

**PERBANDINGAN BAGAN KENDALI *MULTIVARIATE*
CUMULATIVE SUM 1 DAN 2 PADA DATA KUALITAS
MINYAK KELAPA SAWIT**

SKRIPSI



NURSYAHFIKA

H051191051

**PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
AGUSTUS 2023**

**PERBANDINGAN BAGAN KENDALI *MULTIVARIATE*
CUMULATIVE SUM 1 DAN 2 PADA DATA KUALITAS
MINYAK KELAPA SAWIT**

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada Program Studi Statistika Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin

NURSYAHFIKA

H051191051

**PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR
AGUSTUS 2023**

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Perbandingan Bagan Kendali *Multivariate Cumulative Sum* 1 Dan 2 Pada Data Kualitas Minyak Kelapa Sawit

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 02 Agustus 2023



Nursyahfika

NIM H051191051

**PERBANDINGAN BAGAN KENDALI *MULTIVARIATE*
CUMULATIVE SUM 1 DAN 2 PADA DATA KUALITAS
MINYAK KELAPA SAWIT**

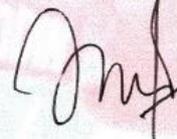
Disetujui Oleh

Pembimbing Utama



Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.
NIP. 197504292000032001

Pembimbing Pertama



Anisa, S.Si., M.Si.
NIP. 197302271998022001

Ketua Program Studi




Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.
NIP. 197708082005012002

Pada 02 Agustus 2023

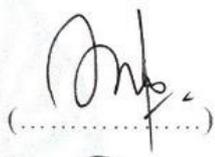
HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : Nursyahfika
NIM : H051191051
Program Studi : Statistika
Judul Skripsi : Perbandingan Bagan Kendali *Multivariate Cumulative Sum*
1 dan 2 pada Data Kualitas Minyak Kelapa Sawit

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

1. Ketua : Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si. 
2. Sekretaris : Anisa, S.Si., M.Si. 
3. Anggota : Dra. Nasrah Sirajang, M.Si. 
4. Anggota : Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si. 

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 02 Agustus 2023

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabaraktuh

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* atas segala limpahan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada baginda Rasulullah *Shallallahu 'Alaihi Wa Sallam* beserta keluarga dan para sahabatnya. *Alhamdulillahirobbil'alamin*, berkat nikmat kemudahan dan pertolongan yang diberikan oleh Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Perbandingan Bagan Kendali *Multivariate Cumulative Sum* 1 dan 2 pada Data Kualitas Minyak Kelapa Sawit” yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan dorongan yang diberikan oleh berbagai pihak yang secara konsisten memberikan bantuan baik secara moril maupun materil. Meskipun penulis memiliki keterbatasan dalam kemampuan dan pengetahuan, namun berkat bantuan dan dukungan tersebut, penulis berhasil menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang tulus kepada semua pihak yang terlibat. Oleh karena itu, dengan penuh kesadaran dan kerendahan hati, pada kesempatan ini perkenankanlah penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kepada:

1. Terima kasih yang tak terhingga kepada ibunda **Rosmiatie** dan ayahanda **Sahha** tercinta atas dukungan, pengorbanan luar biasa, limpahan cinta dan kasih sayang, serta dengan ikhlas telah menemani setiap pilihan penulis dengan doa dan restu mulianya. Terima kasih juga kepada adik **Muhammad Syahrizal** yang selalu menghibur dan memberi semangat kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh staf jajarannya.
3. **Bapak Dr. Eng. Amiruddin**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh staf jajarannya.

4. **Ibu Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Statistika yang dengan penuh kesabaran telah memberikan arahan, dorongan semangat dan motivasi kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.
5. **Ibu Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.**, selaku pembimbing utama penulis yang dengan penuh kesabaran telah meluangkan waktu dan pemikirannya untuk senantiasa memberikan arahan, dorongan semangat, dan motivasi kepada penulis dari awal hingga selesainya penulisan tugas akhir ini.
6. **Ibu Anisa, S.Si., M.Si.**, sebagai pembimbing pertama dan Penasehat Akademik yang dengan penuh kesabaran telah meluangkan waktu dan pemikirannya untuk senantiasa memberikan arahan, dorongan semangat, dan motivasi kepada penulis dari awal hingga selesainya penulisan tugas akhir ini.
7. **Ibu Dra. Nasrah Sirajang, M.Si** dan **Ibu Dr. Nurtiti Sunusi S.Si., M.Si.**, selaku Tim Penguji yang telah meluangkan waktu dalam memberikan motivasi serta kritikan yang membangun kepada penulis dalam penyempurnaan tugas akhir ini.
8. Segenap jajaran **Dosen Pengajar** dan **Staf Departemen Statistika** yang telah banyak membantu, memberikan ilmu-ilmunya, serta berbagai kemudahan lainnya yang diberikan selama menempuh pendidikan sarjana di Departemen Statistika.
9. Sahabat seperjuangan di Statistika 2019, **Mayashari, Muliana, Nurazizah, Seli Lisnayati**, dan **Yasmin Pratiwi**. Terima kasih atas kebersamaan, kebahagiaan, dan kesedihan serta kebaikannya selama masa perkuliahan. Terima kasih telah mengukir kenangan indah bersama penulis selama masa perkuliahan.
10. Teman seperjuangan warga istana **Agus Hermawan, Arief Rahman Nur, Fadilah Amirul Adhel, Muhammad Fathurahman, Muhammad Ferdiansyah, Muhammad Syamsul Bahri, Sapriadi Rasyid**, dan **Taufik Hidayat** yang telah memberikan masukan dan bantuan dalam menyelesaikan perkuliahan.

11. Teman diskusi **Diah Lestari, Fadhila Febrianti Najamuddin, dan Wahyu Dwi Rahmawati** yang telah memberikan masukan dan bantuan dalam menyelesaikan tugas akhir.
12. Teman seperjuangan di **Statistika 2019**. Terima kasih atas ilmu, kebersamaan, suka dan duka dalam menjalani perkuliahan di Departemen Statistika.
13. Teman **KKN Desa Bajimangngai 108** yang telah memberikan semangat dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
14. **Keluarga Besar Himastat FMIPA Unhas** yang selalu memberikan pengalaman berharga dalam ber-organisasi.
15. Kepada seluruh pihak yang mungkin tidak sempat penulis sebutkan satu persatu. Terima kasih atas segala dukungan, partisipasi, dan apresiasinya yang diberikan kepada penulis.

Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, namun ini hasil terbaik yang dapat diberikan oleh penulis pada penelitian ini. Oleh karena dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan permohonan maaf yang sebesar-besarnya. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat untuk berbagai pihak.

Makassar, 02 Agustus 2023



Nursyahfika

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK
KEPENTINGAN AKADEMIK**

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nursyahfika
NIM : H051191051
Program Studi : Statistika
Departemen : Statistika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Non-eksklusif (Non-exclusive Royalty- Free Right)** atas tugas akhir saya yang berjudul:

**“Perbandingan Bagan Kendali *Multivariate Cumulative Sum* 1 dan 2 pada
Data Kualitas Minyak Kelapa Sawit”**

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar, 02 Agustus 2023.

Yang menyatakan,



(Nursyahfika)

ABSTRAK

Proses menciptakan dan menyempurnakan suatu produk yang berkualitas sesuai dengan standar, seringkali terjadi penyimpangan yang tidak dikehendaki oleh perusahaan sehingga menghasilkan produk rusak. Untuk mengatasi hal tersebut, tindakan yang dapat dilakukan adalah dengan melakukan pengendalian kualitas. Salah satu alat pengendalian kualitas yang dapat digunakan adalah bagan kendali multivariat. Pada penelitian ini digunakan bagan kendali *Multivariate Cumulative Sum 1* (MC1) dan *Multivariate Cumulative Sum 2* (MC2) untuk mendeteksi pergeseran vektor rata-rata proses produksi. Penelitian ini bertujuan memperoleh hasil perbandingan bagan kendali MC1 dan MC2 menggunakan nilai *Average Run Length* (ARL). Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data kualitas minyak kelapa sawit PT. Graha Inti Jaya periode 11 Juli 2022 hingga 29 Agustus 2022. Hasil analisis menunjukkan bahwa pada bagan kendali MC1 terdapat 22 pengamatan yang berada di luar batas kendali dan pada bagan kendali MC2 terdapat 8 pengamatan yang berada di luar batas kendali. Penentuan ARL pada bagan kendali MC1 dan MC2 menggunakan metode simulasi. Nilai ARL bagan kendali MC1 lebih kecil dibandingkan bagan kendali MC2 untuk setiap matriks korelasi, matriks varians kovarians dan vektor rata-rata yang dicobakan. Oleh karena itu, bagan kendali MC1 dianggap lebih sensitif mendeteksi pergeseran vektor rata-rata proses produksi minyak kelapa sawit PT. Graha Inti Jaya.

Kata kunci: Pengendalian Kualitas, Bagan Kendali, MCUSUM, MC1, MC2

ABSTRACT

The process of creating and refining a quality product in accordance with standards often encounters unintended deviations, leading to the production of defective items. To address this issue, one of the actions that can be taken is to implement quality control measures. One of the quality control tools that can be used is the multivariate control chart. In this study, the Multivariate Cumulative Sum 1 (MC1) and Multivariate Cumulative Sum 2 (MC2) control chart are employed to detect shifts in the mean vector of the production process. The objective of this research is to obtain a comparison between the MC1 and MC2 control charts using the Average Run Length (ARL) values. The data utilized in this study consists of palm oil quality data from PT. Graha Inti Jaya during the period of July 11, 2022 to August 29, 2022. The analysis results indicate that the MC1 control chart there are 22 observations outside the control limits, while the MC2 control chart there are 8 observations outside the control limits. The determination of ARL for the MC1 and MC2 control charts is conducted using simulations method. The ARL value of the MC1 control chart is smaller compared to the MC2 control chart for each tested correlation matrix, variance covariance matrix and mean vector. Therefore, the MC1 control chart is considered more sensitive in shift in the mean vector of palm oil production at PT. Graha Inti Jaya.

Keywords: *Quality Control, Control Chart, MCUSUM, MC1, MC2*

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
HALAMAN JUDUL	ii
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	v
KATA PENGANTAR	vi
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI	ix
ABSTRAK	x
ABSTRACT	xi
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 <i>Statistical Process Control</i>	5
2.2 Distribusi Normal Univariat	5
2.2.1 Sifat-Sifat Distribusi Normal Univariat	6
2.2.2 Teori Limit Pusat	7
2.3 Distribusi Normal Multivariat.....	8
2.4 Uji Korelasi	8
2.5 Uji Normalitas Multivariat.....	9
2.6 Bagan Kendali <i>Shewhart</i>	10
2.7 Bagan Kendali <i>Cumulative Sum</i>	11
2.8 Bagan Kendali <i>Multivariate Cumulative Sum</i>	13
2.8.1 Bagan Kendali <i>Multivariate Cumulative Sum 1</i>	13
2.8.2 Bagan Kendali <i>Multivariate Cumulative Sum 2</i>	14

2.9	<i>Average Run Length</i>	15
2.9.1	<i>Average Run Length Cumulative Sum</i>	15
2.9.2	<i>Average Run Length Multivariate Cumulative Sum</i>	16
2.10	PT. Graha Inti Jaya	16
BAB III METODOLOGI PENELITIAN		18
3.1	Jenis dan Sumber Data.....	18
3.2	Variabel Penelitian.....	18
3.3	Tahapan Penelitian.....	18
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		20
4.1	Bagan Kendali <i>Multivariate Cumulative Sum 1</i>	20
4.2	Bagan Kendali <i>Multivariate Cumulative Sum 2</i>	21
4.3	Nilai Referensi dan Batas kendali <i>Multivariate Cumulative Sum</i>	22
4.4	Uji Korelasi.....	24
4.5	Uji Normalitas Multivariat.....	25
4.6	Penerapan Bagan Kendali <i>Multivariate Cumulative Sum 1</i>	28
4.7	Penerapan Bagan Kendali <i>Multivariate Cumulative Sum 2</i>	31
4.8	Perbandingan <i>Average Run Length Multivariate Cumulative Sum</i>	34
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN		42
5.1	Kesimpulan	42
5.2	Saran	42
DAFTAR PUSTAKA		43
LAMPIRAN.....		47

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Ilustrasi Bagan Kendali.....	11
Gambar 4.1 Bagan Kendali MC1	31
Gambar 4.2 Bagan Kendali MC2	33
Gambar 4.3 Grafik Nilai ARL pada Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan Matriks Varians Kovarians $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	36
Gambar 4.4 Grafik Nilai ARL pada Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ dan Matriks Varians Kovarians $\begin{pmatrix} 1 & 2,5 \\ 2,5 & 2 \end{pmatrix}$	37
Gambar 4.5 Grafik Nilai ARL pada Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ dan Matriks Varians Kovarians $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	39
Gambar 4.6 Grafik Nilai ARL pada Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0,7 \\ 0,7 & 1 \end{pmatrix}$ dan Matriks Varians Kovarians $\begin{pmatrix} 1 & 1,75 \\ 1,75 & 1 \end{pmatrix}$	40

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Hasil Data Acak yang Dibangkitkan.....	23
Tabel 4.2 Hasil Perhitungan d_i^2 dengan χ^2	27
Tabel 4.3 Hasil Perhitungan Bagan Kendali MC1 dan Batas Kendali MC1	30
Tabel 4.4 Hasil Perhitungan Bagan Kendali MC2 dan Batas Kendali MC2	33
Tabel 4.5 Nilai ARL Bagan Kendali MC1 dengan Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	35
Tabel 4.6 Nilai ARL Bagan Kendali MC2 dengan Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	35
Tabel 4.7 Nilai ARL Bagan Kendali MC1 dengan Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	36
Tabel 4.8 Nilai ARL Bagan Kendali MC2 dengan Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix}$	37
Tabel 4.9 Nilai ARL Bagan Kendali MC1 dengan Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	38
Tabel 4.10 Nilai ARL Bagan Kendali MC2 dengan Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	38
Tabel 4.11 Nilai ARL Bagan Kendali MC1 dengan Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0,7 \\ 0,7 & 1 \end{pmatrix}$	39
Tabel 4.12 Nilai ARL Bagan Kendali MC2 dengan Matriks Korelasi $\begin{pmatrix} 1 & 0,7 \\ 0,7 & 1 \end{pmatrix}$	40

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Kualitas Minyak Kelapa Sawit PT. Graha Inti Jaya.....	48
Lampiran 2. Data Acak yang Dibangkitkan.....	50
Lampiran 3. Uji Normalitas Multivariat	51
Lampiran 4. Hasil Perhitungan Nilai C_t , $\ C_t\ $, n_t , $MC1_t$, UCL dan LCL	52
Lampiran 5. Hasil Perhitungan Nilai D_t^2 , $MC2_t$, UCL dan LCL	55
Lampiran 6. <i>Syntax</i> ARL Bagan Kendali MC1.....	56
Lampiran 7. <i>Syntax</i> ARL Bagan Kendali MC2.....	58

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Searah dengan perkembangan teknologi, ilmu pengetahuan dan ekonomi, lingkungan manufaktur mengalami pergeseran kearah yang lebih maju dan lingkungan persaingan juga bertambah ketat. Agar mampu bertahan dan bahkan bersaing dalam kondisi persaingan yang ketat ini, para pelaku bisnis hendaknya mampu terus menerus menyempurnakan kualitas produk yang dihasilkan untuk dapat menciptakan keunggulan baru (Supriyadi, 2018).

Proses menciptakan dan menyempurnakan suatu produk yang berkualitas sesuai dengan standar dan selera konsumen, seringkali masih terjadi penyimpangan yang tidak dikehendaki oleh perusahaan sehingga menghasilkan produk rusak yang akan merugikan perusahaan. Untuk mengatasi hal tersebut, salah satu tindakan yang dapat dilakukan adalah dengan melakukan pengendalian kualitas agar dapat meminimalisir terjadinya kerusakan produk (Ratnadi & Suprianto, 2016).

Pengendalian kualitas atau yang lebih banyak dikenal dengan *Statistical Process Control* (SPC) adalah seperangkat alat pemecahan masalah yang dapat diterapkan pada setiap proses produksi untuk memantau, mengontrol, meningkatkan kualitas *output*, dan meningkatkan produktivitas proses produksi (Haq dkk., 2019). Tujuan SPC adalah untuk menghasilkan produk berupa barang atau jasa yang sesuai dengan standar yang diinginkan dan direncanakan, serta mempertahankan kualitas yang sesuai (Wirawati, 2019). Salah satu alat SPC yang dapat digunakan adalah bagan kendali.

Bagan kendali pertama kali diperkenalkan oleh Dr. Walter Andrew Shewhart pada tahun 1924 dan merupakan alat interpretasi kualitas yang secara luas digunakan (Irsan & Yulius, 2019). Bagan kendali bertujuan untuk mendeteksi sinyal di luar kendali dengan cepat ketika satu atau lebih titik berada di luar batas kendali (Kashi & Widodo, 2019). Namun, seiring kemajuan teknologi, suatu produk diamati dan diukur menggunakan sejumlah karakteristik kualitas yang berkorelasi.

Bagan kendali terdiri dari dua macam berdasarkan banyaknya karakteristik yaitu bagan kendali univariat dan bagan kendali multivariat. Bagan kendali univariat merupakan bagan kendali yang memantau satu karakteristik kualitas saja. Namun, seringkali proses monitoring melibatkan lebih dari satu karakteristik kualitas. Meskipun menerapkan bagan kendali univariat untuk setiap variabel individu adalah solusi yang bisa digunakan, akan tetapi hal tersebut tidak efisien dan memungkinkan terjadi kesalahan dalam pengambilan kesimpulan (Montgomery, 2009). Selanjutnya Bersimis, dkk. (2007) memantau dua atau lebih karakteristik kualitas yang berkorelasi secara terpisah menjadi tidak efisien dan mengarah pada kesimpulan yang tidak benar. Sehingga untuk mengukur lebih dari satu karakteristik kualitas antar variabel saling berkorelasi digunakan bagan kendali multivariat (Kashi & Widodo, 2019).

Bagan kendali multivariat mempertimbangkan hubungan antar variabel dari suatu proses multivariat untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat dibandingkan bagan kendali univariat (Bodnar & Schmid, 2007). Beberapa bagan kendali multivariat yang telah dikembangkan saat ini adalah bagan kendali *Multivariate Cumulative Sum*, *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average*, T^2 *Hotteling* dan *Multivariate np*. Dari beberapa macam bagan kendali tersebut, pada penelitian ini difokuskan kepada bagan kendali *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM).

Bagan kendali MCUSUM adalah bagan kendali mutu multivariat yang memiliki keunggulan mendeteksi perubahan kecil dalam vektor rata-rata proses suatu produksi yang berdistribusi normal multivariat (Hamed dkk., 2016). Pignatiello dan Runger (1990) memperkenalkan dua prosedur bagan kendali MCUSUM, yaitu *Multivariate Cumulative Sum 1* (MC1) dan *Multivariate Cumulative Sum 2* (MC2). Perbedaan dua bagan kendali MCUSUM adalah MC1 mengakumulasi vektor rata-rata sampel sebelum produksi bentuk kuadrat akarnya, sedangkan MC2 menghitung bentuk kuadrat untuk setiap rata-rata sampel dan kemudian mengakumulasikan nilai dari bentuk kuadrat tersebut (Hamed dkk., 2017). Oleh karena itu, dalam tugas akhir ini akan diteliti perbandingan bagan kendali MCUSUM berdasarkan prosedur MC1 dan MC2.

Performa bagan kendali MCUSUM biasanya diukur dengan *Average Run Length* (ARL) (Crosier, 1988). ARL adalah jumlah rata-rata titik yang harus diplot sebelum suatu titik menunjukkan kondisi di luar kendali (Montgomery, 2009). Beberapa penelitian sebelumnya berkaitan dengan penelitian ini diantaranya Pignatiello dan Runger (1990) yang menggunakan metode MCUSUM dengan prosedur MC1 dan MC2, yang hasilnya menunjukkan bahwa bagan kendali MC1 lebih sensitif dalam mendeteksi pergeseran kecil vektor rata-rata proses. Alves, dkk (2010) membandingkan bagan kendali MCUSUM dan T^2 Hotelling pada data mesin, hasilnya menunjukkan bahwa bagan kendali MCUSUM mendeteksi perubahan vektor rata-rata proses lebih cepat dibandingkan bagan kendali T^2 Hotelling. Selain itu, Hamed, dkk (2016) juga melakukan penelitian menggunakan bagan kendali MCUSUM pada data pupuk urea yang menunjukkan bahwa bagan kendali MCUSUM dapat mendeteksi pergeseran kecil vektor rata-rata proses. Pada penelitian ini akan dilakukan pengendalian kualitas di sektor pertanian.

Salah satu sub sektor penting dari pertanian merupakan perkebunan yang memberikan kontribusi besar bagi devisa negara. Minyak kelapa sawit adalah salah satu komoditas unggulan Indonesia yang menjadi primadona di tingkat internasional. Berdasarkan data dari Gabungan Pengusaha Kelapa Sawit Indonesia (GAPKI), produksi minyak kelapa sawit di Indonesia pada tahun 2017 tercatat sebanyak 35,36 juta ton dan tumbuh pesat pada tahun 2019 mencapai 44,05 juta ton (Banjarnahor & Puspitasari, 2023). Sehingga perkembangan industri pabrik kelapa sawit ini memunculkan persaingan yang sangat kompetitif antar perusahaan.

Berdasarkan uraian tersebut, maka penelitian ini difokuskan dalam mengkaji perbandingan bagan kendali MCUSUM berdasarkan prosedur MC1 dan MC2 pada data kualitas minyak kelapa sawit PT. Graha Inti Jaya dengan judul “Perbandingan Bagan Kendali *Multivariate Cumulative Sum* 1 Dan 2 Pada Data Kualitas Minyak Kelapa Sawit”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana kinerja bagan kendali MCUSUM berdasarkan prosedur MC1 dan MC2 pada data kualitas minyak kelapa sawit PT. Graha Inti Jaya?
2. Bagaimana perbandingan hasil bagan kendali MCUSUM berdasarkan prosedur MC1 dan MC2 menggunakan nilai ARL pada data kualitas minyak kelapa sawit PT. Graha Inti Jaya?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Data yang digunakan adalah data kualitas minyak kelapa sawit PT. Graha Inti Jaya dari periode 11 Juli 2022 sampai dengan 29 Agustus 2022.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh kinerja bagan kendali MCUSUM berdasarkan prosedur MC1 dan MC2 pada data kualitas minyak kelapa sawit PT. Graha Inti Jaya.
2. Memperoleh hasil perbandingan bagan kendali MCUSUM berdasarkan prosedur MC1 dan MC2 menggunakan ARL pada data kualitas minyak kelapa sawit PT. Graha Inti Jaya.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai pengendalian kualitas statistik menggunakan bagan kendali MCUSUM berdasarkan prosedur MC1 dan MC2.
2. Memberikan informasi kepada PT. Graha Inti Jaya dalam upaya meningkatkan pengendalian kualitas produk minyak kelapa sawit tersebut di masa mendatang.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 *Statistical Process Control*

Statistical Process Control (SPC) merupakan teknik penyelesaian masalah yang digunakan untuk memonitor, mengendalikan, menganalisis, mengelola dan memperbaiki proses produk menggunakan metode-metode statistik (Mahaputra, 2021). Tujuan digunakan metode ini secara luas untuk membantu mendeteksi adanya proses yang tidak terkendali (*out of control*) yang disebabkan oleh beberapa faktor atau karakteristik kualitas dan memastikan bahwa proses memenuhi standar yang ditetapkan perusahaan (Rosidin & Sirodj, 2022).

Pengendalian kualitas secara statistik dengan menggunakan SPC mempunyai 7 alat statistik utama yang dapat digunakan sebagai alat bantu untuk mengendalikan kualitas yaitu: *check sheet*, histogram, *control chart*, diagram pareto, diagram sebab akibat, diagram pencar dan diagram proses (Mahaputra, 2021).

2.2 Distribusi Normal Univariat

Salah satu distribusi yang sering digunakan dalam berbagai analisis statistika adalah distribusi normal. Kurva distribusi normal berbentuk seperti lonceng dan persamaannya pertamakali ditemukan tahun 1733 oleh Abraham DeMoivre (Pinahayu dkk., 2022). Misalkan variabel acak X berdistribusi normal dengan nilai rata-rata μ dan varians σ^2 , dinotasikan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut (Turyadi dkk., 2013):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ dengan } -\infty < X < \infty \quad (2.1)$$

Keterangan:

- e : 2,71828
- π : 3,14159
- μ : Rata-rata
- σ : Standar deviasi

2.2.1 Sifat-Sifat Distribusi Normal Univariat

Sifat-sifat distribusi normal univariat adalah sebagai berikut:

1. Misalkan $X_1 \sim N(0,1)$ dan $X_2 \sim N(0,1)$ maka $X_1 + X_2 \sim N(0,2)$.

Pembuktian:

- 1) Rata-rata

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 0 + 0 = 0$$

- 2) Varians

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + X_2) &= E\{(X_1 + X_2) - E(X_1 + X_2)\}^2 \\ &= E\{(X_1 - E(X_1)) + (X_2 - E(X_2))\}^2 \\ &= E(X_1 - E(X_1))^2 + E(X_2 - E(X_2))^2 + 2E(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)) \\ &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

dan $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ ketika variabel X_1 dan X_2 saling bebas.

Sehingga,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + X_2) &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2) \\ &= 1 + 1 + 2(0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, dapat dibuktikan bahwa $X_1 + X_2 \sim N(0,2)$.

2. Misalkan $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,1)$ dan $X_3 \sim N(0,1)$ maka $X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0,3)$.

Pembuktian:

- 1) Rata-rata

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 0 + 0 + 0 = 0$$

- 2) Varians

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3) &= E\{(X_1 + X_2 + X_3) - E(X_1 + X_2 + X_3)\}^2 \\ &= E\{(X_1 - E(X_1)) + (X_2 - E(X_2)) + (X_3 - E(X_3))\}^2 \\ &= E(X_1 - E(X_1))^2 + E(X_2 - E(X_2))^2 \\ &\quad + E(X_3 - E(X_3))^2 \\ &\quad + 2E(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)) \\ &\quad + 2E(X_1 - E(X_1))(X_3 - E(X_3)) \\ &\quad + 2E(X_2 - E(X_2))(X_3 - E(X_3)) \end{aligned}$$

$$= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) + 2\text{Cov}(X_1, X_2) \\ + 2\text{Cov}(X_1, X_3) + 2\text{Cov}(X_2, X_3)$$

dan $\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(X_1, X_3) = \text{Cov}(X_2, X_3) = 0$ ketika variabel X_1, X_2 dan X_3 saling bebas.

Sehingga,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3) &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) \\ &\quad + 2\text{Cov}(X_1, X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_3) \\ &\quad + 2\text{Cov}(X_2, X_3) \\ &= 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, dapat dibuktikan bahwa $X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0, 3)$

3. Misalkan $X_1 + X_2 + \dots + X_t$ dan $X_i \sim N(0, 1)$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, t$ maka $X_1 + X_2 + \dots + X_t \sim N(0, t)$

Pembuktian:

- 1) Rata-rata

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \dots + X_t) &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_t) \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 2) Varians

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_t) \\ &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_t) + 2\text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

dengan $i < j, i$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, t$.

Karena variabel X_i dan X_j saling bebas jika $i \neq j$, maka $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ untuk $i < j$. Sehingga diperoleh, $\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_t) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_t) = t$

Oleh karena itu, dapat dibuktikan bahwa $X_1 + X_2 + \dots + X_t \sim N(0, t)$.

2.2.2 Teori Limit Pusat

Diberikan X_1, X_2, \dots, X_t sampel random berukuran t dari suatu distribusi populasi dengan rata-rata μ dan standar deviasi σ . Maka distribusi sampling dari

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{t}} \tag{2.2}$$

mendekati distribusi normal standar $N(0,1)$, untuk $t \rightarrow \infty$ (Sungkono & Wulandari, 2022). Teorema limit pusat menyatakan bahwa jika semakin besar sampel acak yang diambil dari suatu populasi maka rata-rata sampel akan semakin mendekati distribusi normal.

2.3 Distribusi Normal Multivariat

Vektor random yang terdiri atas p komponen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^t$ dikatakan berdistribusi normal multivariat dengan vektor rata-rata $\vec{\mu}$ dan matriks varians-kovarians Σ , jika fungsi kepadatan peluang bersama X_1, X_2, \dots, X_p sebagai berikut:

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^t \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (2.3)$$

Keterangan:

p : jumlah variabel

$|\Sigma|$: determinan dari matriks varians kovarians

Σ^{-1} : invers dari matriks varians kovarians

$\boldsymbol{\mu}$: vektor rata-rata

e : 2,71828

π : 3,14159

Untuk selanjutnya vektor acak \mathbf{X} yang berdistribusi normal p -variat tersebut diberi lambang $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ (Husain, 2018).

2.4 Uji Korelasi

Uji korelasi digunakan untuk mengetahui apakah terdapat hubungan antara tiap variabel dengan variabel lain. Pada penelitian, uji korelasi dilakukan menggunakan uji *Bartlett Sphericity*. Adapun langkah-langkah uji korelasi adalah sebagai berikut (Fathurrahmi & Pratiwi, 2019):

1. Hipotesis:

H_0 : $r = \mathbf{I}$ (Tidak terdapat korelasi antar variabel)

H_1 : $r \neq \mathbf{I}$ (Terdapat korelasi antar variabel)

2. Statistik Uji

$$x^2 = - \left(n - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right) \ln |\mathbf{R}| \sim \chi^2_{(\alpha, df)} \quad (2.4)$$

Matriks korelasi dijabarkan sebagai berikut:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{11} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dengan

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 (X_{ik} - \bar{X}_k)^2}}$$

Keterangan:

- \mathbf{R} = matriks korelasi
- $|\mathbf{R}|$ = determinan matriks korelasi
- n = jumlah pengamatan atau data
- p = jumlah variabel kualitas
- r_{jk} = nilai korelasi antar variabel j dan variabel k
- X_{ij} = nilai pengamatan ke- i variabel ke- j
- X_{ik} = nilai pengamatan ke- i variabel ke- k
- \bar{X}_j = rata-rata variabel j
- \bar{X}_k = rata-rata variabel k

3. Kriteria pengujian:

Tolak H_0 apabila $x^2 > \chi^2_{(\alpha, df)}$, dimana $\chi^2_{(\alpha, df)}$ adalah nilai *chi-square* dengan $\alpha = 0,05$ adalah tingkat signifikansi dan df adalah derajat kebebasan dengan nilai $df = \frac{1}{2}p(p - 1)$.

2.5 Uji Normalitas Multivariat

Uji normalitas multivariat berfungsi untuk mengetahui apakah data berdistribusi normal multivariat atau tidak. Pada penelitian ini digunakan uji normalitas multivariat menggunakan jarak mahalnobis. Adapun langkah-langkah uji normalitas multivariat adalah sebagai berikut (Johnson & Wichern, 2007):

1. Hipotesis:

$H_0: F(x, \mu, \Sigma) = F(x, \mu_0, \Sigma_0)$ (Data berdistribusi normal multivariat)

$H_1: F(x, \mu, \Sigma) \neq F(x, \mu_0, \Sigma_0)$ (Data tidak berdistribusi normal multivariat)

2. Statistik Uji

- a. Menentukan nilai vektor rata-rata (\bar{X}).
- b. Menentukan nilai matriks varians kovarians (Σ).
- c. Menentukan nilai jarak mahalanobis setiap titik pengamatan menggunakan persamaan:

$$d_i^2 = (\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}}_j)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}}_j) \sim \chi_{\frac{1}{n}(i-0,5),p}^2 \quad (2.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p$$

Keterangan:

d_i^2 = nilai jarak kuadrat untuk sampel ke- i

\mathbf{X}_{ij} = vektor sampel ke- i pada variabel ke- j

$\bar{\mathbf{X}}_j$ = vektor rata-rata pada variabel ke- j

Σ^{-1} = invers matriks varians kovarians dari sampel

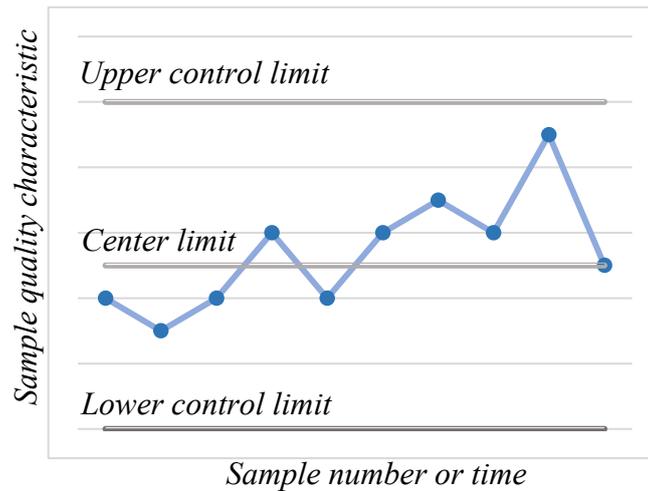
- d. Mengurutkan nilai d_i^2 dari nilai terkecil sampai nilai terbesar, seperti $d_1^2 < d_2^2 < \dots < d_n^2$, n adalah banyak pengamatan.

3. Kriteria pengujian:

Terima H_0 apabila 50% nilai statistik $d_i^2 \leq \chi_{\frac{1}{n}(i-0,5),p}^2$, dimana $\chi_{\frac{1}{n}(i-0,5),p}^2$ adalah nilai *chi-square* dengan $\alpha = 0,05$ adalah tingkat signifikansi dan p adalah jumlah variabel kualitas.

2.6 Bagan Kendali *Shewhart*

Bagan kendali merupakan teknik pemantauan atau pengawasan proses produksi yang berguna untuk mengendalikan dan meningkatkan kualitas produksi. Konsep bagan kendali awal mula dikembangkan oleh Walter A. Shewhart tahun 1924. Bagan kendali berisi *Center Line* (CL) yang mewakili nilai rata-rata karakteristik kualitas yang sesuai dengan keadaan terkendali. Dua garis horizontal lainnya, yang disebut *Upper Control Limit* (UCL) dan *Lower Control Limit* (LCL) (Montgomery, 2009).



Gambar 2.1 Ilustrasi Bagan Kendali

Apabila semua titik pengamatan berada di dalam batas kendali antara UCL dan LCL maka proses dianggap terkendali, sehingga tidak ada tindakan perbaikan yang diperlukan. Namun, jika terdapat titik pengamatan yang berada di luar batas kendali, maka proses tidak terkendali, sehingga memerlukan tindakan untuk menemukan dan menghilangkan penyebabnya (Montgomery, 2009).

2.7 Bagan Kendali *Cumulative Sum*

Bagan kendali *Cumulative Sum* (CUSUM) pertama kali diusulkan oleh Page (1954) merupakan bagan kendali yang digunakan untuk mendeteksi perubahan kecil dalam vektor rata-rata nilai proses suatu produksi. Bagan kendali CUSUM digunakan sebagai bagan kendali alternatif untuk peta kendali *Shewhart* (Adegoke, dkk., 2018). Misalnya, sampel dengan ukuran $n \geq 1$, dan \bar{x}_j merupakan rata-rata dari sampel ke- j . Kemudian jika μ_0 adalah target rata-rata proses, maka bagan kendali CUSUM dibentuk dengan rumus sebagai berikut (Montgomery, 2009):

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0) \quad (2.6)$$

dengan C_i merupakan nilai CUSUM sampai dengan sampel ke- i .

Cara untuk mempresentasikan bagan kendali CUSUM, yaitu menggunakan tabular CUSUM. Tabular CUSUM bekerja dengan mengakumulasikan deviasi dari μ_0 yang berada di atas nilai target dengan statistik C^+ dan mengakumulasikan deviasi dari μ_0 yang berada di bawah nilai target dengan statistik C^- . Jika nilai awal

$C_0^+ = C_0^- = 0$, maka nilai C_i^+ dan C_i^- dirumuskan sebagai berikut (Montgomery, 2009):

$$C_i^+ = \max [0; x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (2.7)$$

$$C_i^- = \max [0; (\mu_0 + K) - x_i + C_{i-1}^-] \quad (2.8)$$

dengan μ_0 adalah rata-rata target dan K adalah nilai referensi/*slack*.

Misalkan nilai jumlah kumulatif dinyatakan sebagai $S_t = \sum_{k=1}^t x_k$, dengan x_k adalah variabel acak yang diasumsikan berdistribusi normal $x_k \sim N(0,1)$ maka,

Untuk $k = 1$

$S_1 = x_1$ dan $x_1 \sim N(0,1)$, sehingga

$S_1 = x_1 \sim N(0,1)$

$-k < S_1 = x_1 < k$ atau $-k < S_1 < k$

Oleh karena itu, batas bawah dari S_1 adalah $-k$ dan batas atas dari S_1 adalah k , dengan k adalah konstanta nilai tabel dari distribusi normal dengan nilai $Z_{\alpha/2}$.

Untuk $k = 2$

$S_2 = S_1 + x_2$

$S_2 = x_1 + x_2; x_k \sim N(0,1), i = 1, 2$

$S_2 \sim N(0,2)$

Dengan menggunakan teori limit pusat, diperoleh

$$-k < \frac{S_2 - 0}{\sqrt{2}} < k$$

$$-k\sqrt{2} < S_2 < k\sqrt{2}$$

Oleh karena itu, batas bawah dari S_2 adalah $-k\sqrt{2}$ dan batas atas dari S_2 adalah $k\sqrt{2}$.

Untuk $k = 3$

$S_3 = S_2 + x_3$

$S_3 = x_1 + x_2 + x_3; x_k \sim N(0,1), i = 1, 2, 3$

$S_3 \sim N(0,3)$

Dengan menggunakan teori limit pusat, diperoleh

$$-k < \frac{S_3 - 0}{\sqrt{3}} < k$$

$$-k\sqrt{3} < S_3 < k\sqrt{3}$$

Oleh karena itu, batas bawah dari S_3 adalah $-k\sqrt{3}$ dan batas atas dari S_3 adalah $k\sqrt{3}$.

Untuk $k = t$

$$S_t = S_{t-1} + x_t$$

Dengan menggunakan teori limit pusat, diperoleh

$$-k < \frac{S_t - 0}{\sqrt{t}} < k$$

$$-k\sqrt{t} < S_t < k\sqrt{t}$$

Oleh karena itu, batas bawah dari S_t adalah $-k\sqrt{t}$ dan batas atas dari S_t adalah $k\sqrt{t}$. t adalah nilai varians yang biasanya dilambangkan dengan σ^2 , sehingga diperoleh batas kendali atas (UCL) dan batas kendali bawah (LCL) dari S_t adalah

$$-k\sqrt{\sigma^2} < S_t < k\sqrt{\sigma^2}$$

$$-k\sigma < S_t < k\sigma$$

Oleh karena itu, batas kendali atas (UCL) dan batas kendali bawah (LCL) dari bagan kendali CUSUM sebagai berikut:

$$UCL = k\sigma \tag{2.9}$$

$$LCL = -k\sigma \tag{2.10}$$

2.8 Bagan Kendali *Multivariate Cumulative Sum*

Bagan kendali *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM) adalah bagan kendali yang merupakan perkembangan dari bagan kendali CUSUM yang dapat memantau lebih dari satu karakteristik. Pignatiello dan Runger (1990) memperkenalkan dua prosedur bagan kendali MCUSUM, yaitu *Multivariate Cumulative Sum 1* (MC1) dan *Multivariate Cumulative Sum 2* (MC2).

2.8.1 Bagan Kendali *Multivariate Cumulative Sum 1*

Bagan kendali MC1, didefinisikan sebagai jumlah multivariat sebagai berikut (Pignatiello & Runger, 1990):

$$C_t = \sum_{i=t-n_t+1}^t (X_i - \mu_0) \tag{2.11}$$

dimana n_t adalah jumlah subkelompok. Oleh karena itu $\frac{1}{n_t} C_t$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{1}{n_t} \mathbf{C}_t = \left(\frac{1}{n_t} \sum_{i=t-n_t+1}^t \mathbf{X}_i \right) - \boldsymbol{\mu}_0$$

Norm dari \mathbf{C}_t adalah

$$\|\mathbf{C}_t\| = \sqrt{\mathbf{C}_t^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{C}_t} \quad (2.12)$$

dilihat sebagai ukuran jarak perkiraan rata-rata proses dari rata-rata target proses. Bagan kendali multivariat dapat dibuat dengan mendefinisikan MC1 sebagai berikut:

$$MC1_t = \max \{ \|\mathbf{C}_t\| - kn_t, 0 \} \quad (2.13)$$

dengan

$$n_t = \begin{cases} n_{t-1} + 1 & \text{jika } MC1_{t-1} > 0 \\ 1 & \text{jika selain itu} \end{cases}$$

Keterangan:

$MC1_t$ = statistik MC1 untuk pengamatan ke- t , $t = 1, 2, \dots, n$

\mathbf{C}_t = jumlah kumulatif pada pengamatan ke- t

\mathbf{X}_t = vektor acak pengamatan ke- t

$\boldsymbol{\Sigma}$ = matriks varians kovarians

$\boldsymbol{\mu}_0$ = vektor rata-rata

n_t = jumlah subkelompok

k = nilai referensi/*slack*

Bagan kendali MC1 dioperasikan dengan memplot MC2, UCL, dan LCL. Jika nilai MC1 melebihi nilai UCL dan kurang dari LCL, maka proses tersebut dianggap tidak terkendali.

2.8.2 Bagan Kendali *Multivariate Cumulative Sum 2*

Bagan kendali MC2 menghitung bentuk kuadrat untuk jarak rata-rata setiap sampel dari $\boldsymbol{\mu}_0$ dan kemudian mengakumulasikan jarak kuadrat tersebut. Sehingga kuadrat jarak D_t^2 dengan rata-rata sampel t^{th} dari target nilai $\boldsymbol{\mu}_0$ menghasilkan skema MC2 sebagai berikut (Pignatiello & Runger, 1990):

$$D_t^2 = (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (2.14)$$

Bagan kendali MC2 didefinisikan sebagai berikut:

$$MC2_t = \max \{0, MC2_{t-1} + D_t^2 - k\} \quad (2.15)$$

dengan $MC2_0 = 0$.

Keterangan:

$MC2_t$ = statistik MC2 untuk pengamatan ke- t , $t = 1, 2, \dots, n$

$MC2_{t-1}$ = statistik MC2 untuk pengamatan ke- $t - 1$, $t = 1, 2, \dots, n$

D_t^2 = jarak kuadrat setiap sampel t dari μ_0

X_t = vektor acak pengamatan ke- t

Σ = matriks varians kovarians

μ_0 = vektor rata-rata

k = nilai referensi/*slack*

Bagan kendali MC2 dioperasikan dengan memplot MC2, UCL, dan LCL. Jika nilai MC2 melebihi nilai UCL dan kurang dari LCL, maka proses tersebut dianggap tidak terkendali.

2.9 Average Run Length

Kriteria yang digunakan untuk dapat membandingkan kinerja bagan kendali adalah dengan mengukur seberapa cepat bagan kendali tersebut menangkap sinyal *out of control*. Bagan kendali yang lebih cepat mendeteksi sinyal *out of control* disebut lebih sensitif terhadap perubahan proses. Salah satu cara untuk mengukur kinerja bagan kendali adalah dengan menggunakan *Average Run Length* (ARL) (Yanuar dkk., 2021). ARL adalah jumlah rata-rata titik yang harus digambarkan sebelum suatu titik menunjukkan keadaan *out of control* (Resti dkk., 2021). Semakin kecil nilai ARL suatu bagan kendali maka semakin cepat bagan kendali tersebut mendeteksi adanya pergeseran vektor rata-rata proses suatu produksi (Montgomery, 2009).

2.9.1 Average Run Length Cumulative Sum

Untuk bagan kendali CUSUM, teknik menghitung nilai ARL yang sering digunakan adalah pendekatan *Siegmund* karena perhitungannya lebih sederhana. ARL bagan kendali CUSUM *one-sided* yaitu C_i^+ dan C_i^- dengan parameter h dan k , maka pendekatan *Siegmund* sebagai berikut (Sinaga dkk., 2017):

$$ARL = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} \quad (2.16)$$

dengan $\Delta \neq 0$. Dimana $\Delta = \delta^* - k$ untuk sisi atas CUSUM C_i^+ , $\Delta = -\delta^* - k$ untuk sisi bawah CUSUM C_i^- , $b = h + 1,666$ dan $\delta^* = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$. Jika $\Delta = 0$ maka dapat digunakan $ARL = b^2$.

Melalui rumus tersebut diperoleh nilai ARL^+ dan ARL^- yang diperoleh untuk menghitung nilai ARL bagan kendali CUSUM, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} + \frac{1}{ARL^-} \quad (2.17)$$

2.9.2 Average Run Length Multivariate Cumulative Sum

ARL dapat ditentukan dengan 3 pendekatan yaitu simulasi, integral dan *Markov Chain* (Wen Lu dan Reynolds, 2001). Penentuan ARL pada bagan kendali MCUSUM menggunakan metode simulasi. Simulasi merupakan metode komputasi numerik yang melibatkan pengambilan sampel eksperimen dengan bilangan random (Dewi, 2011). Nilai ARL yang diperoleh dengan pendekatan hasil simulasi yang didefinisikan sebagai nilai rata-rata *Run Length* (RL) dari semua replikasi dalam simulasi. RL merupakan jumlah titik pengamatan hingga ditemukannya *out of control* yang pertama untuk masing-masing replikasi. Sehingga jika nilai ARL yang dihasilkan semakin kecil, maka sampel yang dibutuhkan untuk memberikan sinyal perubahan proses pun semakin kecil atau dengan kata lain semakin kecil nilai ARL maka semakin cepat pula bagan kendali dapat mendeteksi perubahan proses, sehingga bagan kendali tersebut semakin efektif untuk mendeteksi perubahan proses (Delsen & Talakua, 2016).

2.10 PT. Graha Inti Jaya

Berdasarkan data yang diperoleh dari Badan Penanaman Modal Daerah Provinsi Kalimantan Tengah Tahun 2007 yang dimuat dalam situs BKPM, PT. Graha Inti Jaya merupakan pelaku usaha komoditi sawit di Kabupaten Kapuas, Kalimantan Tengah. Perusahaan ini mengelola ribuan hektar lahan sawit yang lahannya memanjang dari Desa Manusup sampai ke Desa Lamunti dan Pulau Kaladan, Kecamatan Mantangai. PT. Graha Inti Jaya beroperasi di industri minyak

dan lemak, mencakup budidaya kelapa sawit, pemrosesan minyak dan lemak, perdagangan, produk minyak dan lemak, dan promosi minyak nabati kemasan bermerek.

Bagian yang paling utama untuk diolah dari kelapa sawit adalah buahnya. Bagian daging buah menghasilkan *Crude Palm Oil* (CPO) atau disebut dengan minyak kelapa sawit mentah yang diolah menjadi bahan baku minyak goreng (Nur dkk., 2019). Mutu minyak kelapa sawit yang baik harus mempunyai beberapa faktor yang menentukan standar mutunya, seperti kandungan *Free Fatty Acid* (FFA) dan kandungan air (*Moisture*) (Devani & Amalia, 2022). Jika semakin besar angka asam lemak bebas yang ditunjukkan maka semakin tinggi kandungan asam lemak bebas yang terkandung di dalamnya sehingga kualitas minyak tersebut menjadi rendah. Kemudian semakin rendah kadar airnya maka ketahanan minyak serta kualitas minyak semakin bagus (Levia & Mhubaligh, 2023).

Seiring kemajuan teknologi, suatu produk diamati dan diukur menggunakan sejumlah karakteristik kualitas yang berkorelasi. Meskipun menerapkan bagan kendali univariat untuk setiap variabel individu adalah solusi yang bisa digunakan, akan tetapi hal tersebut tidak efisien dan memungkinkan terjadi kesalahan dalam pengambilan kesimpulan (Montgomery, 2009). Selanjutnya Bersimis, dkk. (2007) memantau dua atau lebih karakteristik kualitas yang berkorelasi secara terpisah menjadi tidak efisien dan mengarah pada kesimpulan yang tidak benar. Sehingga untuk mengukur lebih dari satu karakteristik kualitas antar variabel saling berkorelasi digunakan bagan kendali multivariat (Kashi & Widodo, 2019).

Berdasarkan data kualitas minyak kelapa sawit yang mencakup variabel FFA dan *Moisture* yang telah di uji normalitas multivariat dan uji korelasi, maka data tersebut mengikuti asumsi distribusi normal multivariat dan saling berkorelasi, sehingga bagan kendali MCUSUM dapat digunakan untuk mendeteksi adanya keadaan di luar kendali pada pergeseran rata-rata proses produksi minyak kelapa sawit PT. Graha Inti Jaya.