BILANGAN KROMATIK GRAF SARANG LEBAH

SKRIPSI

NASRAWATI

H011181315

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

APRIL 2023

BILANGAN KROMATIK GRAF SARANG LEBAH

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

NASRAWATI

H011181315

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

APRIL 2023

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Bilangan Kromatik Graf Sarang Lebah

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 28 April 2023

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 4F449AKX349910548

Nasrawati

H011181315

LEMBAR PENGESAHAN

BILANGAN KROMATIK GRAF SARANG LEBAH

Disusun dan diajukan oleh:

NASRAWATI

H011181315

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal sidang 28 April 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Prof. Dr. Nurdin, S. Si., M. Si.	**Jusmawati Massalesse, S. Si., M. Si.**
NIP. 197008072000031002	**NIP. 196806011995122001**

Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S. Si., M. Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

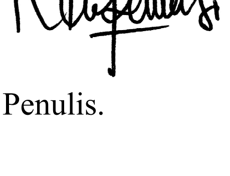
Puji syukur penulis haturkan kehadirat Allah SWT., karena dengan rahmat, karunia, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebatas pengetahuan dan kemampuan yang dimiliki. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan terimakasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Ayahanda **Nasrud, SE** dan Ibunda **Sitti Ratna S** yang telah membesarkan dan mendidik penulis dengan penuh kesabaran dan penuh kasih sayang, memberikan dukungan material dan moral serta do'a yang senantiasa tak hentinya dilangitkan untuk penulis, sehingga penulis dapat tetap hidup sehat dan bahagia hingga saat menyusun skripsi ini;
2. Adik- adik penulis yaitu **Asriany, Gilang, Alidhan, Sinar, Dayat, Acang, Rafah** dan **Yahya** yang terus memberikan semangat dan mendoakan penulis;
3. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin;
4. **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin;
5. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika sekaligus pembimbing utama yang telah meluangkan waktu, tenaga, pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini;
6. Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini;
7. **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen penguji dan **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan kritik dan saran kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini;
8. **Prof. Dr. Moh. Ivan AZ., M.Sc.** selaku penasihat akademik penulis;

9. Seluruh **Tenaga Pendidik/Dosen** Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah mengajar dan membimbing penulis selama masa perkuliahan;
10. Seluruh **Staf Departemen Matematika** yang turut bekerja sama membantu perihal administrasi dan persuratan selama penulisan skripsi ini;
11. Sahabat penulis **Selvianty** sering disapa Ceppi yang selalu membersamai dari masa MABA sampai saat ini, memberi warna warni kehidupan, saling menjatuhkan kemudian membangkitkan serta mendoakan dan menyemangati satu sama lain selama penyusunan skripsi masing-masing dan senantiasa meluangkan waktu menjadi teman refreshing ke manapun dan kapan pun bagi penulis;
12. Sahabat penulis **Fauziah Rasyid,S.Pd.** sering disapa Fauz yang selalu membersamai penulis dari masa di pondok sampai saat ini, senantiasa mendoakan dan menyemangati penulis selama penulisan skripsi ini;
13. Teman penulis **Jeki saputra, S.Si., Hardiansyah** calon S.Si, **Saskia Nurul Jannah, S.Si.** dan **Aryunida Azis, S.Si.** yang sudah memberikan banyak masukan dan saran untuk skripsi ini;
14. Seluruh teman-teman **Tadika mezra** yang selalu membantu menyelesaikan banyak perkara dan menyelamatkan kesehatan mental penulis selama perkuliahan sampai penyusunan skripsi ini;
15. Teman-teman Matematika Unhas 2018 yang senantiasa membersamai dan membantu penulis semasa perkuliahan;
16. Semua pihak yang telah membantu penulis dan belum sempat penulis sampaikan satu per satu;

Akhir kata, penulis berharap kepada Allah *subhanahu wa ta'ala* agar membalas kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan ke depannya.

Makassar, 28 April 2023



Penulis.

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Nasrawati
NIM	: H011181315
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royaliti Noneksklusif** (***Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Bilangan Kromatik Graf Sarang Lebah"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 28 April 2023.

Yang menyatakan

(Nasrawati)

ABSTRAK

Pewarnaan titik pada graf $G = (V, E)$ merupakan suatu pemetaan $c : V \rightarrow \mathbb{N}$, dimana $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ untuk setiap $uv \in E(G)$. Pewarnaan sisi pada graf $G = (V, E)$ merupakan suatu pemetaan $c : E \rightarrow \mathbb{N}$, dimana $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli sedemikian sehingga $c(e_i) \neq c(e_j)$ untuk setiap $e_i, e_j \in E(G)$ yang bersisian dengan titik di $V(G)$ yang sama. Pewarnaan wilayah pada graf G adalah pemberian warna pada wilayah di graf G sedemikian sehingga setiap dua wilayah bertetangga (berbatasan langsung) memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan titik dan pewarnaan wilayah memiliki jumlah warna minimum yang disebut bilangan kromatik dinotasikan dengan $\chi(G)$. Sedangkan pewarnaan sisi memiliki jumlah warna minimum yang disebut dengan indeks kromatik dinotasikan dengan $\chi'(G)$. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan cara menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah pada graf sarang lebah $HC(n)$ dengan $n \geq 2$. Hasil yang diperoleh yaitu: 1) Bilangan kromatik pewarnaan titik dari graf sarang $HC(n)$ dengan $n \geq 2$ adalah $\chi\big(HC(n)\big) = 2$; 2)Bilangan kromatik pewarnaan sisi atau indeks kromatik dari graf sarang $HC(n)$ dengan $n \geq 2$ adalah $\chi'\big(HC(n)\big) = 3$; 3)Bilangan kromatik titik dari dual graf sarang lebah $HC(n)^*$ dalam pewarnaan wilayah pada graf sarang lebah $HC(n)$ adalah

$$\chi(HC(n)^*) = \begin{cases} 3, \ jika\, n = 2 \\ 4, \ jika \ n > 2 \end{cases}.$$

Kata Kunci: Bilangan Kromatik, Graf sarang Lebah, pewarnaan graf.

ABSTRACT

The vertex coloring of a graph $G = (V, E)$ is the mapping $c : V \rightarrow \mathbb{N}$, where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers such that $c(u) \neq c(v)$ for every $uv \in E(G)$. The edge coloring of a graph $G = (V, E)$ is the mapping $c : E \rightarrow \mathbb{N}$, where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers such that $c(e_i) \neq c(e_j)$ for every $e_i, e_j \in E(G)$ adjacent to a vertex in the same $V(G)$. The coloring of regions on a graph G is the coloring of regions on a graph G in such a way that every adjacent two regions have a different color. Vertex coloring and area coloring have a minimum number of colors called the chromatic number which is denoted by χ(G). Meanwhile, edge coloring has a minimum number of colors called the chromatic index which is denoted by χ'(G). The purpose of this study is to describe how to determine the chromatic number of vertex coloring, edge coloring and regional coloring on a honeycomb graph $HC(n)$ with $n \geq 2$. The results obtained are: 1) The chromatic number of vertex coloring of honeycomb network $HC(n)$ with $n \geq 2$ is $\chi(HC(n)) = 2$; 2) The chromatic number of edge coloring or chromatic index of honeycomb network $HC(n)$ with $n \geq 2$ with $n \geq 2$ is $\chi'(HC(n)) = 3$; 3) The vertex chromatic number of the honeycomb network's dual $HC(n)^*$ in the coloring area of the honeycomb network $HC(n)$ is

$$\chi(HC(n)^*) = \begin{cases} 3, \ jika\, n = 2 \\ 4, \ jika \ n > 2 \end{cases}.$$

Keywords: *Chromatic Number, Honeycomb Network, coloring on the graph.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu cabang ilmu matematika yang mempunyai banyak manfaat dalam mengatasi permasalahan dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Teori graf mulai dikenalkan oleh salah satu matematikawan yang bernama Leonard Euler pada tahun 1736. Ide tersebut muncul pada saat menyelesaikan masalah jembatan konigsberg. Masalah tersebut kemudian dimodelkan ke dalam bentuk graf dengan memisahkan daratan sebagai sebuah titik dan jembatan yang menghubungkan antara sebarang dua daratan tersebut sebagai sebuah sisi (Gani, 2018).

Secara umum, graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi (Hasmawati,2020).

Salah satu topik yang menarik dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Terdapat tiga jenis pewarnaan graf, yakni pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan bidang/wilayah (*region coloring*) (Rahadi, 2019). Pewarnaan titik (*vertex coloring*), adalah memberi warna pada titik-titik suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik bertetangga mempunyai warna yang sama. Pewarnaan sisi (*edge coloring*) adalah memberi warna berbeda pada sisi yang bertetangga sehingga tidak ada dua sisi yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Sedangkan pewarnaan bidang/ (*region coloring*) adalah memberi warna pada bidang sehingga tidak ada bidang yang bertetangga yang mempunyai warna yang sama (Kreher, 2017).

Persoalan pewarnaan graf, tidak hanya sekedar mewarnai titik, sisi, dan wilayah dengan warna berbeda dari warna titik, sisi, dan wilayah tetangganya saja, namun banyaknya warna yang digunakan juga harus seminimum mungkin. Pewarnaan titik dan pewarnaan wilayah/bidang memiliki jumlah warna minimum yang disebut bilangan kromatik dan dinotasikan dengan $\chi(G)$. Sedangkan pewarnaan sisi memiliki jumlah warna minimum yang disebut dengan indeks kromatik dan dinotasikan dengan $\chi'(G)$ (Afriantini, dkk, 2019).

Penentuan bilangan kromatik atau indeks kromatik beberapa graf khusus telah banyak dilakukan oleh peneliti sebelumnya. Sebagai contoh, bilangan kromatik dari graf lengkap K_m dengan m simpul (graf sederhana yang setiap titiknya memiliki sisi ke semua simpul lainnya) adalah $\chi(K_m)$ = m (Afandi, 2009). Pada tahun 2014, S. Sudhan dan G. M. Raja menemukan bilangan kromatik pada graf Petersen $P(2n, n)$ yaitu χ $P((2n, n))$ = 2 untuk setiap $n \leq 3$. Pada penelitian K. Praveena, M. venkatachalam, A. Rohini, dan Dafik (2019) telah menemukan bilangan kromatik pada graf prisma Y_n yaitu :

$$\chi(Y_n) = \begin{cases} 2\ , & jika\ n\ genap \\ 3\ , & jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

Arif Fabikhan (2020) dalam penelitiannya telah menemukan bilangan kromatik pada graf bintang sierpinski mulai dari SS_2, SS_3, SS_4, SS_5 dan SS_n. Adapun hasil bilangan kromatiknya diperoleh nilai yang sama yaitu 2.

Selain pada graf khusus, penentuan bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf hasil operasi juga banyak dilakukan oleh peneliti sebelumnya. Seperti, landerius Maro dan Cornelis Banabera (2020) telah memaparkan hasil bilangan kromatik untuk operasi korona dari graf kipas dengan graf kipas dan graf buku segitiga dengan graf buku segitiga berorde sama. Adapun bilangan kromatik pada graf hasil operasi korona graf kipas dengan graf kipas ($F_n \odot F_n$) dan graf buku segitiga dengan graf buku segitiga ($Bt_n \odot Bt_n$) adalah sebagai berikut:

1. Jika G adalah graf hasil operasi korona graf kipas dengan graf kipas ($F_n \odot F_n$), maka $\chi(F_n \odot F_n)$ = 4 untuk $n \geq 2$.
2. Jika G adalah graf hasil operasi korona graf buku dengan graf buku ($Bt_n \odot Bt_n$), maka $\chi(Bt_n \odot Bt_n)$ = 4 untuk $n \geq 2$.

Pada tahun 2021, Septinauli Simanjuntak dan Mulyono pada penelitiannya telah menemukan bilangan kromatik hasil operasi korona graf lingkaran dan graf kubik. Ada dua pola bilangan kromatik yang diperoleh, yaitu sebagai berikut:

1. Untuk graf hasil operasi korona dari graf lingkaran dan graf kubik ($C_n \odot Q_m$)

$$\chi(C_n \odot Q_m) = \begin{cases} 5, \text{jika } \frac{m}{2} \text{ genap} \\ 3, \text{jika } \frac{m}{2} \text{ ganjil} \end{cases}$$

2. Untuk graf hasil operasi korona dari graf kubik dan graf lingkaran ($Q_m \odot C_n$)

Jika n ganjil, $\chi(Q_m \odot C_n)$ = 4

$$\text{Jika } n \text{ genap, } \chi(Q_m \odot C_n) = \begin{cases} 4, \text{ jika } \frac{m}{2} \text{ genap} \\ 3, \text{ jika } \frac{m}{2} \text{ ganjil} \end{cases}$$

Kemudian, penentuan bilangan kromatik pewarnaan sisi pada beberapa graf khusus pun telah banyak dilakukan oleh peneliti sebelumnya. Diantaranya adalah graf *sierpinski* yang dinotasikan SS_n, dimana bilangan kromatiknya adalah 3.2^{n-2} untuk $n \geq 2$ atau sama dengan derajat maksimum titiknya (Fabikhan, 2020). Pada tahun 2014, saifuddin telah menemukan bilangan kromatik pewarnaan sisi pada graf prisma $H_{m,n}$ adalah 4 untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, *ladder graph* (graf tangga) dinotasikan L_n yaitu χ (L_n) = 3 untuk $n \geq 3$, dan graf kipas (*fan graph*) dinotasikan F_n yaitu $\chi(F_n) = 2n$. Selanjutnya, bilangan kromatik pewarnaan sisi pada graf hasil operasi pun telah ditemukan oleh beberapa peneliti, diantaranya adalah graf hasil operasi korona P_n dengan P_3 $(P_n \odot P_3)$, dimana bilangan kromatiknya yaitu $\chi(P_n \odot P_3) = 5$ untuk $n \geq 3$, dan *graph composition* $(G_2[G_1])$ bilangan kromatiknya adalah $\chi(G_2[G_1]) = 5$ untuk $n \geq 3$ (Saifuddin, 2014).

Pada tahun 2013, Muhib telah menemukan bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf dual dari graf piramid (Pr_{n^*}) atau bisa juga diartikan dengan pewarnaan wilayah pada graf piramid, dimana bilangan kromatik yang diperoleh adalah $\chi(Pr_{n^*}) = 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Kemudian, Muhammad Abdi, dkk (2021) dalam penelitiannya juga telah menemukan bilangan kromatik pada graf dual dari graf roda yakni:

$$\chi(W_{8^*}) = \begin{cases} 4, & n \text{ bilangan ganjil}, \quad n \geq 3 \\ 3, & n \text{ bilangan ganjil}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Dari beberapa hasil penelitian di atas, masih terdapat beberapa graf khusus yang belum ditemukan bilangan kromatiknya baik pada pewarnaan titik, pewarnaan sisi, maupun pewarnaan wilayah, salah satunya yaitu pada graf sarang lebah. Maka dari itu, kajian ini difokuskan pada pencarian bilangan kromatik dalam pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah untuk graf sarang lebah.

Graf sarang lebah adalah graf planar yang dibangun dari beberapa hexagon, dinotasikan dengan $HC(n)$ dengan $n \geq 2$ merupakan lapisan ke- n dari graf sarang lebah, dapat diperoleh dengan menempelkan sebanyak $6(n-1)$ buah hexagon mengelilingi sisi-sisi tepi dari $HC(n-1)$, dimana $HC(1)$ adalah sebuah hexagon yang isomorfik dengan graf siklus C_6. Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis mengangkat judul penelitian yakni **"Bilangan Kromatik Graf Sarang Lebah"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, adapun rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah pada graf sarang lebah $HC(n)$ dengan $n \geq 2$?

1.3 Batasan masalah

Masalah pada penelitian ini dibatasi pada pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah pada graf sarang lebah $HC(n)$ dengan $n \geq 2$.

1.4 Tujuan penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan cara menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah pada graf sarang lebah $HC(n)$ dengan $n \geq 2$.

1.5 Manfaat penelitian

Adapun manfaat pada penelitian ini adalah:

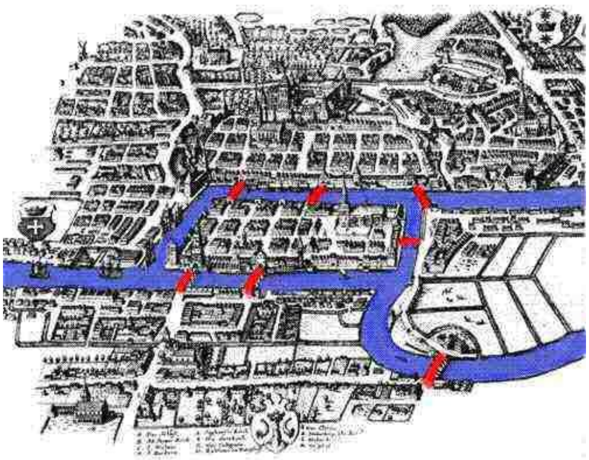
1. Bagi peneliti: Dapat menambah wawasan dalam penguasaan materi, terkhusus pada materi pewarnaan graf. Baik pewarnaan titik/simpul, pewarnaan sisi, maupun pewarnaan wilayah pada graf untuk mencari jumlah bilangan kromatiknya.
2. Bagi universitas: sebagai bahan bacaan sekaligus bahan referensi bagi perkembangan keilmuan khususnya di jurusan matematika dalam bidang pewarnaan graf.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf

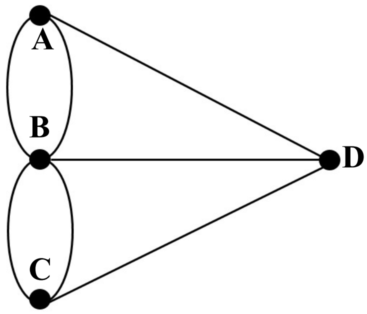
Teori graf merupakan salah satu ilmu matematika yang berguna untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf yaitu simpul atau titik (*vertex*) sebagai representasi objeknya, dan sisi (*edge*) sebagai representasi hubungan antara objek-objek itu. Teori graf pertama muncul pada tahun 1736 ketika seorang matematikawan dari Swiss bernama Leonard Euler mencoba menyelesaikan persoalan jembatan Konigsberg.

Masalah jembatan Konigsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf. Konigsberg merupakan sebuah kota tua di Prusia Timur yang saat ini dikenal dengan sebutan Kaliningrad. Di Konigsberg terdapat sungai Pregel yang membagi kota menjadi empat daratan dan mengalir mengitari pulau Kneipof, lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai, tampak pada gambar berikut ini (Putri, 2021):



Gambar 2.1 Jembatan Konigsberg

Pada hari minggu masyarakat Konigsberg biasanya berjalan-jalan dari daratan ke suatu daratan lainnya melalui jembatan tersebut. Mereka berfikir apakah mungkin untuk berjalan menyebrangi ketujuh jembatan tanpa melalui jembatan yang sama dari suatu daratan dan kembali ke tempat semula. Solusi Euler merepresentasikan masalah ini ke dalam sebuah graf dengan ke empat daratan sebagai empat titik (*vertex*) dan ke tujuh jembatan sebagai tujuh sisi (*edge*) (Sukriadi, 2019). Graf yang dibuat Euler diperlihatkan pada gambar di bawah ini (Putri, 2021):



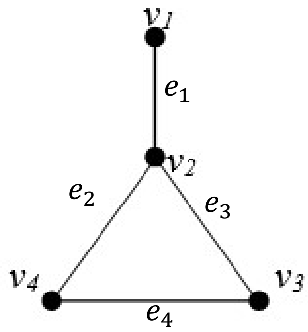
Gambar 2.2 Graf yang merepresentasikan jembatan Konigsberg

Definisi 2.1 *(Definisi graf secara umum) Graf adalah pasangan himpunan* (V, E), *dengan* V *adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan* E *adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota* V *yang disebut sisi* (Hasmawati,2020).

Berdasarkan definisi 2.1, himpunan V disebut himpunan titik (*vertex set*), dan E disebut himpunan sisi (*edge set*). Kadang- kadang ada yang menyebut titik sebagai simpul atau noktah (*point*) dan sisi sebagai busur, rusuk, atau garis (*line*). Jika graf (V, E) dinotasikan G, dengan kata lain $G = (V, E)$, maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga $G = (V(G), E(G))$. Secara matematika, Definisi 2.1 dapat ditulis: graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{u{:}\, u \text{ disebut titik}\}$ dan $E(G) = \{(u, v) : u, v \in V(G)\}$ dengan (u, v) disebut sisi, rusuk atau garis. Penulisan sisi (u, v) dapat juga ditulis uv.

Banyaknya anggota dari $V(G)$ dinyatakan dengan simbol $p(G)$ disebut sebagai orde (*order*) dari G dan banyaknya unsur dari $E(G)$ dinyatakan dengan simbol $q(G)$ disebut sebagai ukuran (*size*) dari G. Kardinalitas suatu himpunan yang dinyatakan dengan simbol "| |", adalah banyaknya anggota pada himpunan tersebut. Jadi, apabila $p(G)$ adalah orde graf G dan $q(G)$ adalah ukurannya, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$. Suatu graf G disebut graf trivial jika $q(G) = 0$ atau $E(G) = \emptyset$, atau dengan kata lain graf tersebut hanya memiliki satu buah titik dan tidak memiliki sisi (Hasmawati,2020).

Contoh 2.1:

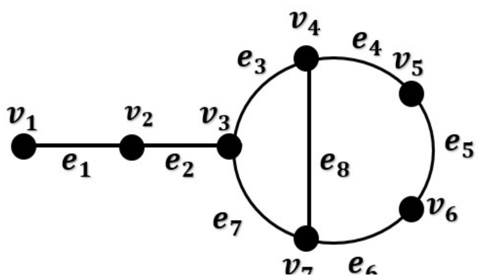


Gambar 2.3 Graf G

Berdasarkan Gambar 2.3, misal graf G adalah graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi masing-masing adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{\, v_1v_2,\ v_2v_3,\ v_2v_4,\ v_3v_4 \,\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, maka graf G tersebut mempunyai 4 titik dan 4 sisi sehingga order dari graf G tersebut adalah $p = |V(G)| = 4$, dan size graf G tersebut adalah $q = |E(G)| = 4$.

Definisi 2.2 *Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi masing-masing yaitu:* $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k,\ \ldots, v_n\}$ *dan* $E(G) = \{e_i : e_i = v_iv_j \text{ untuk } i, j\}$. ***Jalan*** $\boldsymbol{Wl_k}$ *pada graf G dengan panjang k adalah barisan titik dan sisi :* $v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2 \ldots, e_{k-1}, v_k$ *dengan* $e_i = v_iv_{i+1}, i = 0, 1, 2, 3, \ldots, k-1$. *Jadi, panjang suatu jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jalan disebut* ***tertutup*** *jika* $v_0 = v_n$. *Jalan yang setiap sisinya berbeda disebut* ***jalur (trail).*** *Jika* $v_i \neq v_j$ *untuk setiap* $i, j \in \{0,1,2, \ldots, k\}$, maka W *disebut* ***lintasan. Siklus*** *adalah jalan tertutup yang setiap titiknya berbeda* (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.2:



Gambar 2.4 Graf G berorde 7 dan berukuran 8

Berdasarkan Gambar 2.4, himpunan titik dan himpunan sisi masing-masing pada graf G adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan

$E\ (G) = \{e_1,\ e_2,\ e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, maka diperoleh:

- $W = \{\ v_{4,},\ e_3, v_3,\ e_7,\ v_7,\ e_6,\ v_6,\ e_5, v_5, e_4,\ v_4, e_8,\ v_7,\ e_7, v_3,\ e_2,\ v_2,\ e_1,\ v_1\}$ adalah sebuah jalan pada graf G dengan panjang 9;
- $v_1, e_1,\ v_2,\ e_2,\ v_3,\ e_3,\ v_4, e_4,\ v_5, e_5, v_6,\ e_6,\ v_7, e_8,\ v_4$ adalah sebuah jalur pada graf G;
- $v_3,\ e_3,\ v_4,\ e_4,\ v_5, e_5, v_6, e_6, v_7,\ e_7,\ v_3$ adalah sebuah siklus pada graf G;
- $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6, e_6, v_7$ adalah lintasan pada graf G.

2.2 Terminologi Dasar Graf

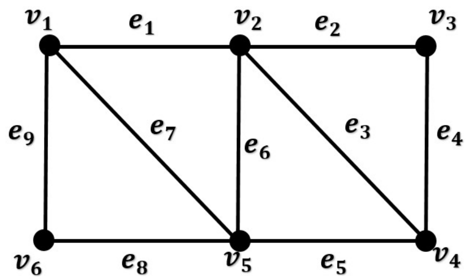
Di bawah ini adalah beberapa terminologi (istilah) dasar yang berkaitan dengan graf :

1. Bertetangga (*Adjacent*) dan bersisian (*incident*)

Dalam suatu graf G terdapat istilah berkaitan dengan titik dan sisi pada graf. Berikut adalah penjelasannya (Lucia, 2021):

Definisi 2.3 *Misalkan* $G = (V, E)$ *merupakan suatu graf dengan* $u, v\ \in\ V$ *dan* $e = uv\ \in\ E$, *maka* u *dan* v *dikatakan bertetangga jika dihubungkan oleh suatu sisi* e *dan* e *dikatakan bersisian dengan titik* u *atau* v.

Contoh 2.3:



Gambar 2.5 Graf G berorde 6 dan berukuran 9

Berdasarkan graf G pada Gambar 2.5, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, v_5 dan v_6 , tetapi titik v_1 tidak bertetangga dengan titik v_3. Sisi v_1v_2 atau e_1 bersisian dengan titik v_1 dan v_2, sisi v_2v_3 atau e_2 bersisian dengan titik v_2 dan v_3, tetapi sisi v_1v_2 atau e_1 tidak bersisian dengan titik v_4.

2. Derajat (*Degree*)

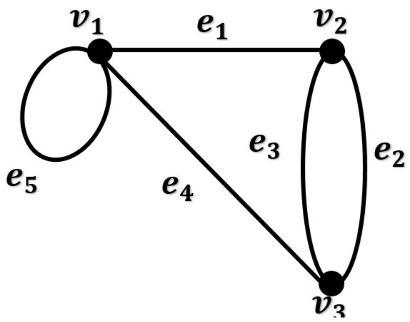
Dalam suatu graf G terdapat pula istilah derajat (*degree*) dari graf G tersebut. Berikut adalah penjelasannya:

Definisi 2.4 *Misalkan* $G = (V, E)$ *adalah suatu graf. Derajat dari simpul (titik)* $v \in V$ *yang dilambangkan dengan* $d(v)$ *adalah banyak sisi yang terhubung dengan titik* v (Lucia, 2021).

Definisi 2.5 *Setiap sisi yang hanya menghubungkan satu simpul dengan dirinya sendiri disebut loop* (Lucia, 2021).

Definisi 2.6 *Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua simpul atau titik* u *dan* v *pada suatu graf, maka sisi–sisi tersebut disebut sisi ganda* (Budayasa,2013).

Contoh 2.4:



Gambar 2.6 Graf G berorde 3 dan berukuran 6

Berdasarkan gambar 2.6, diperoleh derajat untuk masing-masing titik adalah sebagai berikut:

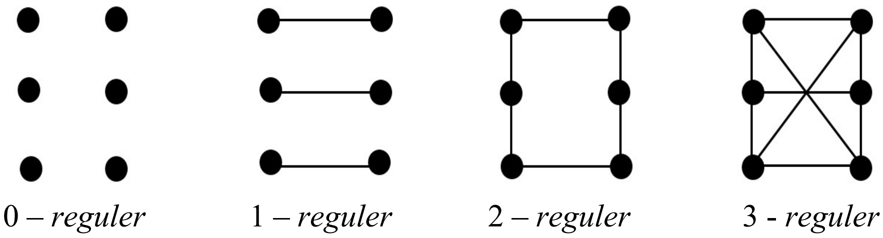
- $d(v_1) = 4$, karena garis yang berhubungan dengan v_1 adalah e_1, e_4 dan *loop* e_5 yang dihitung dua kali.
- $d(v_2) = 3$, karena garis yang berhubungan dengan v_2 adalah e_1, e_2 dan e_3.
- $d(v_3) = 3$, karena garis yang berhubungan dengan v_3 adalah e_4, e_2 dan e_3.

Definisi 2.7 *Derajat minimum dan maksimum dari suatu graf* G *dengan masing-masing dinotasikan* $\delta(G)$ *dan* $\Delta(G)$*, yang didefinisikan:*

- $\delta(G) = min\,\{d(v): v \in V(G)\}$.
- $\Delta(G) = max\{d(v): v \in V(G)\}$.

Suatu graf disebut regular jika $\delta(G) = \Delta(G)$. *Graf regular berderajat r dinotasikan* r*-reguler* (Hasmawati, 2020).

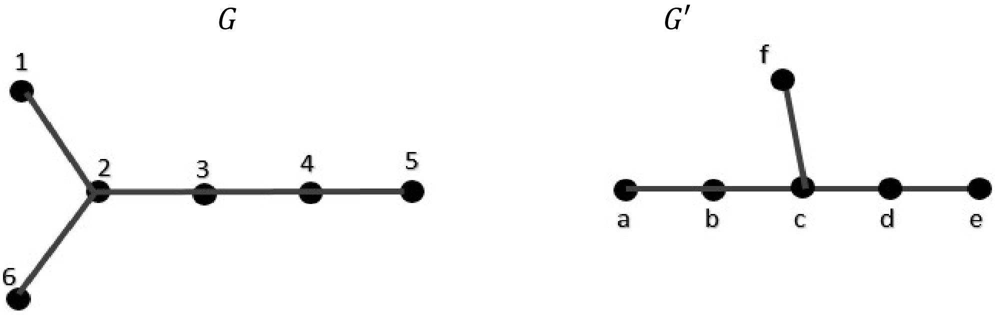
Contoh 2.5:



Gambar 2.7 Graf regular

3. Isomorfik

Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama kecuali pelabelan titik dan sisinya yang berbeda. Syarat dua buah graf dikatakan isomorfik adalah memiliki jumlah titik yang sama, memiliki jumlah sisi yang sama, dan memiliki derajat yang sama dari titik-titiknya. Tetapi, walaupun kedua graf memiliki syarat tersebut, belum tentu keduanya dikatakan isomorfik. Sebagai contoh diberikan graf G dan G' pada gambar 2.8 berikut:



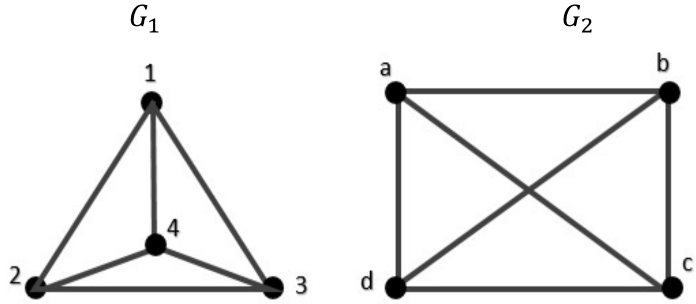
Gambar 2.8 Dua graf yang berorde dan berukuran sama tetapi tidak isomorfik

Terlihat pada graf G, satu-satunya titik yang berderajat 3 adalah titik 2 yang dihubungkan dengan dua titik lain yang berderajat 1 yaitu titik 1 dan 6. Sebaliknya, satu-satunya titik berderajat 3 pada graf G'adalah c, dimana hanya titik f yang berderajat 1 terhubung dengannya, sehingga graf G tidak isomorfik dengan graf G'.

Definisi 2.8 *Diberikan dua graf* $(V(G_1), E(G_1))$ *dan* $(V(G_2), E(G_2))$. *Suatu pemetaan satu-satu* $\theta: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ *dikatakan isomorphisme dari* $(V(G_1), E(G_1))$ *ke* $(V(G_2), E(G_2))$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $u, v \in V(G_1)$ *dengan* $uv \in E(G_1)$ *maka* $(\theta(u)\ \theta(v) \in E(G_2))$. *Dua graf* G_1 *dan* G_2 *dikatakan isomorfik jika ada isomorphisme antara* G_1 *dan* G_2 (Hasmawati, 2020).

Jadi, dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespodensi satu-satu antara titik ke titik dan antara sisi ke sisi sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan u dan v di G_1, maka sisi e' yang korespondensi di G_2 juga harus bersisian dengan titik u' dan v' di G_2.

Contoh 2.6:



Gambar 2.9 Dua graf yang isomorfik

Berdasarkan Gambar 2.9, misalkan diberikan dua graf G_1 dan G_2 dengan $V(G_1) = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $V(G_2) = \{a, b, c, d\}$. Didefinisikan pemetaan θ yaitu $\theta(1) = a$, $\theta(2) =$ b, $\theta(3) =$ c dan $\theta(4) =$ d. Dapat diperiksa bahwa pada G_1:

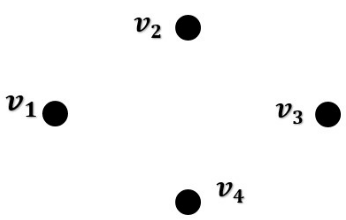
- 1,2 $\in V(G_1)$ dengan $(1,2) \in E(G_1)$ dan $\big(\theta(1), \theta(2)\big) = (a, b) \in E(G_2)$.
- 1,3 $\in V(G_1)$ dengan $(1,3) \in E(G_1)$ dan $\big(\theta(1), \theta(3)\big) = (a, c) \in E(G_2)$.
- 1,4 $\in V(G_1)$ dengan $(1,4) \in E(G_1)$ dan $\big(\theta(1), \theta(4)\big) = (a, d) \in E(G_2)$.
- 2,3 $\in V(G_1)$ dengan $(2,3) \in E(G_1)$ dan $\big(\theta(2), \theta(3)\big) = (b, c) \in E(G_2)$.
- 2,4 $\in V(G_1)$ dengan $(2,4) \in E(G_1)$ dan $\big(\theta(2), \theta(4)\big) = (b, d) \in E(G_2)$.
- 3,4 $\in V(G_1)$ dengan $(3,4) \in E(G_1)$ dan $\big(\theta(3), \theta(4)\big) = (c, d) \in E(G_2)$.

Berdasarkan Definisi 2.8, G_1 isomorfik dengan G_2 atau G_1 dan G_2 isomorfik.

4. Graf kosong

Definisi 2.9 *Graf kosong dinotasikan N_n adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong* (Gani, 2018).

Contoh 2.7:



Gambar 2.10 Graf kosong N_4

2.3 Beberapa Graf Khusus

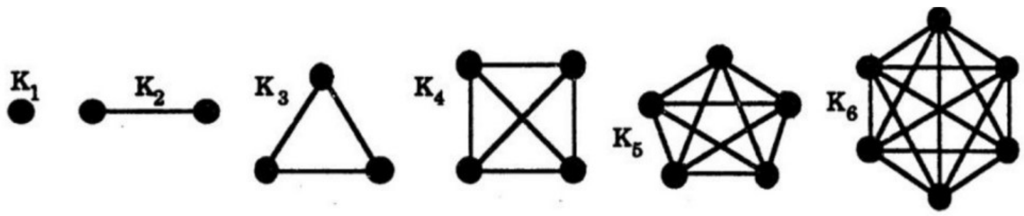
Berikut ini didefinisikan beberapa graf khusus yang sering ditemukan:

a. Graf lengkap

Definisi 2.10 *Graf lengkap adalah graf yang setiap dua titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan* K_n(Hasmawati,2020).

Setiap titik pada graf lengkap mempunyai derajat yang sama. Graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama disebut graf regular. Dengan demikian, graf lengkap merupakan graf reguler. Derajat graf reguler adalah r, dinotasikan r-reguler, maka graf lengkap $K_n = (n - 1)$ – reguler, karena setiap titik pada graf K_n berderajat $n - 1$.

Contoh 2.8:

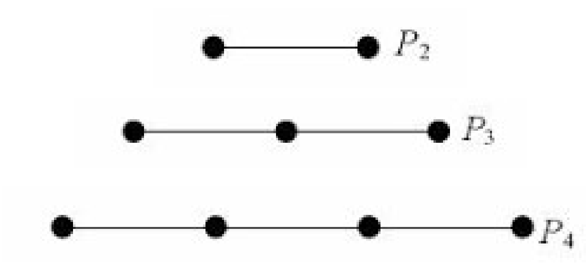


Gambar 2.11 Graf Lengkap

b. Graf lintasan

Definisi 2.11 *Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas barisan titik dan sisi* $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots\dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ *dengan* $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1$. *Graf lintasan dinotasikan* P_n *dengan orde n dimana* $n \geq 2$ *dan jumlah sisi n* -1. *Graf lintasan terdiri atas satu lintasan maksimal*(Hasmawati, 2020).

Contoh 2.9 :



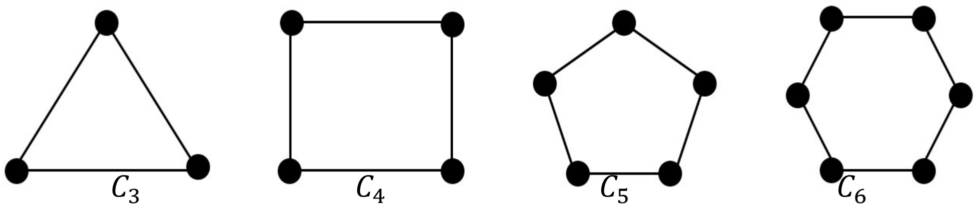
Gambar 2.12 Graf Lintasan

c. graf siklus

Definisi 2.12 *Graf siklus adalah graf yang terdiri dari satu siklus. Siklus* C_n *dengan panjang* n, *dengan* $n \geq 3$ *adalah graf dengan himpunan titik* $V(C_n = V(P_n)$ *dan himpunan sisi dari* $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$ (Hasmawati, 2020).

Dengan kata lain, titik terakhir dan pertama pada graf lintasan P_n saling bertetangga.

Contoh 2.10:

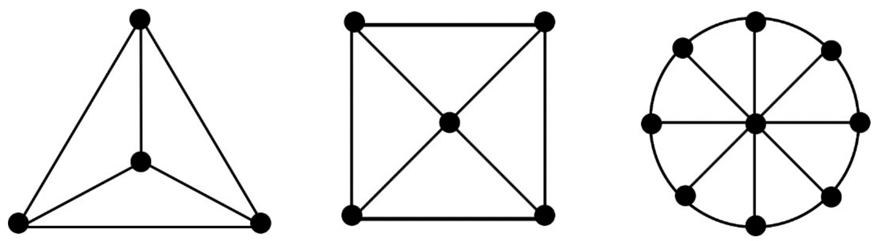


Gambar 2. 13 Graf Siklus

d. Graf roda

Definisi 2.13 *Graf roda (wheel) adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus* C_n *dengan menambahkan satu titik pusat* x*, dengan* x *bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde* $n + 1$ *dinotasikan* W_n (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.11:



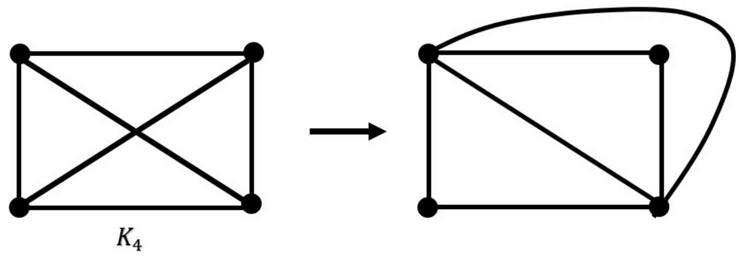
Gambar 2.14 Graf Roda

e. Graf planar

Definisi 2.14 *Suatu graf* G *disebut graf planar atau graf bidang jika graf tersebut dapat digambar kembali pada bidang sedemikian sehingga tidak terdapat sisi yang berpotongan* (Hasmawati, 2020).

Salah satu contoh graf planar adalah graf lengkap K_4. Graf K_4 dapat digambar kembali sehingga tidak terdapat sisi yang berpotongan seperti pada Gambar 2.15.

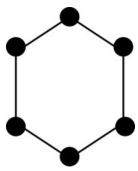
Contoh 2.12:



Gambar 2.15 Graf Planar

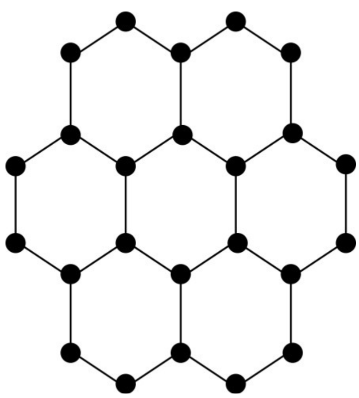
f. Graf sarang lebah

Graf sarang lebah dibangun dari beberapa bentuk hexagon yang isomorfik dengan graf siklus C_6, dinotasikan $HC(n)$ dimana $n \in \mathbb{N}$ merupakan lapisan ke-n dari graf sarang lebah. Graf sarang lebah lapisan ke-1 adalah sebuah hexagon, dinotasikan $HC(1)$. Berikut adalah gambar dari $HC(1)$:



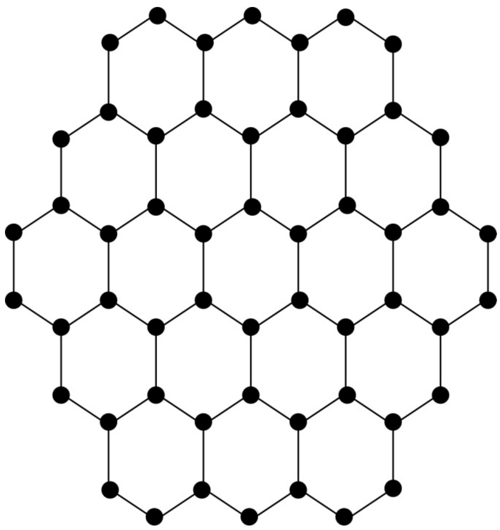
Gambar 2.16 $HC(1)$

Graf sarang lebah lapisan ke-2, dinotasikan $HC(2)$ diperoleh dengan menempelkan sebanyak 6 hexagon mengelilingi sisi-sisi tepi dari $HC(1)$. Kemudian ke-6 hexagon tersebut masing-masing memiliki paling sedikit satu sisi yang saling menempel. Berikut adalah gambar dari $HC(2)$:



Gambar 2.17 $HC(2)$

Begitupun untuk graf sarang lebah lapisan ke-3 yang dinotasikan $HC(3)$ diperoleh dengan menempelkan sebanyak 12 hexagon mengelilingi sisi-sisi tepi dari $HC(2)$. Kemudian 12 buah hexagon tersebut masing-masing memiliki paling sedikit satu sisi yang saling menempel. Berikut adalah gambar dari $HC(3)$:



Gambar 2.18 $HC(3)$

Dengan demikian, definisi untuk graf sarang lebah $HC(n)$ adalah sebagai berikut:

Definisi 2.15 *Graf sarang lebah adalah graf planar yang dibangun dari beberapa hexagon, dinotasikan dengan* $HC(n)$ *dengan* $n \geq 2$ *merupakan lapisan ke-*n *dari graf sarang lebah yang diperoleh dengan menempelkan sebanyak* $6(n-1)$ *buah hexagon mengelilingi sisi-sisi tepi dari* $HC(n-1)$.

Sesuai dengan Definisi 2.15, jumlah titik dan jumlah sisi untuk graf sarang lebah $HC(n)$ masing-masing adalah $p(HC(n)) = |V(HC(n))| = 6n^2$ dan $q(HC(n)) = |E(HC(n))| = 9n^2 - 3n$. Kemudian, untuk banyaknya hexagon pada graf sarang lebah membentuk sebuah deret bilangan yaitu :

$$1 + 6 + 12 + 18 + 24 + \cdots + 6(n-1) = 1 + \sum_{i=1}^{n} 6(i-1)$$

2.4 Pewarnaan Graf

Persoalan pewarnaan graf dibagi ke dalam tiga macam, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah.

1. Pewarnaan titik

Definisi 2.16 *Pewarnaan titik pada suatu graf* $G = (V, E)$ *merupakan suatu pemetaan* $c: V \to \mathbb{N}$, *dimana* $\mathbb{N}$ *adalah himpunan bilangan asli sedemikian* *sehingga* $c(u) \neq c(v)$ *untuk setiap* $uv \in E(G)$. *Misal* $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ *suatu pewarnaan titik pada graf* $G = (V, E)$ *dengan* $k \in \mathbb{N}$, *maka* c *disebut suatu pewarnaan-*k *pada* G. *Misal* G *suatu graf dan* $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ *suatu pewarnaan titik pada graf* G, *jika* k *adalah bilangan bulat terkecil, maka* k *disebut sebagai bilangan kromatik dari* G *dan dinotasikan dengan* $\chi(G)$.

Jadi, pewarnaan titik pada graf adalah pemberian warna pada titik-titik di graf G sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Suatu pewarnaan yang menggunakan k-buah warna biasanya disebut dengan pewarnaan-k. Ukuran terkecil banyaknya warna yang dapat diberikan kepada sebuah graf G dinamakan dengan bilangan kromatik yang dilambangkan dengan $\chi(G)$(Chartrand, 2009).

Pada beberapa graf, bilangan kromatiknya dapat langsung ditentukan seperti graf kosong yang memiliki bilangan kromatik 1 karena semua simpul tidak bertetangga dengan simpul lainnya dan graf lengkap dengan n buah simpul memiliki bilangan kromatik sebanyak n karena semua simpul bertetangga satu sama lain(Apriyanto, 2018).

Teorema 2.1 Bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf siklus C_n adalah (Ghofur, 2008):

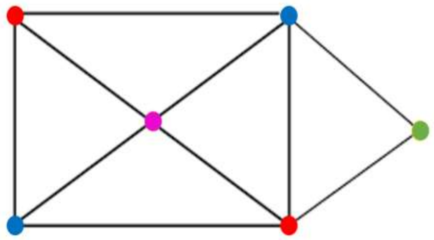
$$\chi(C_n)) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n \text{ bilangan ganjil}, \quad n \geq 3 \\ 2, & \text{jika } n \text{ bilangan genap}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Teorema 2.2 Bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf roda W_n adalah (Ghofur, 2008):

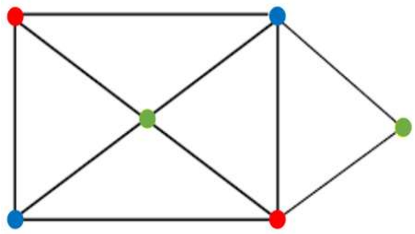
$$\chi(W_n)) = \begin{cases} 4, & \text{jika } n \text{ bilangan ganjil}, \quad n \geq 3 \\ 2, & \text{jika } n \text{ bilangan genap}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Contoh 2.13 :

Berikut dua pewarnaan pada graf orde 6 berukuran 10.



(a)



(b)

Gambar 2.19 Pewarnaan simpul atau titik

Berdasarkan Gambar 2.19, terlihat pada (a), memiliki pewarnaan-4 yaitu warna merah, biru, merah muda, dan hijau. Sedangkan pada (b) memiliki pewarnaan-3 yaitu warna biru, merah, dan hijau. Maka, graf tersebut mempunyai bilangan kromatik 3 ($\chi(G) = 3$), karena ukuran terkecil banyaknya warna yang dapat diberikan pada graf tersebut adalah 3 warna, yaitu: merah, hijau , dan biru.

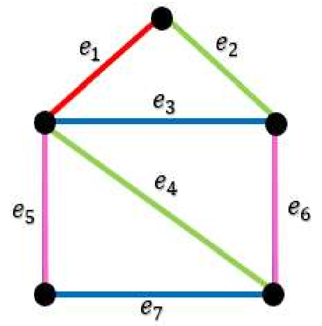
2. Pewarnaan sisi

Definisi 2.17 *Pewarnaan sisi pada suatu graf* $G = (V, E)$ *merupakan suatu pemetaan* $c : E \to \mathbb{N}$, *dimana* $\mathbb{N}$ *adalah himpunan bilangan asli sedemikian sehingga* $c(e_i) \neq c(e_j)$ *untuk setiap* $e_i, e_j \in E(G)$ *yang bersisian dengan titik di* $V(G)$ *yang sama (terhubung langsung dengan satu titik yang sama). Misal* $c : E \to \{1, 2, \dots, k\}$ *suatu pewarnaan sisi pada graf* $G = (V, E)$ *dengan* $k \in \mathbb{N}$, *maka* c *disebut suatu pewarnaan-*k *pada* G. *Misal* G *suatu graf dan* $c : E \to \{1, 2, \dots, k\}$ *suatu pewarnaan sisi pada graf* G, *jika* k *adalah bilangan bulat terkecil, maka* k *disebut sebagai indeks kromatik dari* G *dan dinotasikan dengan* $\chi'(G)$.

Jadi, pewarnaan sisi pada graf G adalah pemberian warna pada sisi-sisi di graf G sedemikian sehingga setiap dua atau lebih sisi yang bertetangga (terhubung langsung dengan satu titik yang sama) memiliki warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan-k sisi, maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan k-warna. Angka terkecil dari warna-warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan sisi graf G disebut sebagai indeks kromatik yang dilambangkan dengan $\chi'(G)$ (Afriantini, 2019).

Contoh 2.14 :

Diberikan graf G orde 5 dan ukuran 7. Berikut adalah pewarnaan sisi dari graf G:



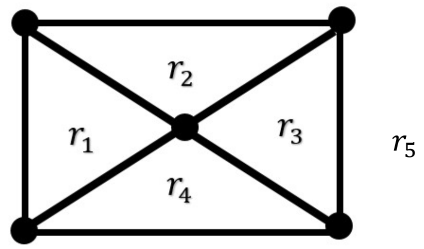
Gambar 2.20 Pewarnaan sisi

Berdasarkan Gambar 2.20, terdapat tujuh sisi graf $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$, dimana e_1 diberi warna merah, dan bertetangga dengan e_2, e_3, e_4, e_5. Kemudian, e_2 diberi warna hijau, tidak diberi lagi warna merah karena e_2 bertangga dengan e_1 dan bertetangga dengan e_3, e_6. Selanjutnya, pada e_3 diberi warna biru karena bertetangga dengan $e_1$dan e_2, dan bertetangga dengan e_5, e_4, e_6. Sisi e_4 diberi warna hijau karena tidak bertetangga dengan e_2, dan bertetangga dengan e_1, e_3, e_5, e_6, e_7. Setelah itu, pada e_5 diberi warna pink karena bertetangga dengan e_1, e_3, e_4, dan e_7. Kemudian, e_6 diberi warna pink juga karena tidak bertetangga dengan e_5 dan bertetangga dengan e_2, e_3, e_4, e_7. Terakhir, pada e_7 boleh diberi warna merah maupun biru (dipilih warna biru) , karena tidak bertetangga dengan e_1 dan e_3, dan bertetangga dengan e_4, e_5, e_6.

Maka, graf G tersebut mempunyai indeks kromatik 4($\chi'(G)$ = 4), karena warna minimum yang dapat diberikan pada sisi graf tersebut adalah 4 warna yaitu merah, pink, biru dan hijau.

3. Pewarnaan wilayah

Misalkan terdapat sebuah graf G yaitu graf planar atau graf bidang yang berorde 5 dan berukuran 8. Graf bidang G akan mempartisi bidang ke dalam sejumlah wilayah (*region*) yang saling terhubung. Tiap wilayahnya dinyatakan sebagai simpul, sedangkan sisi menyatakan bahwa terdapat dua wilayah yang berbatasan langsung atau disebut juga bertetangga. Maksud dari wilayah yang berbatasan langsung yaitu dimana dua wilayah tersebut dibatasi oleh satu sisi dari graf bidang G. Setiap graf bidang mempunyai satu wilayah yang tidak terbatas yang disebut wilayah luar.



Gambar 2.21 Graf planar atau graf bidang orde 5 ukuran 8

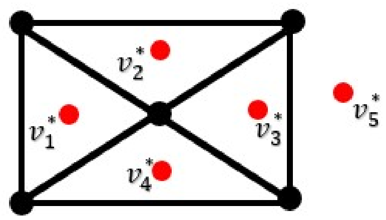
Pada Gambar 2.21, terdapat lima wilayah yaitu r_1, r_2, r_3, r_4 dan r_5 (sebagai wilayah luar), kemudian wilayah-wilayah yang saling berbatasan langsung atau bertetangga yaitu: r_1 bertetangga dengan r_2, r_4 dan r_5, r_2 bertetangga dengan r_1, r_3

dan r_5, r_3 bertetangga dengan r_2, r_4 dan r_4, r_4 bertetangga dengan r_1, r_3 dan r_5, dan r_5 bertetangga dengan r_1, r_2, r_3 dan r_4.

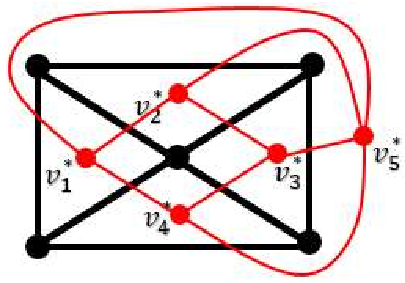
Definisi 2.18 *Pewarnaan wilayah pada graf G adalah pemberian warna pada wilayah di graf G sedemikian sehingga setiap dua wilayah bertetangga* (*berbatasan langsung*) *memiliki warna yang berbeda* (Afriantini, 2019).

Graf bidang G yang akan dilakukan pewarnaan wilayah terlebih dahulu dibentuk menjadi graf lain G^* yang disebut dengan dual dari G yang dibentuk melalui tahap sebagai berikut (Anwar, 2021):

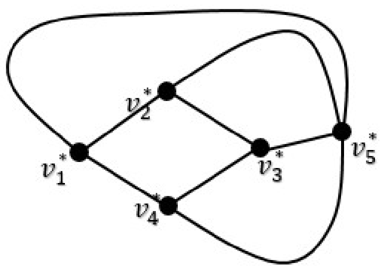
a. Di dalam setiap wilayah (*region*) dari graf bidang G dapat dibentuk suatu titik v^* (titik-titik ini adalah titik di G^*).



b. Setiap sisi e dari graf bidang G dapat digambar suatu garis e^* yang memotong sisi e dan menghubungkan titik v^* (garis-garis ini adalah sisi di G^*).

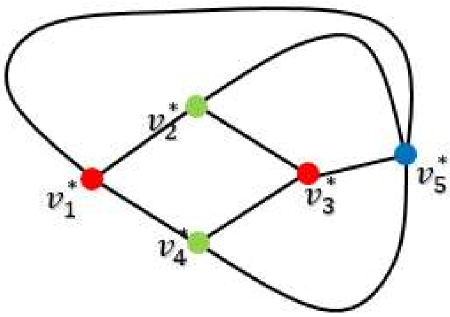


Maka, terbentuklah dual dari graf bidang G dimana himpunan titiknya yaitu $V(G^*) = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*, v_5^*\}$dan himpunan sisinya $E(G^*) = \{v_1^*v_2^*, v_1^*v_4^*, v_1^*v_5^*, v_2^*v_3^*, v_2^*v_5^*, v_3^*v_4^*, v_3^*v_5^*, v_4^*v_5^*\}$. Berikut adalah gambar dari dual $graf\ bidang\ G(G^*)$:



Gambar 2.22 dual graf bidang G (G^*)

Setelah menjadi graf G^*, maka dilakukan pewarnaan titik pada graf G^* tersebut untuk mendapatkan hasil pewarnaan wilayah pada graf bidang G sebagai berikut:



Gambar 2.23 pewarnaan titik pada dual graf bidang G (G^*)

Warna yang diperoleh dalam melakukan pewarnaan titik pada graf G^* sebanyak 3-warna, dimana warna ini sudah sangat minimal. Maka, bilangan kromatik pada graf bidang G berorde 5 ukuran 8 adalah $\chi(G)$ = 3.

Pembahasan bilangan kromatik pada pewarnaan titik graf dual dari graf sarang lebah $HC(n)$ dibatasi untuk $n \geq 2$ dan n bilangan asli. Bentuk umum dari dual graf sarang lebah dinotasikan sebagai $HC(n)^*$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.19 *Graf $HC(n)^*$ merupakan graf dual yang dibentuk dari graf sarang lebah $HC(n)$ dengan $n \geq 2$.*

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Metode penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah melakukan kajian pustaka yang lebih mengacu pada materi teori graf untuk menganalisis objek penelitian, kemudian mengumpulkan dan mempelajari hasil penelitian pada literatur-literatur yang ada seperti jurnal, buku maupun skripsi sebagai tambahan informasi untuk penelitian ini. Jenis metode penelitian ini merupakan jenis penelitian kualitatif.

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu:

1. Mengumpulkan literatur-literatur yang berhubungan dengan graf terutama tentang pewarnaan graf.
2. Penentuan objek penelitian yaitu graf sarang lebah $HC(n)$.
3. Konstruksi graf sarang lebah $HC(n)$.
4. Mendefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf sarang lebah $HC(n)$.
5. Melakukan pewarnaan pada graf sarang lebah.
   a. Pewarnaan titik pada graf sarang lebah $HC(n)$ untuk $n = 2,3,4,5$, kemudian menentukan bilangan kromatiknya.
   b. pewarnaan sisi pada graf sarang lebah $HC(n)$ untuk $n = 2,3,4,5$, kemudian menentukan bilangan kromatiknya.
   c. pewarnaan wilayah pada graf sarang lebah $HC(n)$ untuk $n = 2,3,4,5$, langkah-langkahnya sebagai berikut.
      - Mencari dual dari graf sarang lebah $HC(n)$ untuk $n = 2,3,4,5$.
      - Menentukan pewarnaan titik dari dual graf sarang lebah $HC(n)$ untuk $n = 2,3,4,5$.
      - Menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik dari dual graf sarang lebah $HC(n)$ untuk $n = 2,3,4,5$.
6. Mendapatkan pola bilangan kromatik dari pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah pada graf sarang lebah $HC(n)$ untuk $n = 2, 3, 4, 5$ yang kemudian menghasilkan suatu teorema.
7. Membuktikan teorema yang dihasilkan.