BENTUK x^n DAN PUSAT DARI GELANGGANG POLINOMIAL MIRING ATAS GELANGGANG BILANGAN BULAT EISENSTEIN

SKRIPSI

ANGGRENI PUTRI ARIFIN

H011181004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

NOVEMBER 2022

BENTUK x^n DAN PUSAT DARI GELANGGANG POLINOMIAL MIRING ATAS GELANGGANG BILANGAN BULAT EISENSTEIN

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ANGGRENI PUTRI ARIFIN

H011181004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
NOVEMBER 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini;

Nama	: Anggreni Putri Arifin
NIM	: H011181004
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya saya yang berjudul :

Bentuk x^n dan Pusat dari Gelanggang Polinomial Miring atas Gelanggang Bilangan Bulat Eisenstein

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini adalah benar benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 13 November 2022

Yang menyatakan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 607C5AKX112871772

Anggreni Putri Arifin
NIM. H011181004

HALAMAN PENGESAHAN

BENTUK x^n DAN PUSAT DARI GELANGGANG POLINOMIAL MIRING ATAS GELANGGANG BILANGAN BULAT EISENSTEIN

Disusun dan diajukan oleh

ANGGRENI PUTRI ARIFIN

H011181004

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 18 November 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	**Dra. Nur Erawati, M.Si.**
NIP. 19680803 199202 1 001	**NIP.19690912 199303 2 001**

Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si.,M.Si.

NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Subhanahu Wa Ta'ala karena atas izin dan karunia-Nya lah, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini banyak mengalami kendala. Namun, berkat bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak, skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang setulusnya kepada:

1. Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. selaku dosen pembimbing utama yang selalu sabar dalam membimbing dan memberikan motivasi serta nasihat dalam penulisan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Nur Erawaty , M.Si. selaku dosen pembimbing pertama yang selalu sabar dalam memberikan arahan dan saran untuk menyempurnakan penulisan skripsi ini.
3. Dr. Khaeruddin, M.Sc. dan Bapak Jeriko Gormantara, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dalam perbaikan skripsi ini.
4. Bapak Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si. rahimahullah selaku dosen penasihat akademik yang selalu sabar dalam memberikan nasihat dan motivasi untuk mengenali dan mengembangkan potensi diri selama perkuliahan.
5. Orangtua dan adik-adik tercinta yang senantiasa mendoakan dan memberi dukungan.
6. Segenap dosen Departemen Matematika yang selalu sabar mendidik dan membagikan ilmunya sejak awal hingga sampai pada tahap penulisan skripsi ini.
7. Staf Departemen Matematika yang selalu sabar dalam melayani dan membantu segala administrasi yang diperlukan.
8. Para sahabat yang senantiasa mengajarkan banyak hal, menemani, memberi semangat serta dukungan sejak awal hingga sampai pada tahap penulisan skripsi ini.

Akhir kata, semoga Allah membalas kebaikan pihak – pihak yang terlibat dan setiap ilmu yang diberikan berkah serta bernilai pahala di sisi Allah Subhanahu

Wa Ta'ala. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah pengetahuan bagi pembaca.

Makassar, 13 November 2022

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Anggreni Putri Arifin
NIM : H011181004
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Bentuk x^n dan Pusat dari Gelanggang Polinomial Miring atas Gelanggang Bilangan Bulat Eisenstein

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar, pada tanggal 13 November 2022

Yang Menyatakan

Anggreni Putri Arifin

ABSTRAK

Penelitian ini dilakukan untuk mengembangkan teori tentang gelanggang polinomial miring. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan hasil kali polinom x pangkat n dengan gelanggang bilangan bulat Eisenstein serta bentuk polinom komutatif atau pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein. Untuk itu, terlebih dahulu dicari bentuk endomorfisma pada gelanggang bilangan bulat Eisenstein yang dinotasikan dengan σ. Selanjutnya, dicari σ-derivatif yang terkait dengan bentuk endomorfisma yang diperoleh sebelumnya. Pada penelitian ini diperoleh tiga buah gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein dengan bentuk x^n dan pusat yang berbeda.

Kata Kunci : *Bilangan bulat Eisenstein, Gelanggang Polinom Miring, Komutatif.*

Judul : Bentuk x^n dan Pusat dari Gelanggang Polinomial Miring atas Gelanggang Bilangan Bulat Eisenstein

Nama : Anggreni Putri Arifin

NIM : H011181004

Program Studi : Matematika

ABSTRACT

This study was conducted to develop theory of skew polynomial rings. The objective of this study is to determine the product of polynomial x raised to the n power with the element of the Eisenstein integers ring and the commutative polynomial form or the center of the skew polynomial rings over the ring of Eisenstein integers. In order to find it, firstly it is important to find the endomorphism form of Eisenstein integers ring, denoted by σ. The study continued with finding the σ-derivative of Eisenstein integers ring which was related to the endomorphism previously acquired. The study obtained three skew polynomial rings over the ring of Eisenstein integers with distinct form of $x^n -$ term and center.

Keywords : *Eisenstein integer, Skew Polynomial Ring, Commutative.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Secara umum, aljabar merupakan ilmu yang mempelajari simbol-simbol Matematika dan aturan untuk memanipulasi simbol-simbol tersebut. Dewasa kini, studi tentang Aljabar makin berkembang. Salah satu subjek dari perkembangan tersebut adalah aljabar abstrak atau aljabar modern. Aljabar abstrak adalah bidang yang mempelajari struktur aljabar dan merupakan salah satu topik yang dipelajari dalam Matematika tingkat lanjut. Salah satu dari struktur aljabar yang dipelajari dalam aljabar abstrak adalah gelanggang.

Gelanggang terdiri dari sebuah himpunan dan dua operasi biner yakni perkalian dan penjumlahan. Gelanggang merupakan grup abelian yang bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian dan bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan serta memiliki unsur identitas. Dalam studi mengenai gelanggang, dikenal dua jenis gelanggang berdasarkan sifat operasi perkaliannya. Suatu gelanggang dengan operasi perkalian yang komutatif disebut gelanggang komutatif. Sebaliknya, gelanggang dengan operasi perkalian yang tidak komutatif disebut gelanggang nonkomutatif.

Sebagai bentuk pengembangan dari gelanggang biasa, dikenal pula gelanggang khusus, salah satunya adalah gelanggang polinomial miring. Dalam perkembangannya, studi mengenai gelanggang polinomial miring menjadi sangat beragam. Hal ini dikarenakan dalam membangun suatu gelanggang polinomial miring, gelanggang tumpuan yang dapat digunakan sangat bervariasi. Misalnya, pada tahun 2009, Amir melakukan penelitian mengenai pusat dari beberapa gelanggang polinomial miring dengan daerah integral komutatif sebagai gelanggang tumpuannya. Kemudian pada tahun 2010, Amir juga melakukan penelitian mengenai gelanggang polinomial miring dengan daerah bilangan bulat Gauss sebagai gelanggang tumpuan. Pada tahun 2012, Wang dkk melakukan penelitian mengenai gelanggang faktor prima dari gelanggang polinomial miring atas daerah Dedekind.

Dalam penelitian yang dilakukan oleh Afriani dkk pada tahun 2014, dikaji mengenai bentuk dan sifat-sifat ideal dari gelanggang polinomial miring dengan gelanggang tumpuan yang beragam. Pada tahun 2016, Djuddin dkk juga melakukan penelitian mengenai gelanggang polinomial miring dengan fokus penelitian pada bentuk ideal dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang quaternion. Pada tahun 2018, Amir dkk melakukan penelitian mengenai gelanggang polinomial miring atas gelanggang coquaternion. Pada penelitian tersebut, didefinisikan dua buah pemetaan σ yang merupakan endomorfisma dari gelanggang tumpuannya. Kemudian, pemetaan δ yang digunakan adalah pemetaan nol.

Berbeda dengan gelanggang polinomial biasa, gelanggang polinomial miring merupakan gelanggang nonkomutatif. Hal ini dikarenakan operasi perkalian pada gelanggang polinomial miring memuat unsur σ dan δ sehingga aturan perkalian pada xa tidak berlaku pada ax atau xa tidak selalu sama dengan ax. Namun, pusat dari gelanggang polinomial miring dapat memberikan himpunan bagian dari gelanggang tersebut yang menyebabkan operasi perkaliannya komutatif. Selain itu, seperti halnya pada penelitian-penelitian yang telah disebutkan, pengambilan gelanggang tumpuan yang berbeda dapat memberikan bentuk pusat yang berbeda pula.

Berdasarkan uraian yang telah disebutkan, penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai gelanggang polinomial miring dengan mengambil gelanggang bilangan bulat Eisenstein sebagai gelanggang tumpuan serta fokus kajian pada pusat gelanggang polinomial miring tersebut.

1.2. Masalah Penelitian

Adapun masalah yang dibahas dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana bentuk endomorfisma dan σ-derivatif dari gelanggang bilangan bulat Eisenstein?
2. Bagaimana bentuk hasil perkalian polinom x^n dengan anggota bilangan bulat Eisenstein?
3. Bagaimana bentuk pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein?

1.3. Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas tentang bentuk x^n serta pusat dari gelanggang polinomial miring yang dibangun dengan bilangan bulat Eisenstein sebagai gelanggang tumpuannya. Dalam hal ini, bentuk x^n yang dimaksud adalah hasil perkalian polinom x^n dengan anggota bilangan bulat Eisenstein.

1.4. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Untuk mendefinisikan bentuk endomorfisma dan σ-derivatif dari gelanggang bilangan bulat Eisenstein.
2. Untuk mengidentifikasi bentuk hasil perkalian polinom x^n dengan anggota bilangan bulat Eisenstein.
3. Untuk mengidentifikasi pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan bagi penulis maupun pembaca khususnya mengenai gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein serta dapat menjadi bahan rujukan untuk penelitian di masa yang akan datang.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Bilangan Bulat Eisenstein

Bilangan bulat merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan rasional serta sering dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$. Seiring perkembangan ilmu pengetahuan, bilangan bulat kemudian sering dikombinasikan dengan himpunan bilangan lain untuk membentuk suatu himpunan bilangan yang baru. Salah satu contohnya adalah bilangan bulat Eisenstein atau sering disebut juga bilangan bulat Eisenstein-Jacobi yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1. *(Alkam dan Osba, 2010) Misalkan* $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ *adalah akar kesatuan pangkat tiga sedemikian sehingga* $\omega^3 = 1$ *dan* $\omega^2 =- \omega - 1$. *Bilangan bulat Eisenstein adalah bilangan kompleks* $a + b\omega$ *dengan* a, b *elemen bilangan bulat dan himpunannya dinotasikan sebagai*

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{z = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | a, b \ \in \mathbb{Z}\}.$$

2.2. Grup

Grup merupakan salah satu bagian dari struktur aljabar yang dipelajari dalam aljabar abstrak dan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1. *(Finston dan Morandi, 2014) Misalkan sebuah himpunan tak kosong* G *dengan sebuah operasi biner* $*$ *pada* G. *Maka pasangan* $(G, *)$ *disebut grup jika:*

(i) untuk setiap $a, b, c \in G$,

$$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad sifat\ asosiatif\ operasi\ biner\ *$$

(ii) terdapat sebuah elemen e dalam G *sedemikian sehingga untuk setiap* $a \in G$,

$$e * a = a * e = a \qquad elemen\ identitas\ dari\ G$$

(iii) untuk setiap $a \in G$, *terdapat element* $a' \in G$ *sedemikian sehingga.*

$$a * a' = a' * a = e \qquad invers\ a'\ dari\ a$$

Dalam buku yang berbeda, Fraleigh (2014) menambahkan aksioma tambahan yaitu himpunan G tertutup terhadap operasi binernya yakni jika $a, b \in G$ maka $a * b \in G$.

Definisi 2.2.2. *(Fraleigh, 2014) Sebuah grup* G *merupakan sebuah grup abelian jika operasi binernya komutatif.*

Contoh 2.2.1. Misalkan $\mathbb{Z}[i] = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ adalah himpunan bilangan bulat Gauss. Maka $(\mathbb{Z}[i], +)$ adalah grup abelian.

Bukti:

Ambil sebarang $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[i]$

dengan

$\alpha = (a + bi)$, $\beta = (c + di)$, $\gamma = (e + fi)$ dan $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan:

(i) $\mathbb{Z}[i]$ tertutup terhadap penjumlahan $(\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[i])$.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (a + bi) + (c + di) \\ &= a + c + bi + di \\ &= (a + c) + (b + d)i\,. \end{aligned}$$

Karena $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, maka $(a + c), (b + d) \in \mathbb{Z}$.

Akibatnya, $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[i]$.

(ii) $\mathbb{Z}[i]$ bersifat asosiatif terhadap penjumlahan $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[i], (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma))$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= ((a + c) + (b + d)i) + (e + fi) \\ &= (a + c + e) + (b + d + f)i. \qquad (2.1) \end{aligned}$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \gamma) &= (a + bi) + ((c + e) + (d + f)i) \\ &= (a + c + e) + (b + d + f)i. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.2), maka terbukti bahwa $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[i]$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

(iii) $\mathbb{Z}[i]$ memuat elemen identitas ($\exists\ e \in \mathbb{Z}[i] \ni \forall \alpha \in \mathbb{Z}[i],\ e + \alpha = \alpha + e = \alpha$).

Pilih $e = (0 + 0i) \in \mathbb{Z}[i]$.

Untuk sebarang $\alpha = (a + bi) \in \mathbb{Z}[i]$, maka:

$$\begin{aligned} e + \alpha &= (0 + 0i) + (a + bi) \\ &= (0 + a) + (0 + b)i \\ &= (a + bi) = \alpha \\ &= (a + 0) + (b + 0)i \\ &= (a + bi) + (0 + 0i) \\ &= \alpha + e. \end{aligned}$$

Karena $e + \alpha = \alpha + e = \alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}[i]$, maka dapat disimpulkan bahwa e adalah elemen identitas dari $\mathbb{Z}[i]$.

(iv) Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, terdapat $\alpha' \in \mathbb{Z}[i]$ invers dari α sedemikian sehingga $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = e$.

Ambil sebarang $\alpha = (a + bi) \in \mathbb{Z}[i]$.

Terdapat $e = (0 + 0i) \in \mathbb{Z}[i]$ sedemikian sehingga,

$$\alpha + \alpha' = e$$

$$(a + bi) + \alpha' = (0 + 0i).$$

Maka,

$$\begin{aligned} \alpha' &= (0 + 0i) + (-a - bi) \\ &= (0 - a) + (0 - b)i \\ &= -a - bi \\ &= -(a + bi) \end{aligned} \tag{2.3}$$

dan,

$$\begin{aligned} \alpha' + \alpha &= -(a + bi) + (a + bi) \\ &= (-a + a) + (-b + b)i \\ &= 0 + 0i = e. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Berdasarkan persamaan (2.3) dan (2.4), maka α' adalah invers dari α. Sehingga terbukti bahwa $\forall \alpha \in \mathbb{Z}[i]\ \exists\ \alpha' \in \mathbb{Z}[i] \ni \alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = e$.

(v) Bersifat komutatif ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i], \alpha + \beta = \beta + \alpha$).

Ambil sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$

dengan

$\alpha = (a + bi), \beta = (c + di)$ dan $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

$\beta + \alpha \ = (c + di) + (a + b)$

$= (c + a) + (di + b)$

$= (c + a) + (d + b)i. \qquad (2.5)$

Karena *a,b,c,d* $\in \ \mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ merupakan grub abelian, maka $c + a = a + c$, sehingga persamaan (2.5) dapat dituliskan menjadi:

$\beta + \alpha \ = (c + a) + (d + b)i$

$= (a + c) + (b + d)i$

$= \alpha + \beta.$

Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{Z}[i]$ bersifat komutatif terhadap operasi penjumlahan.

Jadi, karena syarat (i),(ii),(iii),(iv), dan (v) terpenuhi, maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}[i], +)$ adalah grup abelian. ■

2.3. Gelanggang

Gelanggang merupakan bagian lain dari struktur aljabar yang dipelajari dalam aljabar abstrak. Gelanggang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.1. *(Lovett, 2015) Sebuah gelanggang dinotasikan (R ,+,·) adalah struktur yang memuat sebuah himpunan tak kosong R dengan operasi + dan · sebagai operasi biner di dalam R yang memenuhi aksioma sebagai berikut.*

(i) $(R, +)$ *adalah grup abelian.*

(ii) Operasi · bersifat asosiatif

(iii) Operasi · bersifat distributif terhadap operasi + sedemikian sehingga, untuk setiap $a, b, c \in R$*:*

1) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad distributif\ kanan$

2) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad distributif\ kiri$

Contoh 2.3.1. Misalkan $R = \{z = a + bi \in \mathbb{Z}[i] \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ adalah himpunan bilangan bulat Gauss. Didefinisikan operasi + sebagai operasi penjumlahan dan operasi · sebagai operasi perkalian pada R , maka *(R,+,·)* adalah gelanggang.

Bukti:

(i) Berdasarkan Contoh 2.2.1., $(R, +)$ adalah grup abelian.

(ii) Ambil sebarang $\alpha, \beta, \gamma \in R$ dengan $\alpha = (a + bi)$, $\beta = (c + di)$, $\gamma = (e + fi)$ dan $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\gamma) &= (a + bi)((c + di)(e + fi)) \\ &= (a + bi)(ce + cfi + edi - df) \\ &= (ace + acfi + aedi - adf + bcei - bcf - bed - bdfi) \\ &= (ace - adf - bcf - bed) + (acf + aed + bce - bdf)i. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\gamma &= ((a + bi)(c + di))(e + fi) \\ &= (ac + adi + bci - bd)(e + fi) \\ &= (ace + acfi + aedi - adf + bcei - bcf - bde - bdfi) \\ &= (ace - adf - bcf - bde) + (acf + aed + bce - bdf)i. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.6) dan (2.7), diperoleh $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. Sehingga terbukti bahwa operasi $\cdot$ dalam R bersifat asosiatif.

(iii) Ambil sebarang $\alpha, \beta, \gamma \in R$ dengan $\alpha = (a + bi)$, $\beta = (c + di)$, $\gamma = (e + fi)$ dan $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (distributif kiri) dan $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ (distributif kanan).

Untuk distributif kiri, operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta + \gamma) &= (a + bi)((c + di) + (e + fi)) \\ &= (a + bi)((c + e) + (d + f)i) \\ &= a(c + e) + a(d + f)i + b(c + e)i - b(d + f) \\ &= (ac + ae - bd - bf) + (ad + af + bc + be)i. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Untuk distributif kiri, operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned}\alpha\beta + \alpha\gamma &= ((a + bi)(c + di)) + ((a + bi)(e + fi)) \\ &= (ac + adi + bci - bd) + (ae + afi + bei - bf) \\ &= (ac + ae - bd - bf) + (ad + bc + af + be)i. \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.8) dan (2.9), terbukti bahwa operasi $\cdot$ distributif kiri.

Untuk distributif kanan, operasi di ruas kiri:

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\gamma &= ((a+bi)+(c+di))(e+fi) \\
&= ((a+c)+(b+d)i)(e+fi) \\
&= (a+c)e+(b+d)ei+(a+c)fi-(b+d)f \\
&= (ae+ce-bf-df)+(be+af+de+cf)i. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Untuk distributif kanan, operasi di ruas kanan:

$$
\begin{aligned}
\alpha\gamma+\beta\gamma &= ((a+bi)(e+fi))+((c+di)(e+fi)) \\
&= (ae+afi+bei-bf)+(ce+cfi+dei-df) \\
&= (ae+ce-bf-df)+(af+cf+be+de)i. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (2.10) dan (2.11), terbukti bahwa operasi · distributif kanan. Karena operasi · distributif di kiri dan kanan, maka dapat disimpulkan bahwa operasi · dalam *R* bersifat distributif terhadap operasi +.

Karena aksioma (i), (ii) dan (iii) dipenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa *(R,+,·)* dengan $R = \{z = a+bi \in \mathbb{Z}[i] \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ adalah gelanggang. ■

Definisi 2.3.2. *(Jacobson, 1985) Sebuah gelanggang disebut komutatif jika operasi perkalian dalam gelanggang tersebut komutatif.*

Contoh 2.3.2. Misalkan $R = \{z = a+bi \in \mathbb{Z}[i] \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$, didefinisikan operasi · sebagai operasi perkalian pada *R,* maka *R* komutatif.

Bukti:

Ambil sebarang $\alpha,\beta, \in \mathbb{Z}[i]$

dengan

$\alpha = (a+bi)$, $\beta = (c+di)$, dan $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta &= (a+bi)(c+di) \\
&= (ac+adi+bci-bd) \\
&= (ac-bd)+(ad+bc)i. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$$\beta\alpha = (c+di)(a+bi)$$

$$= (ca + cbi + dai - db)$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{2.13}$$

Berdasarkan persamaan (2.12) dan (2.13), diperoleh $\alpha\beta = \beta\alpha\ \forall \alpha, \beta \in R$. Sehingga, terbukti bahwa $(R, \cdot)$ dengan $R = \{z = a + bi \in \mathbb{Z}[i] \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ komutatif. Akibatnya, berdasarkan Contoh 2.3.1. dan 2.3.2., dapat disimpulkan bahwa gelanggang bilangan bulat Gauss $(\mathbb{Z}[\mathrm{i}], +, \cdot)$ membentuk gelanggang komutatif. ■

Dalam teori gelanggang, dibahas pula mengenai pusat dari suatu gelanggang. Karena tidak semua gelanggang bersifat komutatif, maka pusat dari suatu gelanggang dapat merepresentasikan elemen-elemen yang bersifat komutatif pada gelanggang tersebut. Pusat dari suatu gelanggang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.3. *(Amir dkk, 2018) Misalkan R suatu gelanggang. Maka, pusat dari R dinotasikan $Z(R)$ didefinisikan sebagai*

$$Z(R) = \{r \in R \mid rx = xr, \forall x \in R\}.$$

Dalam teori gelanggang, dibahas pula mengenai homomorfisma gelanggang. Homomorfisma gelanggang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.4. *(Lovett, 2015) Misalkan R dan S dua buah gelanggang. Homomorfisma gelanggang adalah suatu fungsi $\varphi: R \to S$ yang memenuhi aksioma berikut:*

(i) $\forall a, b \in R, \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;

(ii) $\forall a, b \in R, \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Definisi 2.3.5. *(Lovett, 2015) Suatu homomorfisma $\varphi : R \to R$ dari suatu gelanggang R ke dirinya sendiri disebut endomorfisma gelanggang.*

2.4. Gelanggang Polinomial Miring

Gelanggang polinomial miring merupakan salah satu dari gelanggang khusus yang digeneralisasi dari gelanggang polinomial biasa.

Definisi 2.4.1. *(Amir, 2010) Misalkan sebuah gelanggang* R, σ *adalah suatu endomorfisma pada R, dan* δ *merupakan* σ*-derivatif yaitu:*

(i.) δ *adalah endomorfisma pada R dengan R sebagai grup penjumlahan*

(ii.) $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b \ \forall a, b \in R$.

Gelanggang polinomial miring $R[x; \sigma, \delta]$ *dalam variabel tak diketahui x terdiri dari polinom dengan koefisien di* R *yang memenuhi aturan perkalian: untuk setiap* $a \in R$ *berlaku* $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

Jika $\delta = 0$, maka gelanggang polinomial miring dinotasikan dengan $R[x; \sigma]$. Jika $\sigma = 1$, maka gelanggang polinomial miring dinotasikan dengan $R[x; \delta]$. Untuk kasus khusus ketika $\sigma = 1$ dan $\delta = 0$, gelanggang polinomial miring $R[x; \sigma, \delta]$ tak lain adalah gelanggang polinomial biasa $R[x]$. Gelanggang polinomial miring merupakan bagian dari gelanggang yang tidak komutatif. Hal ini dikarenakan aturan perkalian pada gelanggang ini melibatkan σ dan δ, sehingga xa tidak selalu sama dengan ax.

Pada studi mengenai aljabar nonkomutatif dalam hal ini gelanggang polinomial miring, pusat gelanggang yang telah disebutkan dalam Definisi 2.3.3., biasanya digunakan untuk mengidentifikasi himpunan bagian dari gelanggang tersebut yang menyebabkan operasi perkaliannya komutatif.

Berikut diberikan contoh gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Gauss.

Contoh 2.4.1. Misalkan $R = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ adalah gelanggang bilangan bulat Gauss. Didefinisikan suatu pemetaan σ pada R dengan $\sigma(a + bi) = a - bi$ untuk setiap $a + bi \in R$ dan pemetaan δ dengan $\delta(a + bi) = b$ untuk setiap $a + bi \in R$. $R[x; \sigma, \delta]$ adalah gelanggang polinomial miring *(Amir, 2010)*.

Bukti:

(I) Didefinisikan $\sigma(a + bi) = a - bi$ untuk setiap $a + bi \in R$, σ adalah endomorfisma gelanggang.

Ambil sebarang $a + bi$, $c + di \in R$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan bahwa:

(I.a.)$\sigma((a + bi) + (c + di)) = \sigma(a + bi) + \sigma(c + di)$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned}\sigma((a + bi) + (c + di)) &= \sigma((a + c) + (b + d)i) \\ &= (a + c) - (b + d)i. \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned}\sigma(a + bi) + \sigma(c + di) &= (a - bi) + (c - di) \\ &= (a + c) - (b + d)i. \qquad (2.15)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.14) dan (2.15), diperoleh bahwa $\sigma((a + bi) + (c + di)) = \sigma(a + bi) + \sigma(c + di)$.

(I.b.)$\sigma((a + bi)(c + di)) = \sigma(a + bi)\sigma(c + di)$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned}\sigma((a + bi)(c + di)) &= \sigma(ac + adi + bci - bd) \\ &= \sigma((ac - bd) + (ad + bc)i) \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i. \qquad (2.16)\end{aligned}$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned}\sigma(a + bi)\sigma(c + di) &= (a - bi)(c - di) \\ &= ac - adi - bci - bd \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i. \qquad (2.17)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.16) dan (2.17), diperoleh $\sigma((a + bi)(c + di)) = \sigma(a + bi)\sigma(c + di)$. Sehingga berdasarkan (I.a.) dan (I.b.), pemetaan σ dengan $\sigma(a + bi) = a - bi$ untuk setiap $a + bi \in R$ adalah endomorfisma gelanggang.

(II) Didefinisikan $\delta(a + bi) = b$ untuk setiap $a + bi \in R$, δ adalah $\sigma -$ derivatif.

Ambil sebarang $a + bi$, $c + di \in R$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan bahwa:

(II.a.) $\delta((a + bi) + (c + di)) = \delta(a + bi) + \delta(c + di)$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\delta((a + bi) + (c + di)) = \delta((a + c) + (b + d)i) = b + d. \qquad (2.18)$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$\delta(a+bi)+\delta(c+di)=b+d.$ (2.19)

Berdasarkan persamaan (2.18) dan (2.19), diperoleh $\delta((a+bi)+(c+di))=\delta(a+bi)+\delta(c+di)$.

(II.b.) $\delta((a+bi)(c+di))=\sigma(a+bi)\delta(c+di)+\delta(a+bi)(c+di)$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$\delta((a+bi)(c+di))=\delta((ac-bd)+(ad+bc)i)=ad+bc.$ (2.20)

Untuk operasi di ruas kanan:

$\sigma(a+bi)\delta(c+di)+\delta(a+bi)(c+di)=(ad-bdi+bdi+bc).$ (2.21)

Berdasarkan persamaan (2.20) dan (2.21), diperoleh $\delta((a+bi)(c+di))=\sigma(a+bi)\delta(c+di)+\delta(a+bi)(c+di)$. Sehingga berdasarkan (II.a.) dan (II.b.), pemetaan δ dengan $\delta(a+bi)=b$ untuk setiap $a+bi\in R$ adalah $\sigma-$ derivatif.

Karena (I) dan (II) dipenuhi, maka terbukti bahwa $R[x;\sigma,\delta]$ dengan $\sigma(a+bi)=a-bi$ dan $\delta(a+bi)=b$ adalah gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Gauss. ■

Gelanggang polinomial miring bukan merupakan gelanggang yang komutatif karena aturan perkaliannya yang berbeda dengan aturan perkalian pada gelanggang polinomial biasa. Berikut diberikan contoh bahwa perkalian dalam gelanggang polinomial miring tidak komutatif.

Contoh 2.4.2. Misalkan $p(x)=(3+2i)x+(2+i), q(x)=(2-4i)x\in\mathbb{Z}_i[x;\sigma,\delta]$ dengan $\sigma(a+bi)=a-bi$ dan $\delta(a+bi)=b$. Maka $p(x)q(x)\neq q(x)p(x)$.

Bukti:

(i) Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned}p(x)q(x)&=[(3+2i)x+(2+i)](2-4i)x\\&=[(3+2i)(x(2-4i))x]+(2+i)(2-4i)x\\&=(3+2i)[(2+4i)x-4]x+(2+i)(2-4i)x\\&=(3+2i)(2+4i)x^2-(12+8i)x+(8-2i)x\\&=(16i-2)x^2-(4+10i)x.\end{aligned} \quad (2.22)$$

(ii) Untuk operasi di ruas kanan:

$$q(x)p(x) = (2-4i)x[(3+2i)x + (2+i)]$$
$$= [(2-4i)(x(3+2i))x] + [(2-4i)(x(2+i))]$$
$$= (2-4i)[(3-2i)x+2]x + (2-4i)[(2-i)x+1]$$
$$= -(2+16i)x^2 + (4-8i)x - 6ix + (2-4i)$$
$$= -(2+16i)x^2 + (4-14i)x + (2-4i). \qquad (2.23)$$

Berdasarkan persamaan (2.22) dan (2.23). jelas bahwa $p(x)q(x) \neq q(x)p(x)$. ■