DIMENSI METRIK GRAF HASIL OPERASI COMB DARI GRAF LINTASAN DAN GRAF BERLIAN

SKRIPSI

ISRAMAYANTI OKTAVIA

H011191035

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

FEBRUARI 2024

DIMENSI METRIK GRAF HASIL OPERASI COMB DARI GRAF LINTASAN DAN GRAF BERLIAN

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ISRAMAYANTI OKTAVIA

H011191035

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

FEBRUARI 2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Isramayanti Oktavia
NIM	: H011191035
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Comb dari Graf Lintasan dan Graf Berlian

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 6 Februari 2024

Yang menyatakan

Isramayanti Oktavia

NIM. H011191035

HALAMAN PENGESAHAN

DIMENSI METRIK GRAF HASIL OPERASI COMB DARI GRAF LINTASAN DAN GRAF BERLIAN

Disusun dan diajukan oleh

ISRAMAYANTI OKTAVIA

H011191035

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal, 6 Februari 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Dr. Muh. Nur, S.Si., M.si.	**Prof. Dr. Hasmawati,M.Si.**
NIP. 19850529 200812 1 002	**NIP.19641231 199003 2 007**

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Dr. Firman, S.Si., M.Si.

NIP. 196804292002121001

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur bagi Allah yang telah memberikan hidayah dan rahmat-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini. Sholawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW, yang selalu diharapkan syafaatnya di yaumil akhir.

Penulisan skripsi yang berjudul **"Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Comb dari Graf Lintasan dan Graf Berlian"** disusun sebagai syarat bagi penulis dalam memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini tentunya tidak lepas dari bimbingan, masukan, arahan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini saya ingin mengucapkan terima kasih serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada Ibu **Wa Nafi, S.E** dan Ibu **Wa Zia** yang telah membesarkan dan mendidik penulis dengan penuh cinta, memberikan dukungan material dan moral serta do'a yang senantiasa tak hentinya dilangitkan untuk penulis, sehingga dapat hidup sehat dan bahagia saat menyusun skripsi ini, terima kasih juga kepada ayah sambung Bapak **Purwanto** dan saudara penulis yaitu kakak **Siska Anggi Febriyanti, SKM**, adik-adik penulis: **Yusna, Ikhsan, Aiyra, dan Zayn**, serta seluruh keluarga yang selalu memberikan semangat dan dukungan kepada penulis agar tidak pernah menyerah. Pada kesempatan ini pula, penulis hendak menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc**. selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si** selaku Dekan fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Dr. Firman S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama duduk dibangku perkuliahan, serta para

Staf Departemen Matematika yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.

3. Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si** selaku pembimbing Utama sekaligus Pembimbing Akademik penulis selama menempuh Pendidikan S1, dan Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si** selaku Pembimbing Pertama. Penulis mengucapkan terima kasih atas keikhlasan dan waktu yang telah diluangkan kepada penulis untuk membimbing penulisan skripsi ini dan selalu memberikan dorongan kepada penulis agar segera menyelesaikan studi S1.
4. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si** dan Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku dosen penguji penulis yang bersedia melungkan waktunya untuk memberikan masukan dan kritikan yang membangun untuk menyelesaikan dengan baik skripsi ini.
5. Sahabat Penulis **"Anak Baik", Maria Florentina Nalo, Amd.Kep** dan **Rahmila Siswati, S.TP** yang selalu ada dalam suka maupun duka penulis selama duduk dibangku perkuliahan.
6. Keluarga besar **Resimen Mahasiswa Satuan 701 Uiversitas Hasanuddin** khususnya Kakak Asuh **Armila,** adik **Rika** yang bersedia meluangkan waktunya menemani dan memberikan dukungan penuh kepada penulis dalam kesehariannya.
7. Teman-teman **"KKN PS Barru"** khususnya **Sri Yuliana. S.Kel**, yang telah menjadi teman berbagi cerita selama berada di daerah Barru dan memberikan dukungan kepada penulis hingga saat ini.
8. Teman-teman **Matematika 2019** khususnya **Muhammad Rozzaq Hamidi, S.Si**, **Ervi Yuniarti Astika Mustafaputri, S.Si**, **Heryati Nur Fatimah Sari, S.Si**, **Ramlah**, dan **Tasya,** yang telah mendukung dan menjadi teman seperjuangan penulis selama ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu penulis.

Penulis menyadari bahwa skripsi yang telah disusun masih jauh dari kata sempurna, oleh karena itu penulis memohon maaf apabila terdapat kekeliruan di dalamnya. Semoga segala bentuk dukungan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapat balasan dari Allah *subhanahu wa ta'ala.* Akhir kata, Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dalam pengembangan ilmu pengetahuan kedepannya.

Makassar, 6 Februari 2024

Isramayanti Oktavia

PENYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Isramayanti Oktavia
NIM	: H011191035
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Non-eksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Comb dari Graf Lintasan dan Graf Berlian

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 6 Februari 2024

Yang Menyatakan,

Isramayanti Oktavia

ABSTRAK

Graf sederhana G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong , yang anggotanya disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi. Misalkan G adalah graf terhubung, terdapat himpunan terurut $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset V(G)$. Representasi titik v terhadap S didefinisikan sebagai jarak dari v ke tiap-tiap elemen di S, ditulis $r(v|S) = \big(d(v, s_1), d(v, s_2), \dots, d(v, s_k)\big)$. S disebut sebagai himpunan penentu dari $V(G)$. Jika untuk setiap $i \neq j \in V(G)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap S, yakni berlaku $r(u_i|S) \neq r\big(u_j\big|S\big)$. Himpunan penentu dengan kardinalitas (banyak anggotanya) minimum disebut himpunan penentu minimum atau basis dari graf G. Kardinalitas dari basis disebut dimensi metrik dari G, dinotasikan dengan $dim(G)$. Pada skripsi ini akan ditentukan dimensi metrik graf hasil operasi comb dari graf lintasan dan graf berlian. Hasil penelitian menunjukkan bahwa $dim(Br_n) = 2$,untuk $n = 3{,}4, dan\ 5$, $dim(Br_n) = 3$,untuk $n = 6$, $dim(Br_n) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor, untuk\ n \geq 7$, serta $dim(P_m \rhd Br_n) = m, untuk\ n = 3$ dan $dim(P_m \rhd Br_n) = dim(Br_n) \times m$, $untuk\ n \geq 4$.

Kata Kunci: teori graf, himpunan penentu, dimensi metrik, graf hasil operasi comb, graf lintasan, graf berlian.

Judul	: Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Comb dari Graf Lintasan dan Graf Berlian
Nama	: Isramayanti Oktavia
NIM	: H011191035
Program studi	: Matematika

ABSTRACT

A simple graph G is a pair $\left(V(G), E(G)\right)$, where $V(G)$ is a finite, non-empty discrete set, whose members are called vertices, and (G)) is an unordered set of pairs and different from the members of $V(G)$ which are called edges. Suppose G is a connected graph, there is an ordered set $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset V(G)$. The representation of point v to S is defined as the distance from v to each element in S, written $r(v|S) = \left(d(v, s_1), d(v, s_2), \dots, d(v, s_k)\right)$. S is called the determinant set of $V(G)$. If each $i \neq j \in V(G)$ has a different representation of S, that is $r(u_i|S) \neq r\left(u_j\middle|S\right)$ applies. The set of determinants with minimum cardinality (number of members) is called the minimum determinant set or basis of the graph G. he cardinality of the basis is called the metric dimension of G, denoted by $dim(G)$. In this thesis we will determine the metric dimensions of graphs resulting from comb operations from path graphs and diamond graphs. The results show that $dim(Br_n) = 2$, for $n = 3,4,$ and 5, $dim(Br_n) = 3$, for $n = 6$, $dim(Br_n) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor, for\ n \geq 7$, as well as $dim(P_m \rhd Br_n) = m,$ $for\ n = 3$ and $dim(P_m \rhd Br_n) = dim(Br_n) \times m,$ $for\ n \geq 4$.

Keywoards: *graph theory, determinant sets, metric dimensions,graphs resulting from comb operations, path graphs, diamond graphs.*

Title	*: Metric Dimensions of Graphs Resulting from Comb Operations from Path Graphs and Diamond Graphs.*
Name	*: Isramayanti Oktavia*
Student ID	*: H011191035*
Study Program	*: Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali
G	Graf G	2
$\cup$	Gabungan	2
$\leq$	Kurang dari sama dengan	2
$\geq$	Besar dari sama dengan	2
$Dim(G)$	Dimensi metrik graf G	2
P_m	Graf Lintasan dengan orde m	2
$V(P_m)$	Himpunan titik graf lintasan	2
$E(P_m)$	Himpunan sisi graf lintasan	2
$V(G)$	Himpunan titik graf G	4
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	4
$\neq$	Tidak sama dengan	4
$\emptyset$	Himpunan tidak kosong	4
$\in$	Elemen dari suatu himpunan	4
$d(u,v)$	Jarak dari titik u ke titik v dalam sebuah graf	6
∞	Tak berhingga	6
$d(v_i)$	Derajat suatu titik v_1 dalam graf	7
$\delta(G)$	Derajat minimum dari graf G	7
$\Delta(G)$	derajat maksimum dari graf G	7
L_n	Graf tangga (*Ladder*)	8
TL_n	Graf tangga segitiga	9
PTL_n	Graf tangga prisma	10

Br_n	Graf berlian	11
$\times$	Kali	13
$\forall$	Untuk setiap	14
$\rhd$	Operasi comb	14
$P_m \rhd Br_n$	Graf hasil operasi comb dari graf lintasan dan graf berlian	15
$\subset$	Himpunan	16
S	Himpunan S	16
$r(v_1\|S)$	Representasi titk v_1 terhadap himpunan S	16
$\|S'\|$	Himpunan S lainnya	28
$\lfloor x \rfloor$	Membulatkan angka ke bilangan bulat yang lebih rendah	35

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelititan, dan sistematika penulisan dari skripsi ini.

I.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu anggota dari ilmu eksakta yang memiliki peranan sangat penting bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan ilmu yang dapat melatih kemampuan untuk berpikir secara kritis, logis, kreatif, cermat dan teliti sehingga dapat menjadi pemecah masalah yang baik. Salah satu cabang dari matematika yang dapat mendukung tercapainya kemampuan tersebut adalah teori graf (Tuhfatul & Syifaul,2022). Teori graf yang berkembang pesat hingga saat ini berawal dari permasalahan "Tujuh Jembatan Konigsberg" yang berhasil dipecahkan oleh leonardo Euler melalui karya tulisnya *"Solutio Problematis Geometrian Situs Pertinentis"* pada tahun 1736. Karya tulisnya menjawab teka-teki jembatan konigsberg dengan memperlihatkan bahwa perjalanan di kota konigsberg yang mempunyai tujuh buah jembatan, dengan syarat melalui setiap jembatan tepat satu kali yang bertolak dan berakhir pada suatu daratan yang sama, tetapi tidak dilakukan. Euler menyederhanakan jembatan konigsberg dengan merepresentasikan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi, sehingga bentuk dari jembatan konigsberg dapat direpresentasikan melalui graf (Hasmawati,2020). Berawal dari peristiwa itu, graf telah sering digunakan untuk menyelesaikan beberapa permasalahan dan penggunaannya berkembang jauh lebih luas.

Dari berbagai macam topik dalam teori graf, salah satunya ada yang disebut dimensi metrik. Dimensi metrik diperkenalkan pertama kali oleh Slater pada tahun 1975 dan secara terpisah oleh Harary dan Melter pada tahun 1976, pada jurnal yang berjudul *on the metric dimension of a graph.* Konsep dimensi metrik sering diaplikasikan dalam beberapa permasalahan seperti pada pemasangan sensor kebakaran dan penemuan sumber sebaran dalam suatu jaringan (Tuhfatul & Syifaul, 2022).

Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, akhir-akhir ini banyak penelitian mengenai dimensi metrik, seperti pada penelitian Chartrand dkk pada tahun 2000, telah menentukan bahwa graf G yang berdimensi 1 hanyalah graf lintasan. Kemudian Fifi Febrianti, Lyra Yulianti, dan Narwen menentukan metrik pada graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen yaitu

$$\dim(Amal\,\{Tr_n, v\}_2) = \begin{cases} 3, jika\ n = 3, \\ 4, jika\ n = 4 \end{cases}.$$

Penelitian tentang dimensi metrik untuk graf yang telah dioperasikan, khususnya graf dengan operasi comb masih sedikit dikaji oleh para peneliti. Pada tahun 2013 Saputro & Purwasih, melakukan penelitian terkait dimensi dari graf hasil operasi comb dari graf H_n dan graf P_m, untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ dengan $V(P_m) = \{p_i | 1 \leq i \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{p_i p_{i+1} | 1 \leq i \leq m-1\}$, $V(H_n) = V_1 \cup V_2$ dimana $V_1 = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$, $V_2 = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(H_n) = \{u_i u_j | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\}$ diperoleh dimensi metrik dari graf hasil operasi comb dari graf H_n dan graf P_m adalah n.

Berdasarkan penelusuran literatur oleh penulis, penelitian tentang dimensi metrik graf hasil operasi comb graf lintasan dan graf berlian belum pernah diteliti oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Berangkat dari permasalah itu, pada tugas akhir ini akan diteliti dimensi metrik graf hasil operasi comb dari graf lintasan dan graf berlian, sebagai pengembangan penelitian tentang dimensi metrik dengan judul **"Dimensi metrik graf hasil operasi comb dari graf lintasan dan graf berlian".**

I.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian skripsi ini adalah bagaimana menentukan batas atas dan batas bawah untuk dimensi metrik graf hasil operasi comb dari graf lintasan dan graf berlian.

I.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian skripsi ini dibatasi pada graf hasil operasi comb dari graf lintasan berorde m dan graf berlian berorde n, untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$.

I.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian skripsi ini adalah menentukan batas atas dan batas bawah untuk graf hasil operasi comb dari graf lintasan dan graf berlian. Kemudian, dari batas atas dan batas bawah tersebut akan diperoleh kesimpulan mengenai dimensi metrik graf hasil operasi comb dari graf lintasan dan graf berlian.

I.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian yang diharapkan dalam penulisan skripsi ini adalah:

I.5.1 Menambah pemahaman tentang konsep teori graf secara umum dan secara khusus tentang dimensi metrik suatu graf hasil operasi comb dari graf lintasan dan graf berlian.

I.5.2 Dapat menjadi sumber rujukan atau bahan referensi baik bagi pembaca maupun pihak yang membutuhkan dalam penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas mengenai beberapa istilah penting dalam graf sebagai landasan dalam penyusunan penelitian ini. Bab ini juga membahas beberapa jenis graf dan juga operasi dalam graf yang terkait dengan konsep dimensi metrik pada graf yang akan dikaji.

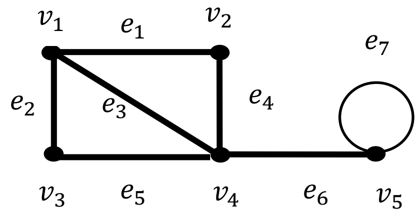
II.1 Dasar-dasar Graf

Pada subbab ini akan dibahas mengenai dasar-dasar yang ada pada graf, yang meliputi definisi, notasi, dan istilah penting yang terkait dengan konsep dimensi metrik pada suatu graf. Berikut diberikan definisi graf yang dikutip dari buku yang berjudul "Pengantar dan Jenis-Jenis Graf" yang disusun oleh Hasmawati pada tahun 2020.

Definisi 2.1.1 Graf G adalah pasangan himpunan $V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit tidak kosong yang anggotanya disebut titik *(vertex)*, dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan elemen-elemen $V(G)$ yang anggotanya disebut sisi *(edge)*.

Pengertian graf pada Definisi 2.1.1 dapat ditulis dengan cara yang lain sebagai berikut: Graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) \neq \emptyset$, $V(G) = \{u\colon u \text{ disebut titik }\}$ dan $E(G) = \{(u, v)\colon u, v \in V(G)\}$. Pasangan titik (u, v) disebut sisi, rusuk atau garis sehingga himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi, himpunan rusuk atau himpunan sisi. Pada pembahasan selanjutnya, sisi (u, v) hanya ditulis uv.

Contoh 2.1.1 Diberikan graf Gdengan $V(G) = \{v_i\colon 1 \leq i \leq 5\}$, dan $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_5)\}$. Jika $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_3), e_3 = (v_1, v_4), e_4 = (v_2, v_4), e_5 = (v_3, v_4), e_6 = (v_4, v_5), e_7 = (v_5, v_5)$, maka himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Struktur graf G seperti pada Gambar 2.1.1.

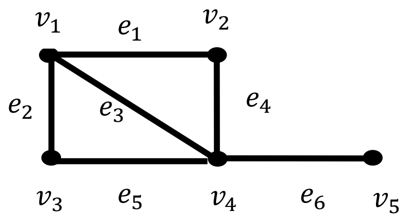


Gambar 2. 1. 1 Graf *G*

Pada Definisi 2.1.1 memberikan definisi graf secara umum. Dengan memberikan syarat tambahan pada Definisi 2.1.1, maka akan diperoleh graf sederhana *(Simple Graf)* seperti pada Gambar 2.1.2

Definisi 2.1.2 Graf sederhana G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong , yang anggotanya disebut titik (*vertex)*, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi *(edge).*

Contoh 2.1.2 Misalkan diberikan himpunan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G_1) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5)\}$, Jika $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_3), e_3 = (v_1, v_4), e_4 = (v_2, v_4), e_5 = (v_3, v_4), e_6 = (v_4, v_5)$, maka himpunan sisi $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. maka graf G_1 dapat dilihat pada Gambar 2.1.2.



Gambar 2. 1. 2 Graf Sederhana G_1

Pada Gambar 2.1.1 dapat diperhatikan bahwa $V(G_1)$ tidak kosong dan berhingga. Untuk setiap $v_i v_j$ di $E(G_1), v_i v_j = v_j v_i$ dan $v_i \neq v_j$ untuk $i, j = 1,2,3,4,5,6$. Oleh karena itu, graf G_1 merupakan contoh graf sederhana.

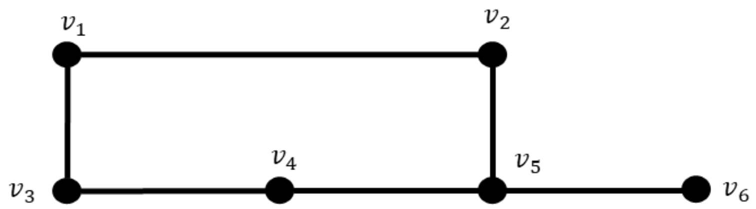
Definisi 2.1.3 Orde (Order) dari graf G adalah banyaknya titik pada G dan ukuran(size) graf G adalah banyaknya sisi pada G (Hasmawati,2020).

Contoh 2.1.3 Pada Gambar 2.1.1 adalah graf berorde lima dan berukuran tujuh dan pada Gambar 2.1.2 adalah graf berorde lima dan berukuran enam.

Definisi 2.1.4 Lintasan (path) adalah jalan dimana titik dan sisi yang dilewati tidak boleh berulang (Febrianti, Yulianti, & Narwen,2019). Lintasan pada suatu graf adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1 v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n, e_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$. Panjang suatu lintasan sama dengan banyaknya sisi pada lintasan tersebut.

Apabila untuk setiap dua titik u dan v selalu terdapat lintasan yang memuat titik u dan v maka graf G dikatakan graf terhubung. Sebaliknya apabila terdapat dua titik u dan v dan setiap lintasan pada graf G tidak memuat titik u dan titik v, maka graf G dikatakan graf tak terhubung.

Contoh 2.1.4 Pada Gambar 2.1.3, karena untuk setiap titik $v_i, v_j \in V(G)$, dengan $i, j = \{1,2,3,4,5,6,\}$ dan $i \neq j$, terdapat lintasan yang memuat v_i dan v_j maka graf G_2 pada Gambar 2.1.3 merupakan graf terhubung.



Gambar 2. 1. 3 Graf G_2 Berorde Enam

Definisi 2.1.5 Jarak dari titik u ke titik v dalam graf G dinotasikan $d(u, v)$ adalah Panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Jika G tidak memiliki lintasan dari u ke v, maka didefinisikan $d(u, v) = \infty$ (Alfarisi,2017).

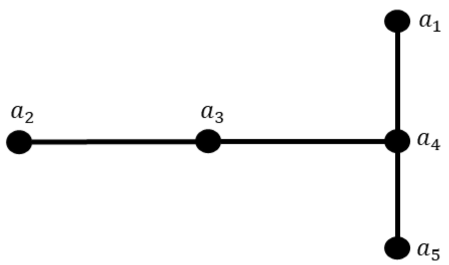
Contoh 2.1.5 Pada Gambar 2.1.3 memiliki lintasan terpanjang empat yang diperoleh melalui titik v_1 dan v_2. Perhatikan bahwa terdapat dua lintasan dari titik v_1 ke titik v_2. Lintasan pertama adalah v_1, v_3, v_4, v_5, v_2 yang memiliki panjang empat. Lintasan kedua adalah v_1, v_2 yang memiliki panjang satu. Karena jarak dari titik v_1 ke titik v_2 merupakan Panjang lintasan terpendek dari titik v_1 ke titik

v_2 , maka jarak titik v_1 ke titik v_2 adalah $d(v_1, v_2) = 1$. Dalam hal ini, pada graf tersebut memiliki lintasan terpanjang empat yang diperoleh melalui titik v_1 dan v_2, akan tetapi jarak dari titik v_1 ke titik v_2 adalah satu.

Definisi 2.1.6 Derajat suatu titik v_1 dalam graf G, dilambangkan "$d(v_i)$", adalah banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $d(v_i = |N_G(v_i)|$ (Hasmawati,2020).

Derajat minimum dari graf G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \min\{deg(v); v \in V\,(G)\}$ dan derajat maksimum dari graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = \max\{deg(v); v \in V(G)\}$.

Contoh 2.1.6 Pada Gambar 2.1.4 di bawah mempunyai $\deg(a_1) = 1$, $\deg(a_2) = 1$, $\deg a_3 = 2$, $\deg a_4 = 3$, dan $\deg\ a_5 = 1$. Maka untuk $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$.



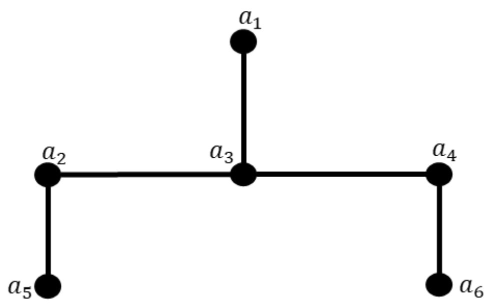
Gambar 2. 1. 4 Graf G_3 Berorde Lima

Definisi 2.1.7 Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$, maka dikatakan bahwa:

1. titik v_i bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_j
2. Sisi x terkait (*incident*) dengan titik v_i dan titik v_j

Misalkan x_1, x_2, dan x_3 adalah sisi dari suatu graf G dan v adalah titik graf G. Jika x_1, x_2, dan x_3 terkait dengan simpul v, maka sisi x_1, x_2, dan x_3 dikatakan bertetangga dengan titik v_j (Hasmawati,2020).

Contoh 2.1.7 Terlihat pada Gambar 2.1.5, bahwa titik a_3 bertetangga dengan titik a_1, a_2 dan a_4, tetapi titik a_6 hanya bertetangga dengan titik a_4. Sisi a_2a_5 terkait dengan titik a_2 dan titik a_5.



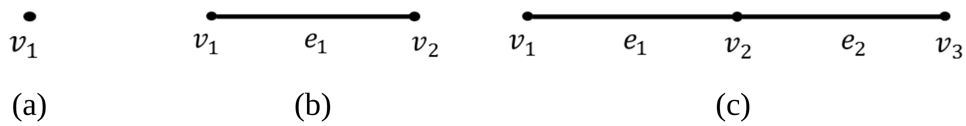
Gambar 2. 1. 5 Graf G_4 Berorde 6

II.2 Jenis-jenis Graf

Pengelompokan graf selalu didasarkan dengan ciri khusus yang ada pada graf itu. Dalam subbab ini akan dibahas beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam penelitian ini, diantaranya adalah graf lintasan, graf tangga, graf tangga segitiga, graf tangga prisma, dan graf berlian. Definisi yang diberikan dikutip dari buku yang berjudul "Pengantar Teori dan Jenis-Jenis Graf" yang disusun oleh Hasmawati pada tahun 2023.

Definisi 2.2.1 Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$. Graf yang hanya terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan dan dinotasikan P_n apabila berorde n.

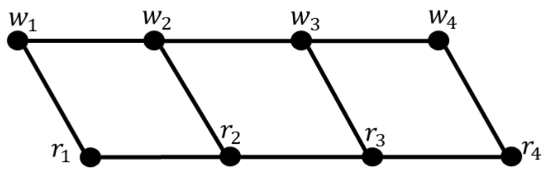
Contoh 2.2.1



Gambar 2. 2. 1 (a) Graf Lintasan dengan Satu Titik, (b) Graf Lintasan dengan Dua Titik, (c) Graf Lintasan dengan Tiga Titik

Definisi 2.2.2 Graf tangga (*Ladder*) adalah graf terhubung yang dikonstruksi dari hasil kali graf lintasan P_2 dengan P_n, dan dinotasikan L_n.

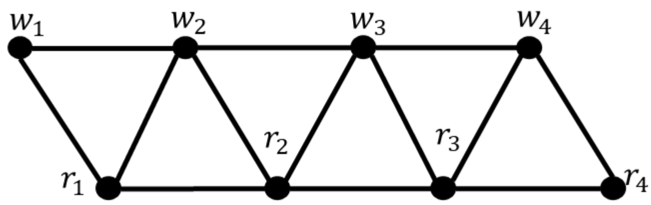
Contoh 2.2.2 Graf tangga L_4, dari Definisi 2.3.2, jika $V(P_2) = \{v_1, v_2\}$ dan $V(P_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, maka $V(L_4) = \begin{Bmatrix} v_1u_1, v_1u_2, v_1u_3, v_1u_4, \\ v_2u_1, v_2u_2, v_2u_3, v_2u_4 \end{Bmatrix}$. Tulis $v_1u_1 = w_1$ dan $v_2u_i = r_i$ $i = 1,2,3,4,$ maka himpunan titik $V(L_4) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, r_1, r_2, r_3, r_4\}$dan himpunan sisi $E(L_4) = \{(w_1w_2), (w_2w_3), (w_3w_4), (r_1r_2), (r_2r_3), (r_3r_4), (w_1r_1), (w_2r_2), (w_3r_3),$ $(w_4r_4),$.Bentuk graf tangga L_4 seperti pada Gambar 2.2.2 berikut.



Gambar 2. 2. 2 Graf Tangga (L_4)

Definisi 2.2.3 Misalkan L_n adalah graf tangga berorde $2n$ dengan himpunan titik $V(L_n) = \{w_1, w_2, \dots, w_n, r_1, r_2, \dots, r_n\}$ dan himpunan sisi $E(L_n) = \{w_iw_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{r_ir_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{w_ir_i | 1 \leq i \leq n\}$. Graf tangga segitiga TL_n adalah graf yang juga berorde $2n$ dengan himpunan titik $V(TL_n) = V(L_n)$ dan himpunan sisi $E(TL_n) = E(L_n) \cup \{(r_iw_{i+1}) | 1 \leq i \leq n - 1\}$.

Contoh 2.2.3 Graf tangga segitiga TL_4, diberikan $V(P_2) = \{v_1, v_2\}$ dan $V(P_4) = \{u_1u_2u_3u_4\}$, maka $V(L_4) = \begin{Bmatrix} v_1u_1, v_1u_2, v_1u_3, v_1u_4, \\ v_2u_1, v_2u_2, v_2u_3, v_2u_4 \end{Bmatrix}$. Tulis $v_1u_1 = w_1$ dan $v_2u_i = r_i$ $i = 1,2,3,4,$ maka himpunan titik graf tangga $V(TL_4) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, r_1, r_2, r_3, r_4\}$ dan himpunan sisi $E(TL_4) = \{(w_1w_2), (w_2w_3), (w_3w_4), (r_1r_2), (r_2r_3), (r_3r_4), (w_1r_1), (w_2r_2), (w_3r_3),$ $(w_4r_4)(r_1w_2), (r_2w_3), (r_3w_4)\}$.



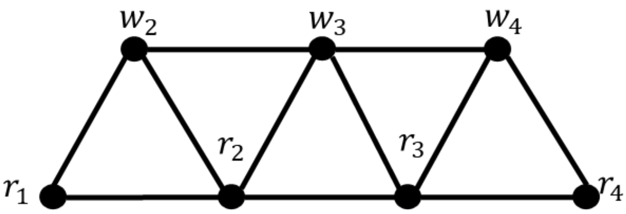
Gambar 2. 2. 3 Graf Tangga Segitiga (TL_4)

Dapat diketahui bahwa graf tangga segitiga mempunyai dua titik berderajat dua dan dua titik berderajat tiga, titik lainnya berderajat empat. Apabila dilenyapkan satu titik yang berderajat dua diperoleh suatu subgraf yang diberi nama graf tangga prisma yang dinotasikan PTL_n.

Definisi 2.2.4 Graf tangga prisma PTL_n adalah graf yang dikontruksi dari graf tangga segitiga dengan cara melenyapkan satu titik yang berderajat dua. Graf tangga prisma adalah graf dengan orde $2n-1$, yaitu graf terhubung yang memiliki satu titik yang berderajat dua, dua titik yang berderajat 3, dan yang lainnya berderajat 4.

Contoh 2.2.4 Misalkan diberikan graf tangga segitiga TL_4 dengan himpunan titik $V(TL_4) = \{w_1, w_2, \ldots, w_{5,} r_1, r_2, \ldots, r_5\}$ dan himpunan sisi $E(TL_4) = \{(w_2w_3), (w_3w_4), (r_1r_2), (r_2r_3), (r_3r_4), (w_2r_2), (w_3r_3), (w_4r_4),$ $(r_1w_2), (r_2w_3), (r_3w_4)\}$.

Berikut ini adalah contoh graf tangga prisma PTL_4, dengan cara melenyapkan titik w_1 pada graf TL_4. Dapat dihitung jumlah titik PTL_4 yakni sebanyak 7.



Gambar 2. 2. 4 Graf Tangga Prisma (PTL_4)

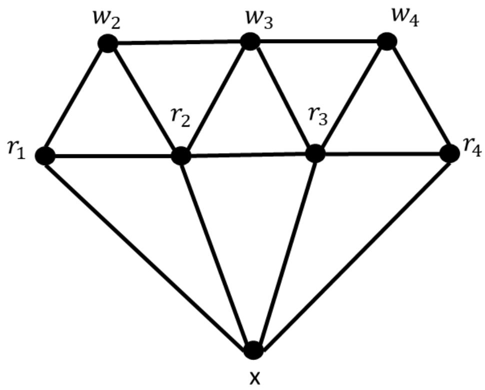
Graf tangga prisma memiliki dua lintasan yang independen. Satu lintasan berorde $n-1$. Dengan mengaitkan setiap titik pada lintasan P_n di PTL_n dengan satu titik K_1 akan diperoleh graf berlian berorde $2n$ yang dinotasikan dengan Br_n.

Definisi 2.2.5 Misalkan PTL_n adalah graf tangga prisma berorde $2n-1$, dengan himpunan titik $V(PTL_n) = \{w_i | 1 \le i \le n-1\} \cup \{r_i | 1 \le i \le n\}$ dan himpunan sisi

$$E(PTL_n) = \{w_iw_{i+1} | 1 \le i \le n-1\} \cup \{r_ir_{i+1} | 1 \le i \le n-1\} \cup \{w_ir_i | 1 \le i \le n\} \cup \{(r_iw_{i+1}) | 1 \le i \le n-1\}.$$

Graf berlian Br_n adalah graf yang berorde $2n$, yang dapat dikontruksi melalui graf tangga prisma (PTL_n), sehingga himpunan titik $V(Br_n) = V(PTL_n) \cup \{x\}$ dan himpunan sisi $E(Br_n) = E(PTL_n) \cup \{(r_i x): i = 1,2, \dots, n\}$.

Contoh 2.2.5 Graf berlian berorde 8 dengan notasi Br_4. Misalkan himpunan titik $V(PTL_4) = \{w_2, w_3, w_{4,} r_1, r_2, r_3, r_4\}$ dan himpunan sisi $E(PTL_4) = \{(w_2 r_2), (w_3 r_3), (w_4 r_4), (r_1 w_2), (r_2 w_3), (r_3 w_4)\}$. Seperti pada Gambar 2.3.4, penambahan satu titik x pada graf tangga prisma PTL_4, dan mengaitkan setiap titik pada lintasan P_4 di PTL_4 dengan titik x akan diperoleh graf berlian Br_4.



Gambar 2. 2. 5 Graf Berlian (Br_4)

Sehingga himpunan titik dan himpunan sisi graf berlian Br_4 secara berurut adalah sebagai berikut:

$V(Br_4) = w_2, w_3, w_{4,} r_1, r_2, r_3, r_4$

$E(Br_4) = \{(w_2 w_3), (w_3 w_4), (r_1 r_2), (r_2 r_3), (r_3 r_4), (w_2 r_2), (w_3 r_3), (w_4 r_4),$ $(r_1 w_2), (r_2 w_3), (r_3 w_4), (r_1 x), (r_2 x), (r_3 x), (r_4 x)\}$. Titik x pada graf berlian Br_n dipilih sebagai titik tetap.

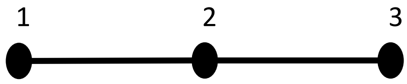
II.3 Operasi dalam Graf

Terdapat operasi dalam teori graf yang telah umum dikenali, beberapa diantaranya adalah operasi gabung, operasi jumlah, operasi kali, operasi amalgamasi, operasi corona, operasi subdivisi (*subdivision)*, dan operasi comb. Namun, untuk penelitian skripsi ini, operasi yang akan digunakan hanyalah operasi kali dan operasi comb. Pembahasan operasi kali pada graf ini merujuk pada buku yang disusun oleh Hasmawati pada tahun 2020 dengan judul "Pengantar dan Jenis-Jenis Graf".

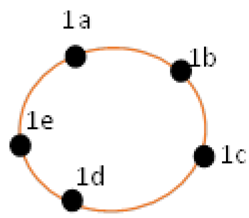
Definisi 2.3.1 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Maka graf kali $G \times H$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \times H)$ adalah himpunan $\{xy | x = u_1v_1, y = u_2v_2; u_1 = u_2$ dan $v_1v_2 \in E(H)$ atau $v_1 = v_2\ dan\ u_1u_2 \in E(G)\}$.

Contoh 2.3.1 Misalkan graf G adalah graf dengan $V(G) = \{1,2,3\}$ dan $E(G) = \{12,23\}$, serta H adalah graf dengan $V(H) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(H) = \{ab, bc, cd, de, ea\}$. Maka gambar graf G dan graf H adalah sebagai berikut.

G:

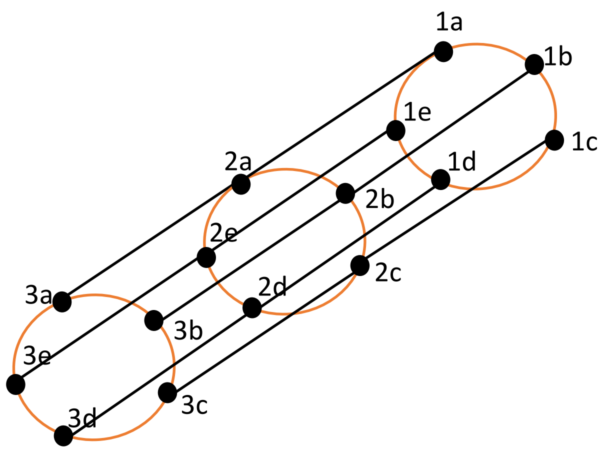


H:



Gambar 2. 3. 1 Graf *G* dan Graf *H*

Graf kali $G \times H$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G \times H) = \{1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 2a, 2b, 2c, 2d, 2e, 3a, 3b, 3c, 3d, 3e\}$, dan himpunan sisi $E(G \times H) = \{(1a, 1b), (1a, 1e), (1b, 1c), (1c, 1d), (1d, 1e), (1a, 2a),$ $(2a, 3a), (1e, 2e), (2e, 3e), (1b, 2b), (2b, 3b), (1c, 2c), (2c, 3c), (1d, 2d),$ $(2d, 3d), (2a, 2b), (2a, 2e), (2b, 2c), (2c, 2d), (2d, 2e), (3a, 3b), (3a, 3e)$ $, (3b, 3c), (3c, 3d), (3d, 3e)\}$.

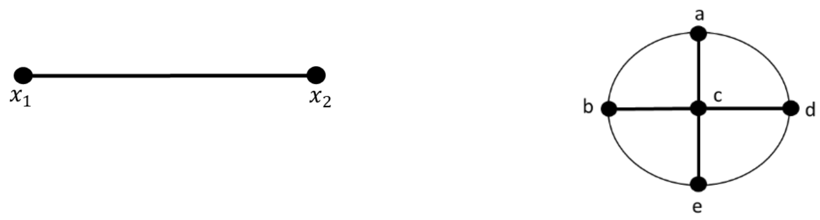


Gambar 2. 3. 2 Graf Kali $G \times H$

Karena beberapa operasi menggunakan suatu titik dengan nama titik tetap, maka terlebih dahulu diberikan pengertian titik tetap. Titik tetap pada suatu graf adalah titik yang dipilih secara khusus untuk kepentingan tertentu atau untuk mempermudah dalam membahas terkait graf, misalnya kepentingan dalam membahas operasi graf atau kepentingan lain.

Definisi 2.3.2 Misalkan G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_i | i = 1,2, \dots, n\}$ dan H adalah sembarang graf terhubung . Hasil operasi comb dari graf G dan H dinotasikan $G \rhd H$ adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan graf H sampai banyaknya graf H sama dengan kardinalitas titik pada graf G yaitu $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$, dan memilih satu titik tetap u_i pada graf H_i, kemudian melekatkan titik tetap u_i $\forall i$, pada titik v_i di graf G.

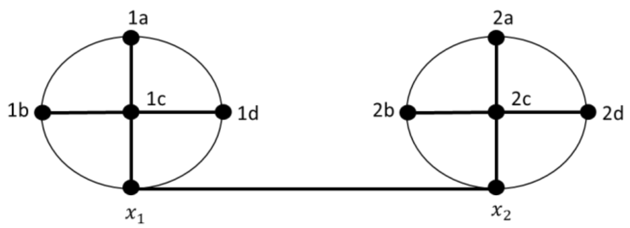
Contoh 2.3.2 Diberikan dua graf sederhana dengan graf pertama adalah graf G yang memiliki himpunan titik $V(G) = \{x_1, x_2\}$ dan himpunan sisi $(G) = \{x_1x_2\}$, dan graf kedua graf H dengan $V(H) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(H) = \{ab, ac, ad, bc, cd, ce, be, de\}$. Bentuk graf G dan graf H dapat dilihat pada Gambar 2.2.3 berikut.



(a) (b)

Gambar 2. 3. 3 (a) Graf G dan (b) Graf H

Karena graf G memiliki titik sebanyak 2, maka graf H akan digandakan sampai banyak graf H sama dengan kardinaltitas titik pada graf G, sehingga diperoleh satu buah graf G dan graf H_1, H_2, Setelah itu penulis memilih dan menetapkan satu titik tetap dari H yaitu $V(H) = \{e\}$ kemudian melekatkannya pada setiap titik yang ada pada graf G dan kemudian disimbolkan dengan x_i . Hasil comb dari graf G dan H dapat dilihat pada Gambar 2.3.4 berikut.



Gambar 2. 3. 4 Graf Comb $G \rhd H$

Pada Gambar 2.3.4 himpunan titik dan himpunan sisinya secara berurut adalah:

$V(G \rhd H) = \{1a, 1b, 1c, 1d, 2a, 2b, 2c, 2d, x_1, x_2\}$

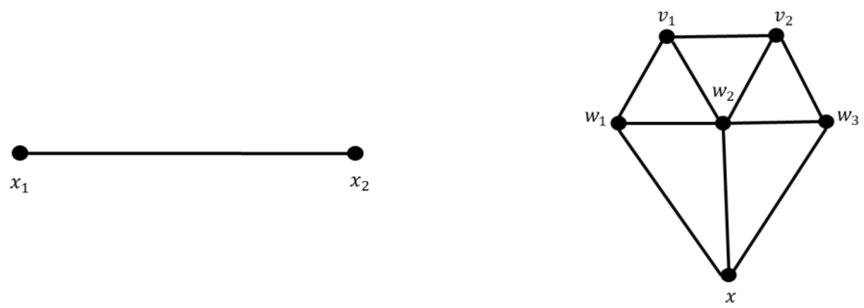
$E(G \rhd H) = \{(1a, 1b), (1a, 1c), (1a, 1d), (1b, 1c), (1c, 1d), (1b, x_1),$
$(1c, x_1), (1d, x_1), (2a, 2b), (2a, 2c), (2a, 2d), (2b, 2c), (2c, 2d),$
$(2b, x_2), (2c, x_2), (2d, x_2), (x_1, x_2)\}.$

Contoh 2.3.3 Diberikan graf lintasan P_2 dengan $V(P_2) = \{x_1, x_2\}$ dan $E(P_2) = \{x_1x_2\}$ dan graf berlian Br_3 dengan

$V(Br_3) = \{ v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, x\}$

$E(Br_3) = \{(v_1v_2), (v_1w_1), (v_1w_2), (v_2w_2), (v_3w_3), (w_1w_2), (w_2w_3),$
$(w_1x), (w_2x), (w_3x)\}.$

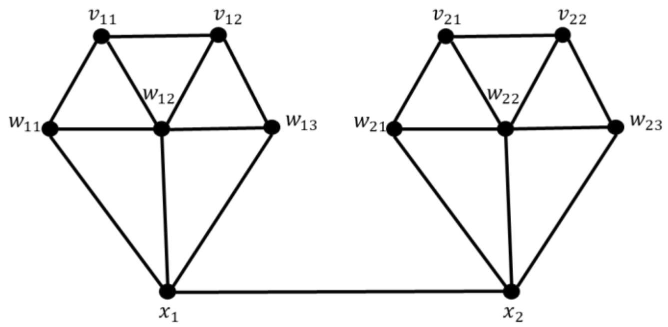
Bentuk graf P_2 dan Br_3 dapat dilihat pada Gambar 2.2.3 berikut.



(a) (b)

Gambar 2. 3. 5 (a) Graf P_2 dan (b) Graf Br_3

Hasil comb graf lintasan $P_m \rhd Br_n$ dengan $m = 2$ dan $n = 3$ dapat dilihat pada Gambar 2.3.4 berikut.



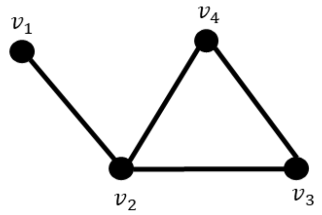
Gambar 2. 3. 6 Graf Comb $P_2 \rhd Br_3$

II.4 Dimensi Metrik

Pada subbab ini akan dibahas beberapa definisi terkait dengan konsep dimensi metrik. Beberapa definisi terkait dimensi metrik yang dikutip dari hasil penelusuran beberapa jurnal.

Definisi 2.4.1 G adalah graf terhubung, misalkan terdapat himpunan terurut $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset V(G)$. Representasi titik v terhadap S didefinisikan sebagai jarak dari v ke tiap-tiap elemen di S, ditulis $r(v|S) = \left(d(v, s_1), d(v, s_2), \dots, d(v, s_k)\right)$ (Angraini & Welyyanti,2018).

Contoh 2.4.1 Diberikan graf G seperti pada Gambar 2.4.1 berikut



Gambar 2. 4. 1 Graf G dengan Empat Titik dan Sisi

Berdasarkan Gambar 2.4.1, diperoleh himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Pilih $S = \{v_1, v_2, v_4\}$. Representasi untuk setiap $v \in V(G)$ terhadap S ialah sebagai berikut.

- $r(v_1|S) = (d(v_1, v_1), d(v_1, v_2), d(v_1, v_4)\ ) = (0,1,2)$
- $r(v_2|S) = (d(v_2, v_1), d(v_2, v_2), d(v_2, v_4)) = (1,0,1)$
- $r(v_3|S) = (d(v_3, v_1), d(v_3, v_2), d(v_3, v_4)) = (2, 1, 1)$
- $r(v_4|S) = (d(v_4, v_1), d(v_4, v_2), d(v_4, v_4)) = (2, 1,0)$

Definisi 2.4.2 S disebut sebagai himpunan penentu dari $V(G)$. Jika untuk setiap $i \neq j \in V(G)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap S, yakni berlaku $r(u_i|S) \neq r(u_j|S)$.

Contoh 2.4.2 Berdasarkan Contoh 2.4.1,untuk setiap titik yang diperoleh memiliki representasi yang berbeda terhadap S, maka $S = \{v_1, v_2, v_4\}$ merupakan himpunan penentu bagi graf G dengan Empat Titik dan Sisi tersebut.

Definisi 2.4.3 Himpunan penentu dengan kardinalitas (banyak anggotanya) minimum disebut himpunan penentu minimum atau basis dari graf G. Kardinalitas (banyaknya anggota) dari basis (himpunan penentu minimum) disebut dimensi metrik dari G, dinotasikan dengan $dim(G)$.

Contoh 2.4.3.1 Berdasarkan Contoh 2.4.1 $S = \{v_1, v_2, v_4\}$ merupakan himpunan penentu dari $V(G)$.

Selanjutnya, akan ditunjukan bahwa S merupakan basis dari graf G dengan kardinalitas 3.

Ambil sebarang S,dengan$|S| = 1$.

$S_2 = \{v_1\}$, representasi setiap titik pada G terhadap S_2 adalah sebagai berikut.

- $r(v_1|S_2) = (d(v_1, v_1)) = (0)$
- $r(v_2|S_2) = (d(v_2, v_1)) = (1)$
- $r(v_3|S_2) = (d(v_3, v_1)) = (2)$
- $r(v_4|S_2) = (d(v_4, v_1)) = (2)$

Karena $r(v_3|S_2) = r(v_4|S_2)$, maka S_2 dengan kardinalitas 1 bukan himpunan penentu.

Kemudian Dengan memilih $S_3 = \{v_1, v_3\}$, representasi setiap titik pada G terhadap S_2 adalah sebagai berikut.

- $r(v_1|S_3) = ((d(v_1, v_1), d(v_1, v_3)) = (0,2)$
- $r(v_2|S_3) = ((d(v_2, v_1), d(v_2, v_3)) = (1,1)$
- $r(v_3|S_3) = ((d(v_3, v_1), d(v_3, v_3)) = (2,0)$
- $r(v_4|S_3) = ((d(v_4, v_1), d(v_4, v_3)) = (2,1)$

Karena $\forall u, v \in V(G), u \neq v$ dan $r(v|S_3) \neq r(v|S_3)$, maka S_3 dengan kardinalitas 2 adalah himpunan penentu. Dapat diperhatikan bahwa S_3 memiliki kardinalitas dengan kardinalitas minimum, maka $S_3 = \{v_1, v_3\}$, merupakan basis, sehingga $dim(G) = 2$.

Contoh 2.4.3.2 Dari Gambar 2.3.5 Graf $P_2 \rhd Br_3$ akan ditentukan dimensi metrik dari graf tersebut. Pilih $S = \{w_{11}, w_{21}\}$ .Representasi untuk setiap $v \in V(P_2 \rhd Br_3)$ terhadap S ialah sebagai berikut.

- $r(v_{11}|S) = (d(v_{11}, w_{11}), d(v_{11}, w_{21})) = (1,4)$
- $r(v_{12}|S) = (d(v_{12}, w_{11}), d(v_{12}, w_{21})) = (2,4)$
- $r(w_{11}|S) = (d(w_{11}, w_{11}), d(w_{11}, w_{21})) = (0,3)$
- $r(w_{12}|S) = (d(w_{12}, w_{11}), d(w_{12}, w_{21})) = (1,3)$
- $r(w_{13}|S) = (d(w_{13}, w_{11})), d(w_{13}, w_{21})) = (2,3)$
- $r(x_1|S) = (d(x_1, w_{11}), d(x_1, w_{21})) = (1,2)$
- $r(v_{21}|S) = (d(v_{21}, w_{11}), d(v_{21}, w_{21})) = (4,1)$
- $r(v_{22}|S) = (d(v_{22}, w_{11}), d(v_{22}, w_{21})) = (4,2)$
- $r(w_{21}|S) = (d(w_{21}, w_{11}), d(w_{21}, w_{21})) = (3,0)$
- $r(w_{22}|S) = (d(w_{22}, w_{11}), d(w_{22}, w_{21})) = (3,1)$
- $r(w_{23}|S) = (d(w_{23}, w_{11})), d(w_{23}, w_{21})) = (3,2)$

- $r(x_2|S) = (d(x_2, w_{11}), d(x_2, w_{21})) = (2,1)$

$S = \{w_{11}, w_{21}\}$ merupakan himpunan penentu. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa basis dari $V(P_2 \rhd Br_3)$ memiliki kardinalitas sedikitnya 2. Misalkan suatu himpunan penentu dari $V(P_2 \rhd Br_3)$ dengan $|S_2| = 1$, sehingga diberikan $S_2 = \{w_{11}\}$ bukan himpunan penentu dari $V(P_2 \rhd Br_3)$ karena representasi S_2 pada $P_2 \rhd Br_3$ menghasilkan representasi yang sama, yaitu $r(v_{11}|S_2) = r(w_{12}|S_2) = r(x_1|S_2) = 1$, kontradiksi dengan pemisalan S_2 sebagai himpunan penentu. Oleh karena itu, S merupakan himpunan penentu minimum (basis) dari $P_2 \rhd Br_3$ dengan kardinalitas S adalah dua. Maka diperoleh, dimensi metrik dari graf $P_2 \rhd Br_3$ adalah $dim(P_2 \rhd Br_3) = 2$.

Tabel 2.4 Hasil Penelitian Dimensi Metrik pada Suatu Graf

Graf	Dimensi Metrik	Keterangan
$G \cong P_n$	$dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$	Chartrand, dkk, (2000)
$G \cong R_{m,n}$, graf jaring laba-laba	$dim(G) = 3$	Janan, T., & Janan, S., (2022)
$G \cong$ (Amal$\{Tr_n, v\}_2$), graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen	$dim(G) = \begin{cases} 3, jika\ n = 3, \\ 4, jika\ n = 4 \end{cases}$	Febrianti & Narwen, (2019)
$G \cong (LG_n^2)$, graf lingkaran ganda, dengan $n \geq 3$	$dim\ LG_n^2) = \begin{cases} 2, jika\ n\ Ganjil, \\ 3, jika\ Genap \end{cases}$ dengan $W_1 = \left\{V_1^2, V_{\frac{n+1}{2}}^2\right\}$ dan $W_2 = \left\{V_1^2, V_{\frac{n}{2}}^2, V_{\frac{n}{2}+1}^2\right\}$ masing-masing merupakan basis bagi LG_n^2 untuk n ganjil dan n genap	Antonius Sidang Ponglangi (2015)

Graf	Dimensi Metrik	Keterangan
$G \cong H_n \rhd P_m$, untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ dengan $V(P_m) = \{p_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{p_i p_{i+1} \mid 1 \leq i \leq m-1\}$, $V(H_n) = V_1 \cup V_2$ dimana $V_1 = \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $V_2 = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(H_n) = \{u_i u_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$	$dim(G) = n$	Saputro & Purwasih,(2013).

Teorema 2.4. (Chartrand dkk, 2000) Jika G suatu graf terhubung dengan orde n, maka $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$.

II.3 Definisi Dua Titik Setara

Diberikan G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik-titik yang setara dalam graf G apabila memenuhi salah satu sifat berikut :

1 $d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G)/\{u, v\}$.

2 Terdapat titik c sehingga $d(u, c) + d(c, s) = d(v, c) + d(c, s)$ untuk setiap $s \in V(G)/\{u, v\}$.

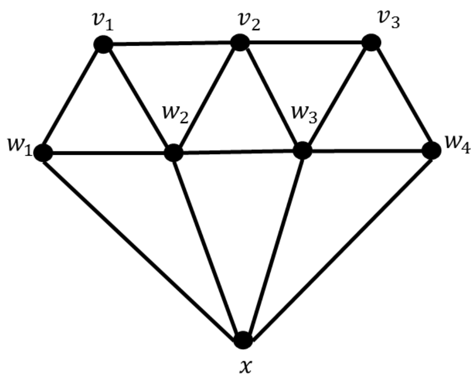
Contoh 2.5 diberikan graf Br_4 dengan himpunan titik

$V(Br_4) = \{v_i, w_j, x : 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4\}$.

dan himpunan sisi

$$E(Br_4) = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq 2\} \cup \{w_j w_{j+1} : 1 \leq j \leq 3\} \cup \{v_i w_i, v_i w_{i+1} : 1 \leq i \leq 3\} \cup \{x w_j : 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x w_j : 1 \leq j \leq 4\}.$$

Seperti pada Gambar 2.5 dibawah



Gambar 2. 5. 1 Graf Br_4

- Untuk $i, j = 1,2,3$ $(v_i \neq v_j)$ titik $v_{1,} v_2, dan\, v_3$ adalah titik setara karena terdapat titik x sehingga $d(v_i, x) + d(x, c\ ) = d\big(v_j, x\big) + d(x, c)$ untuk setiap $x \in V(Br_n)/\{v_i, v_j\}$.
- Untuk $i, j = 1,2,3$ $(w_i \neq w_j)$ titik w_1, w_2, w_3, w_4 adalah titik setara karena terdapat titik x sehingga $d(v_i, x) + d(x, c\ ) = d\big(v_j, x\big) + d(x, c)$ untuk setiap $x \in V(Br_n)/\{w_i, w_j\}$.