PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL

IRFA ANISA PRATAMI

H011191050

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

JANUARI 2023

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

IRFA ANISA PRATAMI
H011191050

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
JANUARI 2023

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier Fraksional

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 10 Januari 2023

Irfa Anisa Pratami

H011191050

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.	**Dr. Muhammad Zakir,M.Si.**
NIP. 197012311998021001	**NIP. 196402071991031013**

Pada 10 Januari 2023

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	:	Irfa Anisa Pratami
NIM	:	H011191050
Program Studi	:	Matematika
Judul Skripsi	:	Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier Fraksional

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.	( )
Sekretaris	: Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	( )
Anggota	: Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	( )
Anggota	: Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.	( )

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 10 Januari 2023

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN

HALAMAN PENGESAHAN

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL

Disusun dan diajukan oleh:

IRFA ANISA PRATAMI

H011191050

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 10 Januari dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 197012311998021001	**NIP.196402071991031013**

Ketua Program Studi Matematika,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 197008072000031002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puji dan syukur kehadirat Allah SWT. atas kelimpahan nikmat, rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Fourier Fraksional"**, sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan pendidikan Program Sarjana (S1) pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan dan penyusunan skripsi ini banyak dukungan, bantuan, bimbingan, serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, perkenankan penulis untuk menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, M.Si. selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin.
3. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin.
4. Bapak Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama yang telah dengan sabar dan tulus membimbing serta menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Bapak Dr. Muhammad Zakir, M.Si. selaku dosen pembimbing pendamping yang telah dengan sabar dan tulus membimbing serta menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan banyak saran dan arahan yang sangat membantu dalam penyusunan skripsi ini.

7. Bapak Dr. Mu. Nur, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan banyak saran dan arahan yang sangat membantu dalam penyusunan skripsi ini.
8. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan.
9. Bapak/Ibu pegawai/staff Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin yang telah banyak membantu selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
10. Orang tua penulis, Bapak Sewang dan Ibu Mulyaningsih Ismail, serta kedua adik penulis yang selalu mendengar keluh kesah penulis, memberikan bantuan, doa, nasihat, perhatian, serta dukungan material dan moral yang senantiasa memberikan semangat kepada penulis.
11. Keluarga penulis, tante, om dan sepupu-sepupu yang memberikan banyak bantuan, doa, perhatian, serta dukungan kepada penulis.
12. Kak Ajeng yang telah meluangkan banyak waktu membantu penulis dalam proses penyusunan dan pengurusan berkas tugas akhir ini.
13. Ibu Sri, Ibu Wahyuni, Kak Nas, Kak Afdhal, Kak Topan dan Kak Sirah yang telah membantu dan memberikan banyak pengetahuan serta pengalaman baru bagi penulis selama penyusunan skripsi ini.
14. Dara, Ade, Sukma, Tasya, Ichsan, Aan dan Wawan yang telah memberikan semangat dan membantu penulis selama masa perkuliahan.
15. Teman-teman Matematika 2019 dan POL19ON 2019 yang telah mendukung dan membersamai selama menjalani masa perkuliahan.
16. Yook Sungjae, Lee Jeno dan Lee Taeyong serta 27 bujang lainnya yang telah memberikan semangat secara tidak langsung selama proses penyusunan skripsi ini.
17. Semua pihak yang telah membantu penulis dan tak sempat penulis sampaikan satu per satu.

Akhir kata, penulis berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu penulis selama penyusunan tugas akhir ini.

Makassar, 10 Januari 2023

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Irfa Anisa Pratami
NIM	: H011191050
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (***Non-exclusive Royalti-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada 10 Januari 2023.

Yang menyatakan,

Irfa Anisa Pratami

ABSTRAK

Transformasi Fourier fraksional merupakan salah satu bentuk generalisasi dari transformasi Fourier. Pada tugas akhir ini, akan ditunjukkan relasi antara transformasi Fourier dengan transformasi Fourier fraksional. Selanjutnya, akan ditunjukkan beberapa sifat dari transformasi Fourier fraksional. Terakhir, akan dibuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional.

Kata Kunci : transformasi Fourier, transformasi Fourier fraksional, prinsip ketidakpastian Heisenberg.

Judul	:	Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Fourier Fraksional
Nama	:	Irfa Anisa Pratami
NIM	:	H011191050
Program Studi	:	Matematika

ABSTRACT

The fractional Fourier transform is a generalization of the Fourier transform. In this thesis, we will show the relationship between the Fourier transform and the fractional Fourier transform. Then, we will derive some properties of the fractional Fourier transform. Lastly, we will prove the Heisenberg uncertainty principle for the fractional Fourier transform by using the interaction between the Fourier transform and the fractional Fourier transform.

Keywords *: Fourier transform, fractional Fourier transform, Heisenberg's uncertainty principle.*

Title	:	*Heisenberg's Uncertainty Principle in the Fractional Fourier Transform*
Name	:	*Irfa Anisa Pratami*
NIM	:	*H011191050*
Study Program	:	*Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

I.1. Latar Belakang

Salah satu ilmu pengetahuan yang mengajarkan konsep berpikir sistematis dan logis adalah matematika. Sebagian besar orang menganggap bahwa ilmu matematika hanya masalah perhitungan dan pemecahan soal semata. Bahkan masih banyak yang beranggapan bahwa Matematika hanya berisi definisi, teorema dan rumus. Tidak salah jika mengatakan bahwa untuk mengasah cara berpikir sistematis dan logis, perlu banyak latihan pemecahan masalah karena teori dasar ini yang sangat dibutuhkan oleh para peneliti untuk rumusan atau kaidah penyelesaian masalah terkait dengan sains dan teknologi. Salah satu cabang dalam Matematika yang dapat dimanfaatkan oleh para peneliti adalah cabang analisis Fourier.

Sejarah analisis Fourier sangat luas, melibatkan banyak tokoh terkenal dan studi tentang berbagai fenomena fisik. Sebagai deret atau integral dari fungsi tertentu, analisis Fourier menyelidiki banyak metode untuk mempelajari suatu fungsi (yang kita kenal, seperti fungsi polinomial atau fungsi trigonometri). Analisis Fourier merupakan alat yang efektif untuk menganalisis sinyal seperti sinyal suara dan citra serta masalah yang berbentuk persamaan diferensial parsial yang muncul dalam sains dan teknik. Transformasi Fourier adalah bidang analisis Fourier yang menangani beragam masalah dalam persamaan diferensial parsial.

Josep Fourier (1768-1830) adalah seorang matematikawan sekaligus fisikawan asal Prancis yang pertama kali memperkenalkan transformasi Fourier. Fourier mendefinisikan transformasi Fourier dari deret Fourier yang berbentuk kompleks (eksponensial Fourier), yaitu fungsi periodik dengan periode mendekati tak hingga. Transformasi Fourier umumnya diaplikasikan dalam pemrosesan sinyal atau pengolahan citra digital. Salah satu hasil terpenting dalam transformasi Fourier adalah prinsip ketidakpastian Heisenberg dan transformasi Fourier fraksional.

Pada tahun 1927, seorang fisikawan bernama Werner Heisenberg menemukan prinsip ketidakpastian yang menyatakan bahwa “posisi dan momentum suatu partikel tidak bisa ditentukan dalam waktu yang bersamaan’.

Pernyataan ini sering disebut sebagai prinsip ketidakpastian Heisenberg. Apabila diartikan dalam kehidupan sehari-hari, prinsip ini menjelaskan bahwa jika mengerjakan dua atau lebih pekerjaan dalam suatu waktu, maka kita tidak akan mendapatkan hasil yang maksimal secara bersamaan.

Transformasi Fourier fraksional adalah sebuah generalisasi dari transformasi Fourier biasa dengan orde θ. Jika $\theta = \frac{\pi}{2}$, maka transformasi Fourier fraksional menjadi transformasi Fourier biasa. Ini menunjukkan bahwa transformasi Fourier biasa adalah kasus khusus dari transformasi Fourier fraksional. Beberapa sifat dan aplikasi dari transformasi Fourier dapat diperluas ke transformasi Fourier fraksional (Sutrisna, dkk., 2019).

Penelitian mengenai formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional merupakan salah satu topik yang menarik bagi banyak peneliti. Pada tahun 1945, Mandelshtam dan Tamm menurunkan hubungan ketidakpastian waktu dan energi yang menyatakan "suatu keadaan yang hanya ada untuk waktu yang singkat tidak dapat memiliki energi yang pasti". Kemudian dengan menganalisis simpangan baku posisi $\sigma(x)$ dan simpangan baku momentum $\sigma(p)$ dari operasi kesalahan pengukuran posisi dan operator gangguan pada momentum, Ozawa (2005) memodifikasi prinsip ketidakpastian Heisenberg. Yang, dkk (2013) telah meneliti mengenai aspek matematika dari prinsip ketidakpastian Heisenberg dalam analisis Fourier fraksional lokal. Rahmah (2022) meneliti prinsip ketidakpastian Heisenberg untuk menganalisis hubungan antara suatu fungsi dan hasil transformasi Fouriernya.

Berdasarkan penjabaran di atas, dapat disimpulkan bahwa beberapa prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier biasa bisa diperluas dalam konteks transformasi Fourier fraksional sehingga penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai relasi antara prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier biasa dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional. Penelitian ini akan mengkaji tentang prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional yang merupakan lanjutan dari prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier yang telah dikaji oleh Rahmah (2022). Oleh karena itu, penulis akan menuangkan hasil penelitian ini pada tugas akhir yang berjudul ***"Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Fourier Fraksional".***

I.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah berdasarkan latar belakang yang dipaparkan di atas, yaitu

1. Bagaimana relasi antara transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional?
2. Bagaimana membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional?

I.3. Batasan Masalah

Masalah pada penelitian ini dibatasi pada ruang $L^2(\mathbb{R})$, dan penurunan relasi antara transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional.

I.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini, yaitu :

1. Untuk memeroleh relasi antara transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional.
2. Untuk membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional.

I.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah dapat menambah pemahaman bagi penulis dan pembaca mengenai prinsip ketidakpastian Heisenberg, khususnya pada kajian transformasi Fourier fraksional dan dapat menjadi sumber referensi dalam pengembangan ilmu matematika bagi peneliti lain kedepannya.

I.6. Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri dari lima bab, dengan masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab. Rincian sistematika penulisan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan secara singkat mengenai konsep dasar yang menunjang pembahasan masalah, seperti definisi, teorema, dan sifat-sifat terkait prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini mencakup jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, prosedur atau tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan disajikan pembahasan dari diagram alur penelitian dan hasil yang diperoleh mengenai prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil dan pembahasan, serta saran untuk penelitian lain yang akan dikaji kedepannya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas beberapa teori-teori penting, seperti definisi, teorema, dan sifat-sifat yang menjadi pendukung atau fondasi penelitian tugas akhir ini. Selain itu, akan disajikan beberapa hasil penelitian yang telah diperoleh terlebih dahulu terkait prinsip ketidakpastian Heisenberg, transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional.

II.1. Bilangan Kompleks

Gagasan bilangan kompleks muncul sekitar abad pertama masehi ketika para matematikawan mengalami kesulitan dalam menyelesaikan suatu persamaan suku banyak (polinomial). Dalam proses mencari solusi, sistem bilangan riil saja tidak dapat menyelesaikan persamaan, sehingga diperkenalkan sistem baru yang disebut sistem bilangan kompleks. Bilangan kompleks sendiri merupakan penjumlahan dua suku, dengan suku pertama adalah bilangan riil dan suku kedua adalah bilangan imajiner.

Definisi 2.1.1.

Bilangan kompleks didefinisikan sebagai pasangan terurut dua bilangan riil x dan y yang ditulis dengan $z = (x, y) = x + iy$, dengan x adalah bagian riil dari z yang dinyatakan dengan $Re\ (z)$ dan y adalah bagian khayal atau imajiner dari z yang dinyatakan dengan $Im\ (z)$.

Definisi 2.1.2. *Jika bilangan kompleks $z = x + iy$, maka sekawan (conjugate) dinamakan kawan dari bilangan kompleks z dan didefinisikan sebagai $\bar{z} = x - iy$.*

Dalam bilangan kompleks, nilai mutlak atau yang lebih dikenal sebagai modulus didefinisikan sebagai bilangan riil non-negatif $\sqrt{x^2 + y^2}$ yang ditulis

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.1}$$

Teorema 2.1.1. *Jika z, z_1, dan z_2 bilangan kompleks, dengan $z = x + iy$, maka berlaku*

a) $|z|^2 = \left(Re(z)\right)^2 + \left(Im(z)\right)^2$ (2.2)

b) $|z| = |\bar{z}|$ (2.3)

c) $|z|^2 = z\bar{z}$ (2.4)

d) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (2.5)

(Kadir,2016)

II.2. Ruang Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$

Ruang Lebesgue L^2 dapat didefinisikan sebagai suatu ruang dari fungsi terukur dengan pangkat kuadrat dari nilai mutlaknya dapat diintegralkan.

Definisi 2.2.1. *Misalkan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$. Ruang $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai koleksi semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan mutlak, yakni*

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f: \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}. \tag{2.6}$$

(Gunawan, 2017)

Norma dari f dalam $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

Contoh 2.1

Misalkan $f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan apakah fungsi f dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$ dengan cara mencari integralnya ada.

Berdasarkan definisi ruang $L^2(\mathbb{R})$ pada Persamaan (2.6), diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|x|}\right|^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-|x|}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}\, dx.$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-2(-x)}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2x}\, dx$$

Jika dimisalkan $2x = p$, maka diperoleh $dx = \frac{dp}{2}$. Sehingga diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{p}\, dp + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-p}\, dp$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{p}\, dp + \int_{0}^{\infty} e^{-p}\, dp \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^{p}\, dp + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} e^{-p}\, dp \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \to -\infty} e^{p} |_{a}^{0} - \lim_{b \to \infty} e^{-p} |_{0}^{b} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \to -\infty} (e^{0} - e^{a}) - \lim_{b \to \infty} (e^{-b} - e^{-0}) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left((1 - 0) - (0 - 1) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$= 1 < \infty.$$

Jadi, $f \in L^2(\mathbb{R})$.

II.3. Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah transformasi integral linier yang mengubah suatu sinyal dari domain waktu (*space domain*) menjadi domain frekuensi (*frequency domain*). Transformasi ini umumnya digunakan pada bidang pemrosesan sinyal digital atau analisis sinyal.

2.3.1. Transformasi Fourier Kontinu

Berikut akan dibahas mengenai transformasi Fourier, invers transformasi Fourier dan sifat-sifat dari transformasi Fourier.

Definisi 2.3.1. Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$, transformasi Fourier dari f didefinisikan oleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\ dx, \tag{2.8}$$

dengan menggunakan *Euler's formula*

$$e^{-it} = cos\, t - i\, sin\, t, \tag{2.9}$$

maka Persamaan (2.8) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(cos\, \omega x - i\, sin\, \omega x)\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, cos\, \omega x\ dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, sin\, \omega x\ dx.\end{aligned}$$

Contoh 2.2

Diberikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \le x < \infty \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Akan dicari transformasi Fourier dari fungsi f di atas.

Berdasarkan definisi transformasi Fourier (2.8), diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-i\omega x}dx + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-i\omega x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-i\omega x}dx \\ &= 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+i\omega)}dx\end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x(1+i\omega)} dx$$

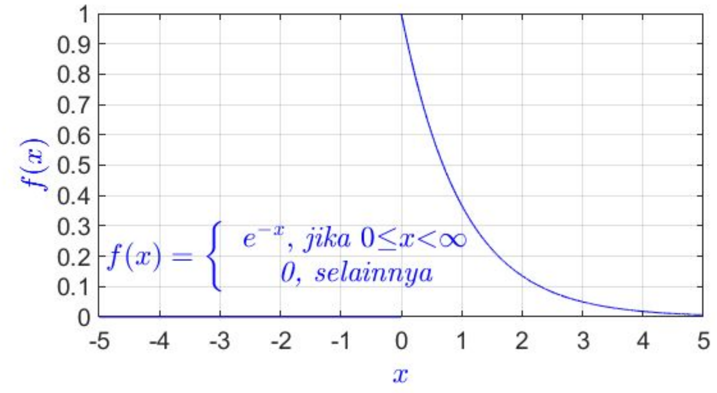
$$= \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{(1+i\omega)} e^{-x(1+i\omega)} \right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{(1+i\omega)} \left(e^{-t(1+i\omega)} - e^0 \right) \right)$$

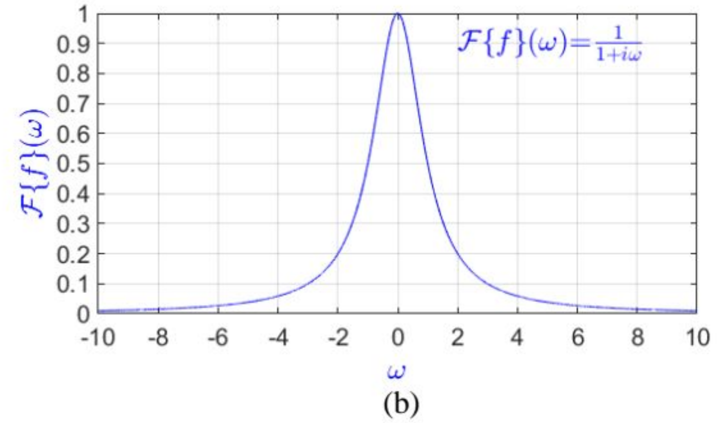
$$= -\frac{1}{(1+i\omega)}(-1)$$

$$= \frac{1}{(1+i\omega)}.$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)}$.



(a)



(b)

Gambar 2.1 (a) Grafik fungsi dari Contoh 2.2 dan (b) Grafik transformasi Fourier dari Contoh 2.2.

Contoh 2.3 (Transformasi Fourier fungsi Gaussian)

Diberikan fungsi

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}, \qquad \forall \alpha > 0.$$

Akan ditunjukkan transformasi Fourier dari fungsi Gauss di atas adalah

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{2.10}$$

Bukti. Untuk membuktikan Persamaan (2.11) digunakan sifat integral fungsi Gauss $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, dengan $\alpha > 0$ maka diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{2.11}$$

Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada Persamaan (2.8) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-i\omega x}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(x^2 + i\frac{\omega}{\alpha}x\right)}\, dx.
\end{aligned}$$

Dengan mengubah pangkatnya dalam bentuk kuadrat sempurna maka dapat dituliskan

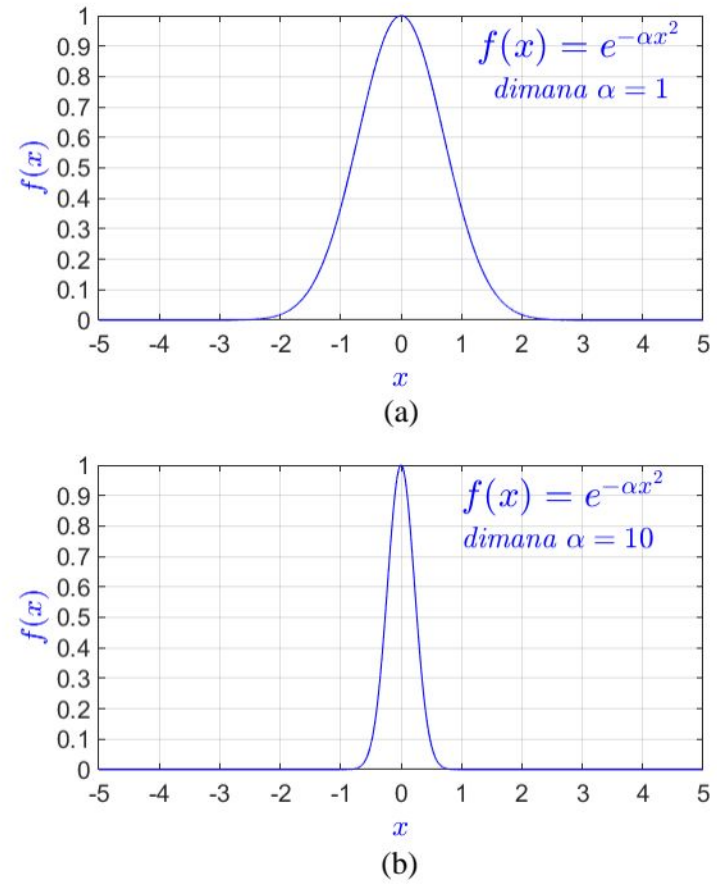
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{0-\alpha\left(\left(x^2 + i\frac{\omega}{\alpha}x + \left(i\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2\right) - \left(i\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2\right)}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(x^2 + i\frac{\omega}{\alpha}x + \left(i\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2\right) + \alpha\left(i\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(x + i\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2 - \alpha\left(\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right)}\, dx \\
&= e^{-\alpha\left(\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(x + i\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}\, dx.
\end{aligned}$$

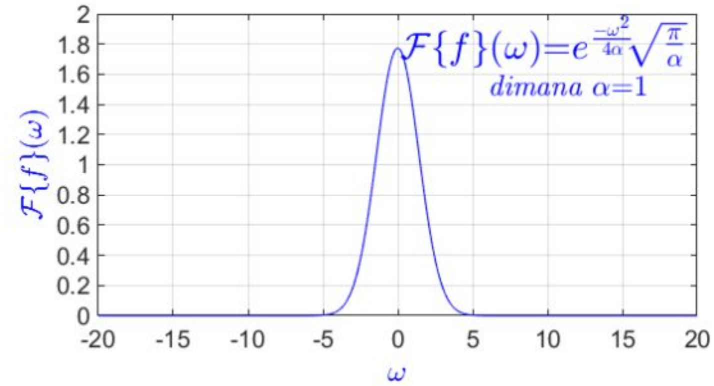
Misalkan $x + \frac{i\omega}{2\alpha} = u$ dan $du = dx$, maka

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = e^{-\alpha\left(\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2}\ du$$

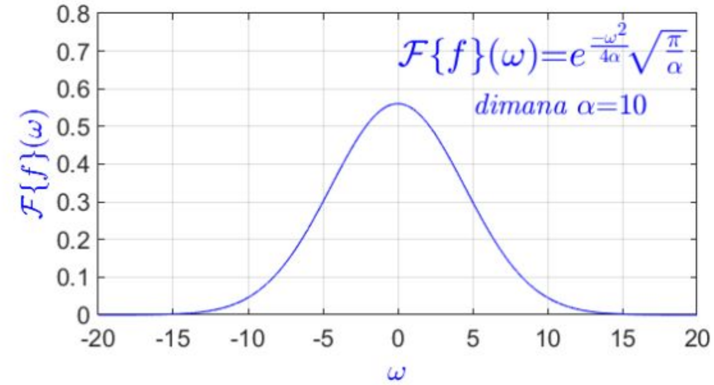
$$= e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Jadi terbukti bahwa transformasi Fourier dari fungsi Gauss $f = e^{-\alpha x^2}$ adalah $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.





(c)



(d)

Gambar 2.2 Grafik fungsi dari Contoh 2.3 untuk (a) $\alpha = 1$, dan (b) $\alpha = 10$, serta Grafik transformasi Fourier dari Contoh 2.3 untuk (c) $\alpha = 1$, dan (d) $\alpha = 10$.

Definisi 2.3.2. Misalkan fungsi $f, \mathcal{F}\{f\} \in L^2(\mathbb{R})$, invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega. \tag{2.12}$$

2.3.2. Sifat-sifat Transformasi Fourier

Pada bagian ini akan dibahas sifat-sifat dasar dari transformasi Fourier.

Teorema 2.3.1. Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$, maka sifat liniar dari transformasi Fourier adalah

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha\mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta\mathcal{F}\{g\}(\omega), \tag{2.13}$$

dengan α, β adalah konstanta bilangan riil.

Teorema 2.3.2. Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$ dan translasi $\tau_k f(x) = f(x - k)$, maka sifat translasi dari transformasi Fourier adalah

$$\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega). \tag{2.14}$$

Teorema 2.3.3. Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$ dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0} f(x) = e^{i\omega_0 x} f(x)$, maka sifat modulasi dari transformasi Fourier adalah

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \tag{2.15}$$

Teorema 2.3.4. Misalkan diberikan fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ dan misal $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$, maka sifat skala dari transformasi Fourier adalah

$$\mathcal{F}\{f_\alpha\}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \tag{2.16}$$

(Rusdin, dkk, 2013)

Corollary 2.3.1. Misalkan diberikan fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ dengan $f_\alpha(x) = f(-x)$, maka transformasi Fourier dari f_α adalah $\mathcal{F}\{f\}(-\omega)$, yaitu

$$\mathcal{F}\{f_\alpha\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(-\omega).$$

II.4. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Prinsip ketidakpastian Heisenberg merupakan salah satu hukum dasar dari mekanika kuantum dan sebagian besar memberikan pernyataan mengenai batasan dengan tidak adanya hasil pengukuran mutlak dalam setiap pengukuran kuantum. Werner Heisenberg (1927) mengemukakan formulasi ini dengan menyatakan bahwa posisi atau lokasi suatu elektron dalam atom tidak dapat ditentukan dengan pasti dan tidak dapat ditentukan dalam waktu yang bersamaan, karena semakin akurat momentum ditentukan, maka semakin tidak akurat penentuan posisinya, demikian sebaliknya. Pembuktiannya secara matematis diberikan oleh Wolfgang Pauli dan Hermann Weyl pada tahun 1928.

Berikut merupakan bentuk umum persamaan prinsip ketidakpastian Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}, \tag{2.17}$$

dengan keterangan

$\Delta x =$ ketidakpastian posisi,

$\Delta p =$ ketidakpastian momentum,

h $=$ konstanta Planck $(6{,}626 \times 10^{-34})$ kg $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$.

Dari Persamaan (2.17) diketahui bahwa hasil kali ketidakpastian posisi (Δx) suatu benda dan ketidakpastian momentum (Δp) dalam arah x akan lebih besar atau sama dengan hasil bagi konstanta Planck oleh 4π. Bentuk lain dari prinsip ketidakpastian Heisenberg juga tidak kalah penting. Salah satunya adalah modifikasi prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier. Dalam keadaan ini, Δx merupakan suatu fungsi dan Δp merupakan suatu transformasi Fourier.

II.5. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier

Pada bagian ini akan dibahas prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier yang menyatakan bahwa semakin besar suatu nilai fungsi maka akan semakin kecil nilai transformasi Fouriernya, dan sebaliknya. Sebelum membahas prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier, kita lihat teorema transformasi Fourier dari turunan berikut.

Teorema 2.5.1. *Misalkan* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *dan* $x \in (\mathbb{R})$, *maka* $\forall n \in \mathbb{N}$ *berlaku*

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\}(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}\{f\}(\omega). \tag{2.18}$$

Teorema 2.5.2. *Misalkan* $f,\ xf \in L^2(\mathbb{R})$ *dan juga* $\mathcal{F}\{f\}$, $\omega\mathcal{F}\{f\} \in L^2(\mathbb{R})$, *maka pertidaksamaan berikut berlaku:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\mathcal{F}\{f\}(\omega)|^2\, d\omega \quad \geq \frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx\right)^2. \tag{2.19}$$

(Rahmah, 2022)

Persamaan (2.19) disebut prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier. Pada perumusannya dapat dilihat modifikasi yang terjadi, dimana Δx sebagai fungsi f dan Δp sebagai transformasi Fourier dari f. Hal ini menjelaskan bahwa fungsi $xf(x)$ dan transformasi Fouriernya $\omega\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ tidak dapat teralokasikan dengan baik secara bersamaan. Jika f terkonsentrasi pada suatu titik di $\mathbb{R}$, maka $\mathcal{F}\{f\}$ akan tersebar pada $\mathbb{R}$ dan berlaku sebaliknya. ***Prinsip ketidakpastian ini akan digeneralisasi ke transformasi Fourier fraksional yang merupakan hasil utama penelitian ini.***

II.6. Transformasi Fourier Fraksional

Pada bagian ini akan disajikan definisi dari transformasi Fourier fraksional dan sifat-sifat dasarnya yang akan digunakan untuk memperoleh hasil utama penelitian ini.

Definisi 2.6.1. *Transformasi Fourier fraksional dengan sudut parameter θ dari fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$, dinotasikan $\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega)$, didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K^\theta(x,\omega) f(x)\ dx, \tag{2.20}$$

dengan kernelnya adalah

$$K^\theta(x,\omega) = \begin{cases} C^\theta e^{i(x^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - ix\omega\csc\theta} & ; \frac{\pi}{2} \neq \theta \neq n\pi, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\omega} & ; \theta = \frac{\pi}{2}, \\ \delta(x-\omega) & ; \theta = 2n\pi, \\ \delta(x+\omega) & ; \theta = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.21}$$

dan $C^\theta = (2\pi i \sin\theta)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-i\cot\theta}{2\pi}}$.

(Sutrisna, dkk., 2019).

Atau

$$\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1-i\cot\theta}{2\pi}} e^{i(x^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - ix\omega\csc\theta} f(x)\, dx. \tag{2.22}$$

Khususnya untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$, diperoleh

$$\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1-i\cot\frac{\pi}{2}}{2\pi}} e^{i(x^2+\omega^2)\frac{\cot\frac{\pi}{2}}{2} - ix\omega\csc\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{0-ix\omega} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{f\}(\omega).$$

Jadi, untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$ transformasi Fourier fraksional berubah menjadi transformasi Fourier biasa.

Contoh 2.4 (Transformasi Fourier Fraksional Fungsi Gaussian)

Diberikan fungsi Gauss dalam bentuk

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}, \qquad \forall \alpha > 0.$$

Akan ditunjukkan transformasi Fourier fraksional dari fungsi Gauss di atas adalah

$$\mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega) = \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\alpha - i\cot\theta}}\, e^{\frac{\omega^2}{2}\left(\mathrm{i}\cot\theta - \frac{\csc^2\theta}{2\alpha - i\cot\theta}\right)}. \tag{2.23}$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier fraksional pada Persamaan (2.21), diperoleh

$$\mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{i(x^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - ix\omega\csc\theta}\right) e^{-\alpha x^2}\,dx$$

$$= C^{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(x^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - ix\omega\csc\theta}\right) e^{-\alpha x^2}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - \alpha x^2 - ix\omega\csc\theta}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\cot\theta}{2}x^2 + i\frac{\cot\theta}{2}\omega^2 - \alpha x^2 - ix\omega\csc\theta}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}}\, e^{i\frac{\cot\theta}{2}\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(i\frac{\cot\theta}{2} - \alpha\right)x^2 - ix\omega\csc\theta}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}}\, e^{i\frac{\cot\theta}{2}\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{-2\alpha + i\cot\theta}{2}\right)x^2 - ix\omega\csc\theta}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}}\, e^{i\frac{\cot\theta}{2}\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{-2\alpha + i\cot\theta}{2}\right)\left(x^2 - i\left(\frac{2}{-2\alpha + i\cot\theta}\right)x\omega\csc\theta\right)}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}}\, e^{i\frac{\cot\theta}{2}\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{-2\alpha + i\cot\theta}{2}\right)\left(x^2 - \left(\frac{2\omega\csc\theta}{2\alpha i + \cot\theta}\right)x\right)}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}}\, e^{i\frac{\cot\theta}{2}\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{-2\alpha + i\cot\theta}{2}\right)\left(\left(x - \frac{\omega\csc\theta}{2\alpha i + \cot\theta}\right)^2 - \left(\frac{\omega\csc\theta}{2\alpha i + \cot\theta}\right)^2\right)}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}}\, e^{i\frac{\cot\theta}{2}\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{-2\alpha + i\cot\theta}{2}\right)\left(x - \frac{\omega\csc\theta}{2\alpha i + \cot\theta}\right)^2 - \left(\frac{-2\alpha + i\cot\theta}{2}\right)\left(\frac{\omega\csc\theta}{2\alpha i + \cot\theta}\right)^2}\, dx$$

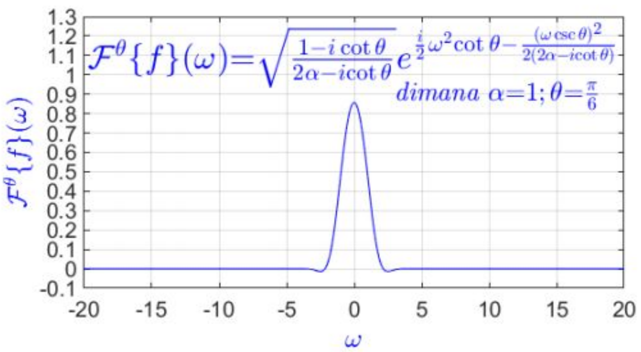
$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}}\, e^{i\frac{\cot\theta}{2}\omega^2} e^{-i\left(\frac{2\alpha i + \cot\theta}{2}\right)\left(\frac{\omega\csc\theta}{2\alpha i + \cot\theta}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\alpha - i\cot\theta}{2}\right)\left(x - \frac{\omega\csc\theta}{2\alpha i + \cot\theta}\right)^2}\, dx.$$

Kemudian, berdasarkan Persamaan (2.11) diperoleh

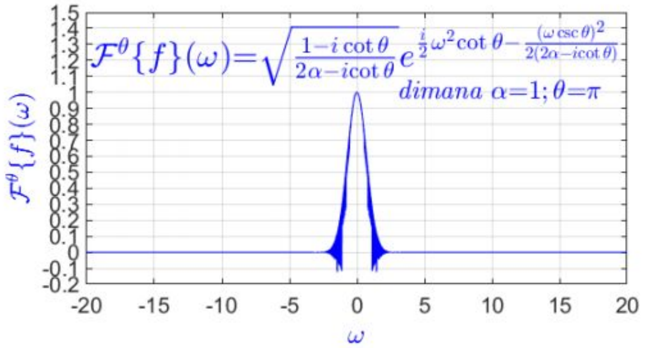
$$\mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega) = \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}}\, e^{i\frac{\cot\theta}{2}\omega^2} e^{-i\left(\frac{2\alpha i + \cot\theta}{2}\right)\left(\frac{\omega\csc\theta}{2\alpha i + \cot\theta}\right)^2} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{2\alpha - i\cot\theta}{2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\pi}}\, e^{i\frac{\cot\theta}{2}\omega^2} e^{-i\left(\frac{\omega^2\csc^2\theta}{2(2\alpha i + \cot\theta)}\right)} \sqrt{\frac{2\pi}{2\alpha - i\cot\theta}}$$

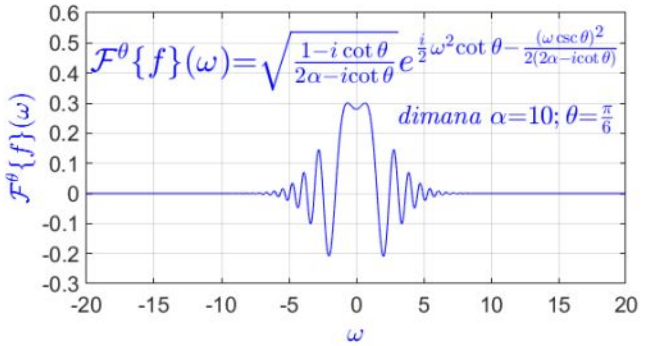
$$= \sqrt{\frac{1 - i\cot\theta}{2\alpha - i\cot\theta}}\, e^{\frac{\omega^2}{2}\left(\mathrm{i}\cot\theta - \frac{\csc^2\theta}{2\alpha - i\cot\theta}\right)}.$$



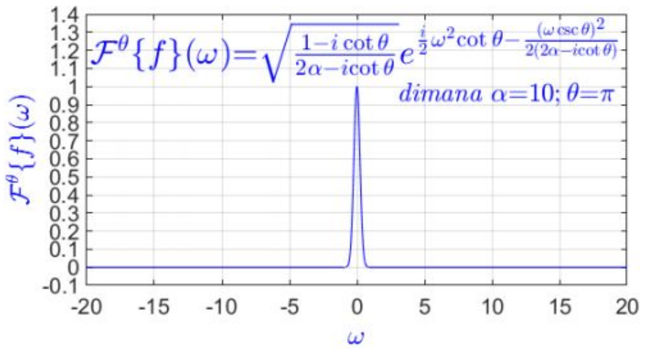
(a)



(b)



(c)



(d)

Gambar 2.3 Grafik transformasi Fourier dari Contoh 2.4 untuk (a) $\alpha = 1, \theta = \frac{\pi}{6}$, (b) $\alpha = 1, \theta = \pi$, (c) $\alpha = 10, \theta = \frac{\pi}{6}$, dan (d) $\alpha = 10, \theta = \pi$.