PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA GRAF-GRAF HASIL AMALGAMASI TITIK GRAF BINTANG DENGAN LINTASAN

SKRIPSI

SELFA SUWANDI
H011 18 1011

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

SEPTEMBER 2022

PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA GRAF-GRAF HASIL AMALGAMASI TITIK GRAF BINTANG DENGAN LINTASAN

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

SELFA SUWANDI
H011 18 1011

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
SEPTEMBER 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Selfa Suwandi
NIM	: H011181011
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf-graf Hasil Amalgamasi Titik Graf Bintang dengan Graf Lintasan

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 8 September 2022

Yang menyatakan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 0AAB7AKX012941765

Selfa Suwandi

H011181011

LEMBAR PENGESAHAN

PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA GRAF-GRAF HASIL AMALGAMASI TITIK GRAF BINTANG DENGAN LINTASAN

Disusun dan diajukan oleh:

SELFA SUWANDI

H011181011

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal 8 September 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**
NIP. 197008072000031002	**NIP. 198505292008121002**

Ketua Program Studi Matematika,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si). Penulis menyadari bahwa sulit untuk menyelesaikan skripsi ini tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Utama yang senantiasa meluangkan waktu, tenaga dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan hingga selesainya skripsi ini;
2. Bapak Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Pertama yang senantiasa meluangkan waktu, tenaga dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan hingga selesainya skripsi ini;
3. Bapak Prof. Dr. Budi Nurwahyu, M.S. selaku Penguji yang telah banyak memberi saran dan masukan dalam penyusunan skripsi ini, dan selaku Penasihat Akademik yang telah membimbing saya selama perkuliahan;
4. Bapak Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si. selaku Penguji yang telah banyak memberi saran dan masukan demi tersusunnya skripsi ini yang lebih baik;
5. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika FMIPA Unhas atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah beliau berikan selama perkuliahan;
6. Bapak/Ibu pegawai/staff departemen, fakultas, dan universitas yang telah banyak membantu selama proses perkuliahan dan berbagai persuratan dalam penyusunan skripsi ini;
7. orang tua dan keluarga saya tercinta yang selalu memberi dukungan material, motivasi, dan perhatian penuh selama menjalani perkuliahan; dan
8. teman- teman seperjuangan dan teman-teman lainnya yang telah banyak membantu dalam perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 8 September 2022

Selfa Suwandi

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Selfa Suwandi
NIM	: H011181011
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalti-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf-graf Hasil Amalgamasi Titik Graf Bintang dengan Graf Lintasan

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data *(database)*, merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 8 September 2022

Yang menyatakan,

Selfa Suwandi

ABSTRAK

Salah satu topik permasalahan dalam teori graf adalah pelabelan graf. Misalkan $G(V, E)$ adalah suatu graf terhubung sederhana dan berhingga dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, pemetaan bijektif f dari himpunan $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \cdots, p+q\}$ dengan $p = |V(G)|$ dan $e = |E(G)|$ disebut pelabelan total sisi ajaib dari G jika terdapat bilangan bulat positif k (bilangan ajaib dari f) sedemikian sehingga $f(u) + f(uv) + f(v) = k$ untuk sebarang sisi uv dari G. Pelabelan total sisi ajaib yang memetakan himpunan titik suatu graf ke himpunan $\{1, 2, 3, \cdots, p\}$ disebut pelabelan total sisi ajaib super. Misalkan G_i graf terhubung dengan titik tetap $v_{oi} \in V(G_i)$. Amalgamasi graf G_i pada titik tetap v_{oi} dinotasikan dengan $Amal\ (G_i, v_{oi})$ adalah mengambil semua unsur-unsur (titik dan sisi) pada G_i dengan $v_{oi} = v_{oj}, \forall i, j$. Dalam tugas akhir ini, akan ditunjukan bahwa graf-graf hasil amalgamasi titik graf bintang dengan graf lintasan adalah graf dengan pelabelan total sisi ajaib dengan mengkonstruksi pelabelan titik dan sisinya, sehingga didapatkan suatu bilangan ajaib k.

Kata kunci: Pelabelan Total Sisi Ajaib, Amalgamasi Titik, Bilangan Ajaib.

Judul	:	Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf-graf Hasil Amalgamasi Titik Graf Bintang dengan Graf Lintasan
Nama	:	Selfa Suwandi
NIM	:	H011181011
Program Studi	:	Matematika

ABSTRACT

One of the topics of graph theory is graph labeling. Let G be a finite simple connected graph, a bijection f from $V(G) \cup E(G)$ to $\{1, 2, \cdots, p+q\}$ where $p = |V(G)|$ and $q = |E(G)\ |$ is called edge-magic total labeling of G if there exists a constant k (called the magic constant of f) such that $f(u) + f(uv) + f(v) = k$ for any edge uv of G. The super edge-magic total labeling on a graph G is the edge-magic total labeling which maps V into the set $\{1, 2, \cdots, p\}$. Let G_i be a connected graph with a fixed point $v_{oi} \in V(G_i)$. Amalgamation of graph G_i onto a fixed point v_{oi} denoted by $Amal\ (G_i, v_{oi})$ is to take all elements (vertices and edges) on G_i with $v_{oi} = v_{oj}, \forall i, j$. In this thesis, we will show that graphs resulting from vertex amalgamation of star graph with path graph are edge-magic total labeling, with constructed vertex labeling and edge labeling until get a magic constant k.

***Keywords**: Edge-Magic Total Labeling, Vertex Amalgamation, Magic constant.*

Title	:	*Edge-Magic Total Labeling on Graphs Resulting from Vertex Amalgamation of Star Graph with Path Graph*
Name	:	*Selfa Suwandi*
Student ID	:	H011181011
Study Program	:	*Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang didapat dengan cara berpikir atau bernalar. Matematika mempunyai bahasa dan aturan tersendiri dengan baik, penalaran yang jelas dan sistematik, dan struktur yang sangat kuat. Dengan berbagai keungulan ini matematika digunakan sebagai suatu cara pendekatan dalam mempelajari ilmu pengetahuan dan teknologi dan dalam menyelesaikan masalah yang rumit. Salah satu cabang ilmu matematika yaitu teori graf. Graf merupakan salah satu cabang ilmu yang sangat penting dalam matematika dan terus dikembangkan terutama dalam ilmu komputer dengan dengan graf dapat mempresentasikan banyak sekali model persoalan. Dalam kehidupan sehari-hari graf digunakan untuk mendeskripsikan model persoalan dan menggambarkannya dengan konkret dan jelas. Selain itu graf juga digunakan untuk mempermudah menyelesaikan berbagai macam persolan-persoalan yang sulit diselesaikan dengan perhitungan dan pertimbangan biasa. Hal ini disebabkan oleh sifat-sifat dan teori-teori yang telah dipelajari pada graf.

Menurut catatan sejarah, teori graf awal mulanya berasal dari solusi masalah jembatan Konigsberg diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang ahli matematika terkenal dari Swiss pada tahun 1736, dalam karya tulisannya yang berjudul "*Solutio Problematis ad Geometrian Situs Pertinentis*". Berkat perkerjaan Euler yang diilhami melalui masalah jembatan Konigsberg memunculkan suatu cabang Matematika yang cukup penting yang dikenal dengan nama Teori Graf (*Graph Theory*) (Hasmawati, 2020).

Dalam membentuk graf baru, salah satu cara yang dapat dilakukan yaitu dengan menggunakan operasi amalgamasi. Pada penelitian ini penulis akan menggunakan operasi amalgamasi titik. Amalgamasi titik dari pasangan titik graf (G, u) bersama (H, v) adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik u dan v menjadi satu titik tetap (Ardiyansah & Darmaji, 2013).

Dalam perkembangan teori graf terdapat beberapa bidang kajian, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan topik penelitian matematika kombinatorik yang berkembang pesat pada beberapa tahun belakangan ini. Diperkenalkan sejak tahun 1963 oleh sedlacelk dan terus berkembang sampai sekarang. Pelabelan graf pada dasarnya memberikan label berupa bilangan bulat positif pada elemen suatu graf yaitu titik, sisi atau kombinasinya dengan sifat dan aturan tertentu (Firmansah & Syaifuddin, 2018).

Pelabelan total sisi ajaib merupakan salah satu jenis pelabelan yang sangat penting. Graf yang memenuhi pelabelan total sisi ajaib adalah graf yang dilabelkan dengan bilangan bulat positif, dimana setiap titik dan sisi yang terkait (*incident*) jika dijumlahkan menghasilkan bilangan bulat positif yang sama. Pelabelan total sisi ajaib disebut pelabelan total sisi ajaib super jika setiap titik dilabelkan dengan bilangan bulat positif terkecil (Triyani dkk., 2013).

Beberapa peneliti terdahulu telah memperkenalkan operasi amalgamasi dan membuktikan beberapa jenis graf merupakan pelabelan total sisi ajaib. Ardiyansah dan Darmaji (2013) memperkenalkan graf hasil operasi amalgamasi dua buah graf dan mencari bilangan kromatik graf tersebut (Ardiyansah & Darmaji, 2013). Stalin Kumar (2018) telah membuktikan bahwa graf bintang ganda (*double star*) $S_{n,n+2}$ adalah pelabelan total sisi ajaib super dengan bilangan ajaib $k = 4n + 12$ dan graf bintang ganda $S_{n,n}$ untuk n genap juga merupakan pelabelan total sisi ajaib super dengan bilangan ajaib $k = 5n + 6$ (Kumar, 2018). Selanjutnya Nurdin dan kawan-kawan (2018) telah membuktikan graf kincir air $WM(n)$ yang dimodifikasi merupakan pelabelan total sisi ajaib jika n ganjil untuk $n \geq 3$ dengan bilangan ajaib $k = \frac{1}{2}(21n + 3)$ (Nurdin dkk., 2018). Pada tahun 2019 Baki Swita dan kawan-kawan dalam jurnal "*On Egde Magic Total Labeling of* $(7,3)$-*Cycle Books*" telah membuktikan $(7,3)$-*Cycle Books* merupakan pelabelan total sisi ajaib (Swita dkk., 2019).

Bimei wang dan kawan-kawan (2020) telah membuktikan amalgamasi titik graf $Amal\ (F_3;\ F_m;\ S_n, v\ )$ jika $3 \leq m \leq 6, n \geq 2$ dan graf $Amal\ (F_4\ ;\ F_m;\ S_n, v\ )$ jika $4 \leq m \leq 5, n \geq 2$ merupakan pelabelan total sisi ajaib super (Wang dkk., 2020). Pada tahun 2015 Bumtle Kang dan kawan-kawan telah membuktikan graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ adalah pelabelan total sisi ajaib super jika dan hanya jika $m = 1$ atau $n = 1$ atau $K_{m,n}$ bukan merupakan pelabelan total sisi ajaib super jika dan hanya jika $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ (Kang dkk., 2015).

Inne singgih (2021) telah membuktikan graf (n, t)-*Kites* merupakan pelabelan total sisi ajaib. Graf $(n, 2)$-*kite* merupakan pelabelan total sisi ajaib super jika dan hanya jika n genap dan graf $(n, 1)$-*kite* merupakan pelabelan total sisi ajaib super ketika n ganjil. Graf $(n, 1)$-*kite* merupakan pelabelan total sisi ajaib dengan $k = \frac{1}{2}(5n + 9)$ ketika n ganjil dan $k = \frac{1}{2}(5n + 10)$ ketika n genap (Singgih, 2021).

Berdasarkan penjabaran diatas, kebanyakan peneliti hanya membuktikan pelabelan total sisi ajaib (tak super) atau pelabelan total sisi ajaib (super) dengan jenis-jenis graf yang sudah ada tanpa mengkombinasikan suatu operasi dalam graf agar menghasilkan suatu graf baru. Oleh sebab itu, penulis tertarik mengkaji pelabelan total sisi ajaib (tak super maupun super) dari hasil mengkombinasikan operasi dalam graf yaitu amalgamasi titik, dan selanjutnya penelitian tersebut akan dituangkan dalam bentuk skripsi yang berjudul:

“Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf-graf Hasil Amalgamasi Titik Graf Bintang dengan Graf Lintasan”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka masalah yang dapat dirumuskan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menentukan operasi amalgamasi titik graf bintang dengan graf lintasan P_4.
2. Bagaimana menentukan interval bilangan ajaib dari graf-graf hasil amalgamasi titik graf bintang dengan graf lintasan P_4.
3. Bagaimana menentukan bahwa graf-graf hasil amalgamasi titik graf bintang dengan graf lintasan P_4 merupakan pelabelan total sisi ajaib.

1.3 Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak mencakup pembahasan yang terlalu luas, maka masalah pada penelitian ini dibatasi pada pelabelan total sisi ajaib pada graf-graf hasil amalgamasi titik graf bintang S_n untuk setiap n bilangan asli dengan graf lintasan P_4.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk membuktikan apakah graf-graf hasil amalgamasi titik graf bintang dengan graf lintasan P_4 merupakan pelabelan total sisi ajaib.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menambah pengetahuan mengenai operasi amalgamasi titik.
2. Menambah pengetahuan mengenai pelabelan total sisi ajaib.
3. Sebagai sarana baru bagi peneliti lain untuk mengkaji suatu operasi dalam graf agar menghasilkan graf baru dan membuktikan pelabelan total sisi ajaibnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan disajikan beberapa konsep dasar dan terminologi dalam graf serta notasi-notasi yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya. Kajian diawali dengan pendefinisian graf, terminologi graf, pemetaan fungsi, serta definisi dan jenis pelabelan graf.

2.1 Graf

Pada Subbab 2.1, kajian diawali dengan pendefinisian graf, beberapa pengertian lain, notasi, operasi, dan istilah-istilah yang akan digunakan dalam skripsi ini.

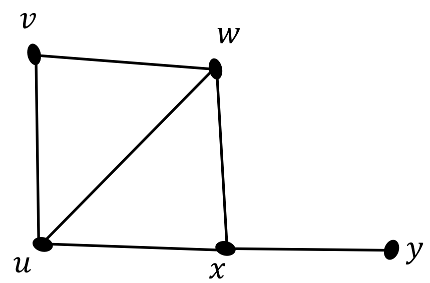
2.1.1 Definisi dan Terminologi Graf

Definisi 2.1.1.1 Graf adalah pasangan himpunan (V, E), dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.

Berdasarkan definisi 2.1.1.1, himpunan V disebut himpunan titik (*vertex set*), dan E disebut himpunan sisi (*edge set*). Kadang-kadang ada yang menyebut titik sebagai noktah (*point*) dan sisi sebagai busur, rusuk, atau garis (*line*). Jika graf (V, E) dinotasikan G, dengan kata lain $G = (V, E)$, maka $V = V\,(G)$ dan $E = E(G)$ sehingga graf $G \;=\; \big(V(G), E(G)\big)$. Secara matematika, Definisi 2.1.1.1 dapat ditulis sebagai berikut: Graf $G \;= \big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G) = \{u\text{:}\, u\ disebut\ titik\}$ dan $E(G) = \{(u, v)\text{:}\, u, v \in V(G)\}$ dengan (u, v) atau uv disebut sisi, rusuk atau garis. Orde *(order)* dari graf G dinyatakan dengan simbol p yakni banyaknya anggota dari $V(G)$ dan ukuran *(size)* dari G dinyatakan dengan simbol q yakni banyaknya anggota dari $E(G)$. Jadi orde graf G adalah banyaknya titik pada G dan ukuran graf G adalah banyaknya sisi pada G. Kardinalitas suatu himpunan adalah banyaknya anggota pada himpunan tersebut. Kardinalitas biasanya dinyatakan oleh simbol "| |". Jadi apabila $p(G)$ adalah orde graf G dan $q(G)$ adalah ukurannya, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$. Suatu graf G disebut graf trivial jika $q(G) = 0$ atau $X(G) = \emptyset$ (Hasmawati, 2020).

Definisi 2.1.1.2 Graf sederhana G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*) (Hasmawati, 2020).

Sebagai contoh Gambar 2.1 merupakan graf sederhana dengan himpunan titik $\{u, v, w, x, y\}$ dan himpunan sisi $\{uv, uw, ux, vw, xw, xy\}$.

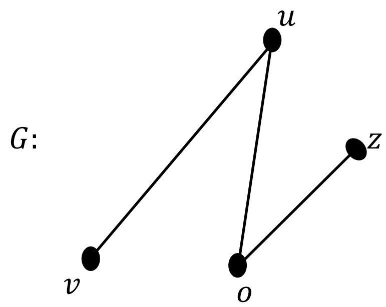


Gambar 2.1 Graf Sederhana

Definisi 2.1.1.3 Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$, maka dikatakan bahwa:

1. Titik v_i bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_j.
2. Sisi x terkait (*incident*) dengan titik v_i, demikian pula titik v_j.

Misalkan x_1 dan x_2 adalah sisi dari suatu graf G dan v adalah titik graf G. Jika x_1 dan x_2 terkait dengan titik u, maka sisi x_1 dan x_2 dikatakan bertetangga. Pada Gambar 2.2, titik o bertetangga dengan titik $u,$ dan z. Tetapi titik z tidak bertetangga dengan titik v dan titik u. Sisi uv tidak bertetangga dengan sisi oz. Sisi oz terkait dengan titik o dan titik z.



Gambar 2.2 Contoh titik-titik dan sisi-sisi yang bertetangga

Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dinotasikan $N_G(v)$ yang didefinisikan sebagai berikut (Hasmawati, 2020).

$$N_G(v) = \{u|uv \in E(G)\}.$$

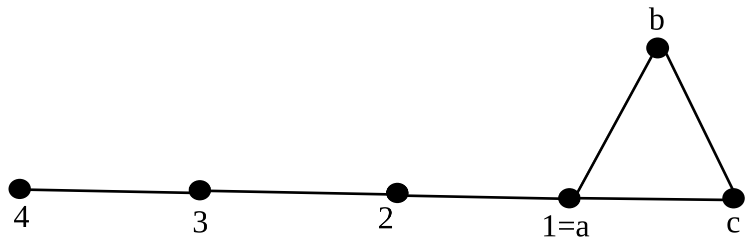
2.1.2 Operasi Dalam Graf

Definisi 2.1.2.1 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Maka:

1. Graf gabung (*union graph*) antara G dan H ditulis $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.
2. Graf jumlah antara G dan H ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv; u \in V(G), v \in V(H)\}$.
3. Graf kali $G \times H$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \times H)$ adalah himpunan $\{xy|\ x = u_1\ v_1, y = u_2\ v_2; u_1 = u_2$ dan $v_1 v_2 \in E(H)$ atau $v_1 = v_2$ dan $u_1 u_2 \in E(G)\ \}$ (Hasmawati, 2020).

Definisi 2.1.2.2 (Amalgamasi) Misalkan G_i graf terhubung dengan titik tetap $v_{oi} \in V(G_i)$. Amalgamasi graf G_i pada titik tetap v_{oi} dinotasikan dengan $Amal\ (G_i, v_{oi})$ adalah mengambil semua unsur-unsur (titik dan sisi) pada G_i dengan $v_{oi} = v_{oj}, \forall i, j$. Graf $Amal(G_i, v_{oi})$ juga dapat dituliskan sebagai berikut $Amal\ (G_1; G_2; \dots; G_k, v_{o1}; v_{o2}; \dots v_{ok})$. Jika $G_i = G_j$ untuk setiap i, j, maka $Amal\ (G_1; G_2; \dots; G_k, v_{o1}; v_{o2}; \dots v_{ok})$ dapat ditulis $Amal\ (kG_i, v_{oi})$ untuk suatu $i \in \{1,2, \dots, k\}$ (Hasmawati, 2020).

Misalkan titik $1 = v_{oi}$ pada graf $G_1 = G$ dan titik $a = v_{02}$ pada garaf $G_2 = H$. Maka graf $Amal\ (G_2 = H)$. Maka graf $Amal\ (G_i, v_{oi}), i = 1,2$ adalah graf dengan himpunan titik $\{1 = a, 2, 3, 4, b, c\}$ dan himpunan sisi $\{12, 23, 34, 1b, 1c, bc\}$. Bentuk graf $Amal\ (G_i, v_{oi})$ dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Graf $Amal\ (G_i, v_{0i})$

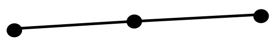
2.1.3 Beberapa Jenis Graf

a. Graf Lintasan

Lintasan pada graf H adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \cdots, e_{n-1}, v_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \cdots, n-1$. Graf yang hanya terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan dan dinotasikan P_n apabila berorde n.

Graf dikatakan terhubung (*connected*) jika setiap dua titik u dan v selalu terdapat lintasan yang memuat titik u dan v (Hasmawati, 2020). Sebagai contoh graf H pada Gambar 2.4 adalah contoh graf lintasan yang terhubung.

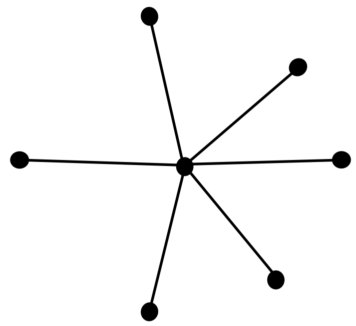
H:



Gambar 2.4 Graf lintasan P_3

b. Graf Bintang

Graf bintang berorde n dinotasikan S_n adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik berderajat satu. Graf bintang dapat ditulis $S_n = x + \overline{K_{n-1}}$ yaitu definisi graf bintang dengan memakai istilah derajat. Dalam hal ini $x = K_1$ (Hasmawati, 2020).



Gambar 2.5 Graf bintang S_7

c. Graf Sapu

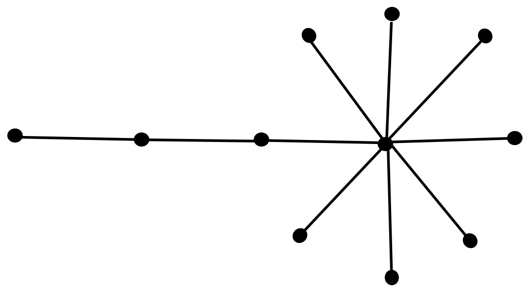
Ada dua jenis graf sapu yang dapat dikonstruksikan melalui operasi amalgamasi yaitu sebagai berikut:

1. Graf Sapu Jenis Pertama

Graf sapu $SP_{n,m}$ adalah graf terhubung berorde $(n+m)$ yang memiliki $(m-1)$ titik berderajat 1, n titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat $(m-1)$.

Graf sapu dapat dikonstruksi melalui operasi amalgamasi antara graf lintasan dengan graf bintang, dengan cara seperti berikut: Misalkan $P_{n+1}: v_0, v_1, \dots, v_n$ adalah graf lintasan berorde $n+1$ dengan titik tetap v_n dan S_m adalah gaf bintang dengan titik tetap pada salah satu titik yang berderajat satu. $Amal\,(P_{n+1};\, S_m, v_n;\, s_m)$ merupakan graf sapu $SP_{n,m}$ berorde $n+m$ yang memiliki $m-1$ titik berderajat 1 dan n titik berderajat 2, serta satu titik berderajat $m-1$ (Hasmawati, 2020).

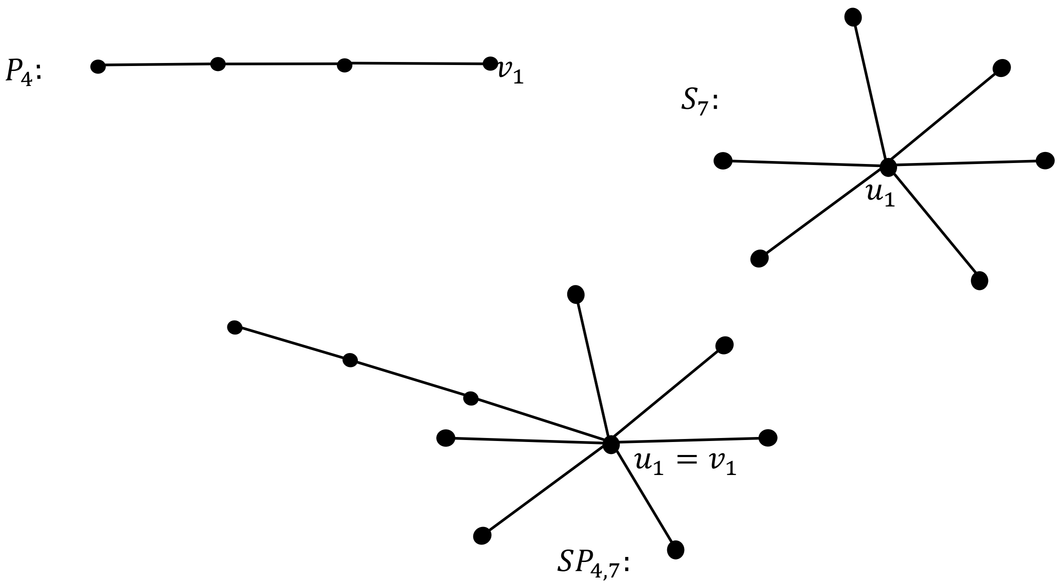
Misalkan diberikan graf lintasan P_3 dan graf bintang S_9. Graf sapu berorde 11 yakni amalgamasi antara P_3 dan S_9 yakni $SP_{2,9}$ memiliki delapan titik berderajat 1 dan dua titik berderajat 2 serta satu titik berderajat 8. Bentuk graf sapu tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Graf sapu berorde 11

2. Graf Sapu Jenis Kedua

Graf sapu juga dapat didefinisikan melalui operasi amalgamasi titik antara graf lintasan dengan graf bintang. Misalkan $P_n: v_1, e_1, \ldots\ v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dan S_m adalah graf bintang berorde m dengan titik pusat u_1. Graf sapu berorde $n + m - 1$ dinotasikan $SP_{n,m}$ adalah $Amal(P_n;\ S_m, v_1;\ u_1)$ yaitu graf yang terdiri atas semua titik dan sisi dari P_n dan S_m dengan titik $v_1 = u_1$ (Hasmawati, 2020). Sebagai contoh graf sapu seperti pada Gambar 2.7.

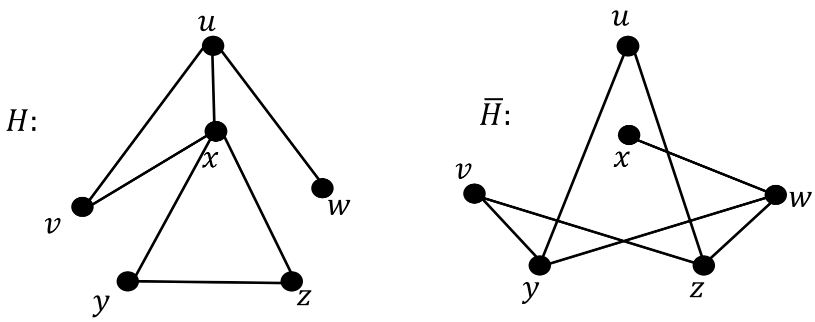


Gambar 2.7 Graf sapu berorde 9

d. Graf Komplemen

Komplemen dari graf G dinotasikan $\bar{G}$. $\bar{G}$ komplemen dari graf G yang himpunan titiknya adalah $V(G)$ sedemikian sehingga untuk setiap pasangan u, v

pada titik yang berbeda dari G, uv adalah sisi dari $\bar{G}$ jika dan hanya jika uv bukan merupakan sisi dari G. Perhatikan bahwa jika G graf berorde n dan berukuran m, maka $\bar{G}$ adalah graf berorde n dan berukuran $\binom{n}{2} - m$. Graf $\overline{K_n}$ maka memiliki n titik dan tidak memiliki sisi dan disebut graf kosong berorde n (Chartrand & Zhang, 2012). Sebagai contoh Gambar 2.8 adalah graf H dan komplemennya, dengan kedua graf tersebut terhubung.



Gambar 2.8 Sebuah graf dan komplemennya

2.2 Pelabelan dan Pelabelan Ajaib

Pada Subbab 2.2, kajian diawali dengan pendefinisian pemetaan fungsi, pelabelan dan pelabelan ajaib.

2.2.1 Pemetaan Fungsi

Misalkan A dan B adalah sebarang himpunan tak kosong. Misalkan setiap elemen pada A dihubungkan dengan satu elemen B yang unik, kumpulan f yang terdiri dari hubungan seperti ini disebut pemetaan (peta atau *map*) dari A ke B, dan dilambangkan dengan

$$f : A \to B$$

Himpunan A disebut sebagai daerah asal (*domain*) pemetaan tersebut, dan B disebut sebagai himpunan target (*target set*). Pemetaan $f : A \to B$ sebagai komputer yang untuk setiap nilai input $a \in A$, menghasilkan output unik $f(a) \in B$ (Lipschutz & Lipson, 2004).

Berikut ini akan diberikan beberapa jenis khusus dari pemetaan yang berkaitan dengan pelabelan dan pelabelan ajaib.

a. Pemetaan Injektif

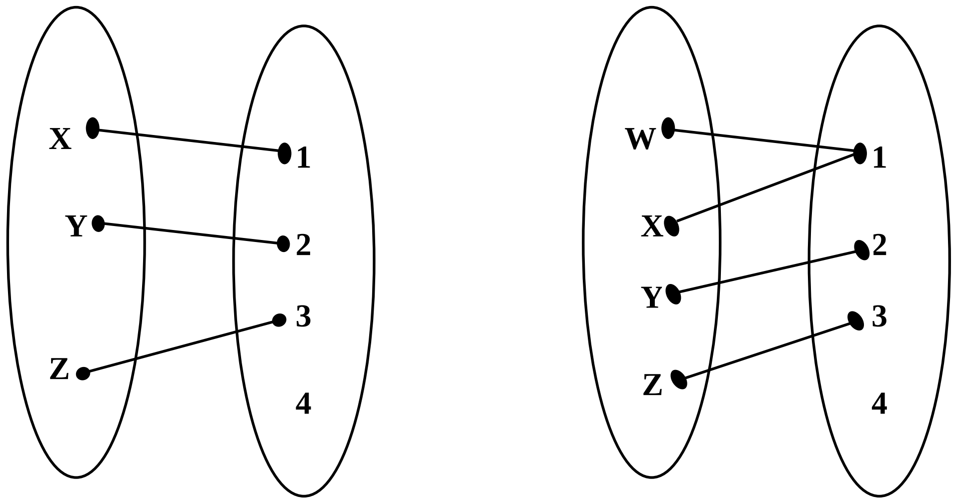
Suatu pemetaan $f : A \to B$ dikatakan sebagai pemetaan satu-satu (injektif) jika setiap elemen yang berbeda dari A memiliki peta yang berbeda, itu berati:

(1) Jika $a \neq a'$, maka $f(a) \neq f(a')$.

Secara ekuivalen,

(2) Jika $f(a) = f(a')$ maka $a = a'$.

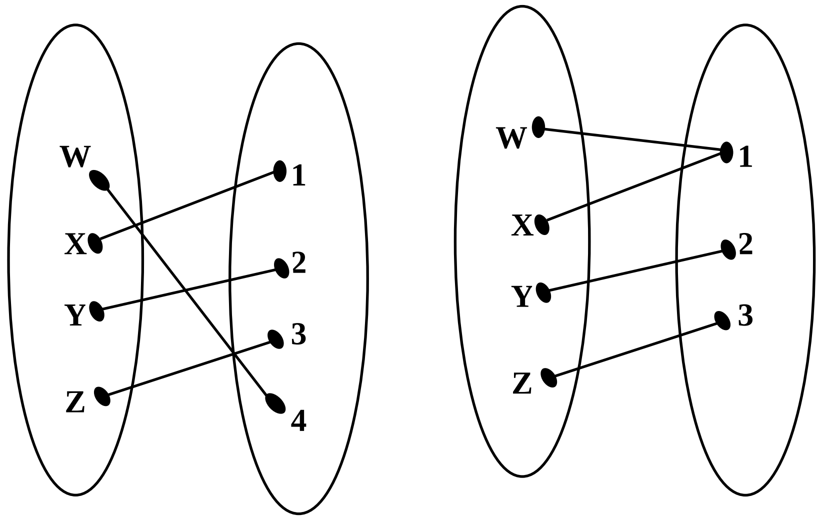
Sebagai contoh Gambar 2.9 berikut merupakan contoh pemetaan injektif.



Gambar 2.9 Pemetaan injektif (kiri), pemetaan bukan injektif (kanan)

b. Pemetaan Surjektif

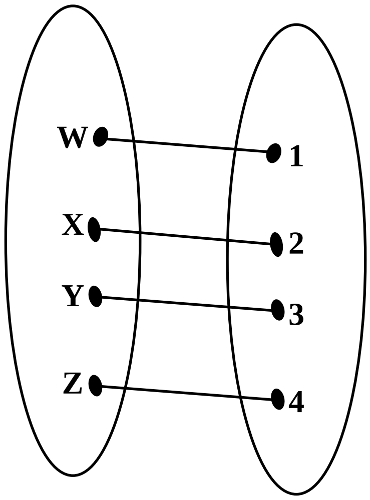
Pemetaan $f : A \to B$ dikatakan sebagai pemetaan pada (surjektif) jika setiap $b \in B$ adalah peta paling tidak satu $a \in A$. Sebagai contoh Gambar 2.10 berikut merupakan pemetaan surjektif.



Gambar 2.10 Pemetaan surjektif

c. Pemetaan Bijektif

Pemetaan $f : A \to B$ dikatakan sebagai korespondensi satu-satu antara A dan B (bijektif) jika f adalah pemetaan injektif maupun surjektif. Sebagai contoh Gambar 2.11 berikut merupakan pemetaan bijektif.



Gambar 2.11 Pemetaan bijektif

2.2.2 Pelabelan

Pelabelan (*labeling*) adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur pada graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif).

Jika domain pelabelan berupa titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domain pelabelan berupa sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), sedangkan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*) (Wallis dkk., 2000).

2.2.3 Pelabelan Ajaib

Definisi 2.2.3.1 Misalkan graf memiliki himpunan titik V dan himpunan sisi E. Pelabelan ajaib (*magic labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif f dari E ke himpunan bilangan bulat positif berbeda, sehingga untuk setiap v anggota V, penjumlahan semua label sisi e yang terkait terhadap v sama (Wallis dkk., 2000).

2.3 Perhitungan Dasar Pelabelan Total Sisi Ajaib

Pada Subbab 2.3, kajian diawali dengan pendefinisian pelabelan total sisi ajaib dan pelabelan total sisi ajaib super.

2.3.1 Pelabelan Total Sisi Ajaib

Definisi 2.3.1.1 Misalkan G adalah graf terhubung sederhana dan berhingga, pemetaan bijektif f dari himpunan $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \cdots, p + q\}$ dengan $p = |\,V(G)|$ dan $e = |E(G)|$ disebut pelabelan total sisi ajaib dari G jika terdapat bilangan bulat positif k (bilangan ajaib dari f) sedemikian sehingga $f(u) + f(uv) + f(v) = k$ untuk sebarang sisi uv dari G.

Diasumsikan graf G memiliki $p = |\,V(G)|$ dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ dan $e = |E(G)|$. Titik v_i merupakan titik dari graf G, v_i mempunyai derajat $deg(v_i)$ dan menerima label $f(v_i)$ untuk setiap $1 \leq i \leq p$.

Misalkan f merupakan pelabelan total sisi ajaib dari graf yang diberikan. Jika u dan v adalah titik yang bertetangga, maka sisi uv mempunyai label $k - f(u) - f(v)$. Karena jumlah semua label sisi dan jumlah semua label titik harus sama dengan jumlah $(p + q)$ bilangan bulat positif pertama, k dapat ditentukan.

Didefinisikan R merupakan himpunan label titik $\{f(v_i) : 1 \leq i \leq p\}$, dan r untuk jumlah dari anggota R. Maka R terdiri dari p label terkecil, p label terbesar atau diantaranya, sehingga

$$\sum_{i=1}^{p} i \leq r \leq \sum_{i=1+q}^{p+q} i\,,$$

$$\binom{p+1}{2} \leq r \leq pq + \binom{p+1}{2}. \tag{2.1}$$

Jelas $\sum_{uv \in E(G)} \big(f(u) + f(uv) + f(v)\big) = qk$. Jumlah ini memuat setiap label $f(v_i)$ dan tambahan $deg(v_i) - 1$. Penjumlahan dari semua label pada himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G yang dinotasikan dengan C sama dengan

$$C = L_p + L_q = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}, \tag{2.2}$$

dengan L_p adalah penjumlahan label pada himpunan titik dan L_q adalah penjumlahan label pada himpunan sisi, untuk sebarang sisi uv dari G, dengan $f(u) + f(uv) + f(v) = k$. Karena terdapat q sisi, diperoleh

$$qk = L_q + \sum_{i=1}^{p} deg(v_i) f(v_i), \tag{2.3}$$

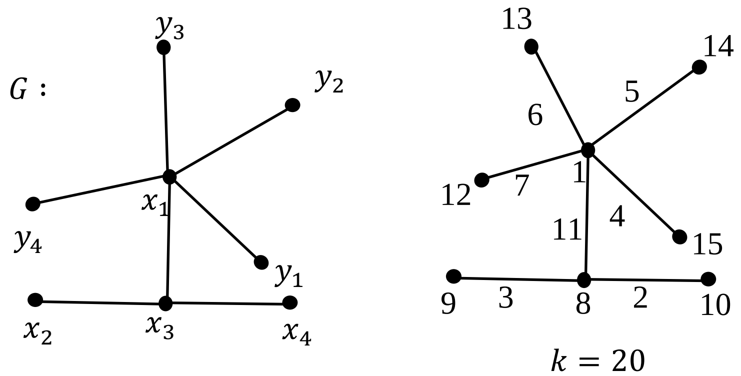
dengan $deg(v_i)$ adalah derajat dari titik v_i. Karena $\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) f(v_i) = L_p + \sum_{i=1}^{p} (deg(v_i) - 1) f(v_i)$, itu berati (Wang dkk., 2020).

$$qk = C + \sum_{i=1}^{p} (deg(v_i) - 1) f(v_i), \tag{2.4}$$

atau

$$k = \frac{C + \sum_{i=1}^{p}(deg(v_i) - 1)f(v_i)}{q}. \tag{2.5}$$

Sebagai contoh pelabelan total sisi ajaib, misalkan pada Gambar 2.12 merupakan graf G.



Gambar 2.12 Label dan pelabelan total sisi ajaib pada graf G

Berdasarkan pelabelan yang diberikan pada Gambar 2.12 diperoleh bahwa:

a. $f(x_1) + f(x_1x_3) + f(x_3) = 1 + 11 + 8 = 20$;
b. $f(x_2) + f(x_2x_3) + f(x_3) = 9 + 3 + 8 = 20$;
c. $f(x_3) + f(x_3x_4) + f(x_4) = 8 + 2 + 10 = 20$;
d. $f(x_1) + f\left(x_1y_j\right) + f\left(y_j\right) = 1 + j + 3 + 16 - j = 20$, untuk $1 \leq j \leq 4$.

Karena memenuhi syarat pelabelan total sisi ajaib maka graf G merupakan pelabelan total sisi ajaib dengan $k = 20$.

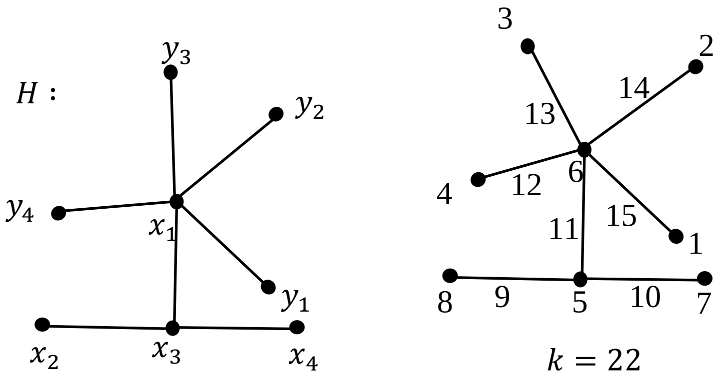
2.3.2 Pelabelan Total Sisi Ajaib Super

Definisi 2.3.2.1 Pelabelan total sisi ajaib f dari graf G disebut pelabelan total sisi ajaib super jika $f\left(V(G)\right) = \{1, 2, \cdots, p\}$. Pelabelan total sisi ajaib f dari graf G disebut pelabelan total sisi ajaib tak super jika $f\left(V(G)\right) \neq \{1, 2, \cdots, p\}$. Jika f adalah pelabelan total sisi ajaib super dari G, maka terdapat bilangan bulat s sedemikian sehingga $s + p + q = k$ dengan $s = min(S)$ dan

$$S = \{f(u) + f(v) : uv \in E(G)\} = \{s, s + 1, \cdots, s + q - 1\}.$$

Disini S merupakan hasil penjumlahan dua label himpunan titik yang berbeda dan s merupakan minimum dari S (Baca dkk., 2019).

Sebagai contoh pelabelan total sisi ajaib super, misalkan pada Gambar 2.13 merupakan graf H.



Gambar 2.13 Label dan pelabelan total sisi ajaib super pada graf H

Berdasarkan pelabelan yang diberikan pada Gambar 2.13 diperoleh bahwa:

a. $f(x_1) + f(x_1x_3) + f(x_3) = 6 + 11 + 5 = 22$;
b. $f(x_2) + f(x_2x_3) + f(x_3) = 8 + 9 + 5 = 22$;
c. $f(x_3) + f(x_3x_4) + f(x_4) = 5 + 10 + 7 = 22$;
d. $f(x_1) + f(x_1y_j) + f(y_j) = 6 + 16 - j + j = 22,$ untuk $1 \leq j \leq 4$.

Karena memenuhi syarat pelabelan total sisi ajaib super maka graf H merupakan pelabelan total sisi ajaib super dengan $k = 22$.