DIMENSI PARTISI PADA GRAF GRID

SKRIPSI

HASPIKA

H011181316

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
SEPTEMBER 2022

DIMENSI PARTISI PADA GRAF GRID

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

HASPIKA

H011181316

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

SEPTEMBER 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Haspika
NIM	: H011181316
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Dimensi Partisi pada Graf Grid

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 6 September 2022

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL 10000 9D133AKX012458230

Haspika
NIM. H011181316

LEMBAR PENGESAHAN

DIMENSI PARTISI PADA GRAF GRID

Disusun dan diajukan oleh

HASPIKA

H011181316

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 6 September 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Naimah Ariz, S.Si., M.Math.**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19711003 199702 2 001**

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Dimensi Partisi pada Graf Grid**". Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin. Penyelesaian skripsi ini diperlukan proses yang sangat panjang, dengan banyak tantangan dan hambatan mulai dari penyusunan hingga akhirnya skripsi ini dapat dirampungkan.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini memerlukan proses dan pengorbanan yang tidaklah sedikit serta adanya bantuan dan doa dari berbagai pihak, Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Ayahanda dan Ibunda tercinta **Kasman** dan **Hasnia**, yang penuh kesabaran dan kasih sayang telah membesarkan dan mendidik penulis serta selalu memberikan dukungan dan doa kepada penulis dan menjadi motivasi terbesar bagi penulis untuk segera menyelesaikan studi. Begitu pula kepada adik-adikku **Sevia Widiyanti** dan **Muh. Rey Syahreza M**, yang telah memberi semangat, dukungan dan hiburan kepada penulis.
2. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
3. **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin.
4. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA universitas Hasanuddin dan Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin.
5. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku dosen pembimbing utama yang menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. **Naimah Aris, S.Si., M.Math.** selaku dosen pembimbing pertama yang menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.

7. **Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc.** selaku dosen penguji dan juga Penasehat Akademik yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam menyusun skripsi ini, serta telah memberikan perhatian dan dukungan kepada penulis selama menjalani pendidikan di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin.
8. **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
9. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah beliau berikan selama perkuliahan.
10. Bapak/Ibu Pegawai/Staff departemen, fakultas, dan universitas yang telah banyak membantu selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
11. Teman-teman **LIGHT** yang telah berjuang bersama dan selalu memberikan semangat selama penyusunan skripsi ini.
12. Teman-teman "**Anti Healing**" yang telah berjuang bersama selama KKN gel.106 dan selalu memberikan semangat selama penyusunan skripsi ini.
13. Teman-teman **MATEMATIKA 2018** yang telah mendukung dan berjuang bersama selama masa perkuliahan.
14. **Alya Sakinah Arif** yang telah berjuang bersama selama masa perkuliahan dan banyak membantu selama penyusunan skripsi ini.
15. Semua pihak yang telah membantu penulisan yang tak sempat penulis sebutkan satu per satu.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu penulis selama penyusunan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat membawa manfaat bagi pengembang ilmu.

Makassar, 6 September 2022

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Haspika
NIM : H011181316
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Dimensi Partisi pada Graf Grid

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Lamasi pada tanggal 6 September 2022

Yang menyatakan,

Haspika

ABSTRAK

Pada penelitian ini akan ditentukan dimensi partisi pada graf grid ($G_{m,n}$), suatu graf yang merupakan hasil operasi kali antara dua graf lintasan ($P_m \times P_n$). Untuk menentukan dimensi partisi, pertama-tama dibahas konstruksi dari graf ini, kemudian ditentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi pada graf grid, dari batas-batas tersebut kemudian ditentukan partisi pembeda yang digunakan untuk menentukan dimensi partisi dari graf grid. Diperoleh bahwa batas bawah dan batas atas dimensi partisi graf $G_{m,n}$ untuk setiap $m, n \geq 2$ dan n bernilai genap adalah $3 \leq pd(G_{m,n}) \leq 3$ sehingga diperoleh dimensi partisi dari graf $G_{m,n}$ untuk setiap $m, n \geq 2$ dan n bernilai genap adalah 3.

Kata Kunci: Graf Grid, Dimensi Partisi, Himpunan Partisi Pembeda, Batas Bawah dan Batas Atas

Judul : Dimensi Partisi pada Graf Grid

Nama : Haspika

NIM : H011181316

Program Studi : Matematika

ABSTRACT

In this study, the partition dimension will be determined on the grid graph $(G_{m,n})$, *a graph that is the result of a multiplication operation between two path graphs* $(P_m \times P_n)$. *To determine the partition dimension, first shown the construction of this graph, then determine the lower and upper bound of the partition dimension graph grid, from those boundaries then determine the resolving partitions that used to determine the partition dimension of the graph grid. It is shown that the lower and upper bound of the graph partition dimension* $G_{m,n}$) *for each value of* $m, n \geq 2$ *and* n *even are* $3 \leq pd(G_{m,n}) \leq 3$ *so that the dimension of the graph partition* $G_{m,n}$ *for each* $m, n \geq 2$ *and* n *even value are* 3.

Keywords: *Graph Grid, Partition Dimensions, Set Of Resolving Partition, The Lower and Upper Bound*

Title	*: The Partition Dimension on the Graph Grid*
Name	*: Haspika*
Student ID	*: H011181316*
Study Program	*: Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$G(V,E)$	Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E
$V(G)$	Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	Himpunan sisi pada graf G
$\|G\|$	Order (banyak titik graf G)
$d(u,v)$	Jarak dari titik u ke titik v
$d(u,S)$	Jarak dari titik u ke subhimpunan S
$\times$	Operator perkalian kartesian
$+$	Operator join
$\cup$	Operator gabung
Π	Partisi pembeda
W	Himpunan pembeda
$dim(G)$	Dimensi metrik graf G
$pd(G)$	Dimensi partisi graf G
P_n	Graf lintasan order n
C_m	Graf siklus order m
K_n	Graf lengkap order n
$G_{m,n}$	Graf grid orde $m \times n$
$r(u\|W)$	Representasi titik u terhadap himpunan pembeda W
$r(u\|\Pi)$	Representasi titik u terhadap partisi pembeda Π
Z^+	Bilangan Bulat Positif

BAB I
PENDAHULUAN

1. 1. Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sangat bermanfaat untuk membantu menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan nyata. Mempresentasikan permasalahan ke dalam bentuk graf, akan membuat permasalahan tersebut lebih mudah dimengerti dan lebih mudah mencari solusinya.

Graf merupakan pasangan himpunan-himpunan diskrit yang diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736, ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel Konisberg, Rusia.

Penelitian tentang graf sangat menarik karena banyak memiliki terapan. Salah satu topik yang menjadi kajian dalam teori graf adalah dimensi metrik dan dimensi partisi. Dimensi metrik diperkenalkan pertama kali oleh Harry dan Melter pada tahun 1966. Dimensi metrik tidak mudah untuk diperoleh dari suatu graf tertentu. Oleh karena itu, untuk memperoleh dimensi metrik graf tertentu maka dilakukan analisis dari subgraf terlebih dahulu untuk memudahkan mendapatkan dimensi metrik dari graf secara umum (Permana, A. B., dan Darmaji, 2012).

Dimensi metrik dapat digunakan untuk pembahasan pada bidang lain seperti kimia, navigasi robot dan pencarian (Khuller,dkk,1996) dan optimasi kombinasi (Hernando, dkk, 2005). Untuk mendapatkan cara pandang baru dalam mendalami dimensi metrik graf, Chartrand, dkk (2000) memperkenalkan konsep baru disebut dimensi partisi graf.

Menurut Chartrand, himpunan titik pada graf G dapat dibagi menjadi beberapa himpunan partisi S. Himpunan Π dengan $S \in \Pi$ disebut himpunan pembeda dari graf G jika setiap titik di G mempunyai representasi berbeda terhadap Π, dan Π merupakan himpunan dari k-partisi yang terurut. Kardinalitas minimum dari k-partisi pembeda terhadap $V(G)$ adalah dimensi partisi pada graf G yang dinotasikan dengan $pd(G)$.

Dalam papernya, Chartrand dkk (2000) menunjukkan bahwa dimensi partisi graf lintasan adalah $pd(P_n) = 2$ dan dimensi partisi graf lengkap adalah

$pd(K_n) = n$. Selanjutnya, dimensi partisi telah banyak dikaji oleh peneliti, misalnya Grigorious dkk (2014) menunjukan dimensi partisi dari kelas graf circulant, Arimbawa dkk (2015) menujukkan dimensi partisi dari kelas graf pohon dan Darmaji (2011) juga menunjukkan dimensi partisi dari graf multipartit dan graf hasil korona dari dua graf terhubung.

Salah satu contoh graf dalam teori graf adalah graf grid, yang merupakan hasil kali antara graf lintasan orde n dan orde m. Dikarenakan dari beberapa hasil penelitian sebelumnya belum ada yang membahas tentang dimensi partisi pada graf grid, maka dalam penelitian ini penulis akan menganalisis dimensi partisi pada graf grid.

1. 2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana konstruksi dari graf grid, menentukan batas bawah dan batas atas dimensi partisi graf grid dan proses menentukan dimensi partisinya.

1. 3. Batasan Masalah

Graf grid adalah hasil kali antara graf lintasan orde m dan orde n $(p_m \times p_n)$. Pada penelitian ini ditentukan dimensi partisi grad grid $p_m \times p_n$ untuk n bernilai genap. Penelitian ini graf yang menjadi objek penelitian adalah graf grid.

1. 4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mengkonstruksi graf grid, mengetahui batas bawah dan batas atas dimensi partisi graf grid, dan juga mengetahui dimensi partisi pada graf grid.

1. 5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

1. Diperoleh hasil penelitian untuk kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup dimensi partisi.

2. Diperoleh hasil penelitian untuk memotivasi kepada pembaca untuk melakukan penelitian tentang dimensi partisi pada operasi graf yang lain atau melakukan pengembangan konsep.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas teori-teori yang berkaitan dengan penelitian yang akan dilakukan seperti dasar-dasar graf, operasi dalam graf, jenis-jenis graf, partisi himpunan dan konsep dimensi dalam graf.

2. 1. Dasar - Dasar Graf

Pada subbab ini akan di bahas tentang dasar-dasar graf diantaranya himpunan, himpunan terbatas, graf, bertetangga, derajat, subgraf, kardinalitas, dan graf isomorfisma.

2.1.1. Himpunan

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang keanggotaannya dapat didefinisikan dengan jelas. Misalnya pada himpunan mahasiswa, maka anggota-anggotnya adalah mahasiswa. Anggota suatu himpunan bisa diskrit juga bisa kontinu.

Pada penelitian ini akan digunakan himpunan diskrit. Diskrit memiliki satuan yang selalu bulat dalam bilangan asli, tidak berbentuk pecahan, sehingga himpunan diskrit dapat dinyatakan sebagai daftar dari anggota-anggota dengan memakai tanda kurung $\{\}$. Himpunan biasanya dilambangkan dengan huruf besar. Misalnya penulisan himpunan diskrit $A = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ merupakan himpunan yang anggota-anggotanya $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$. Banyaknya anggota pada suatu himpunan A disebut kardinalitas yang dinotasikan "$|A|$". Adapun himpunan yang beranggotakan himpunan disebut koleksi *(collection)* atau famili *(family)*, biasanya dilambangkan dengan huruf besar klasik. Himpunan B dikatakan subhimpunan dari A, jika setiap $x \in B$ mengakibatkan $x \in A$, dan ditulis $B \subseteq A$ atau $A \supseteq B$.

Himpunan ada yang terbatas dan ada juga yang tak terbatas. Merujuk dari jurnal Dwi Dayanti, Desi (2018) himpunan terbatas dan tak terbatas dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definsi 2.1.1 *Misalkan X adalah himpunan bagian tak kosong R.*

a) *Himpunan X dikatakan terbatas atas jika terdapat $a \in R$ sedemikian sehingga $a \geq x$ untuk setiap $x \in X$. Bilangan real a yang demikian disebut sebagai batas atas dari X.*

b) *Himpunan X dikatakan terbatas bawah jika terdapat $b \in R$ sedemikian sehingga $b \leq x$ untuk setiap $x \in X$. Bilangan real b yang demikian disebut sebagai batas bawah dari X.*

c) *Himpunan X dikatakan terbatas jika X terbatas atas dan terbatas bawah. Himpunan X dikatakan tidak terbatas jika X tidak terbatas atas atau tidak terbatas bawah.*

Contoh 2.1.1. Himpunan terbatas dan tak terbatas

$A = \{x|1 \leq x \leq 5, x \in R\}$

$B = \{x|x \leq 2, x \in Z\}$

$C = \{x|x \geq 2, x \in R\}$

$D = \{x|x \in R\}$

Dari keempat himpunan diatas, himpunan A merupakan himpunan terbatas karena memiliki batas atas maupun batas bawah. Himpunan B merupakan himpunan terbatas diatas dan himpunan C merupakan himpuan terbatas dibawah. Sedangkan himpunan tak terbatas seperti pada himpunan bilangan real yang ditunjukkan pada himpunan D.

2.1.2. Graf

Secara umum dikenal beberapa macam pengertian graf. Pada buku pengantar dan jenis-jenis graf oleh Hasmawati (2020), disajikan pengertian graf dalam bentuk definisi dan disusun menggunakan bahasa himpunan.

Definisi 2.1.2 *Graf adalah pasangan himpunan (V, E), dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.*

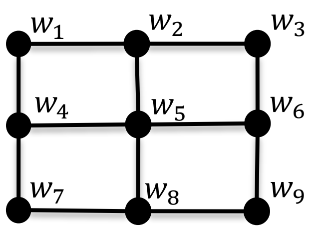
Berdasarkan Definisi 2.1.2 jika graf (V, E) dinotasikan G, dengan kata lain $G = (V, E)$, maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga graf $G = (V(G), E(G))$. Banyaknya anggota dari $V(G)$ menyatakan orde dari graf G yang dinotasikan p dan banyaknya anggota dari $E(G)$ menyatakan ukuran dari graf G yang dinotasikan q. Banyaknya anggota yang ada pada suatu himpunan disebut kardinalitas yang biasanya dinotasikan “| |”. Misalk an himpunan $S = \{x_1, x_2, x_3\}$, maka kardinalitas dari himpunan S adalah 3 atau dapat ditulis $|S| = 3$. Apabila $p(G)$ adalah orde graf G dan $q(G)$ adalah ukuran graf G, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$.

Pada Definisi 2.1.2. graf $G = (V, E)$, jika $u, v \in V$ dengan $u \neq v$ dan $uv = vu$ maka graf G merupakan graf sederhana (*simple graph*). Dalam beberapa buku, struktur graf yang memperbolehkan adanya sisi parallel disebut multigraf (*multigraph*) dan struktur graf yang membolehkan adanya sisi parallel atau lup disebut graf palsu (*pseudograph*).

Definisi 2.1.3 *Graf sederhana G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (vertex), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (edge).*

Salah satu bentuk graf sederhana sebagai berikut :

G :



Gambar 2.1.1. Graf G

Gambar 2.1.1 menunjukkan sebuah graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$ dengan himpunan $V(G) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9\}$ merupakan titik-titik dari graf yang saling terhubung oleh pasangan sisi $E(G) = \{w_1w_2, w_1w_4, w_2w_3, w_2w_5, w_3w_6, w_4w_5, w_4w_7, w_5w_6, w_5w_8, w_6w_9, w_7w_8, w_8w_9\}$. Sisi-sisi dari graf G dikatakan bertetangga apabila terkait pada sebuah titik yang sama. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.1.1 dimana sisi w_1w_2 bertetangga dengan w_2w_3, namun w_1w_2 bertetangga dengan w_3w_6.

Beberapa istilah-istilah yang biasa ditemukan dalam graf diantaranya;

a. Bertetangga

Dua buah titik pada graf dikatakan bertetangga (adjacent) bila keduanya dihubungkan oleh sebuah sisi. Dengan kata lain, v_i bertetangga dengan v_j jika $(v_i v_j)$ adalah sebuah sisi pada graf G, yang dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.1.4. *Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$, maka dikatakan bahwa:*

1. *Titik v_i bertetangga (adjacent) dengan titik v_j.*
2. *Sisi x terkait (incident) dengan titik v_i, demikian pula untuk titik v_j.*

Contoh 2.1.2. Dapat dilihat pada Gambar 2.1.1, titik w_1 dan titik w_2 merupakan titik yang bertetangga, begitupun dengan titik w_8 dan titik w_9.

b. Derajat

Derajat (degree) dari suatu titik pada graf adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik tersebut. Derajat dari titik v dinotasikan dengan "$d(v)$", $\Delta(G)$ merupakan derajat maksimum titik dari G dan $\delta\ (G)$ merupakan derajat minimum titik dari G. Derajat dapat didefinisikan sebagai berikut;

Definisi 2.1.5. *Derajat suatu titik v_i dalam graf G, dilambangkan "$d(v_i)$", adalah banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $d(v_i) = |N_G(v_i)|$.*

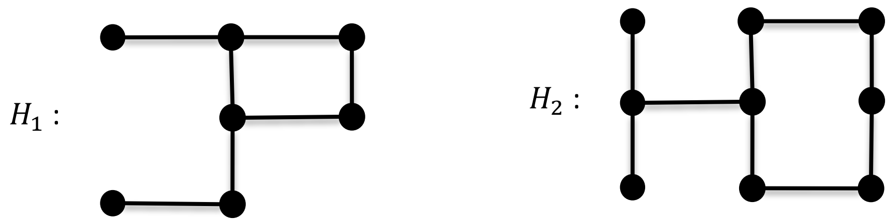
Contoh 2.1.3. Pada Gambar 2.1.1, titik w_1 bertetangga dengan 2 titik yaitu titik w_2 dan titik w_4 sehingga $d(w_1) = 2$.

c. Subgraf

Apabila suatu titik atau sisi pada suatu graf dihilangkan, maka diperoleh suatu graf baru yang berbeda dengan graf sebelumnya. Graf baru yang diperoleh disebut subgraf dari graf sebelumnya. Subgraf dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1.6. *Misalkan dua graf $H = (V(H), E(H))$ dan $G = (V(G), E(G))$. Graf H disebut subgraf dari G, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.*

Contoh 2.1.4. Subgraf dari Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.2. subgraf dari G

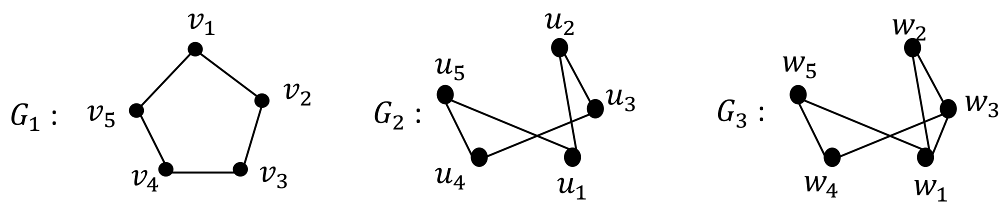
d. Graf Isomorfik

Dua buah graf yang sama tetapi secara geometrik berbeda dalam artian berbeda dalam hal pemberian label, letak titik atau bentuk sisinya disebut graf saling isomorfik (Isomorphic Graph). Syarat dua buah graf dikatakan isomorfik adalah:

1. Memiliki jumlah titik yang sama,
2. Memiliki jumlah sisi yang sama,
3. Memiliki derajat yang sama dari titik-titiknya.

Apabila dua graf yang berbeda tidak memiliki salah satu syarat diatas sudah pasti kedua graf tersebut tidak isomorfik, tetapi walaupun kedua graf tersebut memiliki semua syarat diatas belum tentu juga keduanya isomorfik. Graf G dan graf H dikatakan isomorfik jika terdapat isomorfisma atau pemetaan satu-satu pada $f: V(G) \rightarrow V(H)$ yang menyajikan semua sifat ketetanggaan, yaitu $f(u)$ dan $f(v)$ bertetangga pada graf H jika dan hanya jika u dan v bertetangga pada graf G. Jika kedua graf memiliki matriks ketetanggaan yang sama maka graf dikatakan isomorfik.

Contoh 2.1.1 Dua graf G_1 dan G_2 pada Gambar 2.1.3 adalah dua graf isomorfik dan graf G_2 dan G_3 adalah dua graf yang tidak isomorfik.



Gambar 2.1.3 Isomorfik dalam graf

Bukti:

Pada Gambar 2.1.2, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik karena terdapat pemetaan satu-satu antara titik-titik graf G_1 dan titik-titik graf G_2, sehingga setiap dua titik yang bertetangga di G_1 yakni prapeta dua titik, dua titik yang merupakan petanya juga bertetangga di G_2. Misalkan diberikan dua graf $G_1 = \{V(G_1), X(G_1\}$ dan $G_2 = \{V(G_2), X(G_2\}$, dengan $V(G_1) = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$ dan $V(G_2) = \{u_1, u_2, \ldots, u_5\}$ seperti pada Gambar 2.1.3 terdapat pemetaan satu-satu pada sebagai berikut: $f: V(G_1) \to V(G_2)$, $\theta(v_1) = u_1$, $\theta(v_2) = u_2$, $\theta(v_3) = u_3$, $\theta(v_4) = u_4$, $\theta(v_5) = u_5$. Dapat diperiksa bahwa: $\theta(v_1) = u_1$ dan $\theta(v_2) = u_2$ bertetangga, juga v_1 dan v_2 bertetangga; $\theta(v_2) = u_2$ dan $\theta(v_3) = u_3$ bertetangga, juga v_2 dan v_3 bertetangga; $\theta(v_3) = u_3$ dan $\theta(v_4) = u_4$ bertetangga, juga v_3 dan v_4 bertetangga; $(v_4) = u_4$, $\theta(v_5) = u_5$ bertetangga, juga v_4 dan v_5 bertetangga dan juga $\theta(v_1) = u_1$ dan $\theta(v_5) = u_5$ bertetangga, juga v_1 dan v_5 bertetangga. Jadi terdapat isomorfisma antara G_1 dan G_2. Dengan kata lain G_1 isomorfik dengan G_2. Selanjutnya untuk graf G_2 dan G_3 bukan merupakan dua graf yang isomorfik. Dapat dilihat bahwa jumlah sisi pada kedua graf tidak sama dan semua titik pada graf G_2 berderajat 2, sedangkan pada graf G_3 tidak demikian.

2.2 Operasi dalam Graf

Dalam graf terdapat beberapa operasi yang dapat ditemukan. Misalnya operasi gabung, operasi penjumlahan graf dan operasi perkalian graf. Merujuk pada buku pengantar dan jenis-jenis graf oleh Hasmawati tahun 2020, disajikan definisi operasi pada graf sebagai berikut:

Definisi 2.2.1. *Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$, maka :*

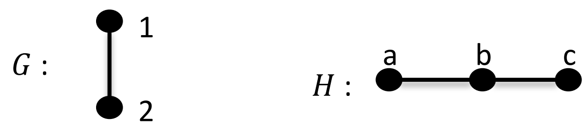
a. *Graf Gabung (union graph) antara G dan H ditulis $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.*

b. *Graf jumlah antara G dan H ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv: u \in V(G), v \in V(H)\}$.*

c. *Graf kali $G \times H$ adalah graf dengan graf titik $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \times H)$ adalah himpunan $\{xy | x = u_1v_1, y = u_2v_2; u_1 = u_2$ dan $v_1v_2 \in E(H)$ atau $v_1 = v_2$ dan $u_1u_2 \in E(G)\}$.*

Contoh 2.2.1 Misalkan graf G adalah graf dengan $V(G) = \{1,2\}$ dan $E(G) = \{12\}$, serta H adalah graf dengan $V(H) = \{a, b\}$ dan $E(H) = \{ab, bc\}$.

Gambar graf G dan graf H sebagai berikut :



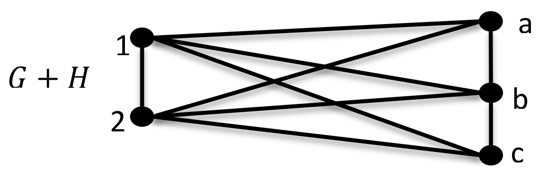
Gambar 2.2.1 Dua graf sederhana

Dari operasi dua graf sederhana pada Gambar 2.2.1 diperoleh

1. Graf gabung $G \cup H$ mempunyai himpunan titik $V(G \cup H) = \{1,2, a, b, c\}$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = \{12, ab, bc\}$;

Gambar 2.2.2 Graf gabung $G \cup H$

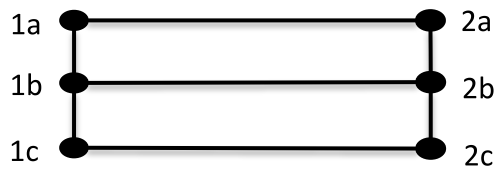
2. Graf jumlah $G + H$ mempunyai himpunan titik $V(G + H) = \{1,2, a, b, c\}$ dan himpunan sisi $E(G + H) = \{12, ab, bc,\} \cup \{1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c\}$;



Gambar 2.2.3 Graf $G + H$

3. Graf kali $G \times H$ mempunyai himpunan titik $V(G \times H) = \begin{Bmatrix} 1a, 1b, 1c, \\ 2a, 2b, 2c \end{Bmatrix}$ dan mempunyai himpunan sisi $E(G \times H) = \begin{Bmatrix} (1a, 1b), (1a, 2a), (1b, 1c), \\ (1b, 2b), (1c, 2c), (2a, 2b), \\ (2b, 2c) \end{Bmatrix}$.

$G \times H$:



Gambar 2.2.4 Graf $G \times H$

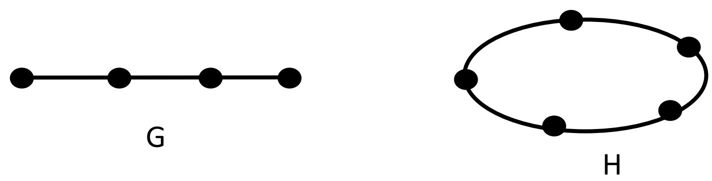
2.3 Jenis – Jenis Graf

Graf memiliki banyak jenis dan masing-masing memiliki ciri-ciri tersendiri. Contoh jenis graf yaitu graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, dan graf-graf lainnya. Merujuk pada buku pengantar dan jenis-jenis graf oleh Hasmawati tahun 2020, ada beberapa graf yang dibahas sebagai berikut:

1. Graf Lintasan dan Graf Siklus

Barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2,3, \dots, n-1$ disebut lintasan pada graf. Graf yang hanya memiliki sebuah lintasan disebut graf lintasan yang dinotasikan P_n untuk orde n.

Definisi 2.3.1 *Misalkan* $P_n : v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ *adalah lintasan berorde n dengan panjang* $n-1$. *Siklus* C_n *dengan panjang* n,$n \geq 3$ *adalah graf dengan himpunan titik* $V(C_n) = V(P_n)$ *dan himpunan sisi* $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$.



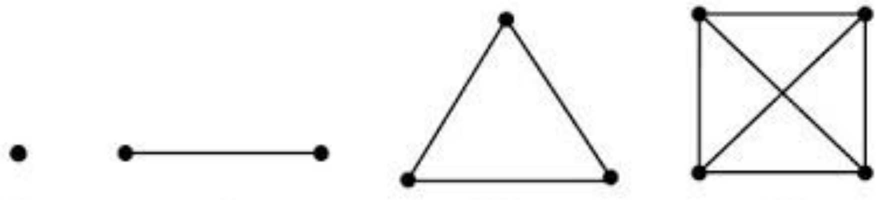
Gambar 2.3.1 Graf lintasan dan graf siklus

Pada Gambar 2.3.1 graf G adalah graf lintasan dan graf H adalah graf siklus. Graf G merupakan graf lintasan dengan orde 4 sehingga bisa ditulis dengan notasi P_4. Sedangkan untuk graf H dengan orde 5 dapat ditulis dengan notasi C_5.

2. Graf lengkap

Graf lengkap merupakan salah satu graf khusus yang setiap dua titiknya bertetangga. Akibatnya, setiap titik pada graf ini mempunyai derajat yang sama.

Graf lengkap dengan n buah simpul dinotasikan dengan “K_n”. Graf pada Gambar 2.3.2 berikut adalah graf lengkap berturut-turut K_1, K_2, K_3 dan K_4.



Gambar 2.3.2 Graf Lengkap

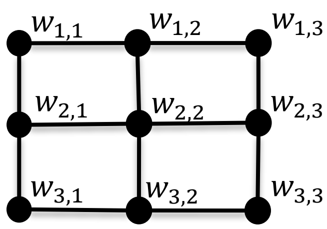
3. Graf Grid

Pada Subbab 2.2 telah dijelaskan tentang operasi dalam graf. Operasi dalam graf bisa menghasilkan graf baru contohnya pada operasi perkalian antara dua graf lintasan yang menghasilkan graf grid. Pada jurnal yang dibuat oleh S.Sudha dan K.Manikanda pada tahun 2015, graf grid didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.2. *Graf grid adalah graf hasil kali dari graf lintasan* $(P_m \times P_n)$. *Graf* $P_m \times P_n$ *memiliki titik yang dinotasikan dengan* $w_{i,j}$ *dan sisi sebanyak* $2mn - m - n$. *Himpunan titik dan himpunan sisi graf* $P_m \times P_n$ *yaitu* $V(P_m \times P_n) = \{g, h | g \in V(G) \text{ dan } h \in V(H)\}$ *dan* $E(P_m \times P_n) = \{(g,h)(g',h') | g = g' \text{ dan } hh' \in E(H) \text{ atau } gg' \in E(G) \text{ dan } h = h'\}$.

Contoh 2.3.1 Misalkan diberikan graf lintasan P_3 dan P_3. Graf grid $G_{3,3}$ diperoleh dari hasil kali cartesius dari graf lintasan P_3 dan P_3. Hasil gambar graf grid ditunjukkan pada gambar di bawah ini.

$G_{3,3}$:



Gambar 2.3.3. Graf $G_{3,3}$

2.4 Partisi himpunan

Partisi dari sebuah himpunan S adalah dekomposisi dari S ke dalam subset-subset tak kosong atau cell $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sedemikian sehingga :

a) $S_i \neq \emptyset$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$.

b) $S_i \cap S_j = \emptyset$ untuk setiap i ≠ j, $i, j = 1,2, \dots, n$.

c) $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = S$.

Dengan demikian, *cell* dari partisi *disjoint*. (Wijaya,2010).

2.5 Dimensi dalam Graf

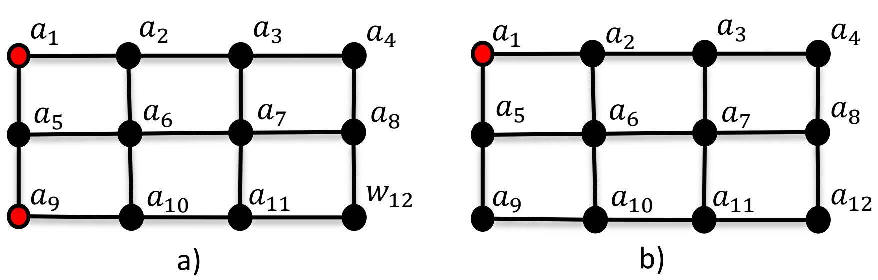
Dimensi dalam graf merupakan salah satu topik yang banyak dibahas dalam buku-buku graf. Adapun dimensi dalam graf yaitu dimensi metrik dan dimensi partisi.

2.5.1. Dimensi Metrik pada graf

Misalkan terdapat graf terhubung G. Misalkan u dan v adalah titik-titik dari graf G. Jarak antara u dan v, dinotasikan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek antara kedua titik tersebut di G. Misalkan terdapat himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subset V(G)$. Representasi titik v terhadap W didefinisikan sebagai jarak dari v ke tiap-tiap elemen di W, ditulis $r(v|W) = (d(v, w), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap W, maka W disebut sebagai himpunan pembangkit. Kardinalitas minimum dari himpunan pembangkit disebut dimensi metrik dari G, dinotasikan dengan $dim(G)$.

Teorema 2.5.1 *Misal G adalah graf terhubung dengan banyak titik $n \geq 2$, maka $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G \cong Pn$.*

Contoh 2.5.1 Berikut adalah graf yang akan dicari dimensi metrik:



Gambar 2.5.1 Kontruksi himpunan pembangkit dari graf G;
(a) $W_1 = \{a_1, a_9\}$ dan (b) $W_2 = \{a_1\}$

Gambar 2.5.1 Mengilustrasikan suatu himpunan terurut $W \subset V(G)$. Gambar 2.5.1 (a) dapat ditunjukkan bahwa himpunan terurut $W_1 = \{a_1, a_9\}$ merupakan himpunan pembangkit dari graf G. Dapat dilihat pada Gambar 2.5.1 (b) memiliki himpunan terurut $W_2 = \{a_1\}$ bukanlah suatu himpunan pembangkit, karena terdapat representasi yang sama yaitu $r(a_2|W_2) = r(a_5|W_2) = (1)$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa himpunan pembangkit dari graf G memiliki kardinalitas sedikitnya 2. Misalkan $|W_2| = 1$ merupakan himpunan pembangkit dari G, sehingga diberikan $W_2 = \{a_1\}$, karena terdapat representasi W pada G menghasilkan representasi yang sama, yaitu $r(a_2|W_2) = r(a_5|W_2) = r(a_7|W_2) = r(a_6|W_2) = (1)$, sehingga $W_2 = \{a_1\}$ bukan merupakan himpunan pembangkit dari G, pernyataan ini kontradiksi dengan pemisalan W_2 sebagai himpunan pembangkit. Jadi, $|W_2| \geq 2$. Dengan demikian, W_1 merupakan himpunan pembangkit minimum dari graf G. Gambar 2.5.1 (a) memiliki $W_1 = \{a_1, a_9\}$ sebagai himpunan pembangkit dari G karena representasi dari semua titik di G berbeda, yaitu:

$r(a_1|W_1) = (0,2)$ $\quad$ $r(a_7|W_1) = (3,3)$

$r(a_2|W_1) = (1,3)$ $\quad$ $r(a_8|W_1) = (4,4)$

$r(a_3|W_1) = (2,4)$ $\quad$ $r(a_9|W_1) = (2,0)$

$r(a_4|W_1) = (3,5)$ $\quad$ $r(a_{10}|W_1) = (3,1)$

$r(a_5|W_1) = (1,1)$ $\quad$ $r(a_{11}|W_1) = (4,2)$

$r(a_6|W_1) = (2,2)$ $\quad$ $r(a_{12}|W_1) = (5,3)$.

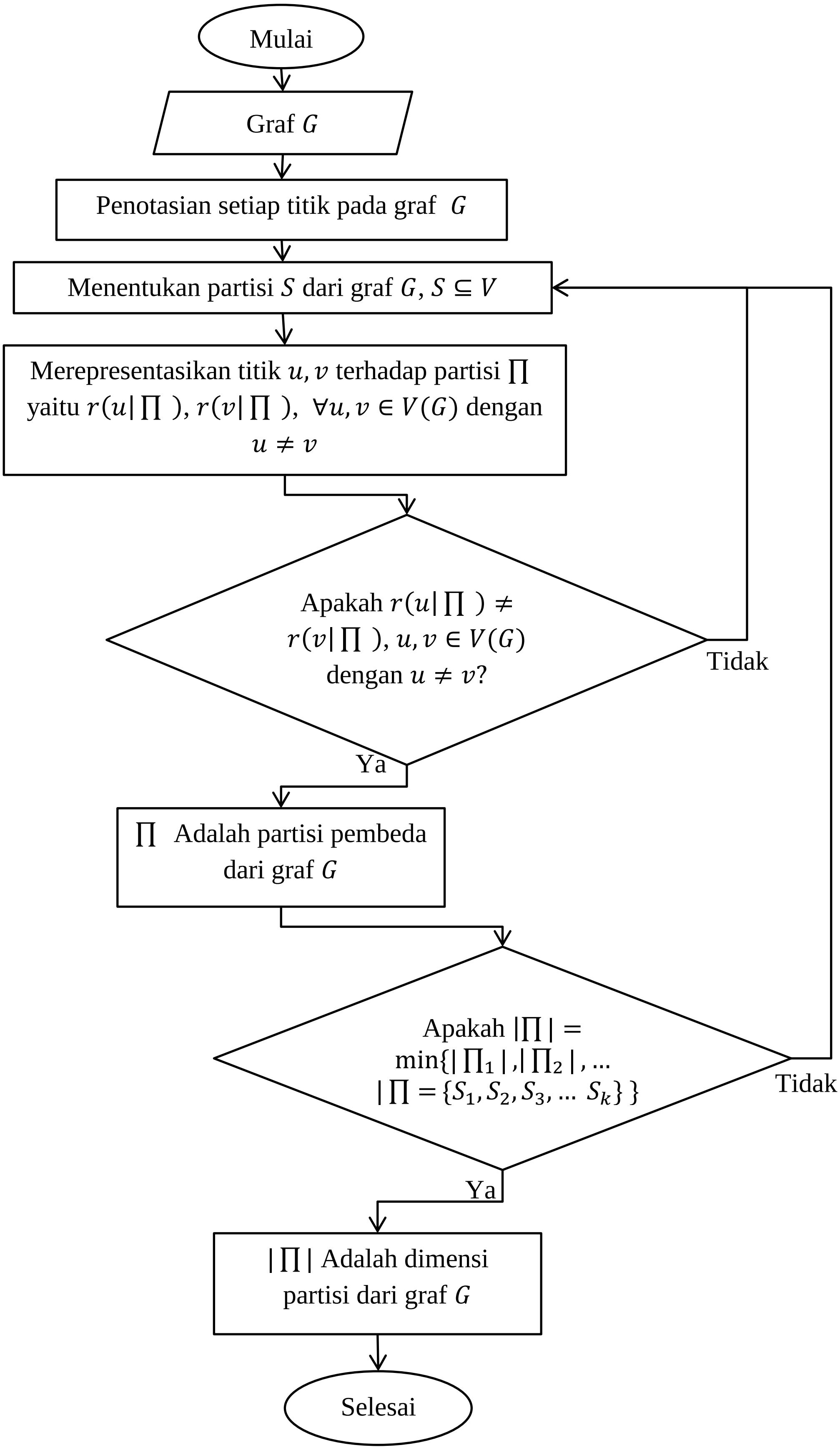
Dari representasi di atas dapat diketahui bahwa representasi dari semua titik terhadap W_1 berbeda. Jadi, W_1 merupakan himpunan pembangkit dengan kardinalitas minimal yaitu 2, sehingga dimensi metrik dari graf G adalah $dim(G) = 2$.

2.5.2. Dimensi partisi pada graf

Dimensi partisi dari suatu graf G pertama kali dikenalkan oleh Chartrand, Salehi dan Zhang (2000). Mereka mengelompokkan semua titik yang ada pada graf G ke sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap simpul ke partisi tersebut.

Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik-titiknya, S adalah himpunan bagian dari $V(G)$ dan v titik di G, jarak antara v dan S didefinisikan sebagai $d(v,S) = min\{d(v,x)|x \in S\}$. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan koleksi himpunan $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, dengan S_j merupakan partisi dari $V(G)$. Himpunan $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ disebut himpunan partisi dan S_j disebut kelas partisi. Misalkan v titik di G, representasi v terhadap $\prod$ didefinisikan sebagai $r(v|\prod) = \left(d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k)\right)$. Himpunan partisi $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dikatakan partisi pembeda, jika representasinya untuk setiap titik yang ada pada graf G berbeda. Nilai k dikatakan dimensi partisi dari G, jika k merupakan nilai minimum partisi pembeda $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$. Dimensi partisi dari G dinotasikan dengan $pd(G)$.

Untuk menentukan dimensi partisi atau partisi pembeda dapat dilakukan sesuai langkah-langkah pada skema yang diberikan pada Gambar 2.5.2.



Gambar 2.5.2 Skema penentuan dimesi partisi

Penelitian ini diperlukan beberapa sifat seperti pada jurnal tentang dimensi partisi pada graf hasil amalgamasi oleh Hasmawati, dkk. yang di sajikan sebagai berikut :

Definisi 2.5.1 *Diberikan suatu graf terhubung* G *dan* $u, v \in V(G)$. *Titik* u *dan* v *disebut titik-titik yang setara dalam graf* G *apabila memenuhi salah satu sifat berikut :*

a) $d(u,w) = d(v,w)$ *untuk setiap* $w \in V(G)/\{u,v\}$,

b) *Untuk setiap* $s \in V(G)/\{u,v\}$, *terdapat titik c sehingga* $d(u,c) + d(c,s) = d(v,c) + d(c,s)$.

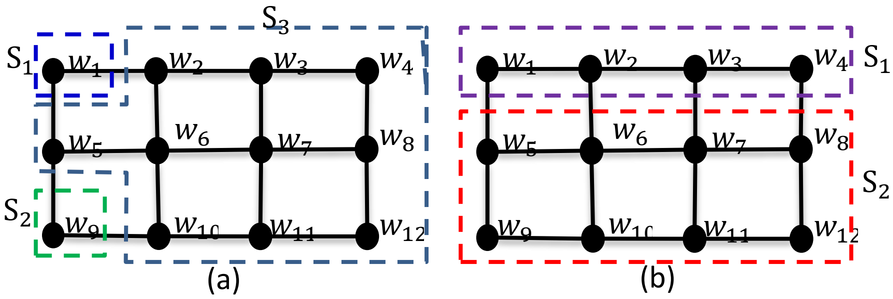
Teorema 2.5.2 *Misalkan* G *adalah graf terhubung dengan orde* $n \geq 2$.

(i). $pd(G) = 2$ *jika dan hanya jika* $G = P_n$

(ii). $pd(G) = n$ *jika dan hanya jika* $G = K_n$

(iii). *Untuk* $n \geq 4$, $pd(G) = n - 1$ *jika dan hanya jika* $G = K_{r,s}, (r, s \geq 1, G = K_r + \overline{K_s}, (r \geq 1, s \geq 2), or\ G = K_r + (K_1 \cup K_s), (r, s \geq 1)$.

Contoh 2.5.2 Berikut adalah graf yang akan dicari dimensi partisinya beserta ilustrasi partisi pembedanya :



Gambar 2.5.3 Konstruksi partisi pembeda dari graf G: (a) $\prod_1 = \{S_1, S_2, S_3\}$, dan (b) $\prod_2 = \{S_1, S_2\}$

Pada Gambar 2.5.3 (b) memiliki himpunan terurut $\prod_2 = \{S_1, S_2\}$ dengan $S_1 = \{w_i; 1 \leq i \leq 4\}, S_2 = \{w_i; 5 \leq i \leq 12\}$ bukanlah suatu partisi pembeda, karena terdapat representasi yang sama yaitu $r(w_1|\prod_2) = r(w_2|\prod_2) = r(w_3|\prod_2) = r(w_4|\prod_2) = (0,1)$.

Pada Gambar 2.5.3 (a) memiliki himpunan terurut $\prod_1 = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{w_1\}$, $S_2 = \{w_i; 2 \leq i \leq 12\} - \{w_9\}$, $S_3 = \{w_9\}$ merupakan partisi pembeda dari graf G karena representasi dari semua simpul di G berbeda, yaitu:

$r(w_1 | \prod_1) = (0,2,1)$ $\qquad$ $r(w_7 | \prod_1) = (3,3,0)$

$r(w_2 | \prod_1) = (1,3,0)$ $\qquad$ $r(w_8 | \prod_1) = (4,4,0)$

$r(w_3 | \prod_1) = (2,4,0)$ $\qquad$ $r(w_9 | \prod_1) = (2,0,1)$

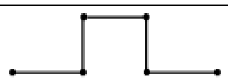
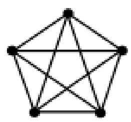
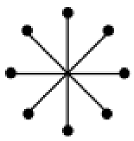
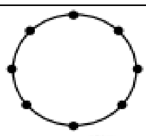
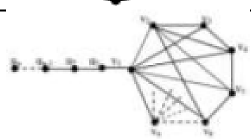
$r(w_4 | \prod_1) = (3,5,0)$ $\qquad$ $r(w_{10} | \prod_1) = (3,1,0)$

$r(w_5 | \prod_1) = (1,1,0)$ $\qquad$ $r(w_{11} | \prod_1) = (4,2,0)$

$r(w_6 | \prod_1) = (2,2,0)$ $\qquad$ $r(w_{12} | \prod_1) = (5,3,0)$.

Dari representasi diatas dapat diketahui bahwa representasi dari semua simpul terhadap $\prod_1$ berbeda. Jadi, $\prod_1$ merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas minimum yaitu 3. Sehingga dimensi partisi dari G adalah $pd(G) = 3$.

Tabel hasil penelitian dimensi partisi yang telah diteliti oleh beberapa peneliti

No	Nama Graf	Gambar	Dimensi Partisi	Peneliti	Tahun
1.	Graf Lintasan (P_n)		$pd(P_n) = 2$	Chartrand dan Zhang	1998
2.	Graf Lengkap (K_n)		$pd(K_n) = n$	Chartrand dan Zhang	1998
3.	Graf Bintang $(K_{1,n})$		$pd(K_{1,n}) = n - 1$	Chartrand dan Zhang	1998
4.	Graf Cycle (C_n)		$pd(C_n) = 3$	J.Rodrguez-Velzquez	2013
5.	Graf Lollipop $(L_{m,n})$		$pd(L_{m,n}) = m$	Maylinda Purna Kartika Dewi	2017