APROKSIMASI RASIONAL TERBAIK DARI πe MENGGUNAKAN PECAHAN BERLANJUT SEDERHANA

SKRIPSI

AMELIA LUKIS

H011191060

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MARET 2023

APROKSIMASI RASIONAL TERBAIK DARI πe MENGGUNAKAN PECAHAN BERLANJUT SEDERHANA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

AMELIA LUKIS

H011191060

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MARET 2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Amelia Lukis
NIM	: H011191060
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Aproksimasi Rasional Terbaik dari πe Menggunakan Pecahan Berlanjut Sederhana

adalah benar tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan Skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 03 Maret 2023

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL 10000 SEPULUH RIBU RUPIAH EB7D1AKX312803545

Amelia Lukis

NIM H011191060

LEMBAR PENGESAHAN

APROKSIMASI RASIONAL TERBAIK DARI πe MENGGUNAKAN PECAHAN BERLANJUT SEDERHANA

Disusun dan diajukan oleh

AMELIA LUKIS

H011191060

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 03 Maret 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Dra. Nur Erawaty, M.Si.	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 196909121993032001	**NIP. 196402071991031013**

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 197008072000031002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena kasih-Nya yang maha besar sehingga skripsi yang berjudul "**Aproksimasi Rasional Terbaik dari πe Menggunakan Pecahan Berlanjut Sederhana**" ini dapat diselesaikan sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan jenjang Strata-1 pada Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan dan penulisan laporan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, bimbingan serta dukungan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai dengan masa penyusunan skripsi. Oleh karena itu, penulis dengan senang hati menyampaikan terima kasih kepada:

1. Kedua Orang tua penulis, Bapak **Walus Lukis, S.T.** dan Ibu **Meriani** yang selalu memberikan dukungan, doa, dan semangat serta selalu sabar dalam mendidik penulis sejak kecil.
2. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S. Si., M. Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika dan **segenap dosen pengajar dan staf Departemen Matematika** yang telah membekali ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. Ibu **Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku pembimbing utama dan bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** selaku pembimbing pertama yang selalu menyediakan waktu, tenaga, pikiran dan perhatian yang luar biasa untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi.
5. Bapak **Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc**. selaku Tim Penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat dan dukungan telah membimbing penulis selama menjalani pendidikan di Departemen Matematika. Serta bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** selaku Tim

Penguji, terima kasih banyak atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

6. **Teman seperjuangan di Matematika 2019**, terima kasih atas kebersamaan, suka dan duka dalam berjuang menjalani pendidikan di Departemen Matematika.
7. Orang-orang berpengaruh lainnya yang tanpa sadar telah menjadi inspirasi bagi penulis.

Akhir kata, penulis berharap semoga Tuhan Yang Maha Pengasih berkenan membalas segala kebaikan dari semua pihak yang telah banyak membantu. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 03 Maret 2023

Amelia Lukis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Amelia Lukis
NIM : H011191060
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakulstas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Nonekslusif (Non-exclusive Royalty-Free Right)** atas tugas akhir saya yang berjudul:

"APROKSIMASI RASIONAL TERBAIK DARI πe MENGGUNAKAN PECAHAN BERLANJUT SEDERHANA"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 03 Maret 2023

Yang menyatakan,

Amelia Lukis

ABSTRAK

Aproksimasi rasional terbaik dari bilangan riil adalah bilangan rasional yang berada paling dekat ke bilangan riil tersebut dibanding bilangan-bilangan rasional lain dengan penyebut yang sama atau lebih kecil. Salah satu metode untuk mencari aproksimasi rasional terbaik adalah dengan menggunakan pecahan berlanjut sederhana. Ekspansi pecahan berlanjut sederhana merupakan representasi bilangan yang dihasilkan melalui proses berulang-ulang dari menjumlahkan bilangan bulat terbesar yang kurang dari bilangan tersebut, dengan invers perkalian bilangan lainnya, dengan bilangan lain yang dimaksud juga adalah hasil penjumlahan bilangan bulat terbesar yang kurang darinya, dengan invers perkalian bilangan lainnya lagi. Penelitian ini akan berfokus dalam mencari aproksimasi rasional terbaik πe dengan menggunakan perkalian pecahan berlanjut sederhana. Hasil yang diperoleh berupa aproksimasi rasional terbaik πe dengan ketelitian 15 angka di belakang koma.

Kata Kunci: Aproksimasi rasional terbaik, pecahan berlanjut sederhana, bilangan irasional, operasi kali.

ABSTRACT

The best rational approximation of a real number are rational numbers that are closest to the real number compared to other rational numbers with the same or smaller denominator. One of methods to find the best rational approximation is using simple continued fractions. Simple continued fraction expansion is a representation of a number that is produced through an iterative process of adding the largest integer that is less than that number, with the inverse multiplication of other numbers, with the other number is also the result of adding the largest integer that is less than it, with the inverse multiplication of another number. This research will focus on finding the best rational approximation of πe by using multiplication of simple continued fraction. The result obtained is best rational approximation of πe with 15 decimal places precision.

Keywords: Best rational approximation, simple continued fraction, irrational number, multiplication.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pecahan berlanjut adalah ekspansi bilangan dengan menggunakan algoritma khusus menjadi susunan pecahan, sehingga pecahan berlanjut juga biasa disebut pecahan yang dibangun oleh pecahan. Pecahan berlanjut dengan semua pembilang dari pecahannya (termasuk pecahan yang berada dalam pecahan) bernilai satu disebut pecahan berlanjut sederhana. Namun, pecahan berlanjut sederhana biasanya disebut sebagai pecahan berlanjut saja. Ekspansi pecahan berlanjut merupakan representasi bilangan yang dihasilkan melalui proses berulang-ulang dari menjumlahkan bilangan bulat terbesar yang kurang dari bilangan tersebut, dengan invers perkalian bilangan lainnya, dengan bilangan lain yang dimaksud juga adalah hasil penjumlahan bilangan bulat terbesar yang kurang darinya, dengan invers perkalian bilangan lainnya lagi. Proses iterasi ini dikembangkan dari algoritma Euclidean yang sering digunakan untuk mencari faktor pembagi terbesar (FPB) dari dua bilangan bulat. Proses ini akan berhenti dalam iterasi yang berhingga bagi bilangan rasional, sehingga ekspansi pecahan berlanjut dari bilangan rasional juga berhingga, sedangkan proses akan terus berlanjut bagi bilangan irasional, sehingga ekspansi pecahan berlanjut dari bilangan irasional tak hingga.

Pecahan berlanjut telah lama banyak ditemui dalam merepresentasikan bilangan irasional, akan tetapi baru diperkenalkan pada abad ke-16 oleh dua matematikawan yaitu, Rafael Bombelli dan Pietro Antonio Cataldi. Pecahan berlanjut pertama kali digunakan oleh Christiaan Huygens, seorang matematikawan, fisikawan dan ahli astronomi asal Belanda, dalam merancang sebuah planetarium, yang menampilkan pergerakan planet-planet mengelilingi matahari. Dalam merancang model tata surya, Huygens menggunakan roda gigi untuk menggerakkan model dari planet-planet. Huygens kemudian dihadapkan dengan masalah menentukan jumlah gigi, agar rasio dari dua roda gigi yang saling berhubungan sama dengan rasio dari periode dua planet. Karena jumlah gigi pada roda gigi yang terbatas, Huygens menggunakan pecahan berlanjut dalam mengaproksimasi rasio periode dua planet sehingga ditemukan rasio yang memenuhi syarat jumlah roda gigi dan juga mendekati rasio tersebut. Kemudian pada abad ke-18, Leonhard Euler, seorang matematikawan Swiss, pertama menggunakan ungkapan *fractio continua* yang menjadi sebutan dari pecahan berlanjut.

Seperti mengaproksimasi rasio dua roda gigi, menggunakan pecahan berlanjut dalam mencari aproksimasi rasional adalah cara yang paling efisien. Aproksimasi rasional terbaik dari bilangan riil adalah bilangan rasional dengan penyebut tidak nol dan berada paling dekat ke bilangan riil tersebut dibanding bilangan-bilangan rasional dengan penyebut yang sama atau lebih kecil. Semakin besar penyebut dari aproksimasi rasional terbaik dari sebuah bilangan, semakin dekat pula aproksimasinya ke bilangan tersebut. Selain digunakan untuk mengaproksimasi bilangan irasional, aproksimasi rasional terbaik juga dapat mencari pembilang dan penyebut yang lebih kecil untuk bilangan rasional dengan pembilang dan penyebut yang besar, sehingga lebih memudahkan dalam perhitungan. Pecahan berlanjut berkaitan erat dengan rasio emas (golden ratio) dan barisan Fibonacci. Ekspansi rasio emas menjadi pecahan berlanjut menghasilkan bilangan-bilangan rasional, $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \ldots$, yang dapat mengaproksimasi rasio emas. Bilangan-bilangan tersebut merupakan rasio dari dua angka berurutan dalam barisan Fibonacci. Sama halnya dengan rasio emas, π dan e juga sudah lama dikenal sebagai bilangan irasional. π adalah notasi yang merepresentasikan rasio dari keliling dan diameter dari sebuah lingkaran, sedangkan e adalah bilangan Euler yang digunakan sebagai basis dari logaritma alami dengan nilainya sama dengan limit dari $(1 + 1/n)^n, n \to \infty$. Kedua bilangan irasional tersebut telah banyak dicari aproksimasi rasionalnya, seperti yang dilakukan oleh Philip R. Brown yang meneliti aproksimasi dari e dan π. Dalam papernya pada tahun 2017, Brown membahas perkembangan dalam pencarian aproksimasi rasional dari e dan π. Kemudian pada tahun yang sama, N. A. Carella membuktikan bahwa hasil perkalian e dan π adalah irasional, dengan pembuktian tersebut melibatkan pecahan berlanjut sederhana. Pada tahun 2015, S. Mugassabi dan F. Mistiri melakukan penelitian mengenai penjumlahan dan pengurangan dari dua pecahan berlanjut sederhana, yang kemudian dilanjutkan pada tahun 2019, S. Mugassabi dan S. M. Amsheri meneliti tentang perkalian dan pembagian dari dua pecahan berlanjut sederhana, dan di tahun yang sama S. Mugassabi dan A. S. Elmabrok meneliti tentang perpangkatan dari pecahan berlanjut sederhana. Karena itu, penulis tertarik untuk meneliti aproksimasi dari perkalian πe ke bilangan rasional dengan metode perkalian antara dua pecahan berlanjut sederhana. Hasil penelitian ini dituangkan dalam tulisan skripsi dengan rencana judul: "*Aproksimasi Rasional Terbaik dari πe Menggunakan Pecahan Berlanjut Sederhana*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah yang akan ditinjau, yaitu:

1. Bagaimana merepresentasikan bilangan irasional π dan e dalam bentuk pecahan berlanjut sederhana?
2. Bagaimana melakukan operasi kali terhadap ekspansi pecahan berlanjut sederhana π dan e?
3. Bagaimana mengaproksimasi hasil perkalian π dan e ke bilangan rasional?

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan masalah dibatasi pada pecahan berlanjut sederhana yang semua pembilang pecahannya bernilai satu dan penyebutnya berupa bilangan bulat, serta hanya dapat mengekspansi bilangan riil.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penulisan ini, yaitu:

1. Merepresentasikan bilangan rasional π dan e dalam bentuk pecahan berlanjut sederhana.
2. Melakukan operasi kali terhadap ekspansi pecahan berlanjut sederhana π dan e.
3. Mengaproksimasi hasil perkalian π dan e ke bilangan rasional.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini untuk mengetahui aproksimasi rasional terbaik dari perkalian πe yang diharapkan menjadi kontribusi dalam perkembangan ilmu pengetahuan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Rasional dan Irasional

Definisi 2.1 ***Bilangan Rasional***

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat direpresentasikan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b adalah bilangan bulat dengan syarat $b \neq 0$.

Dengan definisi di atas, diketahui bahwa semua bilangan bulat merupakan bilangan rasional. Hal ini dapat dilihat, jika diambil sebarang bilangan bulat n, maka dapat dibentuk menjadi bentuk pecahan $\frac{n}{1}$, sehingga n juga adalah bilangan rasional. Begitu juga dengan bilangan asli yang merupakan himpunan bagian dari bilangan bulat, dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa semua bilangan asli adalah bilangan rasional. Namun, ditemukan bilangan-bilangan yang tidak dapat dibentuk menjadi pecahan dua bilangan bulat, sehingga tidak termasuk dalam bilangan rasional. Bilangan-bilangan yang tidak rasional tersebut disebut bilangan irasional.

2.2 Algoritma Pembagian Euclidean

Algoritma Euclidean adalah algoritma yang digunakan dalam mencari faktor pembagi terbesar (FPB), yaitu pembagi terbesar dari dua bilangan bulat. Selain itu, algoritma euclidean juga berperan banyak dalam bidang teori bilangan dan kriptografi.

Teorema 2.1 ***Algoritma Pembagian Euclidean***

Misalkan $r_0 = a$ dan $r_1 = b$ adalah bilangan bulat non-negatif dengan $0 < b < a$. Jika $r_j = r_{j+1}q_{j+1} + r_{j+2}$ dengan $0 < r_{j+2} < r_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-2$, dan $r_n = 0$, maka $(a, b) = r_{n-1}$.

Dari algoritma di atas, dengan $r_0 = a$ dan $r_1 = b$, akan dicari q_1 dan r_2 yang memenuhi persamaan $r_0 = r_1q_1 + r_2$ dengan $0 < r_2 < r_1$. Setelah didapatkan q_1 dan r_2, kemudian dicari q_2 dan r_3 yang memenuhi persamaan $r_1 = r_2q_2 + r_3$ dengan $0 < r_3 < r_2$. Dengan cara yang sama, proses ini dilanjutkan untuk mencari q_{j+1} dan r_{j+2} yang memenuhi $r_j = r_{j+1}q_{j+1} + r_{j+2}$ dengan $0 \leq r_{j+2} < r_{j+1}$, dan akan berhenti setelah didapatkan $r_n = 0$, sehingga $r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1}$. Hasil yang didapatkan dalam melakukan proses ini adalah FPB dari a dan b, yaitu r_{n-1}.

Contoh 2.1

Untuk mencari FPB dari 342 dan 231 akan digunakan algoritma Euclidean, sehingga $r_0 = 342$ dan $r_1 = 231$

$$\begin{aligned} 342 &= 231 \cdot 1 + 111 \\ 231 &= 111 \cdot 2 + 9 \\ 111 &= 9 \cdot 12 + 3 \\ 9 &= 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

Maka, $(342, 231) = 3$.

Teorema 2.2

Algoritma Euclidean selalu berhenti.

Bukti:

Setiap iterasi algoritma Euclidean menghasilkan bilangan bulat r_i dengan $0 \leq r_{i-1} < r_i$, sehingga r_i dengan $i \geq 0$ membentuk barisan monoton turun dan terbatas. Karena r_i adalah bilangan bulat non-negatif, maka barisan tersebut akan konvergen ke 0, sehingga algoritma Euclidean berhenti.

Q.E.D

2.3 Pecahan Berlanjut

Definisi 2.2 ***Pecahan Berlanjut***

Pecahan berlanjut merupakan ekspresi matematika dalam bentuk

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\ddots}}}}$$

dengan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dan $b_0, b_1, b_2, \ldots$ merupakan bilangan riil. Jika $b_n = 1$ untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$, a_0 adalah bilangan bulat dan a_n adalah bilangan bulat positif untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$, maka pecahan berlanjut tersebut disebut pecahan berlanjut sederhana. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ kemudian disebut sebagai hasil bagi parsial dari pecahan berlanjut.

(Olds, 1963).

Pecahan berlanjut sederhana erat kaitannya dengan algoritma Euclidean. Menggunakan Algoritma Euclidean, bilangan rasional dapat diekspansi menjadi pecahan berlanjut sederhana. Misalkan dengan algoritma Euclidean didapatkan persamaan-persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
r_0 &= r_1 q_1 + r_2, && 0 < r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3, && 0 < r_3 < r_2,\\
&\vdots\\
r_j &= r_{j+1} q_{j+1} + r_{j+2}, && 0 < r_{j+2} < r_{j+1},\\
&\vdots\\
r_{n-3} &= r_{n-2} q_{n-2} + r_{n-1}, && 0 < r_{n-1} < r_{n-2},\\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1}, && 0 < r_{n-1},
\end{aligned}$$

Kemudian, setiap persamaan-persamaan r_j di atas dibagi oleh pembagi r_{j+1} pada persamaan tersebut, sehingga

$$\begin{aligned}
&\frac{r_0}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, && 0 < r_2 < r_1,\\
&\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}, && 0 < r_3 < r_2,\\
&\vdots\\
&\frac{r_j}{r_{j+1}} = q_{j+1} + \frac{r_{j+2}}{r_{j+1}} = q_{j+1} + \frac{1}{\frac{r_{j+1}}{r_{j+2}}}, && 0 < r_{j+2} < r_{j+1},\\
&\vdots\\
&\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = q_{n-2} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = q_{n-2} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}, && 0 < r_{n-1} < r_{n-2},\\
&\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1}, && 0 < r_{n-1},
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi $\frac{r_{j+1}}{r_{j+2}}$ ke $\frac{r_j}{r_{j+1}}$ untuk setiap $j = n-3, n-2, \ldots, 0$, diperoleh ekspansi $\frac{r_0}{r_1}$ menjadi pecahan berlanjut sederhana dengan $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sebagai hasil bagi parsialnya.

$$\frac{r_0}{r_1} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_j + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1}}}}}}$$

Menggunakan algoritma Euclidean, dapat dikembangkan algoritma yang dapat mengekspansi bilangan menjadi pecahan berlanjut sederhana. Namun, sebelum itu diperkenalkan fungsi yang memberi keluaran bilangan bulat, yaitu fungsi bagian bilangan bulat.

Definisi 2.3 ***Bagian Bilangan Bulat***

Bagian bilangan bulat (dinotasikan $[x]$) adalah fungsi yang memetakan bilangan riil ke bilangan bulat, dengan bilangan non-negatif dibulatkan ke bawah dan bilangan negatif dibulatkan ke atas,

$$[x] = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}.$$

Algoritma Ekspansi Pecahan Berlanjut Sederhana

Misalkan α bilangan riil, maka terdapat secara tunggal sebuah bilangan bulat $[\alpha]$, yang merupakan bagian bilangan bulat dari α, dan terdapat secara tunggal sebuah bilangan riil $x_0 \in [0, 1)$, sedemikian sehingga

$$\alpha = [\alpha] + x_0.$$

Jika α bukan bilangan bulat, sehingga $x_0 \neq 0$ dan $y_1 := \frac{1}{x_0}$, maka didapatkan

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{y_1}$$

Selanjutnya, jika $y_1 = [y_1] + x_1$ bukan bilangan bulat, sehingga $x_1 \neq 0$ dan $y_2 := \frac{1}{x_1}$, maka didapatkan

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{[y_1] + \frac{1}{y_2}}$$

Proses ini terus berulang hingga didapatkan i sehingga y_i bilangan bulat dan $x_i = 0$. Dengan mengganti $a_0 := [\alpha]$ dan $a_i := [y_i], i = 1, 2, \ldots$, maka diperoleh ekspansi pecahan berlanjut sederhana dari α,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

yang kemudian dapat dinotasikan $\alpha = [a_0;\ a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

(Sanna, 2017).

Contoh 2.2

$$\frac{61}{18} = 3+\frac{7}{18} = 3+\frac{1}{\frac{18}{7}} = 3+\frac{1}{2+\frac{4}{7}} = 3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{7}{4}}} = 3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}}$$

$$= 3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}}$$

$$= 3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}$$

Maka, ekspansi pecahan berlanjut sederhana dari $\frac{61}{18}$ adalah $[3;\ 2,1,1,3]$.

Contoh 2.3

$$[2;\ 1,\ 8,\ 6] = 2+\frac{1}{1+\frac{1}{8+\frac{1}{6}}} = 2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{49}{6}}} = 2+\frac{1}{1+\frac{6}{49}} = 2+\frac{1}{\frac{55}{49}}$$

$$= 2+\frac{49}{55}$$

$$= \frac{159}{55}$$

Maka, $[2;\ 1,8,6]$ merupakan ekspansi pecahan berlanjut sederhana dari $\frac{159}{55}$.

Pecahan berlanjut sederhana terbagi menjadi dua yaitu, pecahan berlanjut sederhana berhingga dan pecahan berlanjut sederhana tak hingga. $[a_0;\ a_1,a_2,a_3,\dots,a_n]$ merupakan pecahan berlanjut sederhana berhingga, sedangkan $[a_0;\ a_1,a_2,a_3,\dots]$ merupakan pecahan berlanjut sederhana tak hingga.

Teorema 2.3

Setiap bilangan riil hanya dapat dinyatakan dalam satu pecahan berlanjut sederhana.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa ekspansi pecahan berlanjut sederhana dari bilangan riil bersifat tunggal dengan menggunakan metode induksi matematika.

Misalkan α adalah sebarang bilangan riil, memiliki dua ekspansi pecahan berlanjut sederhana, yaitu $[a_0;\ a_1, a_2, \dots]$ dan $[a'_0;\ a'_1, a'_2, \dots]$.

$$\alpha = [a_0;\ a_1, a_2, \dots] = [a'_0;\ a'_1, a'_2, \dots]$$

Karena a_0 adalah bagian bilangan bulat dari α ($a_0 = [\alpha]$), dan a'_0 juga adalah bagian bilangan bulat dari α ($a'_0 = [\alpha]$), maka $a_0 = a'_0 = [\alpha]$, sehingga $\alpha - a_0 = \alpha - a'_0$.

$$\alpha - a_0 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = \cfrac{1}{a'_1 + \cfrac{1}{a'_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Didefinisikan $b_1 := \frac{1}{\alpha - a_0}$, sehingga $b_1 = [a_1;\ a_2, \dots] = [a'_1;\ a'_2, \dots]$.

$$b_1 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}} = a'_1 + \cfrac{1}{a'_2 + \cfrac{1}{\ddots}}$$

Karena a_1 adalah bagian bilangan bulat dari b_1 ($a_1 = [b_1]$), dan a'_1 juga adalah bagian bilangan bulat dari b_1 ($a'_1 = [b_1]$), maka $a_1 = a'_1 = [b_1]$, sehingga $b_1 - a_1 = b_1 - a'_1$,$[a_2;\ a_3, \dots] = [a'_2;\ a'_3, \dots]$. Untuk $n = 0$, $a_0 = a'_0$ dan $[a_1;\ a_2, \dots] = [a'_1;\ a'_2, \dots]$ menyebabkan $a_1 = a'_1$ dan $[a_2;\ a_3, \dots] = [a'_2;\ a'_3, \dots]$.

Asumsikan $a_k = a'_k$ dan $[a_{k+1};\ a_{k+2}, \dots] = [a'_{k+1};\ a'_{k+2}, \dots]$, didefinisikan $b_{k+1} := [a_{k+1};\ a_{k+2}, \dots] = [a'_{k+1};\ a'_{k+2}, \dots]$. Karena a_{k+1} adalah bagian bilangan bulat dari b_{k+1} ($a_{k+1} = [b_{k+1}]$), dan a'_{k+1} juga adalah bagian bilangan bulat dari b_{k+1} ($a'_{k+1} = [b_{k+1}]$), maka $a_{k+1} = a'_{k+1} = [b_{k+1}]$, sehingga $b_{k+1} - a_{k+1} = b_{k+1} - a'_{k+1}$,$[a_{k+2};\ a_{k+3}, \dots] = [a'_{k+2};\ a'_{k+3}, \dots]$.

Dengan induksi matematika, disimpulkan $a_k = a'_k$, untuk $k = 0, 1, 2, \dots$, sehingga setiap bilangan riil hanya dapat dinyatakan dalam satu pecahan berlanjut sederhana.

Q.E.D

Berdasarkan teorema 2.3, diketahui bahwa setiap bilangan riil hanya memiliki satu representasi pecahan berlanjut sederhana, sehingga bersifat tunggal.

Teorema 2.4

Sebuah bilangan adalah bilangan rasional jika dan hanya jika dapat diekspansi menjadi pecahan berlanjut sederhana berhingga.

Bukti:

Pertama, akan dibuktikan setiap pecahan berlanjut sederhana berhingga mengekspansi sebuah bilangan rasional, menggunakan induksi matematika. Untuk $n = 1$,

$$[a_0;\ a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_0}$$

Diketahui dari definisi pecahan berlanjut sederhana bahwa a_0 dan a_1 adalah bilangan bulat, sehingga diperoleh $[a_0;\ a_1]$ adalah bilangan rasional. Selanjutnya, diasumsikan untuk $n = k$, $[a_0;\ a_1, a_2, \dots, a_k]$ adalah bilangan rasional, dengan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ adalah bilangan bulat sebarang, dengan $a_1, a_2, \dots, a_k$ yang positif, maka untuk $n = k + 1$,

$$[a_0;\ a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_1;\ a_2, a_3, \dots, a_{k+1}]}$$

dengan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ adalah bilangan bulat sebarang, serta $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ yang positif. Berdasarkan asumsi bahwa $[a_0;\ a_1, a_2, \dots, a_k]$ adalah bilangan rasional, maka $[a_1;\ a_2, a_3, \dots, a_{k+1}]$ adalah bilangan rasional, sehingga dapat dinyatakan dalam pecahan $\frac{r}{s}$ dengan r dan s adalah bilangan bulat dengan $s \neq 0$.

$$[a_0;\ a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] = a_0 + \frac{r}{s} = \frac{a_0 r + s}{r}$$

Diperoleh $[a_0;\ a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}]$ adalah bilangan rasional, sehingga membuktikan setiap berlanjut sederhana berhingga adalah bilangan rasional.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa setiap bilangan rasional dapat diekspansi menjadi pecahan berlanjut sederhana berhingga. Ambil sebarang bilangan rasional $\frac{a}{b}$, menggunakan algoritma Euclidean, diperoleh barisan r_i dengan $r_i = r_{i+1}q_{i+1} + r_{i+2}$ dan $0 < r_{i+2} < r_{i+1}$, yang kemudian dapat diubah menjadi $\frac{r_i}{r_{i+1}} = q_{i+1} + \frac{r_{i+2}}{r_{i+1}}$ dengan $0 < r_{i+2} < r_{i+1}$, sehingga $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \dots]$. Menurut teorema 2.2, maka terdapat bilangan asli n, sehingga $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$.

Q.E.D

(Rosen, 2005).

Dengan adanya teorema 2.4, maka berlaku juga pernyataan bahwa sebuah bilangan adalah bilangan irasional jika dan hanya jika dapat dinyatakan dalam pecahan berlanjut sederhana tak hingga. Pecahan berlanjut sederhana tak hingga $[a_0;\ a_1, a_2, a_3, \ldots]$ disebut periodik jika terdapat bilangan bulat positif N dan k sedemikian sehingga $a_n = a_{n+k}$ untuk semua bilangan bulat positif n dengan $n \geq N$. Pecahan berlanjut sederhana tak hingga periodik dinotasikan $[a_0;\ a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k}}]$.

Definisi 2.4 *Konvergen*

Misalkan α adalah bilangan riil, dengan $\alpha = [a_0;\ a_1, a_2, a_3, \ldots]$, $C_k := \frac{p_k}{q_k}$ disebut konvergen dari α, jika memenuhi

$$\frac{p_k}{q_k} = \left[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k\right]$$

dengan $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(Rosen, 2005).

Dari definisi konvergen di atas, dapat ditulis,

$$C_0 = a_0, \qquad p_0 = a_0, \qquad q_0 = 1,$$

$$C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \qquad p_1 = a_0 a_1 + 1, \qquad q_1 = a_1,$$

$$C_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}, \quad p_2 = a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2, \quad q_2 = a_1 a_2 + 1,$$

$$\vdots$$

$$C_k = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}, \qquad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \qquad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

Barisan C_k, p_k, dan q_k selanjutnya dapat membentuk tabel konvergen dengan

$$p_{-1} = 1, p_{-2} = 0, q_{-1} = 0, q_{-2} = 1.$$

Contoh 2.4

$$\frac{73}{56} = [1, 3, 3, 2, 2]$$

Maka tabel konvergen dari $\frac{73}{56}$ adalah sebagai berikut.

Tabel 2.1 *Tabel Konvergen* $73/56$

k	-2	-1	0	1	2	3	4
a_k			1	3	3	2	2
p_k	0	1	1	4	13	30	73
q_k	1	0	1	3	10	23	56
C_k			$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{30}{23}$	$\frac{73}{56}$

Dengan jelas dapat dilihat bahwa p_k dan q_k adalah barisan monoton naik dan seiring bertambahnya k, C_k akan semakin mendekati α.

Teorema 2.5

Untuk setiap bilangan bulat $k \geq 0$,

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$$

Bukti:

Diketahui $p_{-1} = 1, p_0 = 1, q_{-1} = 0, q_0 = 1$, maka

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$$

Karena $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ dan $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$, maka

$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) p_{k-1} - (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-1} =$
$-(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2})$

Sehingga

$q_1 p_0 - p_1 q_0 = -(q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1}) = -1,$

$q_2 p_1 - p_2 q_1 = -(q_1 p_0 - p_1 q_0) = 1,$

$q_3 p_2 - p_3 q_2 = -(q_2 p_1 - p_2 q_1) = -1$, dan seterusnya.

Maka diperoleh untuk k yang genap menghasilkan 1 dan k yang ganjil menghasilkan -1, sehingga,

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$$

Q.E.D

(Khinchin, 1964).

Korolari 2.1

Untuk setiap bilangan bulat $k \geq 2$,

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}$$

Bukti:

Diketahui $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ dan $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ dan dari teorema 2.5, untuk setiap bilangan bulat $k \geq 0$, $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$, maka,

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2}}{q_k q_{k-2}} = \frac{(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) a_k}{q_k q_{k-2}} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}.$$

Q.E.D

(Khinchin, 1964).

Teorema 2.6

Konvergen dengan urutan genap membentuk barisan monoton naik dan konvergen dengan urutan ganjil membentuk barisan monoton turun. Setiap konvergen urutan ganjil selalu lebih besar dari semua konvergen urutan genap.

Bukti:

Diketahui dari korolari 2.1, Untuk setiap bilangan bulat $k \geq 2$, $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}$,

sehingga untuk k yang genap, $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} < 0$, maka diperoleh $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} < \frac{p_k}{q_k}$, membentuk barisan monoton naik. Untuk k yang ganjil, $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} > 0$, diperoleh $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} > \frac{p_k}{q_k}$, membentuk barisan monoton turun.

Akan dibuktikan bahwa setiap konvergen urutan ganjil selalu lebih besar dari semua konvergen urutan genap. Dengan menggunakan teorema 2.5, didapatkan

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}, \qquad k \geq 0$$

sehingga, untuk k yang genap, terdapat bilangan bulat positif s, dengan $k = 2s$,

$$\frac{p_{2s-1}}{q_{2s-1}} - \frac{p_{2s}}{q_{2s}} > 0 \Rightarrow \frac{p_{2s-1}}{q_{2s-1}} > \frac{p_{2s}}{q_{2s}},$$

untuk k yang ganjil, terdapat bilangan bulat non-negatif t, dengan $k = 2t + 1$,

$$\frac{p_{2t}}{q_{2t}} - \frac{p_{2t+1}}{q_{2t+1}} < 0 \Rightarrow \frac{p_{2t}}{q_{2t}} < \frac{p_{2t+1}}{q_{2t+1}}.$$

Ambil sebarang s dan t, jika $2s < 2t + 1$, maka $2s \leq 2t$, karena konvergen urutan genap membentuk barisan monoton naik, sehingga $\frac{p_{2s}}{q_{2s}} \leq \frac{p_{2t}}{q_{2t}} < \frac{p_{2t+1}}{q_{2t+1}}$. Jika

$2s > 2t + 1$, maka $2s - 1 \geq 2t + 1$, karena konvergen urutan ganjil membentuk barisan monoton turun, sehingga $\frac{p_{2s}}{q_{2s}} < \frac{p_{2s-1}}{q_{2s-1}} \leq \frac{p_{2t+1}}{q_{2t+1}}$.

Karena $\frac{p_{2s}}{q_{2s}} < \frac{p_{2t+1}}{q_{2t+1}}$, dapat disimpulkan bahwa setiap konvergen urutan ganjil selalu lebih besar dari semua konvergen urutan genap.

Q.E.D

(Khinchin, 1964).

Berdasarkan teorema 2.6, dapat dilihat bahwa untuk pecahan berlanjut sederhana berhingga dari α, setiap konvergen dengan urutan genap selalu kurang dari α, sedangkan setiap konvergen dengan urutan ganjil selalu lebih besar dari α, kecuali konvergen terakhir yang nilainya sama dengan α.

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} <\ldots< \alpha <\ldots< \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

2.4 Aproksimasi Rasional Terbaik

Aproksimasi rasional terbaik dari suatu bilangan riil dapat dicari dengan menggunakan ekspansi pecahan berlanjut sederhana dari bilangan tersebut. Yang dimaksud dengan aproksimasi rasional adalah mengaproksimasi bilangan dengan mencari pecahan yang selisihnya dengan bilangan tersebut kurang dari jumlah tertentu dan memiliki penyebut terkecil. Selain itu, aproksimasi rasional juga dapat digunakan untuk mengaproksimasi bilangan rasional dengan nilai pembilang dan penyebut yang besar, sehingga didapatkan nilai pembilang dan penyebut yang lebih kecil.

Dalam aproksimasi rasional terbaik, terdapat aproksimasi rasional terbaik tipe 1 dan aproksimasi rasional terbaik tipe 2.

Definisi 2.5 ***Aproksimasi Rasional Terbaik Tipe 1***

Misalkan α adalah bilangan riil, $\frac{p}{q}$ adalah aproksimasi rasional terbaik tipe 1 jika untuk setiap $\frac{r}{s}$ memenuhi

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left|\alpha - \frac{r}{s}\right|$$

dengan $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}, 0 < s \leq q$.

(Milinkovic dkk., 2020).

Contoh 2.5

Rasio emas (golden ratio) adalah bilangan irasional dengan nilai $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ atau $1.618033988749894 \ldots$ Diperoleh bahwa $|1-\varphi| = 0.618033988749894\ldots$, dan $|2-\varphi| = 0.381966011250105\ldots$, sehingga berdasarkan definisi 2.5, 2 adalah aproksimasi rasional terbaik dari φ, karena untuk setiap pecahan yang memiliki penyebut 1, bilangan yang terdekat ke φ adalah 2, sedangkan 1 bukan aproksimasi rasional terbaik dari φ, karena terdapat pecahan dengan penyebut yang sama, yaitu 2, yang lebih dekat ke φ. Kemudian, $\left|\frac{3}{2}-\varphi\right| = 0.118033988749894\ldots$, yang berarti $\frac{3}{2}$ lebih dekat ke φ dibanding 2 (yang memiliki penyebutnya lebih kecil), dan juga lebih dekat ke φ dibanding semua pecahan dengan penyebut yang sama, sehingga $\frac{3}{2}$ adalah aproksimasi rasional terbaik dari φ. Dengan cara yang sama diperoleh aproksimasi rasional terbaik lainnya, yaitu $\frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}$, dan seterusnya. Walaupun $\frac{11}{7}$ lebih dekat ke φ dibanding semua pecahan dengan penyebut 7, namun $\left|\frac{11}{7}-\varphi\right| = 0.046605417321323\ldots > 0.018033988749894\ldots = \left|\frac{8}{5}-\varphi\right|$, sehingga terdapat pecahan dengan penyebut yang lebih kecil, yaitu $\frac{8}{5}$, dan lebih dekat ke φ dibanding $\frac{11}{7}$, menyebabkan $\frac{11}{7}$ bukan aproksimasi rasional terbaik dari φ. Maka, aproksimasi rasional terbaik dari φ adalah $2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}$, dan seterusnya.

Terdapat bilangan rasional yang berada di antara konvergen-konvergen dari α, yang dinamakan pecahan antara. Untuk memperoleh pecahan antara, digunakan definisi berikut.

Definisi 2.6 ***Pecahan Antara***

Misalkan α adalah bilangan riil, pecahan antara dari α yang dinotasikan $\frac{p_{i+1}^{(j)}}{q_{i+1}^{(j)}}$, didefinisikan

$$p_{i+1}^{(j)} = j \cdot p_i + p_{i-1}$$

$$q_{i+1}^{(j)} = j \cdot q_i + q_{i-1}$$

dengan $j \in \{1, 2, \ldots, a_{i+1} - 1\}$.

(Milinkovic dkk., 2020).

Dari definisi pecahan antara, selisih dari dua pecahan antara adalah

$\frac{p_k^{(j+1)}}{q_k^{(j+1)}} - \frac{p_k^{(j)}}{q_k^{(j)}} = \frac{(j+1)\cdot p_{k-1}+p_{k-2}}{(j+1)\cdot q_{k-1}+q_{k-2}} - \frac{j\cdot p_{k-1}+p_{k-2}}{j\cdot q_{k-1}+q_{k-2}} = \frac{-(q_{k-1}p_{k-2}-p_{k-1}q_{k-2})}{\{(j+1)\cdot q_{k-1}+q_{k-2}\}\{j\cdot q_{k-1}+q_{k-2}\}} =$

$\frac{(-1)^k}{\{(j+1)\cdot q_{k-1}+q_{k-2}\}\{j\cdot q_{k-1}+q_{k-2}\}}$sehingga

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{1\cdot p_{k-1}+p_{k-2}}{1\cdot q_{k-1}+q_{k-2}}, \frac{2\cdot p_{k-1}+p_{k-2}}{2\cdot q_{k-1}+q_{k-2}}, \dots, \frac{a_k p_{k-1}+p_{k-2}}{a_k q_{k-1}+q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}$$

membentuk barisan monoton naik untuk k yang genap, dan membentuk barisan monoton turun untuk k yang ganjil.

Contoh 2.6

Diketahui $\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots$, yang memiliki ekspansi pecahan berlanjut $\sqrt{2} = [1;\ \overline{2}]$. Dengan tabel konvergen diperoleh konvergen-konvergen dari $\sqrt{2}$ sebagai berikut.

Tabel 2.2 *Tabel Konvergen* $\sqrt{2}$

k	-2	-1	0	1	2	3	4	...
a_k			1	2	2	2	2	...
p_k	0	1	1	3	7	17	41	...
q_k	1	0	1	2	5	12	29	...
C_k			$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	...

Dengan definisi 2.6, pecahan antara dari $\sqrt{2}$ sebagai berikut.

$p_0^{(1)} = 1\cdot 1 + 1 = 2, q_0^{(1)} = 1\cdot 1 + 0 = 1, \frac{p_0^{(1)}}{q_0^{(1)}} = 2,$

$p_1^{(1)} = 1\cdot 3 + 1 = 4, q_0^{(1)} = 1\cdot 2 + 1 = 3, \frac{p_1^{(1)}}{q_1^{(1)}} = \frac{4}{3},$

$p_2^{(1)} = 1\cdot 7 + 3 = 10, q_2^{(1)} = 1\cdot 5 + 2 = 7, \frac{p_2^{(1)}}{q_2^{(1)}} = \frac{10}{7},$

$p_3^{(1)} = 1\cdot 17 + 7 = 24, q_3^{(1)} = 1\cdot 12 + 5 = 17, \frac{p_3^{(1)}}{q_3^{(1)}} = \frac{24}{17},$

$p_4^{(1)} = 1\cdot 41 + 17 = 58, q_4^{(1)} = 1\cdot 29 + 12 = 41, \frac{p_4^{(1)}}{q_4^{(1)}} = \frac{58}{41},$

$$\vdots$$

Maka, konvergen dari $\sqrt{2}$ adalah $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \ldots$, dan pecahan antara dari $\sqrt{2}$ adalah $2, \frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{24}{17}, \frac{58}{41}, \ldots$.

Teorema 2.7

Setiap aproksimasi rasional terbaik (tipe 1) dari bilangan adalah konvergen atau pecahan antara dari pecahan berlanjut sederhana bilangan tersebut.

Bukti:

Misalkan $\frac{a}{b}$ adalah aproksimasi rasional terbaik dari $\alpha = [a_0;\ a_1, a_2, \ldots]$, maka jarak $\frac{a}{b}$ ke α lebih kecil dibanding jarak $\frac{r}{s}$ ke α, dengan $0 < s \leq b$. Karena a_0 adalah bagian bilangan bulat dari α $(a_0 \leq \alpha < a_0 + 1)$, maka $\frac{a}{b} \geq \frac{a_0}{1}$ atau $\frac{a}{b} \leq \frac{a_0+1}{1}$. Jika $\frac{a}{b} = a_0$ atau $\frac{a}{b} = a_0 + 1$, maka teorema benar, karena a_0 adalah konvergen dari α, sedangkan $a_0 + 1 = \frac{1 \cdot p_0 + p_{-1}}{1 \cdot q_0 + q_{-1}}$ adalah pecahan antara.

Untuk kasus $a_0 < \frac{a}{b} < a_0 + 1$, akan digunakan metode kontradiksi, diasumsikan $\frac{a}{b}$ bukan konvergen dan pecahan antara, maka terdapat bilangan bulat k dan j (untuk $k > 0$, $0 \leq j < a_{k+1}$, dan untuk $k = 0$, $1 \leq j < a_{k+1}$), sehingga $\frac{a}{b}$ berada di antara $\frac{j \cdot p_k + p_{k-1}}{j \cdot q_k + q_{k-1}}$ dan $\frac{(j+1) \cdot p_k + p_{k-1}}{(j+1) \cdot q_k + q_{k-1}}$, yaitu $\frac{j \cdot p_k + p_{k-1}}{j \cdot q_k + q_{k-1}} < \frac{a}{b} < \frac{(j+1) \cdot p_k + p_{k-1}}{(j+1) \cdot q_k + q_{k-1}} < \alpha$ atau $\alpha < \frac{(j+1) \cdot p_k + p_{k-1}}{(j+1) \cdot q_k + q_{k-1}} < \frac{a}{b} < \frac{j \cdot p_k + p_{k-1}}{j \cdot q_k + q_{k-1}}$.

Diperoleh

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{j \cdot p_k + p_{k-1}}{j \cdot q_k + q_{k-1}}\right| < \left|\frac{(j+1) \cdot p_k + p_{k-1}}{(j+1) \cdot q_k + q_{k-1}} - \frac{j \cdot p_k + p_{k-1}}{j \cdot q_k + q_{k-1}}\right| = \frac{1}{\{(j+1) \cdot q_k + q_{k-1}\}\{j \cdot q_k + q_{k-1}\}},$$

sedangkan

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{j \cdot p_k + p_{k-1}}{j \cdot q_k + q_{k-1}}\right| = \left|\frac{a(j \cdot q_k + q_{k-1}) - b(j \cdot p_k + p_{k-1})}{b(j \cdot q_k + q_{k-1})}\right| > \frac{1}{b(j \cdot q_k + q_{k-1})},$$

sehingga

$$\frac{1}{b(j \cdot q_k + q_{k-1})} < \frac{1}{\{(j+1) \cdot q_k + q_{k-1}\}\{j \cdot q_k + q_{k-1}\}} \Rightarrow (j+1) \cdot q_k + q_{k-1} < b.$$

Karena $\frac{(j+1) \cdot p_k + p_{k-1}}{(j+1) \cdot q_k + q_{k-1}}$ lebih dekat ke α dibanding $\frac{a}{b}$, sedangkan $(j+1) \cdot q_k + q_{k-1} < b$, maka $\frac{a}{b}$ bukan aproksimasi rasional terbaik α, sehingga terjadi kontradiksi.

Dapat disimpulkan setiap aproksimasi rasional terbaik dari bilangan adalah konvergen atau pecahan antara.

Q.E.D

(Khinchin, 1964).

Berdasarkan teorema 2.7, diketahui bahwa aproksimasi rasional terbaik dapat berupa konvergen ataupun pecahan antara. Oleh karena itu, dibuat definisi yang berbeda, yaitu aproksimasi rasional terbaik tipe 2, sehingga setiap aproksimasi rasional terbaik tipe 2 merupakan konvergen.

Definisi 2.7 ***Aproksimasi Rasional Terbaik Tipe 2***

Misalkan α adalah bilangan riil, $\frac{p}{q}$ adalah aproksimasi rasional terbaik tipe 2 jika untuk setiap $\frac{r}{s}$ memenuhi

$$\left|q\alpha - p\right| < \left|s\alpha - r\right|$$

dengan $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}, 0 < s \leq q$.

(Milinkovic dkk., 2020).

Hubungan antara aproksimasi rasional terbaik tipe 1 dan tipe 2 dapat dilihat pada teorema berikut.

Teorema 2.8

Setiap aproksimasi rasional terbaik tipe 2 adalah aproksimasi rasional terbaik tipe 1 tapi tidak sebaliknya.

Bukti:

Akan dibuktikan setiap aproksimasi rasional terbaik tipe 2 adalah aproksimasi rasional terbaik tipe 1 dengan metode kontraposisi. Misalkan $\frac{a}{b}$ bukan aproksimasi rasional terbaik tipe 1, terdapat $\frac{r}{s}$, sehingga

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \left|\alpha - \frac{r}{s}\right|,$$

dengan $\frac{r}{s} \neq \frac{a}{b}, 0 < s \leq b$.

Diperoleh

$$|s\alpha - r| \leq \left|s\alpha - \frac{sa}{b}\right| \leq |b\alpha - a| \Rightarrow |b\alpha - a| \geq |s\alpha - r|,$$

sehingga $\frac{a}{b}$ bukan aproksimasi rasional terbaik tipe 2.

Untuk membuktikan bahwa terdapat aproksimasi rasional terbaik tipe 1 bukan aproksimasi rasional terbaik tipe 2, maka akan dipilih aproksimasi rasional terbaik tipe 1 yang bukan aproksimasi rasional terbaik tipe 2.

Pilih $\frac{9}{7}$ yang merupakan pecahan antara dari $\frac{13}{10}$, yang juga adalah aproksimasi rasional terbaik tipe 1 dari $\frac{13}{10}$. Namun,

$$\left|7 \cdot \frac{13}{10} - 9\right| = \left|3 \cdot \frac{13}{10} - 4\right|$$

dengan $3 < 7$, sehingga $\frac{9}{7}$ bukan aproksimasi rasional terbaik tipe 2 dari $\frac{13}{10}$.

Disimpulkan setiap aproksimasi rasional terbaik tipe 2 adalah aproksimasi rasional terbaik tipe 1 tapi tidak sebaliknya.

Q.E.D

(Khinchin, 1964).

Melalui teorema 2.7 dan teorema 2.8, diketahui bahwa aproksimasi rasional terbaik tipe 2 merupakan bagian dari aproksimasi rasional terbaik tipe 1, sehingga setiap aproksimasi rasional terbaik tipe 2 adalah konvergen atau pecahan antara. Pernyataan tersebut kemudian dipertegas melalui teorema berikut.

Teorema 2.9

Setiap aproksimasi rasional terbaik tipe 2 adalah konvergen.

Bukti:

Misalkan bilangan rasional $\frac{a}{b}$ adalah aproksimasi rasional terbaik tipe 2 dari $\alpha = [a_0;\ a_1, a_2, \ldots]$, maka

$|b\alpha - a| < |s\alpha - r|$ dengan $0 < s \leq b$. Jika $\frac{a}{b} < a_0$, a_0 akan lebih dekat ke α dibanding $\frac{a}{b}$, maka

$$|1 \cdot \alpha - a_0| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq |b\alpha - a|$$

dengan $1 \leq b$, sehingga $\frac{a}{b}$ bukan aproksimasi rasional terbaik tipe 2.

Jika $\frac{a}{b} = a_0$, maka teorema benar karena a_0 adalah konvergen.

Jika $\frac{a}{b} > a_0$, akan dibuktikan $\frac{a}{b}$ adalah konvergen dengan metode kontradiksi, asumsikan $\frac{a}{b}$ bukan konvergen, maka terdapat $k \geq 0$, sehingga $\frac{a}{b}$ terletak di antara $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ dan $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ (konvergen-konvergen dengan urutan yang sama-sama genap atau sama-sama ganjil akan berada di sisi α yang sama, yaitu semuanya di sisi kiri atau semuanya di sisi kanan), atau $\frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}$.

Untuk kasus $\frac{a}{b}$ terletak di antara $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ dan $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, karena

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{aq_{k-1} - bp_{k-1}}{bq_{k-1}}\right| \geq \frac{1}{bq_{k-1}},$$

dan

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{-(q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1})}{q_k q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}},$$

maka

$$\frac{1}{bq_{k-1}} < \frac{1}{q_k q_{k-1}} \Rightarrow q_k < b.$$

Di sisi lain,

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bq_{k+1}} \Rightarrow |b\alpha - a| \geq \frac{1}{q_{k+1}},$$

dan

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} \Rightarrow |q_k\alpha - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}},$$

menyebabkan

$$|q_k\alpha - p_k| \leq |b\alpha - a|.$$

Karena $|b\alpha - a| \geq |q_k\alpha - p_k|$ dan $q_k < b$, maka $\frac{a}{b}$ bukan aproksimasi rasional terbaik tipe 2 dari α, sehingga terjadi kontradiksi, diperoleh $\frac{a}{b}$ adalah konvergen.

Untuk kasus $\frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_1}{q_1}$ adalah konvergen dengan urutan ganjil, maka $\frac{p_1}{q_1}$ akan berada di sisi kanan α, sehingga $\alpha < \frac{p_1}{q_1} < \frac{a}{b}$, diperoleh

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bq_1} \Rightarrow |b\alpha - a| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1},$$

dan

$$|1 \cdot \alpha - a_0| \leq \left|\alpha - \frac{a_0}{a_1}\right| \leq \frac{1}{a_1},$$

menyebabkan

$$|b\alpha - a| > |1 \cdot \alpha - a_0|.$$

Karena $|b\alpha - a| > |1 \cdot \alpha - a_0|$ dan $1 \leq b$, maka $\frac{a}{b}$ bukan aproksimasi rasional terbaik tipe 2.

Dapat disimpulkan setiap aproksimasi rasional terbaik tipe 2 adalah konvergen.

Q.E.D

(Khinchin, 1964).

Dengan adanya teorema-teorema di atas, diketahui bahwa aproksimasi rasional terbaik adalah berupa konvergen atau pecahan antara. Namun, setiap konvergen belum tentu merupakan aproksimasi rasional terbaik. Misalkan $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$, a_0 yang merupakan konvergen dari α, tidak memenuhi definisi aproksimasi rasional terbaik tipe 1, karena $\left|\alpha - \frac{a_0}{1}\right| = \left|\alpha - \frac{a_0+1}{1}\right|$. Hal ini tentu juga berlaku untuk aproksimasi rasional terbaik tipe 2, sehingga a_0 bukan aproksimasi rasional terbaik bagi $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$. Untuk mengetahui lebih jelas mengenai konvergen yang merupakan aproksimasi rasional terbaik, dapat dilihat pada teorema berikut.

Teorema 2.10

Setiap konvergen adalah aproksimasi rasional terbaik tipe 2, kecuali untuk kasus:

1. $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ dengan konvergen $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$; dan
2. $\alpha = [a_0, 1, \dots]$ dengan konvergen $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$.

Bukti:

Misalkan α adalah bilangan riil yang diekspansi menjadi pecahan berlanjut sederhana dengan konvergen $\frac{p_k}{q_k}, k \geq 0$.

Ambil sebarang bilangan bulat $k \geq 0$, sehingga $y = 1, 2, \dots, q_k$, dan x adalah sebarang bilangan bulat. Kemudian didefinisikan y' adalah nilai y sehingga untuk suatu x, $|y\alpha - x|$ memiliki nilai terkecil dari nilai y lainnya (Jika terdapat beberapa y', maka diambil nilai y' terkecil), dan x' adalah nilai x dengan $|y'\alpha - x|$ paling kecil, sehingga $|y'\alpha - x'| \leq |y\alpha - x|$ untuk semua nilai x dan y.

Akan dibuktikan bahwa hanya terdapat satu nilai x' dengan metode kontradiksi. Misalkan terdapat dua nilai x' yang berbeda, yaitu x'_1 dan x'_2, sehingga

$$\left|\alpha - \frac{x'_1}{y'}\right| = \left|\alpha - \frac{x'_2}{y'}\right|$$

dengan $x'_1 \neq x'_2$, diperoleh

$$\alpha = \frac{x'_1 + x'_2}{2y'}.$$

Jika $x'_1 + x'_2$ dan $2y'$ tidak relatif prima, terdapat bilangan bulat i, p dan q dengan $x'_1 + x'_2 = ip$ dan $2y' = iq$, $i > 1$, $\alpha = \frac{p}{q}$, maka untuk $i > 2$, $q < y'$, $|q\alpha - p| = 0$, kontradiksi dengan definisi y'. Untuk $i = 2$, $q = y'$, $|q\alpha - p| = |y'\alpha - p| = 0 < \left|\frac{x'_1 - x'_2}{2}\right| = |y'\alpha - x'_j|, j = 1, 2$, kontradiksi dengan definisi x'.

Jika $x'_1 + x'_2$ dan $2y'$ saling relatif prima, karena $\alpha = \frac{x'_1 + x'_2}{2y'}$ adalah bilangan rasional (dapat diekspansi menjadi pecahan berlanjut sederhana berhingga), maka terdapat bilangan bulat $n \geq 1$, sehingga $\alpha = \frac{p_n}{q_n}$, $p_n = x'_1 + x'_2$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} = 2y', a_n \geq 2$.

Untuk kasus $n = 1$, $a_n = 2$, $p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1, \alpha = a_0 + \frac{1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{2}$, merupakan pengecualian dalam teorema ini.

Untuk kasus $n > 1$, $a_n = 2$ atau kasus $n \geq 1$, $a_n > 2$, diperoleh $q_{n-1} < y'$, sehingga

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_{n-1} q_n} \Rightarrow |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \leq \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2y'} \leq \frac{1}{2}$$
$$\leq \left|\frac{x'_1 - x'_2}{2}\right| = |y'\alpha - x'_j|$$

$j = 1, 2$, kontradiksi dengan definisi y'.

Disimpulkan x' dan y' terdefinisi secara unik dan merupakan aproksimasi rasional terbaik tipe 2 dari α, karena berdasarkan definisinya, berlaku

$$|y'\alpha - x'| < |s\alpha - r|,$$

dengan $\frac{r}{s} \neq \frac{x'}{y'}, 0 < s \leq y'$.

Menggunakan teorema 2.9, maka diketahui bahwa $\frac{x'}{y'}$ adalah konvergen, sehingga, $t \leq k, x' = p_t$ dan $y' = q_t$.

Jika $t < k$, $q_t = q_k$, diketahui $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ untuk $n = 1, 2, \ldots$, dengan barisan q_n adalah barisan monoton naik sehingga $k = t + 1$, $a_k = 1$, $q_{k-2} = 0$. Karena q_n akan bernilai nol jika $n = -1$, maka diperoleh $k = 1, t = 0$, sehingga untuk konvergen $\frac{p_t}{q_t} = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ bukan aproksimasi rasional terbaik dari $\alpha = [a_0, 1, \ldots]$ yang merupakan pengecualian dalam teorema ini.

Jika $t < k, q_t < q_k$, maka

$$|q_t\alpha - p_t| \geq \left|\frac{q_t\alpha - p_t}{q_t}\right| > \frac{1}{q_t} > \frac{1}{q_t + q_{t+1}} > \frac{1}{q_{k-1} + q_k} \geq \frac{1}{q_{k+1}},$$

dan

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} \Rightarrow |q_k\alpha - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}},$$

sehingga

$$|q_t\alpha - p_t| > |q_k\alpha - p_k|,$$

yang kontradiksi dengan $\frac{x'}{y'}$ yang merupakan aproksimasi rasional terbaik tipe 2.

Jika $t = k$, maka $\frac{x'}{y'} = \frac{p_k}{q_k}$ adalah aproksimasi rasional terbaik tipe 2. Karena diambil sebarang k, maka teorema terbukti.

Q.E.D

(Khinchin, 1964).

Dengan adanya teorema 2.10, menyebabkan setiap konvergen juga adalah aproksimasi rasional terbaik tipe 1, kecuali kasus trivial dalam teorema.