DIFERENSIAL GRAF PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA ANTARA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF KIPAS

SKRIPSI

MUTMAINNAH

H011171018

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2022

DIFERENSIAL GRAF PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA ANTARA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF KIPAS

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

MUTMAINNAH

H011171018

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
SEPTEMBER 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Mutmainnah
NIM	: H011171018
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Diferensial Graf pada Graf Hasil Operasi Korona Antara Graf Lintasan dengan Graf Kipas

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 10 Oktober 2022

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL
AFEBAKX116310799

Mutmainnah
NIM. H011171018

LEMBAR PENGESAHAN

DIFERENSIAL GRAF PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA ANTARA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF KIPAS

Disusun dan diajukan oleh

MUTMAINNAH

H011171018

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 25 Oktober 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Dra. Nur Erawaty, M.Si.**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19690912 199303 2 001**

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, yang telah memberikan rahmat yang melimpah dan kesehatan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Penulisan Skripsi yang berjudul "**Diferensial Graf pada Graf Hasil Operasi Korona Antara Graf Lintasan dengan Graf Kipas**" ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana S.Si. Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, bimbingan, dan nasehat dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.sc.,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan **Dr. Eng. Amiruddin,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya;
2. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika beserta seluruh jajarannya;
3. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku Dosen pembimbing utama dan Dosen penasehat akademik yang telah dengan sabar, tulus, memberi semangat dan pencerahan serta mengarahkan dan membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini. Selanjutnya kepada **Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku Dosen pembimbing pertama yang juga telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini;
4. Tim Penguji, yaitu **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** dan **Dr. Khaeruddin, M.Sc.,** yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan dan penyempurnaan dalam penyusunan skripsi ini;
5. Para Dosen dan Staf Departemen Matematika yang banyak membantu, memberi ilmu dan kemudahan selama menjadi mahasiswa departemen matematika sampai dalam penyusunan skripsi ini.

6. Keluarga tersayang, terutama kedua orang tua penulis, ayah Muh. Said dan ibu Suryani yang telah dengan sabar, tulus, memberikan kasih sayang, doa, dukungan, nasihat serta mencurahkan seluruh tenaga dan upaya dalam setiap langkah penulis, yang merupakan anugerah terbesar dalam hidup lahir dan besar di tengah-tengah keluarga ini.
7. Teman-teman kos, Fitriana, Cahya Ningrum, Marwah Salam, Fausia Angraeni, Nurlina, Nuris, dan seluruh teman di Kost Saudara. Terima kasih atas kesenangan, canda tawa yang membahagiakan yang membuat tahun-tahun pertama perantauan terasa mudah dan menyenangkan.
8. Teman seperjuangan di kampus, Riska, Sarti, Fika, Mmj, Defi, Hafsah, dan seluruh teman-teman di **Matematika 2017** yang tidak dapat dituliskan satu-persatu. Terima kasih telah memberikan banyak dukungan, semangat, dan nasihat kepada penulis selama menjalani perkuliahan**.**
9. Keluarga besar di **UKM Karate-Do Unhas**, terima kasih telah memberi pengalaman, menjadi tempat belajar, berbagi suka maupun duka, menjadi tempat pulang ketika jenuh dengan hiruk pikuk di ruang kelas.
10. **Teman-teman di Komunitas Sokola Kaki Langit**, Terima kasih telah memberikan ruang untuk belajar, bercerita, bercanda dan tertawa, dikala penulis butuh tempat untuk menepi dari ruwetnya penyusunan skripsi.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan namanya satu per satu, yang telah dengan tulus ikhlas memberikan doa dan motivasi sehingga dapat terselesaikannya skripsi ini.

Akhir kata penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, Untuk itu dengan kerendahan hati penulis mengharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan dapat dijadikan referensi demi pengembangan ke arah yang lebih baik. Semoga Allah Swt. senantiasa melimpahkan rahmat dan rida-Nya kepada kita semua.

Makassar, 07 September 2022

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mutmainnah

NIM : H011171018

Program Studi : Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Diferensial Graf pada Graf Hasil Operasi Korona Antara Graf Lintasan dengan Graf Kipas

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 09 September 2022

Yang menyatakan,

Mutmainnah

ABSTRAK

Diberikan sembarang graf $G = (V, E)$. Untuk setiap X subset dari V, dengan $B(X)$ adalah himpunan titik di $V - X$, yang bertetangga dengan X. Diferensial himpunan X didefinisikan, $\partial(X) = |B(X)| - |X|$ dan diferensial dari graf G adalah maximum dari $\partial(X)$, untuk setiap X subset dari V. Pada skripsi ini dibahas mengenai diferensial graf pada graf hasil operasi korona antara graf lintasan berorde 2 dan graf kipas berode m. Diperoleh himpunan titik dengan jumlah tetangga terbanyak pada graf $(P_2 \odot F_m)$ yaitu $X = \{v_1, v_2\}$ dengan $|B(X)| = 2m + 2$. Selanjutnya diperoleh bahwa $\partial(P_2 \odot F_m) = 2m$.

Kata Kunci : Diferensial graf, Himpunan titik, Operasi Korona.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be an arbitrary graph. For any subset X of V, let $B(X)$ be the set of all vertices in $V - X$, having neighbour in X. Defined the differential of a set to be $\partial(X) = |B(X)| - |X|$ and the differential of a graph G to be aqual to $\partial(X)$, for any subset of X of V. In this essay, we will discusses the differential graph of the graph of the corona operation between a path graph of order 2 and a fan graph of order m. The vertex set with the highest number of neighbors in the graph $(P_2 \odot F_m)$ is $X = \{v_1, v_2\}$ with $|B(X)| = 2m + 2$. Furthermore, it is obtained that $\partial(P_2 \odot F_m) = 2m$.

Keywords: Differential graph, set of vertices, Corona operation.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736 ketika memikirkan mungkin atau tidaknya melintasi semua jembatan yang ada di kota Konigsberg–Rusia hanya dengan melewatinya satu kali, serta dimulai dan diakhiri di tempat yang sama. Solusi yang diusulkannya atas permasalahan tersebut berupa titik dan sisi yang kemudian dikenal sebagai teori graf. Sejak saat itu, topik dari graf ini mulai dipelajari oleh para ahli matematika (Landerius Maro, 2017).

Graf adalah pasangan himpunan yang himpunan pertamanya anggotanya disebut titik dan himpunan keduanya adalah pasangan sisi. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan atau titik (verteks) sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau sisi (edge). Teori graf merupakan topik yang banyak mendapat perhatian saat ini karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas.(Landerius Maro & Cornelis Banabera, 2020).

Salah satu pemanfaatan teori graf dalam kehidupan yaitu pada pengembangan media social. Aplikasi media sosial, seperti facebook, instagram, twitter, telah menjadi media penting untuk komunikasi dan penyebaran informasi. Karena popularitas yang meningkat cukup pesat, jejaring sosial saat ini memiliki berbagai macam aplikasi dalam pemasaran produk dan kampanye politik. Termotivasi oleh aplikasinya yang semakin berkembang, maka maksimalisasi penyebaran informasi menjadi algoritma dasar agar informasi tersebut dapat diterima masyarakat luas. Kemudian yang menjadi masalah adalah bagaimana menentukan kelompok titik terbaik untuk mempengaruhi titik lainnya. (Ludwin A. Basilio, et al, 2020).

Konsep graf yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah diferensial himpunan dan diferensial graf. Diferensial suatu himpunan adalah selisih antara jumlah tetangga dari himpunan dan jumlah elemen dalam himpunan tersebut. Dalam hal ini, diferensial himpunan dapat bertindak sebagai ukuran bagaimana himpunan ini dapat mempengaruhi elemen lainnya. Sedangkan diferensial suatu graf adalah nilai maximum dari kumpulan nilai hasil selisih antara jumlah tetangga dari himpunan dan jumlah elemen dalam himpunan itu (S. Bermudo, et al, 2015).

Studi tentang sifat matematika dari diferensial graf sudah dikembangkan oleh beberapa peneliti. Diantaranya J.R. Lewis, et al (2006) yang memperkenalkan beberapa variasi yang berbeda dari diferensial graf, batas-batas diferensial graf dan sifat-sifatnya, yang merupakan parameter baru.

Pada tahun 2015, S.Bermudo dalam jurnalnya yang berjudul “On the Differential in Graphs”, menjelaskan tentang hubungan antara diferensial graf dan orde, derajat minimum dan maksimum, dan diameter graf. Dalam jurnalnya ia juga telah menemukan differensial graf dari graf lintasan P_n dengan $n \geq 1$ dimana $\partial(P_n)= \frac{n}{3}$, dan diferensial graf pada graf siklus C_n dengan $n \geq 3$ dimana $\partial(C_n)= \frac{n}{3}$. Selain itu penelitian tentang differensial graf juga telah dilakukan dalam suatu penelitian yang berjudul “Differential Of King Graphs And Complete N-Ary Trees” oleh Muralidharan, et al (2019).

Berdasarkan pengembangan yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti, ternyata belum ada kajian tentang diferensial graf pada graf hasil operasi korona antara graf lintasan dengan graf kipas. Oleh Karen itu, dalam tugas akhir ini,akan dikaji tentang “**Diferensial graf dari graf hasil operasi korona antara graf lintasan berorde dan graf kipas.”**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang pada skripsi ini, ddapun rumusan masalah yang akan dibahas yaitu sebagai berikut.

1. Bagaimana mengklasifikasi atau menghimpun titik-titik dengan jumlah tetangga terbanyak pada hasil operasi korona titik antara graf lintasan P_n dan graf kipas F_m
2. Menghitung nilai maximum dari kumpulan nilai hasil selisih antara jumlah tetangga dari himpunan dan jumlah elemen dalam himpunan itu.
3. Menentukan bentuk umum persamaan differensial graf pada graf hasil operasi korona graf lintasan P_n dengan graf kipas F_m.

1.3 Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak mencakup pembahasan yang terlalu luas dan melebar, maka peneliti membutuhkan batasan-batasan sebagai berikut :

1. Graf yang akan dikaji diferensial grafnya adalah graf hasil operasi korona antara graf lintasan P_n dengan graf kipas F_m.
2. Operasi graf yang digunakan adalah operasi korona
3. Graf lintasan P_n dibatasi hanya untuk $n = 2$ untuk n bilangan bulat positif, dan graf kipas F_m dibatasi hanya untuk $m \geq 3$ untuk n bilangan bulat positif.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka penelitian ini bertujuan untuk menentukan diferensial graf pada graf hasil operasi korona titik antara graf lintasan (P_n) dan graf kipas F_m.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini yaitu diharapkan skripsi ini dapat memberikan pengetahuan baru baik bagi peneliti maupun pembaca dalam teori graf, khususnya dalam bidang diferensial graf. Lebih jauh lagi, penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi bagi peneliti lain pada penelitian yang dilakukan ke depannya.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan beberapa materi untuk memudahkan pemahaman tentang diferensial pada graf hasil operasi koronan antara graf lintasan dengan graf kipas. Materi-materi tersebut diantaranya dasar-dasar graf, jenis-jenis graf, operasi pada graf yang akan digunakan pada penelitian ini, dan diferensial graf.

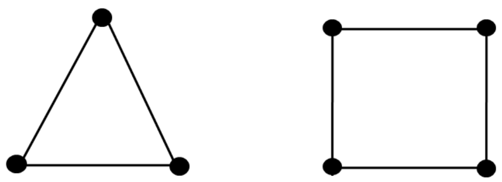
2.1 Dasar-Dasar Graf

Beberapa persoalan graf yang dapat dijumpai dalam kehidupan sehari-hari seperti diagram pertandingan sepak bola sistem gugur, distribusi produk suatu perusahaan, penyusunan jadwal pelajaran, menentukan jalan terpendek antara dua tempat dalam suatu kota, dan lain-lain. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan objek-objek tersebut.

Definisi 2.1.1 *Graf G didefinisikan sebagai himpunan berhingga $V(G)$, yang tidak kosong dengan elemen-elemennya disebut titik (vertex) dan himpunan $E(G)$ (mungkin kosong) yang elemen-elemennya merupakan pasangan tak terurut dan berbeda dari $V(G)$, dan disebut sisi (edge) (Chartrand dan Oellerman, 1993).*

Berdasarkan definisi di atas, diketahui bahwa $G = (V, E)$ merupakan pasangan himpunan titik dan sisi, dengan $V(G)$ merupakan himpunan titik berhingga yang tak kosong dan $V(G)$ merupakan himpunan sisi berhingga yang boleh kosong. Sisi dari graf merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titiknya. Secara matematika, Definisi 2.1.1 dapat ditulis sebagai berikut: Graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G) = \{u\colon u \text{ disebut titik}\}$ dan $E(G) = \{(u, v)\colon u, v \in V(G)\}$ serta (u,v) disebut sisi dan selanjutnya hanya ditulis uv.

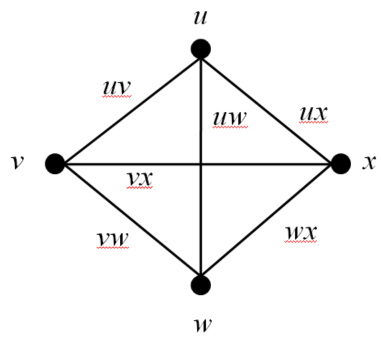
Pada Definisi 2.1.1, jika dimisalkan $e = uv \in E(G)$, sisi $e = uv$ adalah pasangan tidak berurut dari $V(G)$ yakni $uv = vu$ dan berbeda yakni $u \neq v$, maka graf G disebut graf sederhana.



Gambar 2.1.1 Contoh graf sederhana berorde 3 dan 4

Banyaknya anggota dari $V(G)$ disebut orde dari G yang dinyatakan dengan simbol p dan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut ukuran dari G yang dinyatakan dengan simbol q.

Contoh 2.1.1



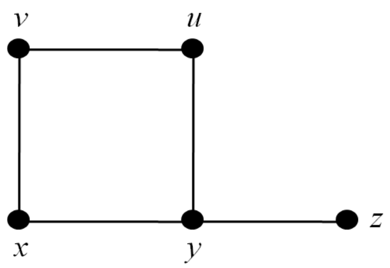
Gambar 2.1.2 Graf G dengan 4 titik dan 6 sisi

Pada Gambar 2.1.1 menunjukkan graf *G (V(G), E(G))* dimana himpunan titik $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dihubungkan oleh himpunan sisi $E(G) = \{uv, uw, ux, vw, vx, wx\}$. Jadi, orde dari graf G adalah 4 dan ukurannya adalah 6.

Definisi 2.1.2 *Misalkan G adalah suatu graf dan* $v_i, v_j \in V(G)$ *serta* $x \in E(G)$. *Jika* $x = v_i v_j$, *maka dikatakan bahwa :*

1. *Titik* v_i ***bertetangga*** *(adjacent) dengan titik* v_j.
2. *Sisi x* ***terkait*** *(incident) dengan titik* v_i, *demikian pula untuk titik* v_j *(Hasmawati, 2020).*

Jadi, dua buah titik dikatakan bertetangga jika keduanya dihubungkan sebuah sisi yang sama. Begitupun sebaliknya, dua buah sisi dikatakan bertetangga jika kedua sisi tersebut terkait atau dihubungkan satu titik yang sama. Misalkan x_1, x_2, dan x_3 adalah sisi dari suatu graf *G* dan *v* adalah titik graf *G*. Jika x_1, x_2, dan x_3 terkait dengan simpul *v*, maka sisi x_1, x_2, dan x_3 dikatakan **bertetangga.** Himpunan tetangga suatu titik *v* pada graf G dinotasikan $N_G(v)$ dan didefinisikan sebagai $N_G(v) = \{u|uv \in E(G)\}$.



Gambar 2.1.3 Contoh titik-titik dan sisi-sisi yang bertetangga

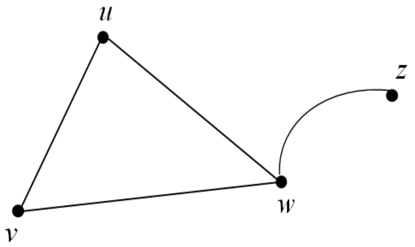
Pada Gambar 2.1.2 titik *y* bertetangga dengan titik *u*, *x*, dan *z*, tetapi titik *z* tidak bertetangga dengan titik *u* dan titik *x*. Titik yang bertetangga yaitu *u* dengan *v* dan *y*, *v* dengan *u* dan *x*. Sedangkan sisi *vx* tidak bertetangga dengan sisi *uy*. Sisi yang bertetangga yaitu sisi *uv* dengan *vx, uv* dengan *uy*, *vx* dengan *xy*, dan *xy* dengan *yz*. Diperoleh $N_G(u) = \{v, y\}$, $N_G(v) = \{u, x\}$, $N_G(x) = \{v, y\}$, $N_G(y) = \{u, x, z\}$, dan $N_G(z) = \{y\}$. Jika dalam suatu graf setiap titiknya bertetangga, maka graf tersebut dikatakan *graf lengkap.*

Selain istilah bertetangga dan terkait, terdapat istilah derajat, kardinalitas, dan subgraf yang pengertiannya masing-masing disajikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.3 *Derajat suatu graf adalah banyaknya titik* $V(G)$ *yang bertetangga dengan titik* $v_i \in V(G)$.

Derajat suatu graf dapat diketahui apabila derajat setiap titiknya diketahui. Derajat suatu titik v_i dalam graf *G*, dilambangkan "$deg(v_i)$", derajat tersebut dapat dihitung dengan melihat banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $deg(v_i) = |N_G(v_i)|$.

Contoh 2.1.2:



Gambar 2.1.4 Graf G dengan 4 titik

Pada Gambar 2.1.3 dapat terlihat bahwa graf G memiliki $deg(u) = deg(v) = 2, deg(w) = 3,$ dan $d(z)$=1.

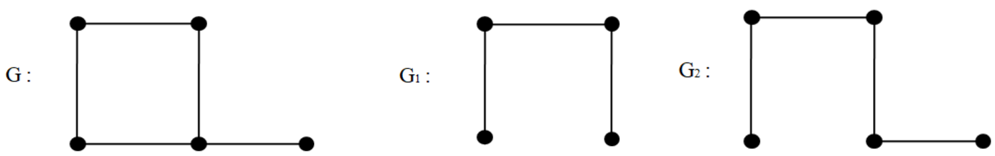
Derajat minimum dari suatu graf G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \min\{deg(v): v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = \max\{deg(v): v \in V(G)\}$. Graf dengan $\delta(G) = \Delta(G)$ disebut graf reguler (Hasmawati, 2015).

Definisi 2.1.4 *Kardinalitas suatu himpunan adalah banyaknya anggota pada himpunan tersebut. Kardinalitas dinyatakan oleh simbol "| |" (Hasmawati, 2020).*

Misalkan terdapat suatu himpunan A. Banyaknya anggota himpunan A dinyatakan dengan |A| dan disebut kardinalitas A. Pada graf G, apabila $p(G)$ adalah orde graf G dan $q(G)$ adalah ukurannya, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$.

Jika suatu titik atau sisi pada graf G dihilangkan, maka akan diperoleh suatu graf baru yang berbeda dari Graf G. Graf baru yang diperoleh tersebut disebut subgraf.

Definisi 2.1.5 *Misalkan dua graf* $H = (V(H), E(H))$ *dan* $G = (V(G), E(G))$. *Graf* H *disebut subgraf dari* G *jika* $V(H) \subseteq V(G)$ *dan* $E(H) \subseteq E(G)$ *(Hasmawati, 2020).*



Gambar 2.1.5 Graf G_1 dan G_2 adalah subgraf dari G

Pada Gambar 2.1.4 graf G_1 dan G_2 adalah subgraf dari G dikarenakan $V(G_1), V(G_2) \subseteq V(G)$. Jika $V(G_1) = V(G)$ maka G_1 dikatakan subgraf.

2.2 Jenis – Jenis Graf

Semakin banyak penelitian tentang graf, membuat penemuan mengenai jenis-jenis graf semakin banyak pula. Pada subbab ini, akan dibahas beberapa jenis graf yang akan digunakan pada penelitian ini diantaranya yaitu graf lintasan, graf siklus, graf lengkap dan graf kipas.

Definisi 2.2.1 *Graf lintasan dengan n titik dinotasikan P_n yaitu graf dengan himpunan titik $V(P_n) = \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ (Landerios Maro, 2017).*

Graf lintasan hanya terdiri dari satu lintasan dan dinotasikan P_n apabila berorde n. Graf lintasan memiliki dua titik berderajat satu dan yang lainnya berderajat dua.

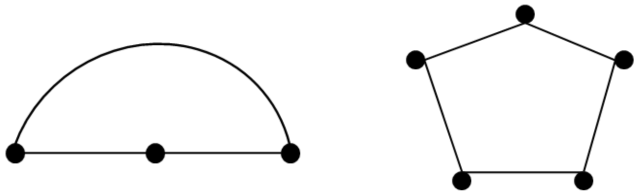
Definisi 2.2.2 *Jika untuk setiap dua titik di u dan v selalu terdapat lintasan yang memuat titik u dan v di G maka graf G dikatakan terhubung (connected) (Hasmawati, 2020)*

G:

Gambar 2.2.1 Graf Lintasan P_5 yang memuat 5 titik

Graf siklus adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama. Setiap titiknya berderajat dua.

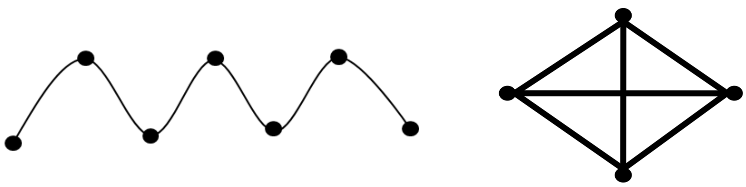
Definisi 2.2.3 *Misalkan $P_n: v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah graf lintasan dengan $n \geq 3$ titik, maka graf siklus C_n dengan panjang n, adalah graf dengan* *himpunan titik* $V(C_n) = V(P_n)$ *dan himpunan sisi* $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$. *(Diestel, 2005).*



Gambar 2.2.2 Graf siklus C_3 dan C_5

Menurut Bondy dan Murty (2008), Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap dua titiknya bertetangga, dengan kata lain graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya.

Definisi 2.2.4 *Graf lengkap dengan n titik dinotasikan* K_n *adalah graf dengan* $V(K_n) = \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ *dan* $E(K_n) = \{v_i v_{i+1},\ v_i v_{i+2}, v_i v_{i+3}, \dots, v_i v_n; 1 \leq i \leq n-1\}$. *(Landerius Maro, 2017).*



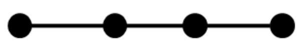
Gambar 2.2.3 Graf lintasan berorde 7 dan graf lengkap berorde 4

Definisi 2.2.5 Graf kipas dengan n titik, $n \geq 3$ dinotasikan sebagai F_n, diperoleh dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n ke graf lengkap K_1, masing-masing dihubungkan oleh sebuah sisi. Dalam penulisan ini titik K_1 dimisalkan dengan v_0.

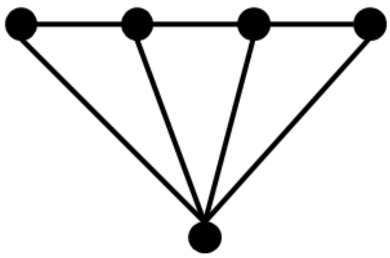
Contoh 2.2.1:

Gambar 2.2.4 merupakan graf F_5 yang diperoleh melalui gabungan P_4 dan K_1.

Graf K_1



Graf P_4



Gambar 2.2.4 Graf Kipas F_4

2.3 Operasi Dalam Graf

Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru (Landerius Maro, 2017). Terdapat beberapa operasi graf yang diketahui, namun pada bagian ini, operasi korona graf yang akan dibahas dan digunakan dalam penelitian ini adalah operasi tambah dan operasi korona graf (*crown product*).

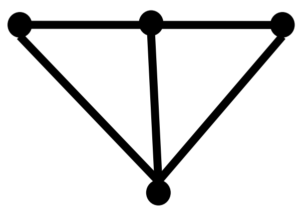
Definisi 2.3.1 *Penjumlahan dari dua buah graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_{2,}E_2)$ *dinotasikan dengan* $G = G_1 + G_2$, *yaitu graf* G *dengan* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv; u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ *(Rofiah dan Dafik, 2014).*

Contoh dari operasi pertambahan dapat dilihat pada Gambar 2.2.4, dimana graf F_5 diperoleh dari operasi tambah graf K_1 dengan graf P_4.

Definisi 2.3.2 *Misalkan* G *graf terhubung berorde* n *dan* H *graf terhubung berorde m. Graf corona* G *dan* H *dinotasikan* $G \odot H$ *adalah menggandakan graf* H *sebanyak n namakan* $H_1, H_2, \dots, H_n$, *dan mengaitkan setiap titik* v_i *di* G *dengan setiap titik di graf* $H_i, i = 1,2, \dots, n$. *(Hasmawati, 2020)*

Contoh 2.3.1:

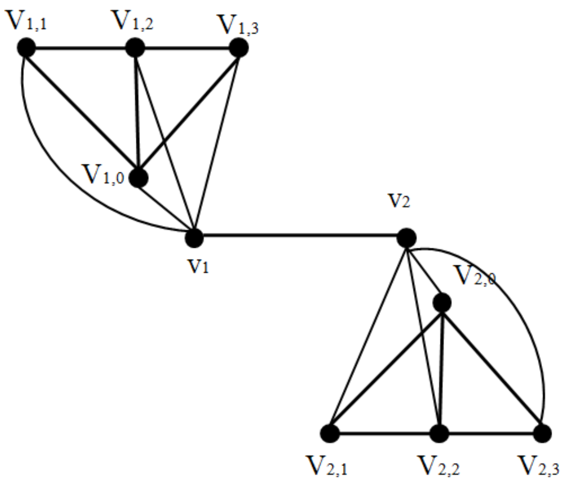
Diberikan graf lintasan dan graf kipas seperti pada gambar berikut.



(a) (b)

Gambar 2.3.1 (a) Graf P_2 dan (b) Graf F_3

Karena graf P_2 mempunyai 2 titik, graf F_4 digandakan sebanyak 2 kali dan setiap titik di F_3 dikaitkan dengan suatu titik di P_2. Hasil operasi korona sebagai berikut.



Gambar 2.3.2 Graf hasil operasi $P_2 \odot F_3$

Misalkan $V(P_2) = \{v_1, v_2\}$ dan $V(F_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, dengan menggunakan Definisi 2.3.1 dan Contoh 2.3.1 maka himpunan titik untuk graf $P_2 \odot F_3$ dinotasikan dengan

$$V(P_2 \odot F_3) = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{2,4}\}$$

dan untuk himpunan sisinya adalah

$$E(P_2 \odot F_3)$$
$$= \{v_1 v_{1,0}, v_1 v_{1,1}, v_1 v_{1,2}, \square_1 v_{1,3}, v_1 v_{1,4}, v_{1,1} v_{1,2}, v_{1,1} v_{1,3}, v_{1,1} v_{1,4}, v_{1,2} v_{1,3}, v_{1,2} v_{1,4}, v_{1,3} v_{1,4},$$

$v_2v_{2,1}, v_2v_{2,2}, v_2v_{2,3}, v_2v_{2,4}, v_{2,1}v_{2,2}, v_{2,1}v_{2,3}, v_{2,1}v_{2,4}, v_{2,2}v_{2,3}, v_{2,2}v_{2,4}, v_{2,3}v_{1,4}$ }

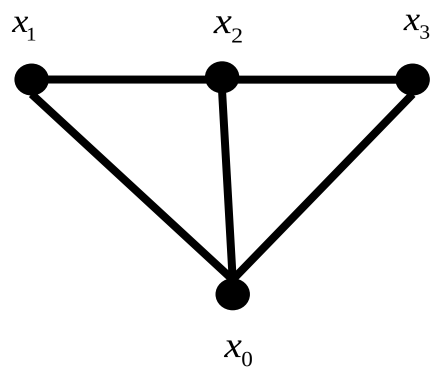
2.4 Diferensial Graf

Diferensial graf adalah nilai maximum dari kumpulan nilai hasil selisih antara jumlah tetangga dari himpunan dan jumlah elemen dalam himpunan itu (S. Bermudo, et al, 2015).

Definisi 2.4.1 *Misalkan* $G = (V, E), X \subset V$ *dan* $B(X) = \{x|x \in V, x \notin X, vx \in E, v \in X\}$ *diferensial himpunan* X *dinotasikan* $\partial(X)$, *yaitu* $\partial(X) = |B(X)| - |X|$. ***Diferensial graf G*** *dinotasikan* $\partial(G) = max\{\partial(X)|X \subset V\}$.*(Armada, C. L., Sergio, R., Canoy, Jr.2015)*

Contoh 2.4.1

Diberikan graf kipas F_3 dengan gambar sebagai berikut.



Gambar 2.4.1 Graf F_3

Dari Gambar 2.4.1 diketahui himpunan titik dari graf F_3 yaitu $V(F_3) = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ dan himpunan sisinya yaitu $E(F_3) = \{x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_2x_3\}$.

Pilih :

$X_1 = \{x_0\}, X_2 = \{x_1\}, X_3 = \{x_2\}, X_4 = \{x_3\}, X_5 = \{x_0, x_1\},$

$X_6 = \{x_0, x_2\}, X_7 = \{x_0, x_3\}, X_8 = \{x_1, x_2\}, X_9 = \{x_1, x_3\},$

$X_{10} = \{x_2, x_3\}, X_{11} = \{x_0, x_1, x_2\}, X_{12} = \{x_0, x_1, x_3\}, X_{13} = \{x_1, x_2, x_3\}$

$X_{14} = \{x_0, x_2, x_3\}, X_{15} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$

Maka,

$B(X_1) = \{x_1, x_2, x_3\}, B(X_2) = \{x_0, x_2\}, B(X_3) = \{x_0, x_1, x_3\},$

$B(X_4) = \{x_0, x_2\}, B(X_5) = \{x_2, x_3\}, B(X_6) = \{x_1, x_3\}, B(X_7) = \{x_1, x_2\}$

$B(X_8) = \{x_0, x_3\}, B(X_9) = \{x_0, x_2\}, B(X_{10}) = \{x_0, x_1\}, B(X_{11}) = \{x_3\}$

$B(X_{12}) = \{x_2\}, B(X_{13}) = \{x_0\}, B(X_{14}) = \{x_1\}, B(X_{15}) = \{\}.$

Diperoleh:

$\partial(X_1) = |B(X_1)| - |X_1| = 3 - 1 = 2$

$\partial(X_2) = |B(X_2)| - |X_2| = 2 - 1 = 1$

$\partial(X_3) = |B(X_3)| - |X_3| = 3 - 1 = 2$

$\partial(X_4) = |B(X_4)| - |X_4| = 2 - 1 = 1$

$\partial(X_5) = |B(X_5)| - |X_5| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_6) = |B(X_6)| - |X_6| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_7) = |B(X_7)| - |X_7| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_8) = |B(X_8)| - |X_8| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_9) = |B(X_9)| - |X_9| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_{10}) = |B(X_{10})| - |X_{10}| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_{11}) = |B(X_{11})| - |X_{11}| = 1 - 3 = -2$

$\partial(X_{12}) = |B(X_{12})| - |X_{12}| = 1 - 3 = -2$

$\partial(X_{13}) = |B(X_{13})| - |X_{13}| = 1 - 3 = -2$

$\partial(X_{14}) = |B(X_{14})| - |X_{14}| = 1 - 3 = -2$

$\partial(X_{15}) = |B(X_{15})| - |X_{15}| = 0 - 4 = -4$

Jadi, $\partial(F_3) = \max\{2,0,-2,-4\} = 2$

Derajat maksimum suatu graf dinotasikan dengan $\Delta(G)$, derajat maksimum digunakan untuk menentukan batas diferensial suatu graf.

Proposisi 2.4.1 *Untuk sembarang graf* $G = (V, E), X \subset V$, *dengan derajat maksimum* $\Delta(G)$ *maka* $\partial(G) \geq \Delta(G) - 1$ *(Lewis, J.R. 2004).*

Bukti:

Diberikan $X = \{v\}$, dimana v adalah titik yang berderajat maksimum pada graf G, sehingga himpunan tetangga dari titik v yaitu $B(X)$ dimana banyaknya anggota dari himpunan $B(X)$ disimbolkan $|B(X)| = \Delta(G)$.

Maka diperoleh : $\partial(X) = |B(X)| - |X|$

$$= \Delta(G) - 1$$

Karena menurut Definisi 2.4.1 $\partial(G)$ adalah nilai maksimum dari $\partial(X)$ sehingga diperoleh :

$\partial(G) \geq \partial(X)$

$\partial(G) \geq \Delta(G) - 1$ (Rahmat A.W. 2022)

Dalam penelitian skripsi ini akan ditentukan diferensial graf pada graf hasil operasi korona antara graf lintasan dengan graf kipas.