SIFAT-SIFAT FUNGSI AMBIGUITAS QUATERNION

TESIS

Imanuel Agung Sembe

H022221021

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

2024

SIFAT-SIFAT FUNGSI AMBIGUITAS QUATERNION

PROPERTIES OF QUATERNION AMBIGUITY FUNCTION

IMANUEL AGUNG SEMBE

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

2024

SIFAT-SIFAT FUNGSI AMBIGUITAS QUATERNION

PROPERTIES OF QUATERNION AMBIGUITY FUNCTION

IMANUEL AGUNG SEMBE

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

2024

TESIS

SIFAT-SIFAT FUNGSI AMBIGUITAS QUATERNION

IMANUEL AGUNG SEMBE

NIM: H022221021

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka

Penyelesaian Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 16 Januari 2024

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pendamping
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si. NIP. 19701231 199802 1 001	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** NIP. 19640207 199103 1013
Ketua Program Studi Matematika S2	Dekan Fakulras MIPA Universitas Hasanuddin
Dr. Muhammad Zakir, M.Si. NIP. 19640207 199103 1013	**Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.** NIP. 19720515 1997 02 1002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS HASANUDDIN FAKULTAS MIPA

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	: Imanuel Agung Sembe
Nomor Mahasiswa	: H022221021
Program Studi	: Magister Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 23 Januari 2024
Yang menyatakan

Imanuel Agung Sembe

UCAPAN TERIMAKASIH

Segala puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yesus Kristus, Tuhan Yang Maha Pengasih dan Penyayang atas segala kasih, tuntunan, dan bimbinganNya sehingga penulis mampu menyelesaikan penelitian ini. Kiranya damai dan berkat sukacitaNya senantiasa melimpah atas kita semua.

Tesis dalam judul "**Sifat-Sifat Fungsi Ambiguitas Quaternion**" ini disusun sebagai persyaratan dalam memperoleh gelar Magister pada Program Pascasarjana Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Hasanuddin. Selama proses penyusunan tesis ini, penulis meyadari bahwa dengan keikhlasa, kesabaran, usaha, kerja keras, dan doa akan membawa penulis menuju kemudahan dalam penyelesaian tesis ini.

Pada kesempatan kali ini penulis menyampaikan terima kasih dan hormat yang sebesar-besarnya kepada keluarga tercinta, Ayah Drs. Nimrod Sembe, S.Sos., M.M., Ibu Yuspin Lince, S.A.P. yang selalu bekerja keras, mendoakan, dan mendidik penulis hingga bisa sampai pada pencapaian saat ini. Adik-adik ku tercinta Megah, Anugerah, Eunike, dan Daud yang selalu memberi semangat dan motivasi kepada penulis setiap harinya. Seluruh keluarga besar dari Ayah dan Ibu baik yang ada di Toraja, Makassar, maupun daerah-daerah lain yang telah memberikan doa, semangat, dan motivasi kepada penulis baik secara langsung maupun tidak langsung. Selama proses penyusunan tesis ini, penulis banyak mengalami rintangan dan hambatan, namun berkat bantuan berbagai pihak yang telah memberikan bimbimngan, arahan, motivasi, dan setiap bantuan lainnya yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu sehingga penelitian dan penyusunan tesis ini dapat terselesaikan dengan baik. Sehubungan dengan hal tersebut, penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar – besarnya kepada :

1. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** dan Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** selaku dosen pembimbing atas kesediaan waktu dan kesabaran serta dengan penuh keikhlasan memberikan dukungan, arahan, motivasi, dan membimbing penulis sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan baik.

2. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**, Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji atas segala bentuk bimbingan, saran, dan arahan yang diberikan kepada penulis dalam penyelesaian tesis ini.

3. **Seluruh dosen** dan **staff** Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan bekal ilmu, bantuan, motivasi, dan arahan selama penulis menimba ilmu di Departemen Matematika, Universitas Hasanuddin.

4. Teman-teman **Lab Analisis**, kak **Nas**, **Fitri**, **Ilma**, kak **Afdal**, kak **Topan**, Bu **Sri**, Bu **Uni**, Bu **Ida**, **Ajeng**, **Ifa**, dan kak **Ulil** yang telah memberikan banyak motivasi, dukungan, dan bantuan kepada penulis selama proses penyelesaian tesis. Terimakasih pula karena di lab penulis belajar banyak arti kehidupan yang mungkin sebelumnyan belum pernah penulis pelajari di luar sana. Terimakasih atas suka duka selama 1 tahun lebih penulis berada disani. Karena di lab lah penulis belajar bagaimana saling mengisi kekurangan masing-masing, menghargai perbedaan dan bagaimana mensupport satu sama lain. Kiranya Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas kebaikan kakak-kakak, teman-teman semua di lab. Kiranya damai, berkat dan sukacitaNya juga selalu turun atas kakak-kakak dan teman-teman semua. See you when I see you again and see you on top. God bless all of you. Sebuah kehormatan besar pernah belajar dan menimba ilmu di Lab Analisis. Terimakasih. Salam.

5. Teman-teman **Pascasarjana Matematika 2022** atau **LEMMA 22** atas segala bentuk dukungan, bantuan, dan kebersamaannya selama ini. Terimakasih karena sudah saling berbagi suka duka selama proses perkuliahan. Juga terkhusus sahabat-sahabat saya **A. Muhammad Mu'adz**, **Fitriyani**, dan **St. Nurhilmah Busrah** diucapkan terimakasih karena selalu dibuat repot oleh penulis, dan terimakasih pula karena sudah banyak membantu penulis selama proses perkuliahan berlangsung. Tak ada yang setara yang bisa penulis berikan kepada teman-teman semua, hanyalah doa agar teman-teman semua juga dikaruniakan berkat sukacita dan limpah rezekiNya selalu dimanapun teman-teman berada. Sebuah kehormatan besar pernah bertemu dan mengenal teman-teman semua. Terimakasih. Salam.

6. **Para Teacher di Light Institute**, **Ms. Yugi**, **Ms. Esra**, **Mr. Miswar**, **Ms. Yuan**, **Ms. Fina**, serta setiap teacher yang lain dan setiap orang tua murid tempat penulis mengajar privat. Terimakasih atas dedikasi, pengertian dan kerja samanya selama ini dan terimakasih atas pengalaman mengajar dan belajar yang pernah penulis tempuh disini. Terimakasih atas setiap bantuan, bimbingan dan arahan yang penulis pernah dapatkan disini. Semoga bimbingan belajar ini bisa semakin sukses dan jaya selalu, menjadi saluran berkat Tuhan bagi orang-orang yang ingin menimba ilmu, Aamin.

7. Seluruh pihak yang turut terlibat membantu, dan mendukung penulis baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak sempat penulis sebutkan satu per satu. Kiranya juga berkat dan sukacita Tuhan Yang Maha Esa dilimpahkan bagi bapak/ibu/kakak/adik/teman-teman semua. God Bless.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu semua jenis saran dan kritik, yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan bagi parea pembaca dan khususnya kepada penulis senidiri. Salam.

Makassar, 18 Januari 2024

Imanuel Agung Sembe

ABSTRAK

Fungsi ambiguitas quaternion merupakan perluasan dari fungsi ambiguitas standar menggunakan aljabar quaternion. Berbagai sifat seperti translasi, modulasi, dilatasi, nonlinearitas, keterbatasan, rumus rekonstruksi, dan rumus Moyal dibuktikan secara rinci. Selain itu, hubungan antara fungsi ambiguitas quaternion dan transformasi Fourier quaternion juga diberikan. Kemudian diberikan juga bukti seecara rinci untuk prinsip ketidakpastian Pitt dan Sharp Hausdorff-Young yang merupakan bagian dari sifat-sifat fungsi ambiguitas quaternion.

Kata Kunci : Fungsi ambiguitas quaternion, prinsip ketidakpastian, Ketaksamaan Pitt, Ketaksamaan Sharp Hausdorff-Young.

ABSTRACT

The quaternion ambiguity function is an extension of the standard ambiguity function using quaternion algebra. Various properties such as translation, modulation, dilation, nonlinearity, finiteness, reconstruction formula, and Moyal's formula are proven in detail. In addition, the relationship between the quaternion ambiguity function and the Fourier transform of the quaternion is also given. Then a detailed proof is also given for the Pitt and Sharp Hausdorff-Young uncertainty principles which are part of the properties of the quaternion ambiguity function.

Keywords : Quaternion ambiguity function, uncertainty principle, Pitt inequality, Sharp Hausdorff-Young inequality.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Transformasi Fourier Quaternion (TFQ) adalah generalisasi nontrivial dari transformasi Fourier klasik menggunakan aljabar quaternion [15]. Sebagai generalisasi dari transformasi Fourier kompleks dan real, TFQ menjadi perhatian para peneliti selama beberapa tahun. Beberapa sifat dari TFQ telah ditemukan seperti pergeseran, modulasi, konvolusi, korelasi, diferensiasi, konservasi energi, prinsip ketidakpastian, dan sebagainya. Karena sifat nonkomutatif perkalian quaternionn, ada tiga jenis TFQ dua dimensi. Ketiga TFQ ini disebut TFQ sisi kiri, TFQ sisi kanan, dan TFQ dua sisi [14].

Banyak transformasi umum yang terkait erat dengan TFQ, contohnya Transformasi Wavalet Quaternion, Transformasi Fourier Quaternion Fractional, Transformasi Kanonikal Linear Quaternion, dan Transformasi Fourier Windowed Quaternion [14]. Fungsi Ambiguigtas juga memainkan peranan penting dalam analsis signal nonstasioner dan teori pemprosesan dalam distribusi frekuensi waktu klasik dan telah diterapkan dalam berbagai bidang seperti teknologi sonar, pemprosesan sinyal radar, dan pemprosesan informasi optik. Kita dapat menggunakan fungsi ambiguitas untuk menghitung jarak antara target dan radar, kecepatan target, dan resolusi kecepatan radio [21].

Transformasi Fourier Quaternion dari $f \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$ adalah transformasi $\mathcal{F}_Q\{f\} \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$ diberikan oleh integral

$$\mathcal{F}_Q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} f(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} d\boldsymbol{x} \tag{1.1}$$

dimana $\mathcal{F}_Q$ disebut operator Transformasi Fourier Quaternion atau Transformasi Fourier Quaternion [14]. Penelitian ini mengkaji tentang perluasan fungsi ambiguitas ke bidang quaternion pada domain waktu $\boldsymbol{t}$ Penelitian ini teriinspirasi dari penelitian sebelumnya tentang perluasan Transformasi Fourier pada bidang quaternion yang dikemukakan oleh Hitzer (2007) dan Mawardi dkk (2008) yang menggunakan sifat-sifat transformasi fourier. quaternion, penelitian lainnya juga dilakukan oleh Muh. Irwan (2017) yang menulis tentang transformasi Fourier dan transformasi Fourier quaternion. Penelitian lainnya juga dilakukan oleh Mawardi dkk (2013) yang membahas tentang teorema konvolusi dari TFQ beserta sifat-sifat dan aplikasinya serta beberapa penelitian lainnya mengenai TFQ. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian yang sudah ada sebelumnya terletak pada fungsi yang digunakan. Penulis menggunakan fungsi ambiguitas sebagai perluasan pada quaternion.

Berdasarkan apa yang telah peneliti sampaikan di atas, akan dikaji tentang Fungsi Ambiguitas Quaternion dengan menggunakan sifat-sifat transformasi fourier yang telah ada dengan perluasan pada quaternion serta prinsip ketidakpastian Pitt dan Sharp Hausdorff-Young. Sehingga judul penelitian ini adalah Sifat-sifat dan Prinsip Ketidakpastian Pitt serta Sharp Hausdorff-Young pada Fungsi Ambiguitas Quaternion.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana sifat-sifat dari fungsi ambiguitas quaternion yakni translasi, modulasi, dilatasi, nonlinearitas, keterbatas-san, rumus rekonstruksi, rumus moyal, pertidaksamaan Pitt dan pertidaksamaan Sharp Hausdorff-Young.

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada fungsi ambiguitas quaternion dengan beberapa sifatnya, yakni translasi, modulasi, dilatasi, nonlinearitas, keterbatassan, rumus rekonstruksi, rumus moyal, pertidaksamaan Pitt dan pertidaksamaan Sharp Hausdorff-Young.

1.4 Tujuan Penelitian

Untuk membuat dan membuktikan secara detail definisi dan sifat-sifat fungsi ambiguitas quaternion yakni translasi, modulasi, dilatasi, nonlinearitas, keterbatas-san, rumus rekonstruksi, rumus moyal, pertidaksamaan Pitt dan pertidaksamaan Sharp Hausdorff-Young.

1.5 Sistematika Penulisan Proposal Tesis

Sistematika penulisan proposal tesis ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi konsep dasar dan penelitian relevan yang terkait dengan pembuktian fungsi ambiguitas Quaternion.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi metodologi penelitian yang digunakan dalam penelitian ini, meliputi: jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, prosedur atau tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

1.6 Keterbaruan Penelitian Tesis

Keterbaruan yang dikaji dalam penelitian tesis ini adalah sifat-sifat fungsi ambiguitas quaternion yang merupakan generalisasi dari transformasi fourier dan prinsip ketidakpastian Pitt serta Sharp Hausdorff-Young.

Penelitian ini dilaksanakan dengan terlebih dahulu menganalisis sifat-sifat transformasi Fourier quaternion, kemudian mengkonstruksi dan melakukan pembuktian sifat-sifat Transformasi Fourier ke dalam fungsi ambiguitas quaternion.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 State of Art

Pada state of art ini diambil beberapa penelitian terdahulu sebagai panduan untuk penelitian yang akan dilakukan, yang kemudian akan meenjadi acuan dan perbandingan dalam melakukan penelitian. Dalam penelitian ini, disertakan beberapa jurnal international penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan konsep transformasi Fourier quaternion dan fungsi ambiguitas quaternion. Jurnal tersebut yaitu :

1. Penelitian yang dilakukan oleh Mawardi Bahri pada tahun 2014 dengan judul *On-Two-Dimensional Quaternion Wigner-Ville Distribution*. Penelitian ini menyajikan distribusi Quaternion Wigner-Ville dua dimensi. Transformasi dibangun dengan mensubstituskan kernel transformasi Fourier dengan kernel transformasi quaternion Fourier dalam definisi distribusi Wigner-Ville klasik. Selanjutnya berdasarkan sifat-sifat quaternion dan kernel TFQ, peneliti memperoleh tiga jenis QWVD. Peneliti membahas beberapa sifat yang berguna dari berbagai definisi untuk QWVD, yang merupakan perluasan dari properti distribusi Wigner-Ville klasik.

2. Penelitian yang dilakukan oleh Mawardi Bahri dan Muh. Saleh Arif Fatimah pada tahun 2017 dengan judul *Relation between Quaternion Fourier Transform and Quaternion Wigner-Ville Distribution Associated with Linear Canonical Transform*. Pada penelitian ini, peneliti menetapkan hubungan mendasar antara Quaternion Wigner Ville Distribution-Linear Canonical Transform(QWVD-LCT) dan transformasi Fourier quaternion. Disini penulis menyediakan bukti alternatif sifat-sifat QWVD-LCT, seperti rumus invers dan rumus moyal. Penulis juga membahas secara rinci hubungan antara QWVD-LCT dan transformasi umum lainnya. Terakhir, berdasarkan hubungan antara fungsi ambiguitas quaternion yang terkait dengan transformasi kanonik linear (QAF-LCT) dan TFQ disajikan beberapa sifat-sifat penting dari QAF-

LCT. Penelitian ini memiliki relevansi dengan apa yang akan diteliti yaitu bahwa penelitian ini membahas tentang transformasi Fourier quaternion dan distribusi Wigner Ville quaternion.

3. Penelitian yang dilakukan oleh Mawardi Bahri, Amiruddin Haddade, dan Syamsuddin Toaha pada tahun 2017 dengan judul *Some Useful Properties of Ambiguity Function Associated With Linear Canonical Transform.* Dalam penelitian ini dibuktikan sifat-sifat dasar LCAF seperti konjugasi kompleks, translasi dan modulasi. Kemudian menggunakan hubungan dasar antara LCT dan LCAF, diperoleh rumus inversi dan rumus Moyal untuk LCAF. Penelitian ini memiliki relevansi dengan apa yang akan diteliti yaitu bahwa penelitian ini membahas tentang fungsi ambiguitas dimana terdapat defini dan sifat-sifat dari fungsi ambiguitas.

4. Penelitian yang dilakukan oleh Li-Ping Chen, Kit Ian Kou, dan Ming-Sheng Liu pada tahun 2014 dengan judul *Pitt's Inequality and Uncertainty Principle Associated with The Quaternion Ambiguity FUnction.* Penelitian ini membahas prinsip pertidaksaman dan ketidakpasitian Pitt yang terkait dengan transformasi Fourier quaternion dua sisi. Penelitian ini memiliki relevansi dengan apa yang akan diteliti yaitu bahwa penelitian ini membahas tentang pertidaksamaan Pit untuk transformasi Fourier kompleks di $S(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{H})$ dengan $S(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{H})$ melambangkan ruang Schwarz dari $\mathbb{R}^{2d}$ ke dalam $\mathbb{H}$.

5. Penelitian yang dilakukan oleh P. Lian pada tahun 2019 dengan judul *Sharp Hausdorff-Young Inequalities For The Quaternion Fourier Transform.* Dalam makalah ini dibuktikan pertidaksamaan Sharp-Hausdorff Young untuk TFQ dengan menggunakan hubungan antara TFQ dan transformasi Fourier kompleks. Penelitian ini memiliki relevansi dengan apa yang akan diteliti yaitu bahwa penelitian ini membahas tentang Sharp Hausdorff-Young untuk transformasi Fourier quaternion di $L^p(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ untuk $1 \leq p \leq 2$.

2.2 Landasan Teori

Pada bab ini akan di uraikan beberapa definisi, notasi dan konsep dasar aljabar quaternion, transformasi Fourier quaternion beserta sifat-sifatnya

2.2.1. Integral Lebesgue

1. Ruang $L^1(\mathbb{R})$

Definisi 1. *[23]Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^1(\mathbb{R})$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu*

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < \infty \right\}. \tag{2.1}$$

Ruang $L^1(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norma $\|.\|_1$ yang dirumuskan

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|\, dt \tag{2.2}$$

Contoh 1. *Misalkan*

$$f(x) = 2x^3 \quad ; -5 < x < 5 \tag{2.3}$$

Akan ditunjukkan apakah fungsi f termasuk dalam ruangb fungsi $L^1(\mathbb{R})$

Solusi 1.

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{\infty} |f(x)| dx &= \int_{-5}^{5} 2x^3 dx \\ &= \frac{2}{4} x^4 |_{-5}^{5} \qquad = \frac{1}{2}(5)^4 - \frac{1}{2}(-5)^4 \\ &= \frac{1}{2}(625) - \frac{1}{2}(625) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dx = 0 < \infty$ maka $f \in L^1\mathbb{R}$

Contoh 2. *Misalkan,*

$$f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$$

Tentukan apakah $f(x) \in L^1\mathbb{R}$

Solusi 2.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx &= \int_{-\infty}^{0} |f(x)|dx + \int_{0}^{\infty} |f(x)|dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} |e^{-(-x)}|dx + \int_{0}^{\infty} |e^{-x}|dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} |e^{x}|dx + \int_{0}^{\infty} |e6{-}x|dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{0} |e^{x}|dx + \int_{0}^{t} |e^{-x}|dx \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{x}|_{-t}^{0} + \lim_{t\to\infty} \left(-e^{-x}\right)|_{-t}^{0} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(e^{0} - e^{-t}\right) - \lim_{t\to\infty} (e^{-t} - e^{0}) \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{0} - \lim_{t\to\infty} e^{-t} - \lim_{t\to\infty} e^{-t} + \lim_{t\to\infty} e^{0} \\
&= 1 - 0 - 0 - 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Karena $\int |f(x)|dx = 2 < \infty$ *maka* $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$.

2. Ruang $L^2(\mathbb{R})$

Definisi 2. *[23]Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^2(\mathbb{R})$, didefinisikan sebagai kumpulan semua fungsi f yang mutlak kuadratnya terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yang diootasikan sebagai berikut*

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}. \tag{2.4}$$

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norma $\|.\|_2$ yang dirumuskan

$$\|f\|_2 = \left[\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan inner product $\langle f, f \rangle$ dengan aturan jika $f \in L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}dt \tag{2.6}$$

Dan normnya dinyatakan dengan

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \tag{2.7}$$

Contoh 3. *Misalkan*

$$f(x) = e^{-|x|} \tag{2.8}$$

Tentukan apakah $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

Solusi 3.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{0} |f(x)|^2 dx + \int_{0}^{\infty} |f(x)|^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} |e^{-(-x)}|^2 dx + \int_{0}^{\infty} |e^{-(x)}|^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2x} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{0} e^{2x} dx + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-2x} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2} e^{2x}|_{-t}^{0} \right) + \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}|_{0}^{t} \right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2} e^{2(0)} - \frac{1}{2} e^{2(-t)} \right) + \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2(t)} + \frac{1}{2} e^{-2(0)} \right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \right) + \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0) + \left(-\frac{1}{2}(0) \right) + \frac{1}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Karena $\int |f(x)|^2 dx = 1 < \infty$ *maka* $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

3. Ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$

Definisi 3. *[24] Misalkan* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *adalah fungsi terukur bernilai real. Koleksi kelas fungsi dari fungsi-fungsi terukur yang terintegralkan pada* $\mathbb{R}$ *dengan* $1 \le p < \infty$ *didefiniskan sebagai*

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{t})|^2 \, d\boldsymbol{t} < \infty \right\}. \tag{2.9}$$

Maka norm dari f *dalam* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *dilengkapi dengan*

$$\|f\|_2 = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{t})|^2 \, d\boldsymbol{t} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

Contoh 4. *Misalkan* $f(\boldsymbol{t}) = e^{-|\boldsymbol{t}|^2}, \boldsymbol{t} \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Tunjukkan apakah fungsi f *berada dalam ruang* $L^2(\mathbb{R}^2)$

Solusi 4. *Berdasarkan persamaan* (2.9) *definisi ruang* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *diperoleh*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\boldsymbol{t})|^2 d\boldsymbol{t} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-|\boldsymbol{t}|^2}\right|^2 d\boldsymbol{t}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\boldsymbol{t}|^2} d\boldsymbol{t}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t_1^2+t_2^2)} d\boldsymbol{t}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t_1^2} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t_2^2} dt_2\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Karena $\int_{\mathbb{R}^2}|f(\boldsymbol{t})|^2 d\boldsymbol{t} = \frac{\pi}{2} < \infty$ *maka* $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

2.2.2. Quaternion Module

[22] Berdasarkan definisi bilangan Quaternion, fungsi bernilai quaternion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}$ dapat diekspresikan sebagai

$$f(\boldsymbol{x}) = f_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x}), \qquad f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Berikut diberikan hasil kali dalam dari fungsi f, g yang didefinisikan pada $\mathbb{R}^2$ dengan nilai quaternion sebagai berikut

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})}d\boldsymbol{x}, \tag{2.12}$$

dan norma skalar yang berkaitan $\|f\|$ dengan mendefiniskan

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^2}|f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}. \tag{2.13}$$

Quaternion Module $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H}) = \{f|f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}, \|f\| < \infty\}$.

2.2.3. Teorema Fubini

2.2.4. Teorema Fubini

Teorema 2.2.1. *[25]Jika* $f = f(x, y)$ *adalah fungsi kontinu didefinisikan pada persegi panjang* $R = [a, b] \times [c, d]$ *di* $\mathbb{R}^2$*, maka*

$$\int\int_{\mathbb{R}} f\ dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x, y)dx\right)dy. \tag{2.14}$$

Contoh 5. *Evaluasi* $\int\int_{\mathbb{R}} 6x^2y\ dA$*, diaman* $R = [-1, 1] \times [0, 4]$.

Solusi 5. *Fungsi* $f(x, y) = 6x^2y$ *adalah kontinu, dengan menggunakan teorema Fubini diperoleh*

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathbb{R}} 6x^2y\ dA &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^4 6x^2y\ dy \right) dx \\
&= \int_0^4 \left(\int_{-1}^{1} 6x^2y\ dx \right) dy \\
&= 6 \int_0^4 \left(\int_{-1}^{1} x^2y\ dx \right) dy \\
&= 6 \int_0^4 y \left(\int_{-1}^{1} x^2\ dx \right) dy \\
&= 6 \int_0^4 y \left(\frac{1}{3}x^3 \right)_{-1}^{1} dy \\
&= 6 \int_0^4 y \left(\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{3}(-1)^3 \right) dy \\
&= 6 \int_0^4 y \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) dy \\
&= 6 \left(\frac{2}{3} \right) \int_0^4 y\ dy \\
&= 4 \left(\frac{1}{2}y^2 \right)_0^4 \\
&= 4 \left(\frac{1}{2}(4)^2 - \frac{1}{2}(0)^2 \right) \\
&= 32
\end{aligned}$$

2.2.5. Pemisahan Variabel

Teorema 2.2.2. *[25] Misalkan* $\int\int_{\mathbb{R}^2} f\ dA$ *dimana* $R = [a, b] \times [c, d]$ *adalah persegi panjang pada* $\mathbb{R}^2$ *dan* f *adalah fungsi dari* $f(x, y) = g(x)h(y)$*. Dengan teorema Fubini diperoleh,*

$$\int\int_{\mathbb{R}} f\ dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b g(x)h(y)dx \right) dy \tag{2.15}$$

($h(y)$ adalah konstan, jadi faktorkan keluar)

$$\int\int_{\mathbb{R}} f\ dA = \int_c^d h(y) \left(\int_a^b g(x)dx \right) dy = \left(\int_a^b g(x)dx \right) \left(\int_c^d h(y)dy \right). \tag{2.16}$$

Integral tentu $\int_a^b g(x)dx$ *adalah bilangan real, jadi kita faktorkan keluar dari integrasi terhadap* y *pada langkah akhir.*

Contoh 6. *[25] Hitung $\int\int_D e^{x+y} dA$, dimana $D = [0,1] \times [0,1]$, menggunakan pemisahan variabel.*

Solusi 6. *Karena $e^{x+y} = e^x + e^y$, hal berikut berlaku*

$$\begin{aligned}
\int\int_{[0,1]\times[0,1]} e^{x+y} dA &= \int_0^1 \left(\int_0^1 e^x e^y dx \right) dy \\
&= \left(\int_0^1 e^x dx \right) \left(\int_0^1 e^y dy \right) \\
&= \left(\int_0^1 e^x dx \right)^2 \\
&= \left(e^x |_0^1 \right)^2 \\
&= (e-1)^2.
\end{aligned}$$

2.2.6. Absolute Value of Double Integral

[26] Integral tentu dari fungsi bernilai kompleks dari variabel bernilai real yaitu

$$f : [a,b] \to \mathbb{C} \tag{2.17}$$

Misalkan fungsi bernilai kompleks $f(t)$ dari variabel real t:

$$f(t) = u(t) + iv(t), \tag{2.18}$$

yang diasumsikan sebagai fungsi kontinu sedikit demi sedikit yang didefinisikan dalam interval tertutup $a \leq t \leq b$. Integral $f(t)$ dari $t = a$ ke $t = b$, didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt. \tag{2.19}$$

Teorema 2.2.3. *Misalkan fungsi bernilai kompleks $f(t)$ dari variabel real t yakni $f(t) = u(t) + iv(t)$. Maka persamaan berikut berlaku*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt. \tag{2.20}$$

Proof. Misalkan

$$\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| = e^{-i\phi} \int_a^b f(t)dt = \int_a^b e^{-i\phi} f(t)\ dt, \tag{2.21}$$

dimana $\phi = Arg\left(\int_a^b f(t)\ dt\right)$. Karena $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right|$ adalah real, kita peroleh bahwa

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| = Re\int_a^b e^{-i\phi} f(t)\ dt \tag{2.22}$$
$$= \int_a^b Re\left[e^{-i\phi} f(t)\right]\ dt \tag{2.23}$$
$$\leq \int_a^b \left|e^{-i\phi} f(t)\right|\ dt \tag{2.24}$$
$$= \int_a^b |f(t)|\ dt. \tag{2.25}$$

pada (2.24) kita menerapkan sifat modulus bilangan kompleks yaitu $Re(z) \leq |z|$ diamana $z \in \mathbb{C}$. □

2.2.7. Transformasi Fourier

1. Transformasi Fourier $L^1(\mathbb{R})$

Definisi 4. *[23] Misalkan diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ terdefinisi pada $\mathbb{R}$, maka transformasi Fourier dari fungsi f dinotasikan $\hat{f}(\omega)$ dan didefiniskan oleh*

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{2.26}$$

Dalam hal ini $i^2 = -1$. Fungsi eksponensial $e^{-i\omega t}$ disebut kernel dari transformasi Fourier. Karena $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ maka persamaan (2.26) di atas dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t - i\sin\omega t)dt \tag{2.27}$$
$$= \int_{\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\ dt - i\int_{\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\ dt. \tag{2.28}$$

Contoh 7. *Diketahui fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$*

$$f(t) = \begin{cases} 5 & ; -2 < t < 2 \\ 0 & t \text{ yang lainnya} \end{cases} \tag{2.29}$$

Tentukan transformasi Fouriernya

Solusi 7.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{\infty}^{-2} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-2}^{2} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{2}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= 0 + \int_{-2}^{2} f(t)e^{-i\omega t}dt + 0 \\
&= \int_{-2}^{2} 5e^{-i\omega t}dt \\
&= 5\int_{-2}^{2} e^{-i\omega t}dt \\
&= 5\int_{-2}^{2} (\cos\omega t - i\sin\omega t)\, dt \\
&= 5\left[\int_{-2}^{2} (\cos\omega t)\, dt - i\int_{-2}^{2} (\sin\omega t)\, dt\right] \\
&= 5\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t|_{-2}^{2} - i\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right)|_{-2}^{2}\right] \\
&= \frac{5}{\omega}\left[(\sin(2\omega) - sin(-2\omega)) + i(\cos(2\omega) - cos(-2\omega))\right] \\
&= \frac{5}{\omega}\left[(\sin 2\omega + \sin 2\omega) - i(\cos 2\omega - \cos 2\omega)\right] \\
&= \frac{5}{\omega}[2\sin 2\omega - i(0)] \\
&= \frac{5}{\omega}2\sin 2\omega \\
&= \frac{10}{\omega}\sin 2\omega
\end{aligned}$$

Jadi transformasi Fourier dari f adalah $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{10}{\omega}\sin 2\omega$.

2. Transformasi Fourier $L^2(\mathbb{R}^2)$

Definisi 5. *[24] Misalkan diberikan fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ terdefinisi pada $\mathbb{R}$, transformasi Fourier dari fungsi f dinotasikan $\hat{f}(\omega)$ dan didefinisikan oleh*

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(\boldsymbol{t})\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})e^{-i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}}d\boldsymbol{t} \tag{2.30}$$

Karena $e^{i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}} = \cos\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}$ maka persamaan (2.30) di atas dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(\boldsymbol{t})\}(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})(\cos\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega} - i\cdot\sin\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{t} & (2.31)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})\cos\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}d\boldsymbol{t} - i\int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})\sin\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}d\boldsymbol{t}. & (2.32)
\end{aligned}$$

Contoh 8. *Diberikan fungsi* $f(\boldsymbol{t}) = e^{-2\pi^2\boldsymbol{t}^2\sigma^2}$ *dimana* $\boldsymbol{t}^2 = t_1^2 + t_2^2$. *Tentukan transformasi Fouriernya.*

Solusi 8. *Transformasi Fourier dari fungsi di atas adalah*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(\boldsymbol{t})\}(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})e^{-\boldsymbol{i}\boldsymbol{t}\boldsymbol{\omega}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi^2\boldsymbol{t}^2\sigma^2}e^{-\boldsymbol{i}\boldsymbol{t}\boldsymbol{\omega}}d\boldsymbol{t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi^2(t_1^2+t_2^2)\sigma^2}e^{-\boldsymbol{i}(t_1+t_2)(\omega_1+\omega_2)}dt_1dt_2 \\
&= e^{2\pi^2\sigma^2}\int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} e^{-(t_1^2+t_2^2)}e^{-\boldsymbol{i}t_1\omega_1}e^{-\boldsymbol{i}t_2\omega_2}dt_1dt_2 \\
&= e^{2\pi^2\sigma^2}\int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} e^{-t_1^2}e^{-\boldsymbol{i}t_1\omega_1}e^{-t_2^2}e^{-\boldsymbol{i}t_2\omega_2}dt_1dt_2 \\
&= e^{2\pi^2\sigma^2}\int_{\infty}^{\infty} e^{-t_1^2}e^{-\boldsymbol{i}t_1\omega_1}dt_1\int_{\infty}^{\infty} e^{-t_2^2}e^{-\boldsymbol{i}t_2\omega_2}dt_2 \\
&= e^{2\pi^2\sigma^2}\int_{\infty}^{\infty} e^{-(t_1^2+\boldsymbol{i}t_1\omega_1)}dt_1\int_{\infty}^{\infty} e^{-(t_2^2+\boldsymbol{i}t_2\omega_2)}dt_2 \\
&= e^{2\pi^2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left((t_1+\boldsymbol{i}\frac{\omega_1}{2})^2-(\boldsymbol{i}\frac{\omega_1}{2})^2\right)}dt_1\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left((t_2+\boldsymbol{i}\frac{\omega_2}{2})^2-(\boldsymbol{i}\frac{\omega_2}{2})^2\right)}dt_2 \\
&= e^{2\pi^2\sigma^2}e^{-\left(\boldsymbol{i}\frac{\omega_1}{2}\right)^2}e^{-\left(\boldsymbol{i}\frac{\omega_2}{2}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t_1+\boldsymbol{i}\frac{\omega_1}{2}\right)^2}dt_1\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t_2+\boldsymbol{i}\frac{\omega_2}{2}\right)^2}dt_2 \\
&= e^{2\pi^2\sigma^2}e^{\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{4}}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} \\
&= e^{2\pi^2\sigma^2}e^{\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{4}}\pi
\end{aligned}$$

Jadi, transformasi Fourier dari $f(\boldsymbol{t}) = e^{-2\pi^2\boldsymbol{t}^2\sigma^2}$ *adalah* $\mathcal{F}\{f(\boldsymbol{t})\}(\boldsymbol{\omega}) = e^{2\pi^2\sigma^2}e^{\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{4}}\pi$.

2.2.8. Aljabar Quaternion

Pada subbab ini akan disajikan bentuk dan sifat bilangan quaternion. Bilangan quaternion adalah gabungan skalar dan bagian vektor berbentuk

$$q = q_0 + \boldsymbol{q} \tag{2.33}$$

dimana

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3. \tag{2.34}$$

Bilangan quaternion pertama kali diperkenalkan oleh Sir William Hamilton, dan di simbolkan dengan $\mathbb{H}$. Setiap elemen dari $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, dan $\boldsymbol{k}$ mengikuti relasi dimana

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1, \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}. \tag{2.35}$$

Conjugate dari quternion $\bar{q}$ di tuliskan sebagai

$$\bar{q} = q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3. \tag{2.36}$$

Kita menggunakan notasi kurung $(,)$ untuk menotasikan hasil kali dalam (*inner product*) dari dua fungsi quaternion, $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}$, sebagai berikut[14]:

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})} = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})}d\boldsymbol{x}. \tag{2.37}$$

Ketika $f = g$ kita peroleh norm terkait

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})} = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}. \tag{2.38}$$

Sebagai konsequensi dari hasil kali dalam (2.37) kita peroleh pertidaksamaan Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} f\overline{g}\ d\boldsymbol{x}\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |g|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H}). \tag{2.39}$$

2.2.9. Sifat Bilangan Quaternion

Pada bagian ini akan di jelaskan beberapa bentuk dari bilangan quaternion, seperti penjumlahan, perkalian, norm quaternion, unit quaternion, quaternion murni dan invers quaternion.

1. Penjumlahan Quaternion

   Misalkan dua buah quaternion

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \tag{2.40}$$

$$p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3 \tag{2.41}$$

   dua buah quaternion di atas adalah sama, jika dan hanya jika suku-suku yang bersesuain sama. Selanjutnya seperti vektor, dua buah quaternion tersebut dapat ditambah atau dikurangi sebagai berikut.

$$p \pm q = \big[(p_0 \pm q_0) + \boldsymbol{i}(p_1 + q_1) + \boldsymbol{j}(p_2 \pm q_2) + \boldsymbol{k}(p_3 \pm q_3)\big]. \tag{2.42}$$

2. Perkalian Quaternion

   Misalkan diberikan dua buah quaternion

$$
\begin{aligned}
q =& q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \\
p =& p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3
\end{aligned}
$$

maka dapat diperoleh

$$qp = q_0p_0 - \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} + q_0\boldsymbol{p} + p_0\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} \tag{2.43}$$

Bukti.

$$
\begin{aligned}
q =& q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \\
p =& p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3 \\
qp =& \big(q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3\big)\big(p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3\big) \\
=& q_0p_0 + \boldsymbol{i}q_0p_1 + \boldsymbol{j}q_0p_2 + \boldsymbol{k}q_0p_3 + \boldsymbol{i}q_1p_0 + \boldsymbol{i^2}q_1p_1 + \boldsymbol{ij}q_1p_2 + \boldsymbol{ik}q_1p_3 + \boldsymbol{j}q_2p_0 \\
&+ \boldsymbol{ji}q_2p_1 + \boldsymbol{j^2}q_2p_2 + \boldsymbol{jk}q_2p_3 + \boldsymbol{k}q_3p_0 + \boldsymbol{ki}q_3p_1 + \boldsymbol{kj}q_3p_2 + \boldsymbol{k^2}q_3p_3
\end{aligned}
$$

Satukan yang sejenis

$$
\begin{aligned}
qp =& \big(q_0p_0\big) + \boldsymbol{i}\big(q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2\big) + \boldsymbol{j}\big(q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + q_1p_3\big) \\
&+ \boldsymbol{k}\big(q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0\big) - \big(q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3\big) \\
=& \big(q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3\big) + \boldsymbol{i}\big(q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2\big) \\
&+ \boldsymbol{j}\big(q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + q_3p_1\big) + \boldsymbol{k}\big(q_0p_3 + q_3p_0 + q_1p_2 - q_2p_1\big) \\
=& q_0p_0 - \big(q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3\big) + \boldsymbol{i}\big(q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2\big) \\
&+ \boldsymbol{j}\big(q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + q_3p_1\big) + \boldsymbol{k}\big(q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0\big) \\
=& q_0p_0 - \big(q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3\big) + q_0\big(\boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3\big) + p_0\big(\boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3\big) \\
&+ \boldsymbol{i}\big(q_2p_3 - q_3p_2\big) - \boldsymbol{j}\big(q_1p_3 - q_3p_1\big) + \boldsymbol{k}\big(q_1p_2 - q_2p_1\big)
\end{aligned}
$$

Dengan perkalian titik $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} = q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3$dan bentuk perkalian silangya $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{i}\big(q_2p_3 - q_3p_2\big) + \boldsymbol{j}\big(q_3p_1 - q - 1p_3\big) + \boldsymbol{k}\big(q_1p_2 - q_2p_1\big)$. Bagian skalar dari bentuk ini adalah

$$Sc(qp) = q_0p_0 + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}, \tag{2.44}$$

dan bagian vektornya adalah

$$q_0\boldsymbol{p} + p_0\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}. \tag{2.45}$$

□

3. Norm Quaternion

   Misalkan $p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$, maka norma dari $\boldsymbol{p}$ dapat dituliskan sebagai

$$\left|\boldsymbol{p}\right| = \sqrt{p\bar{p}} = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}. \tag{2.46}$$

   Contoh 9. *Misalkan* $p = 1 + 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

   maka $\left|p\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$.

4. Quaternion Satuan

   Misalkan $p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$

   quaternion satuan $\hat{p} = \frac{1}{\left|p\right|}\left(p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3\right)$

   Contoh 10. *Misalkan* $p = 1 + 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

   maka $\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{30}}\left(1 + 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}\right)$

5. Quaternion Murni

   Quaternion murni adalah quaternion dengan skalar nol

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \tag{2.47}$$

   perkalian dua quaternion murni tidak bersifat tertutup, sebab hasilnya adalah quaternion yang tidak murni

$$\begin{aligned}
qp =& \left(\boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3\right)\left(\boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3\right) \\
=& \big(\boldsymbol{i^2}q_1p_1 + \boldsymbol{ij}q_1p_2 + \boldsymbol{ik}q_1p_3 + \boldsymbol{j^2}q_2p_2 + \boldsymbol{ji}q_2p_1 \\
& + \boldsymbol{jk}q_2p_3 + \boldsymbol{ki}q_3p_1 + \boldsymbol{kj}q_3p_2 + \boldsymbol{k^2}q_3p_3\big) \\
=& -q_1p_1 + \boldsymbol{k}q_1p_2 - \boldsymbol{j}q_1p_3 - q_2p_2 - \boldsymbol{k}q_2p_1 + \boldsymbol{i}q_2p_3 + \boldsymbol{j}q_3p_1 - \boldsymbol{i}q_3p_2 - q_3p_3 \\
=& -\left(q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3\right) + \boldsymbol{i}\left(q_2p_3 - q_3p_2\right) + \boldsymbol{j}\left(q_3p_1 - q_1p_3\right) + \boldsymbol{k}\left(q_1p_2 - q_2p_1\right).
\end{aligned}$$

6. Conjugate Quaternion

   Misalkan Quaternion

$$q = q_0 + \boldsymbol{q} = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3, \tag{2.48}$$

   maka Conjugate quaternion

$$\bar{q} = q_0 - \boldsymbol{q} = q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3. \tag{2.49}$$

Contoh 11.

Misalkan

$$q = 1 + \boldsymbol{i}2 + \boldsymbol{j}3 + \boldsymbol{k}4 \tag{2.50}$$

maka

$$\bar{q} = 1 - \boldsymbol{i}2 - \boldsymbol{j}3 - \boldsymbol{k}4. \tag{2.51}$$

7. Invers Quaternion

   Diberikan quaternion

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \tag{2.52}$$

   maka invers quaternion q^{-1} adalah

$$q^{-1} = \frac{q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3}{|q|^2} \tag{2.53}$$

Contoh 12.

Misalkan $q = 1 + \boldsymbol{i}2 + \boldsymbol{j}3 + \boldsymbol{k}4$

$$\begin{aligned} q^{-1} &= \frac{\bar{q}}{|q|^2} \\ &= \frac{1 - \boldsymbol{i}2 - \boldsymbol{j}3 - \boldsymbol{k}4}{|\sqrt{30}|^2} \\ &= \frac{1 - \boldsymbol{i}2 - \boldsymbol{j}3 - \boldsymbol{k}4}{30} \\ &= \frac{1}{30} - \frac{1}{15}\boldsymbol{i} - \frac{1}{10}\boldsymbol{j} - \frac{2}{15}\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Dapat ditunjukan untuk $qq^{-1} = 1$.

2.2.10. Fungsi Ambiguitas

Fungsi ambiguitas klasik pertama kali diperkenalkan oleh Woodward pada tahun 1953 untuk analisis matematis sonar dan sinyal radar [14]. Fungsi ambiguitas juga memainkan peran penting dalam analisis sinyal non-stasioner dan teori pemprosesan dalam distribusi frekuensi waktu klasik dan telah diterapkan dalam berbagai bidang seperti teknologi sonar, pemprosesan sinyal radar dan pemprosesan informasi optik. Kita dapat menggunakan fungsi ambiguitas untuk menghitung jarak antar target dan radar, kecepatan target, resolusi jarak dan resolusi kecepatan radia[21].

Dalam subbab ini akan dijelaskan definisi dan beberapa sifat penting dari fungsi ambiguitas.

Definisi 6 (Fungsi Ambiguitas)**.** *Misal diberikan dua fungsi $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, fungsi ambiguitas perkalian dari f dan g didefiniskan oleh*

$$A_{f,g}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{i\omega x} dx. \tag{2.55}$$

Beberapa sifat penting dari fungsi ambiguitas klasik diringkas sebagai berikut. Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. τ_α dinotasikan sebagai operator shift yang didefinisikan oleh $\tau_k f(x) = f(x - k)$ dan $\mathbb{M}_{\omega_0}$ adalah operator modulasi didefinisikan sebagai $\mathbb{M}_{\omega_0} f(x) = e^{i\omega_0 x} f(x)$.

1. Kompleks Konjugat

$$\overline{A_{f,g}(t, \omega)} = W_{g,f}(-t, -\omega). \tag{2.56}$$

2. Translasi

$$A_{\tau_k f, \tau_k g}(t, \omega) = e^{-i\omega_0 k} A_{f,g}(t, \omega). \tag{2.57}$$

3. Modulasi

$$A_{\mathbb{M}_{\omega_0} f, \mathbb{M}_{\omega_0} g}(t, \omega) = e^{-i\omega_0 k} A_{f,g}(t, \omega - \omega_0). \tag{2.58}$$

4. Moyal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} A_{f_1,g_1}(t, \omega) \overline{A_{f_2,g_2}(t, \omega)} dt d\omega = (f_1, f_2) \overline{(g_1, g_2)}. \tag{2.59}$$

5. Invers

$$f(t) = \frac{1}{2\pi g(0)} \int_{-\infty}^{\infty} A_{f,g}\left(\frac{t}{2}, \omega\right) e^{i\omega t} d\omega \tag{2.60}$$

asalkkan $\overline{g(0)} \neq 0$.

2.2.11. Transformasi Fourier Quaternionion (TFQ)

Transformasi Fourier Quaternion (hypercomplex) didefinisikan mirip dengan Transformasi Fourier (TF) klaisik dari fungsi 2D. Properti nonkomutatif dari perkalian quaternion memungkinkan kita untuk memiliki tiga definisi yang berbeda dari TFQ [14].

Definisi 7 (TFQ Dua Sisi). *TFQ dua sisi dari* $f \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$ *adalah transformasi* $\mathcal{F}_q^D\{f\} \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$ *diberikan oleh integral*

$$\mathcal{F}_q^D\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} \boldsymbol{d}^2\boldsymbol{\omega}, \tag{2.61}$$

dimana $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2$ *dan produk eksponensial quaternion* $\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2}$ *disebut kernel Fourier quaternion.*

Teorema 2.2.4 (Invers QFT Dua sisi). *Misalkan* $f \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$ *dan* $\mathcal{F}_q^D\{f\} \in L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$. *Maka TFQ dua sisi dari* f *adalah transformasi yang dapat dibalik dan kebalikannya adalah*

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} \mathcal{F}_q^D\{f\}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} \boldsymbol{d}^2\boldsymbol{\omega} \tag{2.62}$$

dimana produk eksponensial quaternion $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\omega_2 x_2}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\omega_1 x_1}$ *disebut invers kernel Fourier quaternion dua sisi.*

Perhatikan bahwa jika $\mathcal{F}_q^D\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = 1$ dari invers TFQ dua sisi kita peroleh fungsi delta Dirac quaternion yaitu,

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} e^{\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} \boldsymbol{d}^2\boldsymbol{\omega}. \tag{2.63}$$

Kita tahu bahwa rumus Parseval tidak berlaku untuk TFQ dua sisi, tetapi kasus khusus dari rumus Parseval yang disebut sebagai rumus Plancherel tetap berlaku; yaitu,

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\|\mathcal{F}_q^D\{f\}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})}. \tag{2.64}$$

Berikut rumus Parseval untuk sisi kanan TFQ sebagai

$$(f,g)_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\mathcal{F}_q^R\{f\}, \mathcal{F}_q^R\{g\}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})}, \tag{2.65}$$

dimana TFQ sisi kanan didefinisikan untuk setiap $f \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$

$$\mathcal{F}_q^R\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} \boldsymbol{d}^2\boldsymbol{x} \tag{2.66}$$

Untuk fungsi quaternion $f \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})$ kita definisikan translasi, modulasi, dan dilatasi sebagai berikut:

$$T_a f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad M_{\boldsymbol{\omega_0}} f(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{i}u_0 x_1} f(\boldsymbol{x}) e^{\boldsymbol{j}v_0 x_2} \tag{2.67}$$

$$\mathcal{D}_c f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{c} \tag{2.68}$$

dimana $\boldsymbol{\omega}_0 = u_0\boldsymbol{e} + v_0\boldsymbol{e}_0$.

2.2.12. Prinsip Ketidakpastiaan Pitt pada TFQ

Prinsip ketidakpastian merupakan gambaran ciri suatu fungsi dan transformasi Fourier quaternionnya. Beckner (1995) telah menunjukkan bahwa pertidaksamaan Pitt yang tajam menghasilkan bukti singkat estimasi ketidakpastian logaritmik, dan pertidaksamaan Heisenberg-Weyl diikuti dengan menggunakan pertidaksamaan ketidakpastiaan logaritmik dalam bidang bilangan real. Dengan bantuan penataan ulang dan simetrisasi, Beckner (1995) telah membuktikan pertidaksamaan Pitt yang tajam dengan menerapkan pertidaksamaan Young pada L^1 untuk konvolusi di $\mathbb{R}_+$ [12]. Berikut adalah pertidaksamaan Pitt mengenai transformasi Fourier quaternion menurut Chen, Kou dan Liu (2015).

Teorema 2.2.5 (Pertidaksamaan Pitt pada TFQ)**.** *Untuk $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d};\mathbb{H})$.*

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\boldsymbol{\xi}|^{-\alpha} \left|\hat{f}(\boldsymbol{\xi})\right|_Q^2 d\boldsymbol{\xi} \leq C(\alpha) \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\boldsymbol{x}|^{\alpha} |f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}, \tag{2.69}$$

dimana

$$C(\alpha) = \pi^{\alpha} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2d-\alpha}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2d+\alpha}{4}\right)} \right]^2 \tag{2.70}$$

dan $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d};\mathbb{H})$ adalah ruang Schwartz pada $\mathbb{R}^{2d}$. Secara khusus, untuk $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d};\mathbb{R})$ dan $0 \leq \alpha < 2d$.

$$\int_{\mathbb{R}^2 d} |\boldsymbol{\xi}|^{-\alpha} \left|\hat{f}(\boldsymbol{\xi})\right|^2 d\boldsymbol{\xi} \leq C(\alpha) \int_{\mathbb{R}^2 d} |\boldsymbol{x}|^{\alpha} |f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}. \tag{2.71}$$

2.2.13. Ruang Schwartz Subset dari Ruang Lebesgue

Definisi 8 (Definisi Ruang Schwartz)**.** *Untuk* $\mathbb{N}$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \textstyle\sum_{|a|\leq l} |D^{\alpha}\phi(x)| < \infty, \forall k,l \in \mathbb{N}_0 \right\} \tag{2.72}$$

disebut ruang Schwartz dari semua fungsi terdiferensiasi tak terhingga yang menurun dengan cepat, atau disingkat ruang Schwartz [29].

Teorema 2.2.6. *Ruang Schwartz, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n$ adalah subruang dari $L^p(\mathbb{R}^n)$ untuk setiap p di $\mathbb{N}$.*

Bukti 1. *Untuk setiap fungsi ϕ di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, terdapat konstanta K sedemikian sehingga*

$$|\phi(x)| \leq \frac{K}{1+|x|^2} \tag{2.73}$$

untuk setiap x di $\mathbb{R}^n$. Dengan demikian,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^p \; dx \leq K^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^p} \; dx < \infty \tag{2.74}$$

untuk setiap $p < \infty$. Untuk $p = \infty$, berdasarkan definisi ruang Schwartz (8)*, diperoleh*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \quad |\phi(x)| < \infty, \tag{2.75}$$

and kita simpulkan bahwa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ untuk setiap p di $\mathbb{N}$.

2.2.14. Prinsip Ketidakpastian Sharp Hausdorff-Young Inequality pada TFQ

Hubungan antara transformasi Fourier quaternion $\mathcal{F}_{u,v}$ dan transformasi Fourier kompleks, kita dapat membuktikan pertidaksamaan Sharp Hausdorff-Young untuk TFQ [11]. Menurut Lian (2020), pertidaksamaan berikut berlaku.

Teorema 2.2.7 (Pertidaksamaan Sharp Hausdorff-Young pada TFQ)**.** *Untuk $1 < p \leq 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan $f \in L^p(\mathbb{R}^2, \mathbb{H})$, kita punya*

$$\|\mathcal{F}_{u,v} f\|_q \leq A_p^2 \|f\|_p \tag{2.76}$$

dimana $A_p = (p^{\frac{1}{p}} q^{-\frac{1}{q}})^{\frac{1}{2}}$.

2.2.15. Distribusi Quaternion Wigner-Ville

Pada bagian ini, diperkenalkan distribusi quaternion Wigner-Ville (QWVD). Berdasarkan sifat-sifat bilangan quaternion dan definisi transformasi Wigner-Ville klasik yang terkait dengan transformasi Fourier, kita peroleh definisi QWVD dengan mengganti kernel transformasi Fourier dengan kernel TFQ dua sisi dalam distribusi Wigner-Ville (WVD) klasik yang didefinisikan sebagai berikut[14].

Definisi 9 (Distribusi Quaternion Wigner-Ville)**.** *Perkalian dua sisi distribusi quaterion Wigner-Ville dari fungsi-fungsi(atau signal) dua dimensi* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ *diberikan oleh*

$$\mathcal{W}_{f,g}^D = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1\tau_1} f\left(\boldsymbol{t} + \frac{\boldsymbol{x}}{2}\right) \overline{g}\left(\boldsymbol{t} - \frac{\boldsymbol{x}}{2}\right) e^{-\boldsymbol{j}\omega_2\tau_2} d^2\boldsymbol{\tau}, \tag{2.77}$$

asalkan integralnya ada.

Selanjutnya, jika kita menulis $R_t(\boldsymbol{\tau}) = f(\boldsymbol{t} + \frac{\boldsymbol{\tau}}{2})\overline{g}(\boldsymbol{t} - \frac{\boldsymbol{\tau}}{2})$, kita peroleh

$$\mathcal{W}_{f,g}^D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1\tau_1} R_t(\boldsymbol{\tau}) e^{-\boldsymbol{j}\omega_2\tau_2} d^2\boldsymbol{\tau} \tag{2.78}$$

$$= \mathcal{F}_q^D\{R_t\}(\boldsymbol{\omega}), \tag{2.79}$$

yang memberi tahu kita bahwa perkalian dua sisi QWVD sebenarnya adalah TFQ dua sisi dari fungsi $R_t(\boldsymbol{\tau}) = f(\boldsymbol{t} + \frac{\boldsymbol{\tau}}{2})\overline{g}(\boldsymbol{t} - \frac{\boldsymbol{\tau}}{2})$ terhadap $\boldsymbol{\tau}$. Fakta ini sangat penting dalam pembuktian rumus Moyal untuk QWVD dua sisi[14].

Lemma 2.2.8 (Boundedness)**.** *Misalkan* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ *adalah dua fungsi bernilai quaternion. Maka* $\mathcal{W}_{f,g}^D(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\omega})$ *terbatas pada* $L^2(\mathbb{R}^2); \mathbb{H}$; *yaitu,*

$$\left|\mathcal{W}_{f,g}^D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega})\right| \leq 4\|f\|_{L^2_{\mathbb{R}^2;\mathbb{H}}} \|g\|_{L^2_{\mathbb{R}^2;\mathbb{H}}} \tag{2.80}$$

Secara khusus, jika $f = g$, *ekspresi di atas disederhanakan menjadi*

$$|\mathcal{W}_{f,g}^D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega})| \leq 4\mathcal{W}_f^D(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}). \tag{2.81}$$

Teorema 2.2.9 (Reconstruction Formula untuk QWVD dua sisi)**.** *Transformasi invers dari perkalian dua sisi QWVD dari signal* $f \in L^2(\mathbb{R}^{\not{2}}; \mathbb{H})$ *diberikan oleh*

$$f(t) = \frac{1}{(2\pi)^2(\overline{g}(\boldsymbol{0}))} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\boldsymbol{i}\omega_1 t_1} \mathcal{W}_{f,g}^D\left(\frac{\boldsymbol{t}}{2}, \boldsymbol{\omega}\right) e^{\boldsymbol{j}\omega_2 t_2} d^2\boldsymbol{\omega} \tag{2.82}$$

asalkan $\overline{g}(\boldsymbol{0})/neq(0)$.

Proposisi 1 (Shift)**.** *Misalkan* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ *adalah signal-signal quaternion. Jika kita menggeser waktu sinyal sebesar* $\boldsymbol{a}$, *maka kita peroleh*

$$\mathcal{W}_{T_a f, T_a g}^D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{W}_{f,g}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\omega}). \tag{2.83}$$

Proposisi 2 (Nonlinearitas)**.** *Misalkan* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ *adalah signal-signal quaternion. Maka QWVD dua sisi adalah nonlinear, yaitu*

$$\mathcal{W}_{f+g}^D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{W}_f^D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{W}_{f,g}^D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{W}_{g,f}^D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{W}_g^D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega}). \tag{2.84}$$

Proposisi 3 (Modulasi). *Misalkan* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ *adalah signal-signal quaternion. Jika kita menggeser spektrum sinyal* f *sebesar* $\boldsymbol{\omega}_0$, *maka kita peroleh*

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^D_{M_{\omega_o} f,g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega}) = {} & e^{\boldsymbol{i}u_0 t_1} \mathcal{W}^D_{f,g_0}\left(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}\right) e^{\boldsymbol{j}v_0 t_2} \\
& - e^{\boldsymbol{i}u_0 t_1} \mathcal{W}^D_{f,g_1}\left(t, \omega_1 - \frac{u_0}{2}, -\omega_2 - \frac{v_0}{2}\right) e^{\boldsymbol{j}v_0 t_2} \boldsymbol{i} \\
& - e^{\boldsymbol{i}u_0 t_1} \mathcal{W}^D_{f,g_2}\left(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}\right) e^{\boldsymbol{j}v_0 t_2} \boldsymbol{j} \\
& - e^{\boldsymbol{i}u_0 t_1} \mathcal{W}^D_{f,g_3}\left(\boldsymbol{t}, \omega_1 - \frac{u_0}{2}, -\omega_2 - \frac{v_0}{2}\right) e^{\boldsymbol{j}v_0 t_2} \boldsymbol{k}.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Proposisi 4 (Dilatasi). *MIsalkan* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ *adalah signal-signal quaternion. Maka*

$$\mathcal{W}^D_{\mathcal{D}_c f, \mathcal{D}_c g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{W}^D_{f,g}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{c}, c\boldsymbol{\omega}\right). \tag{2.86}$$

Teorema 2.2.10 (Rumus Moyal untuk QWVD dua sisi). *Misalkan* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ *adalah dua signal quaternion. Maka persamaan berikut berlaku:*

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}^D_{f,g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\omega})|^2 d^2\boldsymbol{\omega} d^2\boldsymbol{t} = (4\pi)^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})} \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})}. \tag{2.87}$$