_3, v_5\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_6)) = \{3,2\}$ sehingga $|(c(N(v_6))| = 2 \geq \min\{r, d(v_6)\} = \min\{2,2\} = 2.$

Karena banyaknya warna itu adalah yang paling sedikit adalah tiga, maka bilangan kromatik dari $\chi_2(G) = 3$.

Untuk $r = 3$



Gambar 2.10 Pewarnaan Titik 3-Dinamis pada Graf G

Didefinisikan fungsi dari $c : V(G) \to N$ sebagai berikut

$$c(v_1) = c(v_5) = 1, c(v_2) = c(v_4) = 3, c(v_3) = 2, c(v_5) = 1 = c(v_6) = 4$$

Dari **Definisi 2.3.4** syarat a) terlihat bahwa $c(v_i) \neq c(v_j)$ untuk v_i yang bertetangga dengan v_j. Dari syarat b) ditunjukkan sebagai berikut:

$N(v_1) = \{v_2\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_1)) = \{3\}$ sehingga $|c(N(v_1))| = 1 \geq \min\{r, d(v_1)\} = \min\{3,1\} = 1$.

$N(v_2) = \{v_1, v_3\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_2)) = \{1,2\}$ sehingga $|c(N(v_2))| = 2 \geq \min\{r, d(v_2)\} = \min\{3,2\} = 2$.

$N(v_3) = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_3)) = \{3,1,4\}$ sehingga $|c(N(v_3))| = 3 \geq \min\{r, d(v_3)\} = \min\{3,4\} = 3$.

$N(v_4) = \{v_3, v_5\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_4)) = \{2,1\}$ sehingga $|c(N(v_4))| = 2 \geq \min\{r, d(v_4)\} = \min\{3,2\} = 2$.

$N(v_5) = \{v_3, v_4, v_6\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_5)) = \{2,3,4\}$ sehingga $|(c(N(v_5))| = 3 \geq \min\{r, d(v_5)\} = \min\{3,3\} = 3$.

$N(v_6) = \{v_3, v_5\}$ fungsi pewarnaannya adalah $c(N(v_6)) = \{2,1\}$ sehingga $|(c(N(v_6))| = 2 \geq \min\{r, d(v_6)\} = \min\{3,2\} = 2$.

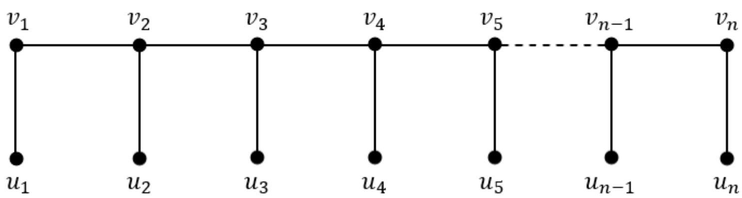
Karena banyaknya warna itu adalah yang paling sedikit adalah empat, maka bilangan kromatik dari $\chi_3(G) = 4$.

Lemma 2.1 (K. Kalaiselvi, dkk., 2021) $\chi_r(G) \geq min\,\{r, \Delta(G)\} + 1$.

Berdasarkan dua kondisi pada definisi pewarnaan titik r-dinamis, dapat dilihat Lemma 2.1 $\chi_r(G) \geq \min\{r, \Delta(G)\} + 1$. Setiap pewarnaan r-dinamis pada graf G juga merupakan pewarnaan t-dinamis pada graf G, dengan $r > t \geq 1$. Dengan demikian, jika $r > t \geq 1$ maka berlaku $\chi_r(G) \geq \chi_t(G)$ untuk setiap graf G (Lai dan Montgomery, 2002). Contoh 2.7 sekaligus membuktikan Lemma 2.1 dapat dilihat tampak bawah $\chi_3(G) \geq \chi_2(G) \geq \chi_1(G)$.

2.4 Graf Sisir

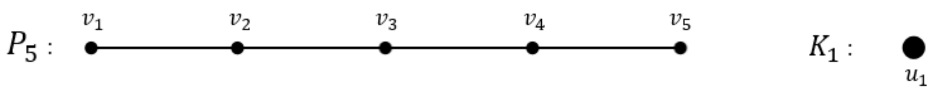
Misalkan P_n adalah graf lintasan dengan himpunan titik dan himpunan sisi $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Graf sisir $P_n \odot K_1$ adalah graf dengan himpunan titik $V(P_n \odot K_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \odot K_1) = E(P_n) \cup \{v_iu_i : i = 1,2,3 \dots, n\}$. Graf sisir $P_n \odot K_1$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.11 Graf Sisir $P_n \odot K_1$

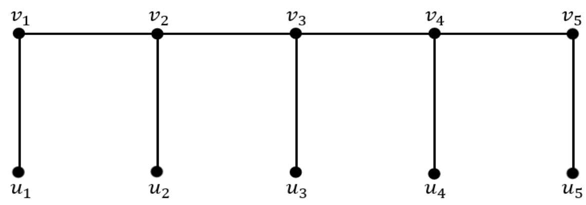
Graf sisir merupakan graf hasil operasi korona dari graf lintasan P_n dengan graf lengkap K_1. Operasi korona $(G_1 \odot G_2)$ pada dua buah graf G_1 (dengan n_1 titik dan m_1 sisi) dan G_2 (dengan n_2 titik dan m_2 sisi) didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil 1 salinan G_1 dan n_1 salinan dari G_2, kemudian menghubungkan titik i_{th} dari G_1 dengan sebuah sisi ke setiap titik pada i_{th} salinan dari G_2 (R. Frucht dan F. Harary, 1970).

Contoh 2.8 Misalkan terdapat graf lintasan P_5 dan graf lengkap K_1.



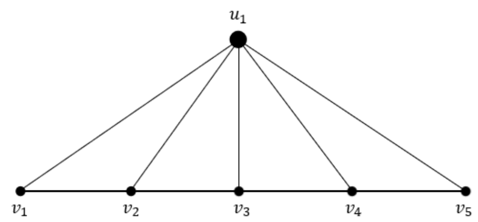
Gambar 2.12 Graf Lintasan P_5 dan Graf Lengkap K_1

Graf lintasan P_5 memiliki himpunan titik $V(P_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(P_5) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$. Sedangkan graf lengkap K_1 hanya memiliki satu titik yaitu titik u_1 dan tidak memiliki sisi. Hasil operasi korona graf lintasan P_5 dan graf lengkap K_1 menghasilkan graf sisir $P_5 \odot K_1$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.13 Graf Sisir $P_5 \odot K_1$

Adapun untuk graf hasil operasi korona antara graf lengkap K_1 dan graf lintasan P_5 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.14 Graf Kipas F_5

Terlihat bahwa hasil operasi korona graf lengkap K_1 dan graf lintasan P_5 menghasilkan graf kipas F_5. Dari hasil operasi ini pula dapat diketahui bahwa operasi korona pada graf tidak bersifat komutatif.

2.5 Graf Pusat (*Central Graph*)

Definisi 2.5.1 (J. Vernold Vivin, 2007). Graf pusat $C(G)$ dari graf G diperoleh dari graf G dengan menambahkan titik pada setiap sisi dari graf G, kemudian menghubungkan setiap pasangan titik dari graf asli yang sebelumnya tidak bertetangga.

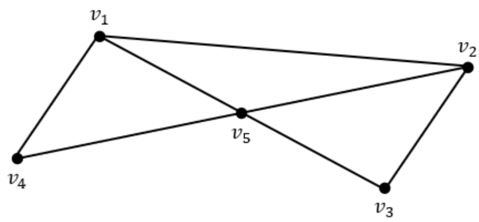
Misalkan $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Graf pusat $C(G)$ adalah graf dengan himpunan titik $V\big(C(G)\big) = V(G) \cup \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$, dimana u_i berada diantara v_{si} dan v_{ti} yang bertetangga, serta himpunan sisi

$E\big(C(G)\big) = \big\{v_{si}u_i, u_i v_{ti} \mid i = 1,2,3, \dots, k; untuk\ suatu\ s, t \in \{1,2,3, \dots, n\}\big\} \cup \{v_i v_j | v_i v_j \notin E(G)\}$.

Contoh 2.9 Misalkan terdapat graf pusat dari graf G dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

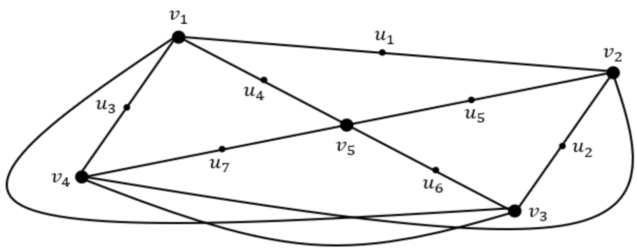
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan

$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_5, v_5v_4, v_4v_1\}$.



Gambar 2.15 Graf G

Graf pusat dari graf $C(G)$ diperoleh dengan membagi setiap sisi G tepat satu kali dengan membuat titik baru yaitu $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$, dan u_7 kemudian menghubungkan semua titik yang tidak bertetangga pada graf G.



Gambar 2.16 Graf Pusat $C(G)$ dari Graf G

Sehingga diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi graf pusat dari G yaitu:

$V\big(C(G)\big) = V(G) \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$

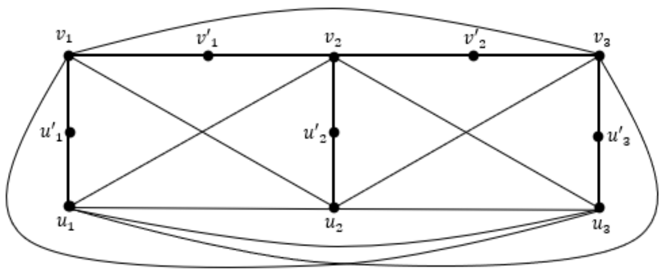
$E\big(C(G)\big) = \{v_1u_1, u_1v_2, v_2u_2, u_2v_3, u_3v_6, u_6v_5, v_5u_7, u_7v_4, v_4u_3, v_1u_4, u_4v_5, v_5u_5, u_5v_2, v_1v_3, v_2v_4, v_1v_3, v_4v_3\}$.

Contoh 2.10 Misalkan terdapat graf sisir $P_3 \odot K_1$ dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(P_3 \odot K_1) = \{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\}$ dan

$E(P_3 \odot K_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3\}$.

Untuk setiap sisi dari graf sisir $P_3 \odot K_1$ dibuat titik baru yaitu v'_1, v'_2, u'_1, u'_2, dan u'_3 seperti pada Gambar 2.17. Graf pusat dari graf sisir $C(P_3 \odot K_1)$ dibuat dengan cara menghubungkan semua titik yang tidak bertetangga dari G, sehingga diperoleh graf pusat dari graf sisir $C(P_3 \odot K_1)$, lihat Gambar 2.17.



Gambar 2.17 Graf Pusat dari Graf Sisir $C(P_3 \odot K_1)$

Sehingga diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi graf pusat $C(P_3 \odot K_1)$ yaitu:

$V\big(C(P_3 \odot K_1)\big) = V(P_3 \odot K_1) \cup \{v'_1, v'_2, u'_1, u'_2, u'_3\}$ dan

$E\big(C(P_3 \odot K_1)\big) = \{v_1v'_1, v'_1v_2, v_2v'_2, v'_2v_3, v_1u'_1, u'_1u_1, v_2u'_2, u'_2u_2, v_3u'_3,$
$u'_3u_3, v_1v_3, v_1u_2, v_1u_3, v_2u_1, v_2u_3, v_3u_1, v_3u_2, u_1u_2, u_2u_3\}.$

2.6 Graf Tengah (*Middle Graph*)

Definisi 2.6.1 (D. Michalak, 1983). Graf tengah dinotasikan $M(G)$ didefinisikan sebagai berikut, himpunan titik dari $M(G)$ adalah $V(G) \cup E(G)$. Dua buah titik u, v $M(G)$ bertetangga di $M(G)$ jika salah satu dari berikut ini berlaku:

(i) u, v berada di $E(G)$ dan u, v bertetangga di G.

(ii) $v \in V(G), u \in E(G)$ dan u, v bersisian di G.

Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Dibuat satu titik u_{ij}, jika sisi $v_iv_j \in E(G)$. Sehingga graf tengah dari graf G dapat didefinisikan dengan graf yang memiliki himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

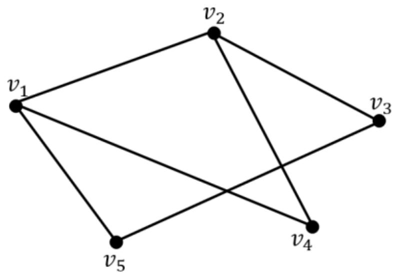
$V\big(M(G)\big) = V(G) \cup \{u_{ij} \big| i, j \in \{1,2, \dots, n\}, i \neq j\}$; u_{ij} berada diantara v_i dan v_j,

$E\big(M(G)\big) = \{v_iu_{ij}, u_{ij}v_j \big| v_iv_j \in E(G)\} \cup \{u_{ij}u_{ik} | v_iv_j, v_iv_k \in E(G)\}.$

Contoh 2.11 Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

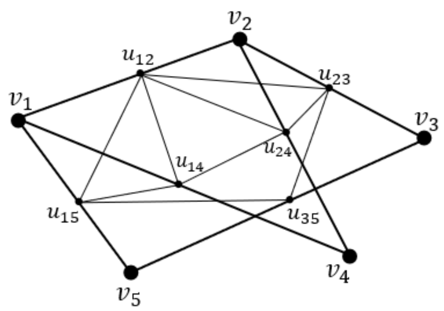
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan

$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_5, v_5v_4, v_4v_1\}.$



Gambar 2.18 Graf G

Graf tengah dari graf G diperoleh dengan membagi setiap sisi G tepat satu kali dan menghubungkan semua titik baru yang diperoleh dengan sisi-sisi yang bertetangga dari G, dapat dilihat pada Gambar 2.19.



Gambar 2.19 Graf Tengah $M(G)$ dari Graf G

Sehingga diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi graf tengah dari graf $M(G)$:

$V\big(M(G)\big) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{23}, u_{24}, u_{35}\}$,

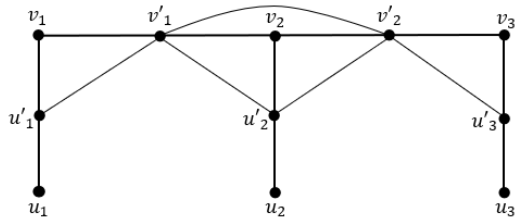
$E\big(M(G)\big) = \{v_1u_{12}, u_{12}v_2, v_2u_{23}, u_{23}v_3, v_3u_{35}, u_{35}v_5, v_1u_{15}, u_{15}v_5, v_2u_{24}, u_{24}v_4, v_1u_{14}, u_{14}v_4\}$.

Contoh 2.12 Misalkan terdapat graf sisir $P_3 \odot K_1$ dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(P_3 \odot K_1) = \{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\}$ dan

$E(P_3 \odot K_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3\}$.

Untuk setiap sisi dari graf sisir $P_3 \odot K_1$ dibuat titik baru yaitu v'_1, v'_2, u'_1, u'_2, dan u'_3 seperti pada Gambar 2.20. Graf tengah dari graf sisir $P_3 \odot K_1$ dibuat dengan cara menghubungkan semua titik baru yang diperoleh dengan sisi-sisi yang bertetangga dari G, sehingga diperoleh graf tengah dari graf sisir $M(P_3 \odot K_1)$, lihat Gambar 2.20.



Gambar 2.20 Graf Tengah dari Graf Sisir $M(P_3 \odot K_1)$

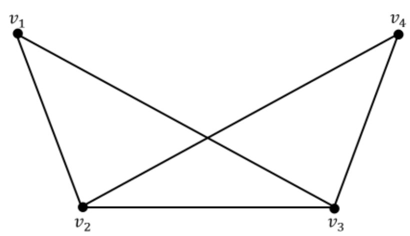
Sehingga diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi graf pusat $M(P_3 \odot K_1)$ yaitu:
$V\big(M(P_3 \odot K_1)\big) = V(P_3 \odot K_1) \cup \{v'_1, v'_2, u'_1, u'_2, u'_3\}$ dan
$E\big(M(P_3 \odot K_1)\big) = \{v_1v'_1, v'_1v_2, v_2v'_2, v'_2v_3, v_1u'_1, u'_1u_1, v_2u'_2, u'_2u_2, v_3u'_3,$
$u'_3u_3, v'_1u'_1, v'_1u'_2, v'_1v'_2, v'_2u'_2, v'_2u'_3\}$.

2.7 Graf Garis (*Line Graph*)

Definisi 2.7.1 (F. Harary, 1969). Graf garis dinotasikan $L(G)$ adalah adalah graf yang himpunan titiknya merupakan himpunan sisi dari G. Dua titik dari $L(G)$ bertetangga apabila sisi-sisi yang bersesuaian dari G bertetangga.

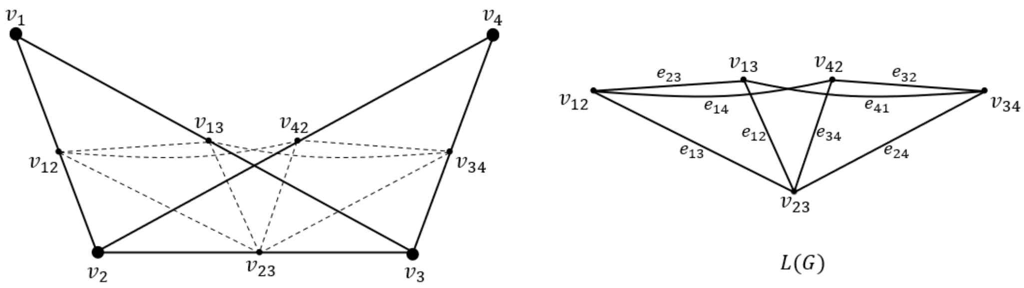
Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Untuk setiap $v_iv_j \in E(G)$ dibuat titik v_{ij} pada setiap sisi v_iv_j dan setiap v_iv_j, v_jv_k dibuat sisi e_{ik}. Maka graf garis $L(G)$ dari graf G memiliki himpunan titik $V\big(L(G)\big) = \{v_{ij} | v_iv_j \in E(G)\}$ dan himpunan sisi $E\big(L(G)\big) = \{e_{ik} | e_{ik} = v_{ij}v_{jk}, v_{ij}, v_{jk} \in V(L(G))\}$.

Contoh 2.13 Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan
$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_2, v_1v_3\}$.



Gambar 2.21 Graf G

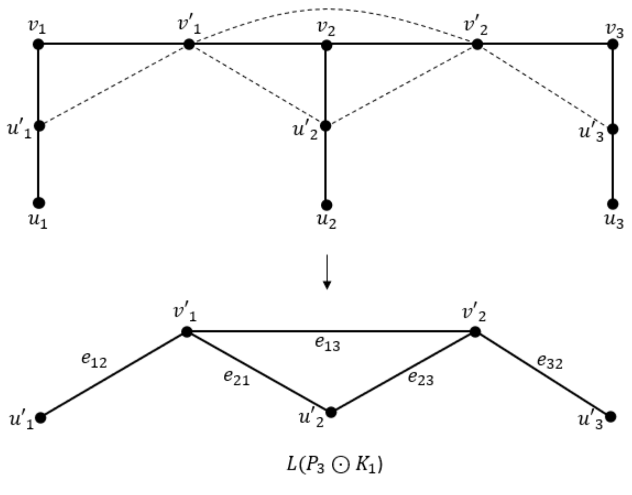
Maka graf garis dari graf $L(G)$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.22 Graf Garis $L(G)$ dari Graf G

Dari Gambar 2.22 diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi dari $L(G)$ yaitu:
$V\big(L(G)\big) = \{v_{12}, v_{13}, v_{42}, v_{34}, v_{23}\}$
$E\big(L(G)\big) = \{e_{13}, e_{23}, e_{14}, e_{12}, e_{34}, e_{41}, e_{32}, e_{24}\}$.

Contoh 2.14 Misalkan terdapat graf graf sisir $P_3 \odot K_1$ dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:
$V(P_3 \odot K_1)$ = $\{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\}$, dan
$E(P_3 \odot K_1) = \{\, v_1v_2, v_2v_3, v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3\}$.
Maka graf garis dari graf sisir $L(P_3 \odot K_1)$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.23 Graf Garis dari Graf Sisir $L(P_3 \odot K_1)$

Dari Gambar 2.23 diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi dari graf garis dari graf sisir $L(P_3 \odot K_1)$ yaitu:
$V\big(L(P_3 \odot K_1)\big) = \{v'_1, v'_2, u'_1, u'_2, u'_3\}$ dan
$E\big(L(P_3 \odot K_1)\big) = \{e_{12}, e_{21}, e_{13}, e_{23}, e_{32}\}$.

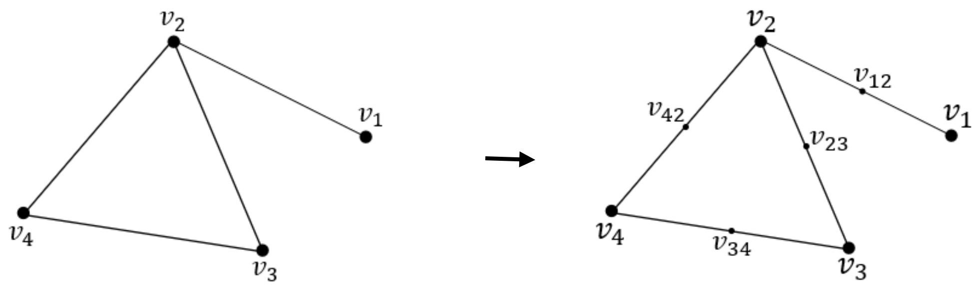
2.8 Graf Sub-Divisi (*Sub-Division Graph*)

Definisi 2.9.1 (Kalaiselvi, dkk, 2021). Graf sub-divisi $S(G)$ diperoleh dengan hanya menyisipkan titik baru untuk setiap sisi dari G.

Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Untuk setiap $v_iv_j \in E(G)$ dibuat titik v_{ij} pada setiap sisi v_iv_j. Maka graf sub-divisi dari graf G dinotasikan $S(G)$ memiliki himpunan titik $V(S(G)) = V(G) \cup \{v_{ij} | v_iv_j \in E(G)\}$ dan himpunan sisi $E(S(G)) = \{v_iv_{ij}, v_{ij}v_j | v_iv_j \in E(G)\}$.

Contoh 2.15 Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan
$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_2\}$.

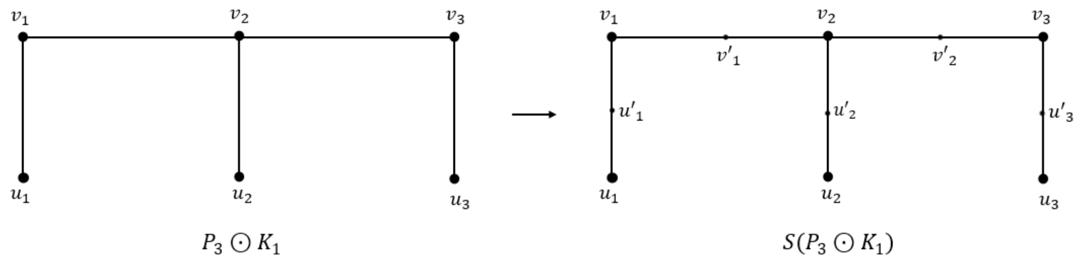
Maka graf subdivisi dari graf $S(G)$ dapat dilihat pada Gambar 2.24.



Gambar 2.24 Graf G dan Graf Sub-Divisi $S(G)$ dari Graf G

Dari Gambar 2.24 diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi dari $S(G)$ yaitu:
$V(S(G)) = V(G) \cup \{v_{12}, v_{23}, v_{34}, v_{42}\}$ dan
$E(S(G)) = \{v_1v_{12}, v_{12}v_2, v_2v_{23}, v_{23}v_3, v_3v_{34}, v_{34}v_4, v_4v_{42}, v_{42}v_2\}$.

Contoh 2.16 Misalkan terdapat graf graf sisir $P_3 \odot K_1$ dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:
$V(P_3 \odot K_1) = \{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\}$ dan
$E(P_3 \odot K_1) = \{ v_1v_2, v_2v_3, v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3\}$.
Maka graf garis dari graf sisir $S(P_3 \odot K_1)$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.25 Graf Sub-Divisi dari Graf Sisir $S(P_3 \odot K_1)$

Dari Gambar 2.26 diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi dari graf garis dari graf sisir $S(P_3 \odot K_1)$ yaitu:

$V\big(S(P_3 \odot K_1)\big) = V(G) \cup \{v'_1, v'_2, u'_1, u'_2, u'_3\}$ dan

$E\big(S(P_3 \odot K_1)\big) = \{v_1v'_1, v'_1v_2, v_2v'_2, v'_2v_3, v_1u'_1, u'_1u_1, v_2u'_2, u'_2u_2, v_3u'_3, u'_3u_3\}$.

2.9 Graf Para-Line (*Para-Line Graph*)

Definisi 2.10.1 (K. Kalaiselvi, dkk, 2021). Graf paraline $P(G)$ adalah graf garis dari graf sub-divisi graf G.

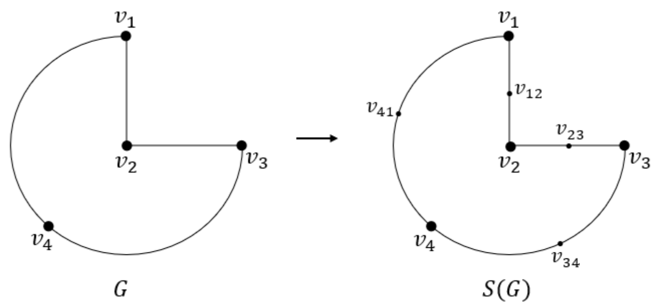
Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Untuk setiap $v_iv_j \in E(G)$ dibuat titik v_{ij} pada setiap sisi v_iv_j sehingga diperoleh graf sub-divisi $S(G)$ dari G. Kemudian dibuat titik w_{iij} dan w_{ijj} masing-masing untuk setiap v_iv_{ij} dan $v_{ij}v_j$. Setiap titik w_{iij} dan w_{ijj} yang sisi-sisi $v_iv_{ij}, v_{ij}v_j \in S(G)$ bertetangga dihubungkan, sehingga diperoleh graf garis $L\big(S(G)\big) = P(G)$ dari graf sub-divisi $S(G)$. Maka graf para-line dinotasikan $P(G)$ memiliki himpunan titik dan himpunan sisi $V\big(P(G)\big) = \{w_{iij}, w_{ijj} | v_iv_{ij} \in S(G)\}$ dan $E\big(P(G)\big) = \{w_{iij}w_{ijj} \big| w_{iij}, w_{ijj} \in V(P(G))\}$.

Contoh 2.17 Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan

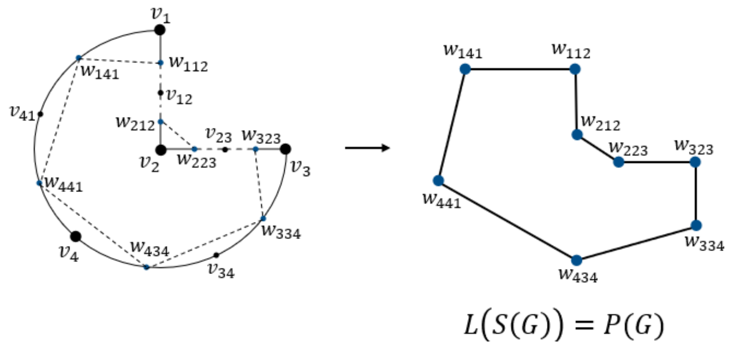
$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$.

Graf para-line dari graf $P(G)$ diperoleh dengan membuat graf garis dari graf sub-divisi dari graf G terlebih dahulu. Graf sub-divisi dari graf G dapat dilihat pada Gambar berikut.



Gambar 2.26 Graf G dan Graf Sub-divisi $S(G)$

Setelah membuat graf sub-divisi dari graf G, selanjutnya dibuat graf garis dari graf sub-divisi pada graf G. Berdasarkan **Definisi 2.10.1**, graf garis dari graf sub-divisi adalah graf para-line dari graf G atau $P(G)$. Maka graf para-line dari graf G dapat digambarkan pada Gambar 2.28.



Gambar 2.27 Graf Para-line dari Graf $P(G)$

Dari Gambar 2.28 diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi dari $P(G)$ yaitu:

$V(P(G)) = \{w_{112}, w_{212}, w_{223}, w_{323}, w_{334}, w_{434}, w_{441}, w_{141}\}$ dan

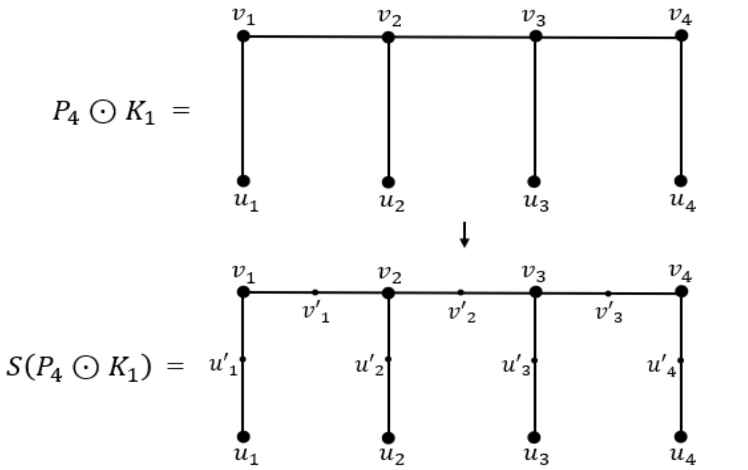
$E(P(G)) = \{w_{112}w_{212}, w_{212}w_{223}, w_{223}w_{323}, w_{323}w_{334}, w_{334}w_{434}, w_{434}w_{441},$
$w_{441}w_{141}, w_{141}w_{112}\}.$

Contoh 2.18 Misalkan terdapat graf graf sisir $P_4 \odot K_1$ dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(P_4 \odot K_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_3, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan

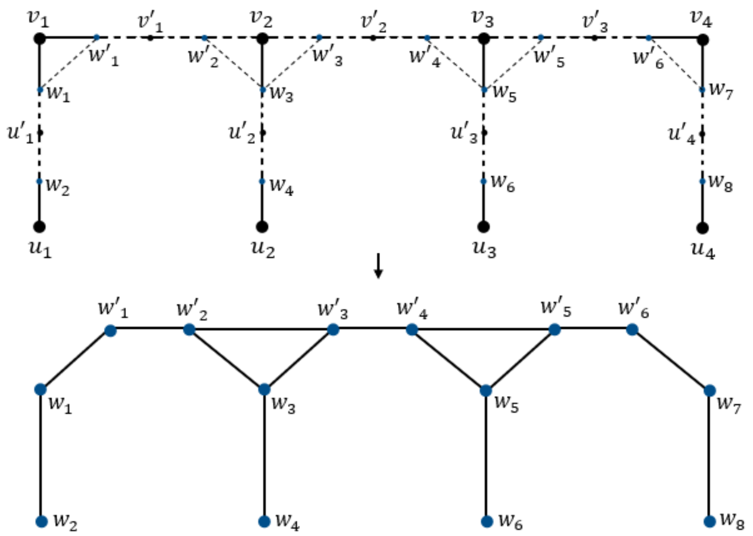
$E(P_4 \odot K_1) = \{ v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3, v_4u_4\}.$

Graf para-line $P(P_4 \odot K_1\ )$ dari graf sisir $P_4 \odot K_1$ diperoleh dengan membuat graf garis $L(P_4 \odot K_1)$ dari graf sub-divisi dari graf sisir $P_4 \odot K_1$ terlebih dahulu. Graf sub-divisi $S(P_4 \odot K_1)$ dari graf sisir $P_4 \odot K_1$ dapat dilihat pada Gambar berikut.



Gambar 2.28 Graf $P_4 \odot K_1$ dan Graf Sub-divisi $S(P_4 \odot K_1)$

Setelah membuat graf sub-divisi $S(P_4 \odot K_1)$, selanjutnya dibuat graf garis dari graf sub-divisi pada graf sisir $P_4 \odot K_1$. Berdasarkan **Definisi 2.10.1**, graf garis dari graf sub-divisi adalah graf para-line dari graf G atau $P(G)$. Maka graf para-line $P(P_4 \odot K_1)$ dari graf sisir $P_4 \odot K_1$ dapat digambarkan sebagai berikut.



$L(S(P_4 \odot K_1)) = P(P_4 \odot K_1)$

Gambar 2.29 Graf Para-line dari Graf Sisir $P(P_4 \odot K_1)$

Dari Gambar 2.30 diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi pada graf para-line dari graf sisir $P(P_4 \odot K_1)$ yaitu:

$V(P(G)) = \{w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5, w'_6, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$ dan

$E(P(G)) = \{w'_1w'_2, w'_2w'_3, w'_3w'_4, w'_4w'_5, w'_5w'_6, w'_1w_1, w'_2w_3, w'_3w_3,$
$w'_4w_5, w'_5w_5, w'_6w_7, w_1w_2, w_3w_4, w_5w_6, w_7w_8\}.$

Bilangan kromatik r-dinamis dari graf G sembarang telah dikemukakan A. Taherkhani (2016) dengan teorema sebagai berikut:

Teorema 2.1 (A. Taherkhani, 2016)

Misalkan r adalah bilangan bulat positif dengan $2 \leq r \leq \delta/\log(2er(\Delta^2 + 1))$. Maka: $\chi_r(G) \leq \chi(G) + (r-1)\left[e\frac{\Delta}{\delta}\log\left(2er(\Delta^2 + 1)\right)\right]$.