PENYEBARAN LOGAM BERAT PADA DANAU UNHAS DENGAN MENGGUNAKAN PERSAMAAN ADVEKSI-DIFUSI 2-DIMENSI

SKRIPSI

MUHAMMAD ICHSAN H. MUSLIM

H011191046

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JANUARI 2023

PENYEBARAN LOGAM BERAT PADA DANAU UNHAS DENGAN MENGGUNAKAN PERSAMAAN ADVEKSI-DIFUSI 2-DIMENSI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

MUHAMMAD ICHSAN H. MUSLIM
H011191046

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
JANUARI 2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Muhammad Ichsan H. Muslim
NIM	: H011191046
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Penyebaran Logam Berat pada Danau Unhas dengan Menggunakan Persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 18 Januari 2023

Yang menyatakan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL D7F18AKX219505188

Muhammad Ichsan H. Muslim
NIM. H011191046

LEMBAR PENGESAHAN

PENYEBARAN LOGAM BERAT PADA DANAU UNHAS DENGAN MENGGUNAKAN PERSAMAAN ADVEKSI-DIFUSI 2-DIMENSI

Disusun dan diajukan oleh
MUHAMMAD ICHSAN H. MUSLIM
H011191046

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 18 Januari 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Prof. Jeffry Kusuma, Ph.D.
NIP. 19641112 198703 1 002

Pembimbing Pertama,

Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc
NIP. 19750816 199903 1 001

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sebagai Nabi yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan dengan judul **"Penyebaran Logam Berat pada Danau Unhas dengan Menggunakan Persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi"** sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi serta nasihat dari berbagai pihak. Pada kesempatan kali ini, izinkan penulis menyampaikan terima kasih dan memberikan penghargaan kepada kedua orang tua penulis, Ayah **Haris Muslim** dan Ibu **Irmahani**, yang dengan sabar telah membesarkan dan mendidik penulis, serta senantiasa memberikan do'a dan menjadi pahlawan di sepanjang hidup penulis, sehingga penulis bisa mencapai titik ini dan mampu menyelesaikan pendidikan di perguruan tinggi dan mendapat gelar yang insyaAllah dapat dimanfaatkan penulis di kemudian hari. Terima kasih kepada adik saya **Inayah Haris** dan **Mohamad Ikhwan Haris**, serta seluruh keluarga yang telah memberi doa dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, penulis hendak menyampaikan ucapan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan begitu banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta para **Staf**

Departemen Matematika yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal mengenai persuratan.

3. Bapak **Prof. Jeffry Kusuma, Ph.D** selaku Pembimbing Utama dan Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc** selaku Pembimbing Pertama yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas meluangkan banyak waktu ditengah berbagai kesibukan dan prioritasnya dalam membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si** selaku Penguji sekaligus Pembimbing Akademik selama penulis menempuh Pendidikan S1. Penulis ucapkan terima kasih telah banyak memberi nasihat, saran dan masukan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini serta waktu yang telah diberikan dalam membimbing penulis dalam segala hal terkait penyelesaian studi S1 penulis.
5. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku Penguji yang telah banyak memberikan saran dan masukan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
6. Keluarga besar **Sulimin** dan **Gole** yang telah memberikan do’a dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan perkuliahan penulis.
7. **Irfa, Aan, Wawan, Ade, Tasya, dan Sukma** yang selalu memberikan dukungan dan bantuan serta menampung segala drama penulis selama masa perkuliahan dan penyelesaian skripsi penulis.
8. Sahabat penulis **Ibrahim, Bintang, Aco, Raja, dan Husen** yang telah menemani penulis dari bangku sekolah dasar, sekolah menengah, hingga di perkuliahan, dan selalu memberikan dukungan kepada penulis.
9. **Toni, Ilham, Zidan, Rafly, Reza, Hanif, Alfian, Ferdi, Daffa, Fatah, dan Samuel** yang selalu memberikan dukungan dan bantuan serta tempat meredahkan beban fikiran selama perkuliahan.
10. Keluarga besar **SMA Negeri 1 Kotamobagu** yang menjadi tempat penulis memulai masa pembentukan jati diri dan mengenal banyak hal, serta terkhusus kepada **Vivacious** atau teman sekelas penulis pada masa sekolah menengah atas yang sampai sekarang masih memberikan dukungan kepada penulis.

11. Teman-teman **Matematika 2019** yang telah memberi warna-warni masa perkuliahan serta senantiasa membantu dan memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
12. Teman-teman **POL19ON** dan **KKN PS Bone 108 Posko 7** yang telah membantu penulis menjadi lebih dewasa dan mengajari penulis agar menjadi pemimpin yang baik.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang juga telah memberikan doa, dukungan dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapat balasan dari Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 18 Januari 2023

Muhammad Ichsan H. Muslim

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Ichsan H. Muslim
NIM : H011191046
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Penyebaran Logam Berat pada Danau Unhas dengan Menggunakan Persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data *(database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Lamasi pada tanggal 18 Januari 2023

Yang menyatakan,

Muhammad Ichsan H. Muslim

ABSTRAK

Dalam skripsi ini, penulis tertarik untuk memecahkan masalah penyebaran logam berat pada danau Unhas dan bagaimana kekonvergenannya menggunakan diskritisasi skema beda hingga ke persamaan adveksi-difusi dua dimensi. Pertama mengubah terlebih dahulu persamaan awal menjadi keadaan *steady state* sehingga tidak ada perubahan terhadap waktu. Kemudian, penulsi menerapkan skema beda hingga sederhana seperti beda maju, beda mundur, dan beda pusat ke dalam persamaan dengan mempertimbangkan batas tak beraturan pada danau Unhas dan menggunakan data logam berat nyata sebagai syarat batas. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa solusi numerik yang digunakan konvergen ke suatu nilai dan dari simulasi yang telah diperoleh terlihat bahwa penyebaran logam berat tidak berasal dari saluran pembuangan tetapi berasal dari batas danau Unhas yang menyebar ke seluruh bagian danau yang dihasilkan dari proses adveksi-difusi polutan yang diangkut oleh aliran air.

Kata Kunci: logam berat, danau Unhas, batas tidak beraturan, adveksi-difusi, konvergen, *steady state*.

Judul	:	Penyebaran Logam Berat pada Danau Unhas dengan Menggunakan Persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi
Nama	:	Muhammad Ichsan H. Muslim
NIM	:	H011191046
Program Studi	:	Matematika

ABSTRACT

In this paper, the author concerned to solve the problem of distribution of heavy metals on Unhas lake and how it converges using discretization of different schemes to the two dimention advection-diffusion equation. First change the initial equation into a steady state so that there is no change with respect to time. Then, the author apply a simple finite difference schemes such as forward difference, backward difference, and central difference into the equation by considering the irregular boundary of the Unhas lake and using real heavy metal data as boundary conditions. The results obtained show that the numerical solutions used converge to a value and from the simulations that have been obtained it can be seen that the distribution of heavy metals does not originate from the sewer but originates from the Unhas lake boundary which spreads to all parts of the lake that result from the advection-diffusion process of pollutants are transported by the flow water.

Keywords: *heavy metal, Unhas lake, irregular boundary, advection-diffusion, convergence, steady state.*

Title	:	*Distribution of Heavy Metals on Unhas Lake Using Two Dimensions Advection-Diffusion Equation*
Name	:	*Muhammad Ichsan H. Muslim*
Student ID	:	*H011191046*
Study Program	:	*Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Matematika terapan merupakan salah satu ilmu matematika yang menekankan penerapan ilmu matematika dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu cakupan dari matematika terapan adalah metode numerik, dimana metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan masalah dengan cara memformulasikan masalah matematis sedemikian rupa sehingga dapat dipecahkan dengan operasi hitungan. Dalam metode numerik terdapat beberapa metode untuk menyelesaikan masalah matematik antara lain yaitu metode beda hingga. Metode beda hinga sendiri merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat fungsi dengan satu atau lebih variabel tak bebas beserta turunannya terhadap variabel bebas. Persamaan diferensial dapat diklasifikasikan menjadi dua berdasarkan jumlah variabel bebasnya, yaitu persamaan diferensial biasa yang hanya melibatkan satu variabel bebas dan persamaan diferensial parsial yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas. (Taylor, 2011).

Persamaan diferensial parsial (PDP) membentuk dasar dari banyak model matematika dari fenomena fisika, kimia, biologi, dan ekonomi. Untuk menyelidiki prediksi model PDP dari fenomena seperti itu sering kali perlu untuk mendekati solusi mereka secara numerik, biasanya dalam kombinasi dengan analisis kasus khusus sederhana, sementara dalam beberapa kasus baru-baru ini model numerik memainkan peran yang hampir independen (Morton & Mayers, 2005). PDP memiliki banyak peranan dalam pemodelan seperti mekanika fluida dan padat, evolusi populasi dan penyakit, persoalan peramalan, pemrosesan gambar, dan bidang lainnya. Dalam pemodelan mekanika fluida terdapat permasalah yang dapat kita temui pada kehidupan sehari-hari yaitu tentang transpor massa yang dimana salah satu kasusnya adalah penyebaran polutan di danau.

Untuk mempermudah pemahaman mengenai mekanika fluida ini, digunakan metode beda hingga yang merupakan salah satu metode yang dapat diterapkan untuk kasus fenomena transport di perairan dangkal dan aliran air tanah yang biasanya dinyatakan dengan persamaan Adveksi Difusi. Beberapa pendekatan skema beda hingga yang sering digunakan dalam penyelesaian transport aliran fluida dapat dibagi dalam dua bagian yaitu skema beda hingga Eksplisit (*Forward Time Centered Space* (FTCS), *Centered Time Centered Space* (CTCS), DuFort Frankel, Leapfrog dan lain-lain) dan skema beda hingga Implisit (*Backward Time Centered Space* (BTCS), Richardson, Crank-Nicolson, Metode ADI dan lain-lain). (Hutomo, 2019).

Polutan merupakan partikel-partikel kecil seperti zat kimia, mikro organisme, sampah plastik, logam berat, dan lain sebagainya yang dapat menyebabkan terjadinya polusi. Permasalahan transpor polutan dapat diselesaikan dengan metode beda hingga melalui persamaan Adveksi-Difusi dua dimensi yang dapat menentukan besarnya transpor massa polutan dengan hasil pendekatan yang cukup akurat. Persamaan adveksi-difusi dikategorikan ke dalam persamaan diferensial parsial orde dua parabolik.

Penyebaran polutan pada perairan dangkal, pendangkalan waduk, beserta pendangkalan sungai tidak dapat dibantah lagi sangat memengaruhi kehidupan masyarakat pesisir seperti kebanyakan masyarakat yang ada di Indonesia sehingga persoalan transpor polutan di perairan dangkal merupakan fenomena yang menarik untuk dikaji. (Kusuma, dkk., 2014)

Penelitian terkait penyebaran polutan pada suatu perairan merupakan salah satu topik yang menarik bagi banyak peneliti. Pada tahun 2014, Kusuma, dkk., melakukan penelitian numerik terkait permasalahan transfer polutan dengan menggunakan metode DuFort Frankel pada persamaan Adveksi-Difusi 2-D untuk variabel konstan. Pada tahun 2016, Sampera dan Apriansyah melakukan penelitian terkait kasus pencemaran Sungai Sintetik dan Sungai Kapuas dengan menggunakan metode implisit Crank-Nicholson mereka berhasil memodelkan penyebaran polutannya.

Pada tahun 2017 Kusuma, dkk., mengambil kasus pada danau unhas melakukan penelitian terkait penyebaran polutan bakteri menggunakan persamaan Adveksi-Difusi 2-D. Selanjutnya pada tahun 2019, Hutomo dkk., , melakukan penelitian lagi mengenai transpor polutan menggunakan metode DuFort Frankel untuk koefisien variabel.

Berdasarkan penelurusan literatur yang dilakukan oleh penulis, penulis memutuskan untuk mengkaji dan melakukan penelitian terkait penyebaran logam berat pada danau unhas dengan menggunakan persamaan adveksi-difusi 2-dimensi.

I.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah berdasarkan latar belakang di atas antara lain:

1. Bagaimana pemodelan numerik persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi penyebaran logam berat pada danau unhas ?
2. Bagaimana kekonvergenan model numerik persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi penyebaran logam berat pada danau unhas ?

I.3 Batasan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi pada angkutan polutan pada air menggunakan skema beda hingga dengan jenis polutan logam berat disediakan sebagai syarat batas untuk masalah kondisi *Steady*, yang berarti bahwa segala karateristik aliran (kecepatan, kerapatan, dan difusifitas) dianggap tetap setiap waktu.

I.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah:

1. Mengonstruksi model numerik persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi penyebaran logam berat pada danau unhas.
2. Menyelidiki kekonvergenan model numerik persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi penyebaran logam berat pada danau unhas.

I.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah dapat menambah pemahaman dan wawasan serta dapat menjadi sumber referensi dalam mengembangkan ilmu matematika terapan khususnya di bidang Persamaan Differensial Parsial dan Metode Beda Hingga terkait dengan Penyebaran Logam Berat pada Danau Unhas dengan Menggunakan Persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi.

I.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari lima bagian, dengan masing-masing bagian dibagi ke dalam beberapa subbab. Adapun rincian sistematika penulisan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini mencakup latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini mencakup pemaparan secara singkat mengenai konsep dasar yang menunjang pembahasan masalah, yakni definisi-definisi dan istilah-istilah yang berkaitan dengan topik penelitian.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini mencakup metode penelitian, waktu dan tempat penelitian, dan prosedur penelitian.

BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini akan disajikan pembahasan dari tugas akhir ini yakni Penyebaran Logam Berat pada Danau Unhas dengan Menggunakan Persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini menyajikan kesimpulan hasil penelitian dan saran yang ditujukkan bagi peneliti selanjutnya untuk mengembangkan penelitian yang telah dikaji dalam tugas akhir ini.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas beberapa istilah penting dalam proses transpor polutan termasuk beberapa definisi, metode, dan formula yang berkaitan dengan konsep transpor polutan. Selain itu, juga disajikan beberapa hasil penelitian yang telah diperoleh terkait penyebaran polutan pada air dengan menggunakan metode beda hingga.

II.1 Polutan

Polutan merupakan zat atau bahan yang dapat mengakibatkan pencemaran. Syarat suatu zat disebut sebagai polutan jika jumlahnya melebihi batas normal, contohnya karbon dioksida dengan kadar 0,033% di udara berguna bagi tumbuhan, akan tetapi jika kadarnya lebih tinggi dari 0,033%, maka akan memberikan efek merusak. Disamping itu juga, suatu zat dapat dikatakan polutan jika keberadaannya pada waktu dan tempat yang tidak tepat (Fardiaz, 1992).

Polutan di perairan dapat berupa tumpahan minyak, limbah masyarakat, maupun limbah pabrik yang dibuang langsung ke perairan. Polutan yang masuk dalam perairan dapat mengalami perubahan. Proses perubahan tersebut adalah lapisan (slick formation), menyebar, dissolution, menguap (evaporation), polimerisasi (polymerization), emulsifikasi (emulsification), fotooksida (photooxidation), biodegradasi mikroba (micronial degradation), bentukan gumpalan ter (tur lump formation), dan dicerna oleh plankton (Mukhtasor, 2007).

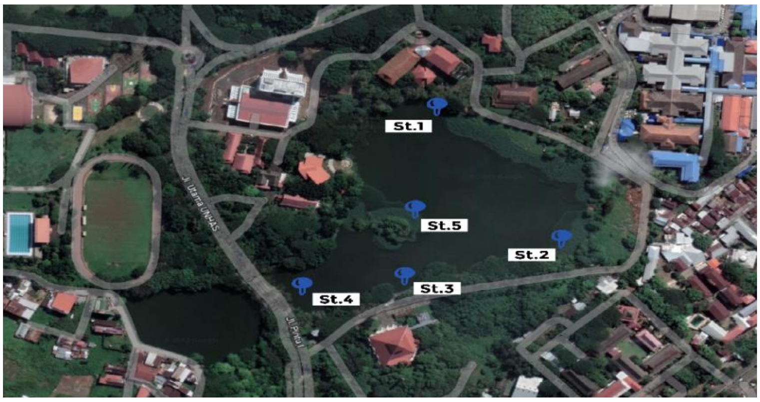
Salah satu limbah bahan pencemar yang banyak menarik perhatian adalah logam berat. Pencemaran logam berat merupakan salah satu faktor penyebab timbulnya isu perubahan lingkungan terutama dalam hal pencemaran lingkungan oleh logam berat beracun. Logam berat menjadi polutan berbahaya karena tidak dapat terdegradasi dan karenanya terakumulasi di lingkungan, berpotensi untuk mencemari rantai makanan dan cenderung menjadi kontaminan bagi organisme akuatik. Logam berat

(As, Cd, Co, Cr, Cu, Hg, Mn, Mo, Pb, dan Zn) merupakan salah satu polutan penting di lingkungan alami karena toksisitas, persistensi, dan bioakumulasinya. Polusi logam berat dalam sistem perairan berada pada tingkat yang mengkhawatirkan dan telah menjadi masalah penting di seluruh dunia, terutama di negara-negara sedang berkembang seperti Indonesia (Mustafa, dkk., 2019).

Penelitian tentang beberapa logam di danau Universitas Hasanuddin (Unhas) telah dilakukan sebagai dasar pengelolaan danau sebagai tempat budidaya ikan. Penelitian ini dilakukan dengan mengambil contoh air, sedimen, dan biota air yaitu ikan pada lima titik stasiun seperti pada gambar 2.1.1. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa parameter suhu dengan rata-rata 32,72 ℃ telah melebihi standard baku mutu. Logam merkuri (Hg), kadium (Cd) dan kobalt (Co) tidak terdeteksi di perairan danau. Arsen (As) terdeteksi dalam kadar yang masih diperbolehkan standard baku mutu. Krom (Cr) dan timbel (Pb) terdeteksi di perairan danau Unhas dengan konsentrasi yang sudah melebih ambang batas seperti pada tabel 2.1.1 berikut (Yaqin, dkk., 2018).

Jenis Logam Berat (mg/l)	**Nilai Kisaran**	**Stasiun**				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
Arsen (AS)	1	0,011	0,385	0,454	0,463	0,48
Kadium (Cd)	0,01	0	0	0	0	0
Krom (Cr)	0,05	2,02	0	0	0	0
Kobalt (Co)	0,2	0	0	0	0	0
Timbel (Pb)	0,03	6,1	5,53	0,24	0,46	7,2

Tabel 2.1.1 Data Logam Berat pada Danau Unhas di lima titik Stasiun



Gambar 2.1.1 Citra Satelit menggunakan Google Earth
(Google Earth, 2022)

II.2 Persamaan Adveksi-Difusi

Persamaan Adveksi-Difusi merupakan persamaan differensial parsial yang menggambarkan sebuah persoalan fenomena transport polutan aliran air tanah, yang sering disebut sebagai mass transport atau solute transport. Ada dua proses dasar yang menjadi masalah dalam pengangkutan zat polutan pada aliran air, yaitu Difusi dan Adveksi (Luknanto,1992).

Difusi merupakan peristiwa berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian berkonsentrasi rendah. Difusi menggambarkan proses bertambah luasnya area penyebaran polutan yang disebabkan oleh gerakan acak molekul-molekul polutan. Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang merupakan persamaan yang menggambarkan berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah (Noviyani, dkk., 2019).

Untuk peristiwa difusi, Adolph Fick, seorang fisikawan Jerman, mengambil analogi dengan hukum Fourier mengenai aliran panas, menyatakan bahwa "Pada arah tertentu, massa dari suatu bahan terlarut yang melewati suatu luasan tertentu tiap unit waktu adalah sebanding dengan gradien konsentrasi bahan terlarut pada arah tersebut" (Luknanto, 1992).

Tingkat laju perpindahan massa dinyatakan dengan fluks difusi (q_d), yang didefinisikan sebagai massa (atau jumlah atom) M berdifusi melalui dan tegak lurus terhadap area silang unit padat per satuan waktu (Callister, 2001). Dalam bentuk matematis, dapat digambarkan sebagai berikut

$$q_d = \frac{M}{At} \tag{2.2.1}$$

dimana A menunjukkan daerah dimana difusi terjadi dan t adalah waktu difusi yang telah berlalu. Dalam bentuk diferensial menjadi

$$q_d = \frac{1}{A}\frac{dM}{dt} \tag{2.2.2}$$

dengan $q_d (\frac{kg}{m^2 s})$.

Salah satu contoh umum difusi dalam keadaan steady-state adalah difusi gas melalui lempeng logam dimana konsentrasi (atau tekanan) yang menyebar pada kedua permukaan plat konstan. Ketika konsentrasi C diplotkan terhadap posisi (atau jarak) di dalam x padat, kurva yang dihasilkan disebut profil konsentrasi, kemiringan pada titik tertentu pada kurva ini adalah gradien konsentrasi:

$$gradien\ konsentrasi = \frac{dC}{dx} \tag{2.2.3}$$

profil konsentrasi diasumsikan linier dan

$$gradien\ konsentrasi = \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C_A - C_B}{x_A - x_B} \tag{2.2.4}$$

dengan koefisien dari konsentrasi massa difusi adalah $\frac{kg}{m^3}$ (Callister, 2001).

Matematik dari difusi steady-state dalam satu arah (x) relatif sederhana, karena fluksnya sebanding dengan gradien konsentrasi melalui ekspresi

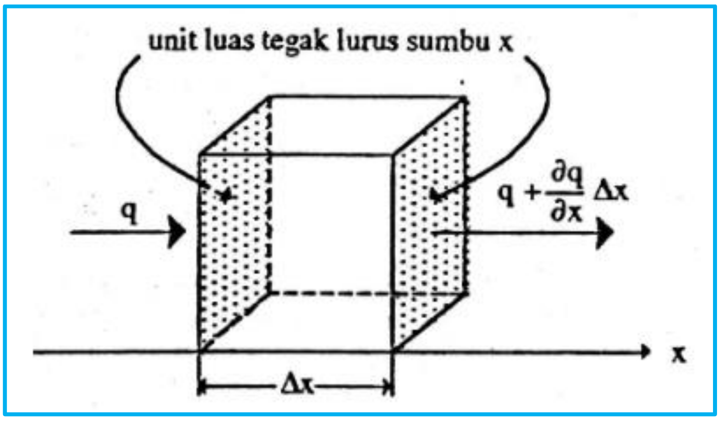
$$q_d = -D\frac{dC}{dx} \tag{2.2.5}$$

dengan D adalah koefisien difusi (m^2/s). Tanda negatif tersebut menunjukkan bahwa arah difusi menuruni gradien konsentrasi, dari arah tinggi sampai konsentrasi rendah. Persamaan (2.2.5) merupakan hukum pertama Fick (Callister, 2001).

Hukum Fick adalah suatu pernyataan yang mengkorelasikan fluks suatu massa dengan gradient konsentrasi. Sekarang akan dijabarkan suatu hukum konservasi massa untuk mendapatkan korelasi/persamaan yang kedua yang berlaku untuk semua jenis proses angkutan. Kombinasi antara hukum Fick dan konservasi massa akan menghasilkan suatu persamaan yang mendiskripsikan proses difusi.

Gambar 2.2.1 berikut menggambarkan proses angkutan satu dimensi dimana suatu massa terangkut pada arah x. Pada gambar, terdapat dua bidang sejajar dengan satu unit luasan yang tegak lurus sumbu x dan terpisah dengan jarak Δx. $C(x,t)$ adalah massa per unit volume pada titik x dan waktu t. Jadi di dalam volume control terdapat massa sebesar $C(x,t)\Delta x$, Karena molekul bahan terlarut masuk dan keluar dari volume kontrol tersebut, maka laju perubahan massanya adalah

$$\frac{\partial(C\Delta x)}{\partial t} = \frac{\partial C}{dt}\Delta x. \qquad (2.2.6)$$



Gambar 2.2.1 Volume kontrol dalam angkutan polutan (Luknanto, 1992)

Laju perubahan ini harus sama dengan perbedaan fluks yang masuk dan keluar volume kontrol. Jika fluks massa melalui unit luasan pada titik x adalah $q_d(x,t)$, maka fluks massa tiap unit luasan pada titik $x + \Delta x$ adalah $q_d(x,t) + \frac{\partial q_d(x,t)}{\partial x}\Delta x$, sehingga perbedaan antara keduanya adalah $\frac{\partial q_d(x,t)}{\partial x}\Delta x$. Perbedaan ini harus sama dengan laju perubahan massa dalam volume kontrol, sehingga memberikan persamaan kontinuitas massa sebagai berikut

$$\frac{\partial q_d}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial C}{\partial t}\Delta x = 0 \tag{2.2.7}$$

atau

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial q_d}{\partial x}. \tag{2.2.8}$$

Sedangkan untuk proses difusi molekuler berlaku hukum Fick (Persmaan 2.2.5) sehingga jika disubstitusikan ke dalam persamaan (2.2.8) menjadi

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-D\frac{\partial C}{dx}\right) = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \tag{2.2.9}$$

Jika dikembangkan ke dalam 2-Dimensi, maka persamaan (2.2.9) menjadi

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \tag{2.2.10}$$

dimana D_x dan D_y masing-masing koefisien difusi dalam arah x dan y.

Berbeda dengan Difusi, Adveksi merupakan proses perpindahan suatu zat atau kuantitas dengan gerakan massa suatu fluida secara pasif, dimana fluks adveksi (q_v) yang didefinisikan sebagai kecepatan aliran atau fluida, jika proses ini adalah pelepasan zat secara pasif oleh cairan pembawa, maka fluks dapat dengan mudah dikaitkan dengan konsentrasi zat dan kecepatan fluida, sehingga persamaan (2.2.1) menjadi:

$$q_v = \frac{M}{V}\frac{V}{At} = vC \tag{2.2.11}$$

dimana V adalah volume dari fluida dan v adalah kecepatan aliran (Cushman-Roisin & Beckers, 2009).

Proses Difusi Teradveksi merupakan sebuah proses difusi dengan keadaan cairan mengalir/bergerak dengan kecepatan tertentu v. Difusi cairan yang mengalir ini diasumsikan bahwa proses difusi dan adveksi adalah sebuah proses terpisah dan dapat digabungkan. Hal ini berarti proses difusi dalam cairan yang mengalir dianggap sama dengan proses difusi dalam cairan diam. Total massa bahan terlarut teradveksi yang melalui volume kontrol dapat dinyatakan dalam persamaan

$$q_t = q_v + q_d = vC + \left(-D\frac{\partial C}{\partial x}\right). \qquad (2.2.12)$$

Pada ruas kanan persamaan (2.2.12), suku pertama (vC) adalah fluks massa karena teradveksi, sedangkan suku kedua $\left(-D\frac{\partial C}{\partial x}\right)$ merupakan flukas massa karena proses difusi. Sehingga jika persamaan (2.2.12) disubstitusikan ke persamaan (2.2.8) menjadi: (Luknanto, 1992)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (vC)}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (2.2.13)$$

atau

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \qquad (2.2.14)$$

Persamaan (2.2.14) merupakan persamaan Adveksi-Difusi 1-Dimensi, jika dikembangkan ke dalam persamaan Adveksi-Difusi 2-Dimensi maka persamaan menjadi

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_x\frac{\partial C}{\partial x} + v_y\frac{\partial C}{\partial y} = D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \qquad (2.2.15)$$

dimana v_x dan v_y merupakan kecepatan aliran dalam arah x dan y.

Koefisien difusi logam berat pada air dengan temperatur 33℃ telah diteliti dengan hasil seperti pada tabel (2.2.1) berikut (Davidson, 2016).

Jenis Logam Berat (mg/l)	**Koefisien Difusi**
Arsen (AS)	11,11
Kadium (Cd)	8,83
Krom (Cr)	7,3
Kobalt (Co)	8,99
Timbel (Pb)	11,6

Tabel 2.2.1 Koefisien Difusi Logam Berat dalam Air pada suhu 33℃

dimana koefisien difusi pada tabel (2.2.1) dikalikan dengan 10^{-10} untuk memberikan nilai koseifisien difusi dengan satuan m^2/s (Davison, 2016), sedangkan koefisien adveksi diambil dengan menggunakan data kecepatan angin pada danau unhas yaitu sebesar 1.59 m/s (Global Wind Atlas, 2023).

II.3 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan salah satu metode yang dapat diterapkan untuk kasus fenomena transpor di perairan dangkal dan aliran air tanah. Metode ini biasanya dinyatakan dengan persamaan adveksi difusi karena metode ini dapat memberikan hasil pendekatan yang cukup akurat (Hoffmann & Chiang, 1995). Dalam penerapannya, Metode beda hingga dapat menyelesaikan permasalahan aliran fluida dengan pendekatan komputasi dinamika fluida yang dimanan bentuk dari persamaan diferensial didekati dengan persamaan beda hingga. Keakuratan dari metode beda hingga diperoleh dari ukuran grid yang kecil, dimana semakil kecil grid yang digunakan akan meningkatkan keakuratan dari metode ini. Sehingga dibutuhkan perhitungan menggunakan aplikasi komputer agar lebih efisien.

Pada umumnya fungsi-fungsi yang bentuknya kompleks dapat disederhanakan menjadi fungsi hampiran dalam bentuk fungsi polinomial yang lebih sederhana. Fungsi polinomial lebih mudah dipahami kelakuannya. Apabila kita melakukan pekerjaan hitungan dengan menggunakan fungsi yang sesungguhnya, maka akan kita dapatkan hasil solusi eksak (solusi sejati). Tetapi bila kita melakukan pekerjaan hitungan dengan menggunakan fungsi hampiran, maka akan kita dapatkan hasil solusi hampiran (solusi pendekatan).

Perbedaan antara solusi eksak dan solusi hampiran terletak pada adanya galat pada solusi hampiran. Galat pada solusi numerik harus dihubungkan dengan seberapa teliti polinomial dalam menghampiri fungsi yang sesungguhnya. Biasanya dalam menghampiri fungsi yang sesungguhnya, orang menggunakan apa yang disebut dengan deret Taylor (Zuhair, 2008).

Definisi 2.3.1 Andaikan suatu fungsi $f(x)$ dan turunannya, yaitu $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ kontinu dalam selang $[a, b]$, dan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai x disekitar x_0 dapat diekspansikan (diperluas) ke dalam deret Taylor sebagai, (Zuhair, 2008)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0). \tag{2.3.1}$$

Apabila $h = x - x_0$ atau $x = h + x_0$ persamaan (2.3.1) dapat dinyatakan sebagai,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0). \tag{2.3.2}$$

Persamaan (3.1.1) dan (3.1.2) merupakan penjumlahan dari suku-suku yang disebut deret. Jumlah suku-suku dalam deret Taylor adalah tak berhingga (Zuhair, 2008).

Diberikan sebuah fungsi $f(x,t)$ yang analitik, maka $f(x + \Delta x, t)$ dapat diekspansikan dalam sebuah deret Taylor di sekitar x sebagai berikut

$$f(x + \Delta x, t) = f(x,t) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t) + \cdots \tag{2.3.3}$$

dan

$$f(x - \Delta x, t) = f(x,t) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t) + \cdots. \tag{2.3.4}$$

Dari persamaan (2.3.3) dan (2.3.4) dapat diperoleh tiga skema dari persamaan beda hingga yang dapat digunakan untuk mendiskritisi persamaan diferensial parsial, yaitu *Forward Difference* (Beda Maju), *Backward Difference* (Beda Mundur), dan *Central Difference* (Beda Pusat) (Hoffmann & Chiang, 1995).

Untuk memperoleh pendekatan beda maju orde pertama dilakukan dengan mengubah bentuk persamaan (2.3.3) menjadi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x,t)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{2.3.5}$$

$$-\frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t)+\cdots.$$

Jika suku-suku yang memuat faktor (Δx) atau yang lebih tinggi dijumlahkan dan dinotasikan dengan $O(\Delta x)$, Dimana $O(\Delta x)$ merupakan orde kesalahan pada bentuk suku pertama atau suku terbesar dari sisa deret. Jika indeks i digunakan sebagai diskritisasi titik ke arah x, dan n untuk t maka persamaan (2.3.5) di atas menjadi:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,n}=\frac{f_{i+1}^n-f_i^n}{\Delta x}+O(\Delta x). \tag{2.3.6}$$

Persamaan (2.3.6) di atas merupakan skema pendekatan beda maju orde pertama dari $\frac{\partial f}{\partial x}$ orde pemotongan (Δx).

Selanjutnya dengan cara yang sama, untuk memperoleh pendekatan beda mundur orde pertama dari $\frac{\partial f}{\partial x}$ dilakukan dengan cara mengubah bentuk persamaan (2.3.4) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f(x,t)-f(x-\Delta x,t)}{\Delta x}+\frac{\Delta x}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\\-\frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t)+\cdots.\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Jika suku-suku yang memuat faktor (Δx) atau yang lebih tinggi dijumlahkan dan dinotasikan dengan $O(\Delta x)$, Dimana $O(\Delta x)$ merupakan orde kesalahan pada bentuk suku pertama atau suku terbesar dari sisa deret. Jika indeks i digunakan sebagai diskritisasi titik ke arah x, dan n untuk t maka persamaan (2.3.7) di atas menjadi:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,n}=\frac{f_i^n-f_{i-1}^n}{\Delta x}+O(\Delta x). \tag{2.3.8}$$

Untuk memperoleh pendekatan beda pusat, dapat digunakan operasi aljabar yang melibatkan persamaan (2.3.3) dan persamaan (2.3.4). Jika persamaan (2.3.3) dikurangkan ke persamaan (2.3.4), maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x,t)-f(x-\Delta x,t)=2\Delta x\frac{\partial f}{dx}(x,t)\\+2\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t)-\cdots.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Persamaan (2.3.7) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x,t) - f(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \qquad (2.3.10)$$

dimana $O(\Delta x)^2$ merupakan orde kesalahan pada bentuk suku pertama atau suku terbesar dari sisa deret. Jika indeks i digunakan sebagai diskritisasi titik ke arah x, dan n untuk t maka persamaan (2.3.10) di atas menjadi:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,n} = \frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2. \qquad (2.3.11)$$

Untuk memperoleh metode beda hingga untuk turunan parsial orde kedua, maka digunakan ekspansi deret Taylor dari $f(x+2\Delta x,t)$ di sekitar x sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x+2\Delta x,t) = f(x,t) &+ \frac{2\Delta x}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \\ &+ \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t) + \cdots \end{aligned} \qquad (2.3.12)$$

dimana beda maju orde kedua diperoleh dengan mengurangkan persamaan (2.3.12) dengan dua kali persamaan (2.3.3) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(x+2\Delta x,t) - 2f(x+\Delta x,t) &= -f(x,t) \\ +(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{dx^2}(x,t) &+ (\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t) + \cdots. \end{aligned} \qquad (2.3.13)$$

Persamaan (2.3.13) di atas dapat diubah menjadi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+2\Delta x,t) - 2f(x+\Delta x,t) + f(x,t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \qquad (2.3.14)$$

bagian $O(\Delta x)$ merupakan orde pemotongan. Jika indeks i digunakan untuk diskritisasi pada arah x, dan n untuk arah t maka diperoleh persamaan beda maju untuk orde kedua, sebagai berikut:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,n} = \frac{f_{i+2}^{n} - 2f_{i+1}^{n} + f_{i}^{n}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x). \qquad (2.3.15)$$

Selanjutnya dengan cara yang sama, untuk memperoleh pendekatan beda mundur orde kedua dari $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ dilakukan dengan cara yang sama dengan beda maju orde kedua sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x,t) - 2f(x-\Delta x,t) + f(x-2\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \qquad (2.3.16)$$

atau dalam bentuk indeks i dan n dapat dituliskan

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,n} = \frac{f_i^n - 2f_{i-1}^n + f_{i-2}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x). \qquad (2.3.17)$$

Berbeda dengan metode beda pusat untuk orde pertama, metode beda pusat untuk orde kedua diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.3.3) dengan (2.3.4) sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x,t) - 2f(x,t) + f(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2. \qquad (2.3.18)$$

Persmaan (2.3.13) dapat ditulis dalam bentuk indeks sebagai berikut

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,n} = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \qquad (2.3.19)$$

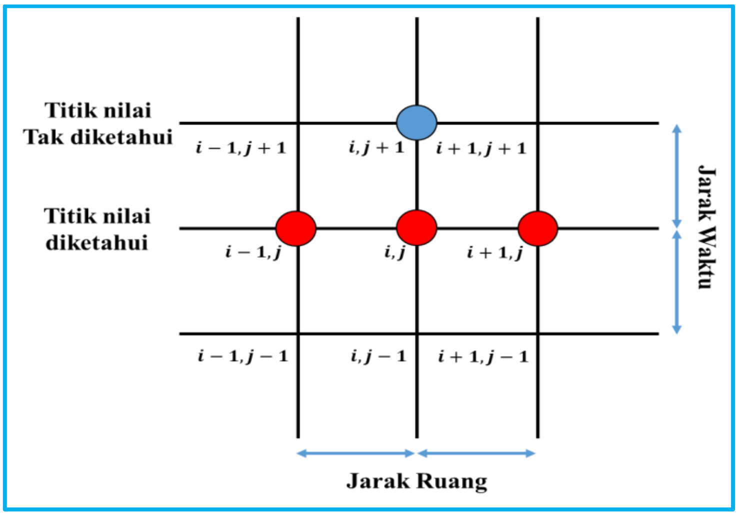
dimana persamaan (2.3.19) merupakan pendekatan beda pusat untuk turunan parsial orde dua (Alman, 2013).

II.4 Formulasi Eksplisit dan Implisit

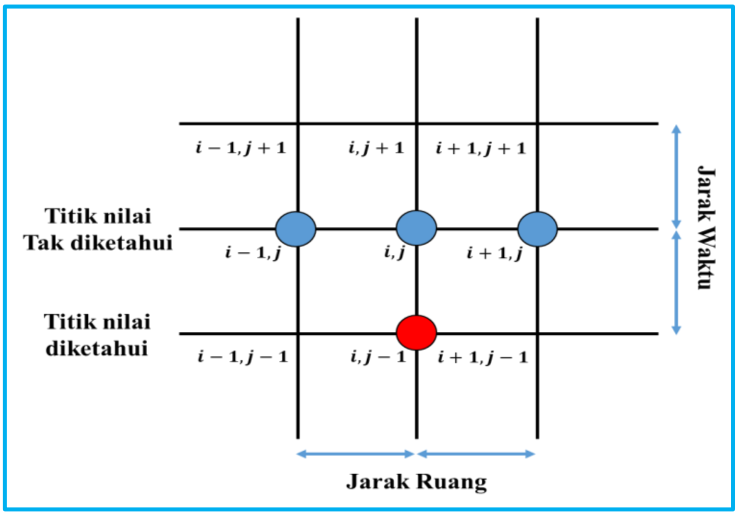
Berbagai formulasi dari metode iteratif dapat dibagi menjadi dua kategori. Jika suatu formulasi menghasilkan hanya satu yang tidak diketahui, maka itu disebut metode iteratif titik. Formulasi ini mirip dengan metode eksplisit persamaan parabola. Di sisi lain, jika formulasi melibatkan lebih dari satu yang tidak diketahui (biasanya tiga tidak diketahui, menghasilkan koefisien matriks tridiagonal), itu diklasifikasikan sebagai metode garis iteratif, yang mirip dengan formulasi implisit dari persamaan parabola (Hoffmann & Chiang, 1995).

Formulasi eksplisit pada metode beda hingga lebih mudah digunakan jika dibandingkan dengan formulasi implisit, karena pada formulasi eksplisit hanya perlu mengevaluasi satu titik dalam satu persamaan bedanya sehingga iterasi dilakukan secara langsung. Sedikit berbeda dengan formulasi implisit yang persamaan beda terdapat variabel yang lebih dari satu tidak dapat diketahui secara langsung. Dalam suatu persamaan diferensial parsial ada persamaan yang perlu dilakukan evaluasi menggunakan formulasi implisit.

Beberapa metode dalam formulasi eksplisit dapat diterapkan seperti Forward Time Centered Space (FTCS), Centered Time Centered Space (CTCS), Saul-yev, Richardson, dan DuFort-Frankel. Metode yang biasa digunakan dalam formulasi implisit sebenarnya hanya memodifikasi dari pendekatan deret Taylor nya. Metode dalam formulasi ini seperti metode Backward in Time and Central in Space (BTCS) dan Crank-Nicolson. Diskritasi formula eksplisit dan implisit dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.4.1 Titik grid untuk skema eksplisit FTCS



Gambar 2.4.2 Titik grid untuk skema implisit BTCS

Dalam evaluasi nilai pada tiap grid untuk formulasi implisit, terbentuk suatu sistem persamaan linier yang dapat dibentuk ke dalam suatu matriks dengan ordo $n\ x\ n$. Kemudian diperlukan metode dalam pemecahan persamaan linier tersebut seperti Metode Invers matriks dan metode numerik iteratif. Banyak metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan implisit. Salah satu metode numerik yang menggunakan skema berulang adalah metode Gauss-Seidel. Metode Gauss-Seidel merupakan metode iteratif dalam menyelesaikan persamaan linier multivariabel (Biringen, 2011).

II.5 Konsistensi, Stabilitas, dan Konvergensi Persamaan Beda Hingga

Skema beda hingga dikatakan konsisten jika dapat direduksi menjadi persamaan diferensial parsial (PDP) awal seiring dengan hilangnya variabel bebas. Jika $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ dan $\Delta t \rightarrow 0$, maka solusi dengan metode beda hingga sama dengan solusi analitik PDP. Pada umumnya solusi dengan Metode beda hingga akan sesuai dengan solusi PDP, sehingga kriteria konsistensi dengan sendirinya terpenuhi. Suatu persamaan beda dikatakan konsisten dengan persamaan differensial yang didekati, jika selisih antara persamaan beda dengan persamaan diferensial parsialnya menuju nol, ketika gridnya dibuat menuju nol, atau dengan kata lain persamaan beda tersebut dapat diubah menjadi PDP awal ketika panjang gridnya dibuat menuju nol (Alman, 2013).

Penerapan suatu skema numerik pada suatu persamaan differensial parsial menghasilkan suatu persamaan beda hingga. Solusi numerik dari persamaan beda hingga tersebut belum tentu menghasilkan solusi yang sama dengan solusi eksak dari persamaan differensial parsial tersebut. Suatu persamaan beda hingga dikatakan stabil jika skema tersebut menghasilkan solusi yang terbatas (berhingga) dan jika solusi yang diperoleh dari skema tersebut tidak terbatas, maka dikatakan tidak stabil (Urroz, 2004).

Dalam menganalisis kestabilan suatu persamaan beda, ada beberapa metode yang dapat digunakan. Salah satu metode yang banyak digunakan dalam menganalisis kestabilan persamaan beda hingga diantaranya metode von Neumann. Dalam metode ini, suatu solusi dari persamaan beda hingga diekspansi dengan menggunakan sebuah komponen Deret Fourier sebagai

$$C_i^n = \rho^n e^{IP(\Delta x)i} \tag{2.5.1}$$

dengan $I = \sqrt{-1}$, ρ^n merupakan amplitude pada waktu n dan P merupakan gelombang pada arah x.

Persamaan (2.5.1) di atas disubstitusikan ke dalam persamaan beda yang akan dianalisis kemudian ditentukan kondisi bagi Δx dan Δt agar $|\rho| \leq 1$ yang artinya untuk kondisi tersebut persamaan beda yang dibuat menghasilkan solusi yang berhingga. Kondisi kestabilan dari metode von Neumann dapat dituliskan sebagai berikut : (Alman, 2013)

1. Jika untuk nilai Δx dan Δt tertentu, $|\rho| \leq 1$ maka persamaan beda yang dibuat bersifat stabil bersyarat.
2. Jika $|\rho| \leq 1$ untuk semua nilai Δx dan Δt, maka persamaan beda yang dibuat bersifat stabil tak bersyarat.
3. Jika tidak dapat ditemukan nilai Δx dan Δt sehingga, $|\rho| \leq 1$ maka persamaan beda yang dibuat bersifat tidak stabil.

Komponen Fourier di atas (2.5.1), digunakan untuk masalah satu dimensi. Sedangkan untuk masalah Multidimensi, komponen Fourier yang digunakan untuk menganalisis kestabilan persamaan beda adalah

$$C_{i,j}^n = \rho^n e^{IP(\Delta x)i} e^{IQ(\Delta y)j} = \rho^n e^{I(P\Delta xi + Q\Delta yj)}. \tag{2.5.2}$$

Suatu persamaan beda dikatakan konvergen jika solusi persamaan beda semakin mendekati solusi eksak atau analitik dari persamaan differensial parsial yang dihampiri ketika ukuran grid $\Delta x, \Delta y$, dan Δt dibuat mendekati nol. Atau dengan kata lain persamaan beda dapat dinyatakan konvergen (Chern. 2013) : "Jika $\Delta x, \Delta y, \Delta t \to 0$ maka $\varepsilon \to 0$, $\left|T_{i,j}^n - T^*\right| < \varepsilon$, dimana ε merupakan kesalahan yang diperoleh dari selisih $T_{i,j}^n$ sebagai solusi numerik dalam bentuk diskrit dengan T^* sebagai solusi analitik". Dengan kata lain, suatu persamaan beda dapat dikatakan Konvergen jika persamaan beda tersebut Konsisten dan juga Stabil.

II.6 Persoalan Nilai Awal dan Nilai Batas

Untuk mendapatkan solusi khusus dari persamaan diferensial parsial (PDP), sebuah kondisi tambahan harus ada dalam menentukan solusi dari persamaan diferensial parsial. Kondisi tambahan dapat diklasifikasikan sebagai kondisi awal dan kondisi batas.

Kondisi awal adalah persyaratan bahwa variabel terikat ditentukan pada beberapa keadaan awal, sedangkan kondisi batas merupakan syarat bahwa variabel terikat atau turunannya harus terpenuhi pada batas domain dari persamaan differensial parsialnya. Jenis-jenis kondisi batas dapat dibedakan atas (Hoffmann, 2000):

1. Kondisi batas Dirichlet. Kondisi batas ini merupakan persoalan syarat batas dimana yang diketahui adalah nilai C (konstan) ditetapkan disekeliling batas.
2. Kondisi batas Neumann. Kondisi batas ini merupakan persoalan syarat batas dimana yang diketahui adalah nilai $\frac{\partial C}{\partial r}$ disekeliling batasan atau dengan kata lain batas ditetapkan dalam bentuk turunan.
3. Kondisi batas Robbin atau campuran merupakan persoalan syarat batas jika C (konstan) ditetapkan pada sebagian batasan sedangkan pada batasan lain ditetapkan dengan nilai $\frac{\partial C}{\partial r}$.