PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL *COUPLED*

HEISENBERG UNCERTAINTY PRINCIPLE FOR THE COUPLED FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM

ANDI TOPAN

H022211002

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL COUPLED

Tesis

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar Magister Sains

Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

ANDI TOPAN

H022211002

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

LEMBAR PENGESAHAN

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL *COUPLED*

Disusun dan diajukan oleh

ANDI TOPAN
H022211002

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka
Penyelesaian Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
Pada tanggal 18 Juli 2023
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.
NIP. 19701231 1998 02 1001

Pembimbing Pendamping,

Dr. Muh. Nur. S.Si., M.Si
NIP. 19850529 2008 12 1002

Ketua Program Studi Matematika S2

Dr. Muhammad Zakir, M.Si
NIP. 19640207 1991 03 1013

Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN ... UNIVERSITAS HASANUDDIN FAKUL...

Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.
NIP. 19720515 1997 02 1002

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier Fraksional Coupled" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing utama dan Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah dipublikasikan di jurnal: *Journal of Southwest Jiatong University*.

Dengan ini saya limpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 02 Agustus 2023

Andi Topan
NIM. H022211002

UCAPAN TERIMA KASIH

Bismillahirrahmanirrahim

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji syukur yang sebesar-besarnya penulis panjatkan kepada Allah Yang Maha kuasa atas segala nikmat hidup, kesehatan, rejeki serta wawasan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang diberi judul "PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL COUPLED". Tak lupa pula salam dan shalawat kepada baginda Rasulullah Nabiullah Muhammad *shallalahu Alaihi Wassalam*, sosok yang menjadi suri tauladan bagi penulis dalam menjalankan kehidupan dunia dan akhirat.

Penulisan tesis ini bertujuan untuk memenuhi syarat akademik untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar. Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Muh. Nur S.Si., M.Si**, selaku pembimbing pendamping untuk segala waktu, ilmu, serta kesabaran dalam membimbing, mengarahkan, dan memberikan masukan dan koreksi kepada penulis dalam pengerjaan tesis ini.
2. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.**, Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, dan Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, selaku tim penguji yang telah memberikan kritikan dan saran yang membangun kepada penulis dalam penyusunan tesis ini.
3. Bapak dan ibu **Dosen Pengajar Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, dan Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**,

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya dan seluruh pihak birokrasi atas pengurusan administrasi yang diberikan kepada penulis.

5. Bapak dan Ibu seluruh staf Departemen Matematika Univeritas Hasanuddin atas segala bantuan dalam pengurusan administrasi akademik selama ini.
6. Kedua Orang tua tercinta Ayahanda **Abdul Fattah SE. (Rahimahullah)** dan Ibunda **Dra Nirwana Abdullah** atas segala kasih sayang, doa, dan dukungannya kepada penulis kepada penulis.
7. kakak-kakaku Tisa dan Rahmat terimakasih atas dukunganna, doa, dan dukungan kepada penulis.
8. Teman-teman seperjuangan **Lab analisis: Kak Nasrullah, Afdal Bau, Ibu Wahyuni, Ibu Sri Sulastri, Hilma, Fitriyani, Kak Uli, Kak Ulil, Emanuel teman-teman LAB Analisis** dan teman-teman seangkatan 2021
9. Seluruh teman-teman Program Studi Magister Matematika yang telah berjuang bersama-sama selama ini.
10. Teruntuk semua pihak yang belum sempat penulis tuliskan satu per satu. Terima kasih atas segala bantuannya selama ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih terdapat kekurangan-kekurangan sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima guna perbaikan kedepannya.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi semua pihak.

Makassar, 02 Agustus 2023

Penulis

ABSTRAK

Penelitian ini akan memperkenalkan definisi dari transformasi Fourier fraksional *coupled*, yang merupakan kajian lebih lanjut dari transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional, dengan perluasan ke ruang dua dimensi. Berdasarkan definisi tersebut akan diperoleh beberapa sifat-sifat transformasi Fourier fraksional *coupled*, seperti sifat liniear, sifat translasi, dan sifat modulasi, berdasarkan sifat-sifat dan relasi antara transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional *coupled* akan dibuktikan sebuah prinsip ketidakpastian yang berkaitan dengan transformasi Fourier fraksional *coupled*.

Kata Kunci: transformasi Fourier, transformasi Fourier fraksional *coupled*, Prinsip Ketidakpastian Heisenberg.

ABSTRACT

This is research will introduce the definition of the coupled fractional fourier transform, which is a further study of the Fourier transform and the fractional Fourier transform, with an extension to two-dimensional space. Based on the definition, some of the properties of the coupled fractional Fourier transform will be obtained, such us linear properties, translation properties, modulation properties, and dilatation properties, based on the properties of the relation coupled fractional Fourier transform will be proof uncertainty principle for the coupled fractional Fourier transform.

Keyword: Fourier transform, coupled fractioanl Fourier transform, Heisenberg Uncertainty Principle.

DAFTAR ISI

Sampul i
Halaman Judul ii
LEMBAR PENGESAHAN TESIS iii
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN LIMPAHAN HAK CIPTA iv
UCAPAN TERIMA KASIH v
ABSTRAK vii
ABSTRACT viii
DAFTAR ISI ix
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Manfaat Penelitian 3
1.5 Batasan Masalah 4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5
2.1 Integral Lebesgue 5
2.3 Transformasi Fourier 10
2.4 Sifat-sifat Transformasi Fourier (TF) 14
2.5 Prinsip Ketidakpastian Heisenberg 15
2.6 Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier 16
2.7 Transformasi Fourier Fraksional 17
2.8 Sifat-sifat Transformasi Fourier Fraksional (TFF) 18
2.9 Transformasi Fourier Fraksional *Coupled* 21
BAB III METODE PENELITIAN 24
3.1 Jenis Penelitian 24
3.2 Prosedur Penelitian 24

3.3 Diagram Alur Penelitian 25
.... 25
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.. 26
4.1 Sifat-sifat Transformasi Fourier Fraksional *Coupled* (TFFC) 26
4.2 Relasi antara Transformasi Fourier dan Transformasi Fourier Fraksional *Coupled* 30
4.3 Generalisasi Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier Fraksional Coupled 32
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 34
5.1 Kesimpulan.. 34
5.2 Saran 34
DAFTAR PUSTAKA... 35

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis Fourier mempelajari berbagai teknik untuk menganalisis sebuah fungsi dengan menguraikannya sebagai deret atau integral fungsi tertentu (yang sifat-sifatnya telah dikenal, seperti pada fungsi polinom atau fungsi trigonometri). Analisis Fourier merupakan berbagai masalah, khususnya masalah yang berbentuk persamaan differensial yang muncul dalam sains dan ilmu rekayasa, dengan tujuan untuk menganalisis signal seperti signal suara dan citra (Menguc 2020). Selanjutnya dikembangkan ke bentuk yang lebih umum sehingga dapat diterapkan pada fungsi yang non-periodik, yang dikenal dengan transformasi Fourier yang dapat mengubah fungsi atau sinyal dari domain waktu ke domain frekuensi.

Transformasi Fourier merupakan fungsi kontinu dari deret Fourier dimana deret Fourier ini merupakan fungsi periodik yang dapat direpresentasikan dengan mengkombinasikan penjumlahan tak hingga dari dari fungsi sinus dan cosinus Laszlo (2006), transformasi Fourier dibagi menjadi dua yaitu transformasi Fourier kontinu dan transformasi Fourier diskrit. Adapun Transformasi Fourier kontinu merupakan sebuah sinyal waktu sebagai hasil penjumlahan beberapa sinyal kontinu, sedangkan transformasi Fourier diskrit adalah model transformasi Fourier yang dikenakan pada fungsi diskrit yang kemudian bentuknya akan berbentuk diskrit. Salah satu hasil terpenting dalam transformasi Fourier adalah prinsip ketidakpastian Heisenberg.

Prinsip ketidakpastian Heisenberg diperkenalkan pada tahun 1927 oleh warner Heisenberg. Prinsip ketidakpastian Heisenberg menyatakan bahwa "posisi dan momentum suatu elektron tidak bisa ditentukan dalam waktu yang bersamaan", sehingga hal tersebut jika diukur secara bersamaan maka tidak akan diperoleh nilai dari besaran tersebut, maka jika dikaitkan dalam kehidupan sehari-hari maka prinsip tersebut menjelaskan bahwa dalam suatu waktu kita mengerjakan dua atau lebih pekerjaan maka kita tidak akan menghasilkan hasil yang optimal.

Pada kajian transformasi Fourier fraksional ini merupakan sebuah generalisasi dari pada transformasi Fourier biasa dengan orde θ. Jika $\theta = \frac{\pi}{2}$ maka transformasi Fourier fraksional akan menjadi transformasi Fourier biasa. Secara khusus ini berarti trasformasi Fourier biasa merupakan rangkaian kesatuan dari domain transformasi Fourier fraksional (Sutrisna et al., 2019).

Selain itu dapat ditinjau juga bahwa transformasi Fourier fraksional merupakan sebuah alat yang mampu menganalisis sebuah fungsi harmonis, dan telah diketahui bahwa penerapannya yang sangat luas seperti di mekanika kuantum, *neural network*, persamaan differensial, optik, pengenalan pola, radar, sonar dan system komunikasi lainnya. Eksistensi dari kajian transformasi Fourier fraksional ke dimensi tinggi telah dikaji oleh beberapa peneliti antara lain Zayed (2018) memperkenalkan varian baru dari transformasi Fourier fraksional ke ruang dua dimensi yaitu transformasi Fourier fraksional *coupled* $(\mathcal{F}_{\alpha,\beta})$, selanjutnya Kamalakkannan et al. (2021) mengembangkan dengan menambahkan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi fraksional *coupled* dan Shah et al. (2022) kemudian mengkaji dan mengklasifikasikan beberapa ketaksamaan prinsip ketidakpastian pada transformasi fraksional *coupled*, salah satu ketaksamaanya adalah prinsip ketidakpastian Heisenberg pada ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$, sehingga berdasarkan uraian tersebut peneliti tertarik mengakaji untuk mengembangkan dengan cara mengeneralisasi prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier fraksional *coupled* pada ruang $L^p(\mathbb{R}^2)$ yang diberi judul "Prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional *Coupled*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian yang telah diberikan sebelumnya, diperoleh rumusan masalah yaitu sebagai berikut:

1. Bagaimana relasi antara transformasi Fourier dengan transformasi Fourier fraksional *coupled*?
2. Bagaimana membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional *coupled* dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional *coupled*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Mendapatkan relasi antara transformasi Fourier dan transformasi transformasi Fourier fraksional *coupled*.
2. Membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional coupled di ruang $L^p(\mathbb{R}^2)$ dengan menggunakan relasi antara transfomasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional coupled.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian pada tugas akhir ini yaitu diharapkan dapat memberikan pengetahuan baru sekaligus *literature* tambahan bagi penulis dan pembaca dalam kajian transformasi Fourier, khususnya pada prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional *coupled*.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini dibatasi pada ruang $L^p(\mathbb{R}^2)$ dengan $1 \leq p \leq 2$, dan prinsip ketidakpastian Heisenberg.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi, teorema, dan istilah-istilah sebagai teori atau landasan dalam penulisan tugas akhir ini. Sebelum membahas tentang prinsip ketidakpastian Heisenberg pada tranformasi Fourier fraksional *coupled* terlebih dahulu akan dibahas mengenai bilangan kompleks dan sifat-sifatnya, ruang lebesgue untuk transformasi Fourier, prinsip ketidakpastian Heisenberg, transformasi Fourier, transformasi Fourier fraksional, transformasi Fourier fraksional *coupled*.

2.1 Integral Lebesgue

Definisi 2.2.1 Ruang $L^p(\mathbb{R})$

Misalkan f *adalah fungsi yang terintegralkan pada* $\mathbb{R}$*. Koleksi kelas fungsi dari fungsi-fungsi terukur yang terintegralkan* p *pada* $\mathbb{R}$ *dengan* $1 \leq p < \infty$ *didefinisikan sebagai*

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f \colon \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p \; dt < \infty \right\} \tag{2.1}$$

Maka norma dari f *dalam* $L^p(\mathbb{R})$ *didefinisikan dengan*

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p \; dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

(Debnath, L 2017)

Definisi 2.2.2 Ruang $L^1(\mathbb{R})$)

Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^1(\mathbb{R})$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right\}. \tag{2.3}$$

(Gunawan, 2017)

Ruang $L^1(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norma $||.||_1$ yang dirumuskan

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt.$$

Contoh 1:

Misalkan $f(t) = \begin{cases} 1, & -3 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$,

akan ditunjukkan apakah fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan hasil integralnya konvergen.

Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.4), diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt &= \int_{-\infty}^{-3} |f(t)|\, dt + \int_{-3}^{3} |f(t)|\, dt + \int_{3}^{\infty} |f(t)|\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{-3} 0\, dt + \int_{-3}^{3} 1\, dt + \int_{3}^{\infty} 0\, dt \\ &= 0 + t|_{-3}^{3} + 0 \\ &= 3 - (-3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Jadi, $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Definisi 2.2.3 (Ruang $L^2(\mathbb{R})$)

Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai kumpulan semua fungsi f yang kuadratanya terintegralkan mutlak, yakni dinotasikan sebagai berikut:

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{f: \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty\right\} \tag{2.4}$$

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norma $||.||_2$ yang dirumuskan

$$\|f\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \; dt\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Contoh 2:

Misalkan $f(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$.

Kemudian akan ditunjukkan apakah fungsi f ada dalam fungsi $L^2(\mathbb{R})$ dengan mencari integralnya ada.

Sehingga berdasarkan definisi di ruang $L^2(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.5), diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \; dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|t|}\right|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-|t|}\right)^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} \; dt\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-2(-t)}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt,$$

Jika dimisalkan $2t = p$, maka diperoleh $dt = \frac{dp}{2}$, sehingga diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{p}\, dp + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-p}\, dp$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{p}\, dp + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-p} dp \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^{p}\, dp + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} e^{-p}\, dp \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \to -\infty} e^{p} |_{a}^{0} - \lim_{b \to \infty} e^{-p} |_{0}^{b} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \to -\infty} (e^{0} - e^{a}) - \lim_{b \to \infty} (e^{-b} - e^{-0}) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \big((1 - 0) - (0 - 1) \big)$$

$$= \frac{1}{2} . 2$$

$$= 1 < \infty$$

Jadi, $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Definisi 2.2.4 Ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$

Misalkan $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur bernilai real. Koleksi kelas fungsi dari fungsi-fungsi terukur yang terintegralkan p pada $\mathbb{R}$ dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan sebagai

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \left\{ f: \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\boldsymbol{t})|^2 \, d\boldsymbol{t} < \infty \right\} \tag{2.6}$$

Maka norma dari f dalam $L^p(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\boldsymbol{t})|^2 \, d\boldsymbol{t} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

Contoh 3:

Misalkan $f(\boldsymbol{t}) = e^{-|\boldsymbol{t}|^2}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^2$.

Kemudian akan ditunjukkan apakah fungsi f ada dalam fungsi $L^2(\mathbb{R}^2)$ dengan mencari integralnya ada.

Sehingga berdasarkan definisi di ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$ pada persamaan (2.6), diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{t})|^2 \, d\boldsymbol{t} = \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{-|\boldsymbol{t}|^2} \right|^2 d\boldsymbol{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2|\boldsymbol{t}|^2} \, d\boldsymbol{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2(t_1^2 + t_2^2)} \, d\boldsymbol{t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t_1^2}\, dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t_2^2}\, dt_2$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} < \infty$$

Jadi, $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

2.3 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier merupakan bentuk kontinu dari deret Fourier. Transformasi Fourier adalah model transformasi yang memindahkan domain waktu menjadi domain frekuensi. transformasi Fourier kontinu biasanya disingkat dengan transformasi Fourier.

Definisi 2.3.1 (Transformasi Fourier)

Misalkan diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ *terdefinisi pada* $(\mathbb{R})$, *transformasi Fourier dari fungsi* f *di notasikan* $\hat{f}(\omega)$ *dan didefinisikan oleh*

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{2.8}$$

dengan $i^2 = -1$. *Fungsi eksponensial* $e^{-i\omega t}$ *disebut kernel dari transformasi Fourier. Karena* $e^{i\omega t} = cos\, \omega t + i\, sin\, \omega t$ *maka persamaan (2.8) diatas dapat ditulis kembali dalam bentuk*

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)(\cos \omega t - i \sin \omega t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos \omega t\ dt - \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin \omega t\, dt. \tag{2.9}$$

dengan menggunakan fakta bahwa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ berada di $L^2(\mathbb{R})$ sehingga transformasi Fourier dapat diperluas ke $L^2(\mathbb{R})$.

Contoh 2.1:

Diktehaui fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ sebagai berikut:

Maka transformasi Fourier dari fungsi diatas adalah:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} f(t) e^{-i\omega t} dt + \int_{-1}^{1} f(t) e^{-i\omega t} dt + \int_{1}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= 0 + \int_{-1}^{1} f(t) e^{-i\omega t} dt + 0$$

$$= \int_{-1}^{1} 3e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= 3 \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\, d\, t$$

$$= -\frac{3}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{3}{i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega})$$

$$= \frac{6}{\omega} \sin \omega$$

dengan

fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, dan.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & jika\ t\ \geq 0 \\ 0, & jika\ \ t < 0, \end{cases}$$

maka transformasi Fourier dari fungsi diatas adalah:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega}\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-t}e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-(1-i\omega)t} dt$$

$$= -\frac{1}{1+i\omega}\, e^{-(1-i\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{1+i\omega}\, e^{-\infty} - \left(-\frac{1}{1+i\omega}\, e^{0}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{1+i\omega}$$

$$= \frac{1}{1+i\omega}.$$

Definisi 2.3.2 (Transformasi Fourier $\boldsymbol{L^2}(\mathbb{R}^2)$)

Misalkan diberikan fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ terdefinisi pada $(\mathbb{R}^2)$, transformasi Fourier dari fungsi f di notasikan $\hat{f}(\omega)$ dan didefinisikan oleh

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})\, e^{-i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}}\, d\boldsymbol{t}. \qquad (2.10)$$

dengan $i^2 = 1$. Fungsi eksponensial $e^{-i\boldsymbol{t}.\boldsymbol{\omega}}$ disebut kernel dari transformasi Fourier. Karena $e^{i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}} = \cos \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega} + i\sin \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}$ maka persamaan (2.10) diatas dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})(\cos \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega} - i\sin \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega})\, d\boldsymbol{t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{t}) \cos \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}\ d\boldsymbol{t} - \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{t}) \sin \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{t}. \qquad (2.11)$$

Contoh 4 :

Diberikan fungsi $f(t) = e^{-|\boldsymbol{t}|^2}$, maka transformasi Fourier dari fungsi diatas adalah:

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t)\, e^{-i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|\boldsymbol{t}|^2}\, e^{-i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(t_1^2 + _2^2\right)}\, e^{-i(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)}\, d\boldsymbol{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(t_1^2 + t_2^2\right)}\, e^{-it_1\omega_1}\, e^{-it_2\omega_2}\, d\boldsymbol{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t_1^2 + it_1\omega_1)}\, e^{\left(t_2^2 + it_2\omega_2\right)}\, d\boldsymbol{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(\left(t_1+i\frac{\omega_1}{2}\right)^2-\left(i\frac{\omega_1}{2}\right)^2\right)} e^{-\left(\left(t_2+i\frac{\omega_2}{2}\right)^2-\left(i\frac{\omega_2}{2}\right)^2\right)}\, d\boldsymbol{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(t_1+i\frac{\omega_1}{2}\right)^2} e^{-\frac{\omega_1^2}{4}} e^{-\left(t_2+i\frac{\omega_2}{2}\right)^2} e^{-\frac{\omega_2^2}{4}}\, d\boldsymbol{t}$$

$$= e^{-\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t_1+i\frac{\omega_1}{2}\right)^2} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t_2+i\frac{\omega_2}{2}\right)^2} dt_2$$

$$= e^{-\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{4}}\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}$$

$$= \pi\, e^{-\left(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{4}\right)}$$

Definisi 2.3.2 (Invers Transformasi Fourier)

Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai

$$f(\boldsymbol{t}) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}(\boldsymbol{t})] = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\omega)\, e^{i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\omega}}\, d\boldsymbol{\omega}. \qquad (2.12)$$

2.4 Sifat-sifat Transformasi Fourier (TF)

Dalam bagian ini akan dibahas sifat-sifat transformasi Fourier dengan notasi sebagai berikut:

Teorema 2.4.1. Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha\mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta\mathcal{F}\{f\}(\omega), \qquad (2.13)$$

dengan α, β merupakan konstanta bilangan riil.

Teorema 2.4.2 Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$ dan translasi $\tau_k f(t) = f(t-k)$ maka

$$\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega), \qquad (2.14)$$

Teorema 2.4.3 Misalkan $f \in L^2\ (\mathbb{R})$ dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0} f(t) = e^{i\omega_0 x} f(t)$ maka

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \tag{2.15}$$

(Zulfajar, 2013)

Teorema 2.4.4 Misalkan diberikan fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ dan misal $f_\alpha(t) = f(\alpha t)$ maka

$$\mathcal{F}\{f_\alpha\} = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}\{f\} \left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \tag{2.16}$$

Akibitanya Misalkan diberikan fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ dengan $f_\alpha(t) = f(-t)$ maka transformasi Fourier dari f_α adalah $\mathcal{F}\{f\}(-\omega)$, yaitu

$$\mathcal{F}\{f_\alpha\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(-\omega). \tag{2.17}$$

2.5 Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Prinsip ketidakpastian Heisenberg merupakan salah satu hukum dasar dari mekanika kuantum dan sebagian besar memberikan pernyataan mengenai batasan dengan tidak adanya hasil pengukuran mutlak dalam setiap pengukuran kuantum.

Warner Heisenberg (1927) mengemukakan bahwa posisi atau lokasi suatu elektron dalam atom tidak dapat ditentukan dengan pasti dan dalam waktu bersamaan, karena semakin akurat momentum yang ditentukan, maka semakin tidak akurat penentuan posisinya, begitupun sebaliknya. Pembuktian secara matematis diberikan oleh Wolfgang Pauli dan Hermann Weyl pada tahun 1928.

Berikut diberikan bentuk umum persamaan prinsip ketidakpastian Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \tag{2.18}$$

dengan keterangan:

Δx = ketidakpastian posisi

Δp = ketidakpastian momentum

h = konstanta Planck $(6{,}626 \times 10^{-34})$ Js

Dari persamaan (2.18) diketahui bahwa hasil kali ketidakpastian posisi (Δx) suatu benda dan ketidakpastian momentum (Δp) dalam arah x akan lebih besar atau sama dengan hasil bagi konstanta Planck oleh 4π. Bentuk lain dari prinsip ketidakpastian Heisenberg juga tidak kalah penting. Salah satunya adalah modifikasi prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier. Dalam keadaan ini, Δx merupakan suatu fungsi dan Δp merupakan suatu transformasi Fourier.

2.6 Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier

Pada bagian ini akan dibahas prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier yang menyatakan bahwa semakin besar suatu nilai fungsi maka akan semakin kecil nilai transformasi Fouriernya, dan sebaliknya. Sebelum membahas prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier, kita lihat teorema transformasi Fourier dari turunan berikut.

Teorema 2.6.1. *Misalkan* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *dan* $t \in (\mathbb{R})$*. Maka* $\forall n \in \mathbb{N}$ *berlaku*

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\}(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}\{f\}(\omega). \tag{2.19}$$

Teorema 2.6.2. *Misalkan $f(t), tf(t) \in L^2(\mathbb{R})$ dan juga $\omega\mathcal{F}\{f\}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ maka pertidaksamaan berikut berlaku:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2\,dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2|\mathcal{F}\{f\}(\omega)|^2\,d\omega \geq \frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt\right)^2. \quad (2.20)$$

(Rahmah, 2022)

Persamaan (2.20) disebut prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier. Pada perumusannya dapat dilihat modifikasi yang terjadi, dimana Δx sebagai fungsi f dan Δp sebagai transformasi Fourier dari f. Hal ini menjelaskan bahwa fungsi $xf(t)$ dan transformasi Fouriernya $\omega\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ tidak dapat teralokasikan dengan baik secara bersamaan. Jika f terkonsentrasi pada suatu titik di $\mathbb{R}$, maka $\mathcal{F}\{f\}$ akan tersebar pada $\mathbb{R}$ dan berlaku sebaliknya.

2.7 Transformasi Fourier Fraksional

Pada bagian ini akan disajikan definisi dari transformasi Fourier fraksional:

Definisi 2.7.1 *Transformasi Fourier fraksional dengan sudut parameter θ dari fungsi $f(x) \in L^2$ $(\mathbb{R})$, dinotasikan $\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega)$ didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) = \hat{f}^\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K^\theta(t,\omega)f(t)\,dt, \quad (2.21)$$

Kemudian untuk kernelnya adalah

$$K^\theta(t,\omega) = \begin{cases} C^\theta e^{-i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2}+it\omega\csc\theta} & ; \frac{\pi}{2} \neq \theta \neq n\pi \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{it\omega} & ; \theta = \frac{\pi}{2} \\ \delta(t-\omega) & ; \theta = 2n\pi, \\ \delta(t+\omega) & ; \theta = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

dan $C^{\theta} = (2\pi i \sin\theta)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-i\cot\theta}{2\pi}}$,

(Sutrisna, dkk., 2019)

atau

$$\mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega) = \sqrt{\frac{1-i\cot\theta}{2\pi}}\; e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2}-it\omega\csc\theta} f(t)\,dt.$$

Khususnya untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1-i\cot\frac{\pi}{2}}{2\pi}}\, e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\frac{\pi}{2}}{2}-it\omega\csc\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{0-it\omega} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\{f\}(\omega).\end{aligned}$$

Jadi, untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$ transformasi Fourier fraksional berubah menjadi transformasi Fourier biasa.

2.8 Sifat-sifat Transformasi Fourier Fraksional (TFF)

1. **Sifat Liniear**

   Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka

   $$\mathcal{F}^{\theta}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega) + \beta\mathcal{F}^{\theta}\{g\}(\omega)$$

Bukti.

Dari definisi transformasi Fourier diperoleh

$$\mathcal{F}^{\theta}\{\alpha f+\beta g\}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(C^{\theta}e^{i\left(t^{2}+\omega^{2}\right)\frac{\cot\theta}{2}-it\omega\csc\theta}\right)\left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)dt$$

$$\mathcal{F}^{\theta}\{\alpha f+\beta g\}(\omega)=\alpha\mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega)+\beta\mathcal{F}^{\theta}\{g\}(\omega) \qquad (2.22)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha f(t)C^{\theta}e^{i\left(t^{2}+\omega^{2}\right)\frac{\cot\theta}{2}-it\omega\csc\theta}\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\beta g(t)C^{\theta}e^{i\left(t^{2}+\omega^{2}\right)\frac{\cot\theta}{2}it\omega\csc\theta}\right)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha f(t)C^{\theta}e^{i\left(t^{2}+\omega^{2}\right)\frac{\cot\theta}{2}-it\omega\csc\theta}\right)dt$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{\infty}\beta g(t)C^{\theta}e^{i\left(t^{2}+\omega^{2}\right)\frac{\cot\theta}{2}it\omega\csc\theta}\right)dt$$

$$=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)C^{\theta}e^{i\left(t^{2}+\omega^{2}\right)\frac{\cot\theta}{2}-it\omega\csc\theta}\right)dt$$

$$+\beta\left(\int_{-\infty}^{\infty}\beta g(t)C^{\theta}e^{i\left(t^{2}+\omega^{2}\right)\frac{\cot\theta}{2}it\omega\csc\theta}\right)dt$$

$$=\alpha\mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega)+\beta\mathcal{F}^{\theta}\{g\}(\omega) \qquad \blacksquare.$$

2. Sifat Translasi

Misalkan $f,g\in L^{2}(\mathbb{R})$ dan translasi $\tau_{k}f(t)=f(t-k)$, maka

$$\mathcal{F}^{\theta}\{\tau_{k}f\}(\omega)=e^{\frac{1}{4}\left(k^{2}\sin2\theta-4\omega k\sin\theta\right)}\mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega-k\cos\theta) \qquad (2.23)$$

Bukti.

Dari definisi transformasi Fourier diperoleh

$$\mathcal{F}^{\theta}\{\tau_k f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta}\right) \tau_k f(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega\csc\theta}\right) f(t-k)\, dt$$

Misalkan $u = t - k$, $t = u + k$, dan $dt = du$, maka

$$\mathcal{F}^{\theta}\{\tau_k f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{i(u+k)^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - i(u+k)\omega\csc\theta}\right) f(u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{i(u^2+2uk+k^2+\omega^2)\frac{\cos\theta}{2\sin\theta} - \frac{i\omega k + i\omega u}{\sin\theta}}\right) f(u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{\frac{i}{2\sin\theta}(u^2+2uk+k^2+\omega^2)\cos\theta - 2(\omega k+\omega u)}\right) f(u)\, du$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{\frac{i}{2\sin\theta}(u^2\cos\theta + 2uk\cos\theta + k^2\cos\theta + \omega^2\cos\theta - 2\omega k - 2\omega u)}\right) f(u)\, du$$

Kemudian akan dimisalkan $v = \omega - k\cos\theta$ dan $\omega = v + k\cos\theta$ sehingga diperoleh

$$\mathcal{F}^{\theta}\{\tau_k f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{\frac{i}{2\sin\theta}\left(u^2\cos\theta + 2u((v+k\cos\theta) - k\cos\theta) + k^2\cos\theta + (v+k\cos\theta)^2\cos\theta - 2k(v+k\cos\theta)\right)}\right) f(u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{\frac{i}{2\sin\theta}\left((u^2+v^2)\cos\theta - 2uv\right)} e^{\frac{1}{2\sin\theta}(2vk\cos^2\theta + k^2\cos^3\theta - 2vk - k^2\cos\theta)}\right) f(u)\, du$$

$$= e^{\frac{1}{2\sin\theta}(2vk\cos^2\theta + k^2\cos^3\theta - 2vk - k^2\cos\theta)} \int_{-\infty}^{\infty} (C^{\theta} e^{\frac{i}{2\sin\theta}\left((u^2+v^2)\cos\theta - 2uv\right)} f(u)\, du$$

$$= e^{\frac{1}{2\sin\theta}(-2vk(1-\cos^2\theta) - k^2\cos\theta(1-\cos^2\theta))} \int_{-\infty}^{\infty} \left(c^{\theta} e^{\left(i(u^2+v^2)\frac{\cot\theta}{2} - 2uv\csc\theta\right)}\right) f(u) du$$

$$= e^{\frac{i}{2\sin\theta}(-2vk\sin^2\theta - k^2\cos\theta\sin^2\theta)} \mathcal{F}^{\theta}\{f\}(v)$$

$$= e^{\frac{1}{4}(k^2\sin 2\theta - 4\omega k\sin\theta)} \mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega - k\cos\theta) \qquad \blacksquare.$$

3. Sifat Modulasi

Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$ *dan* $\omega_0 \in \mathbb{R}$. *Jika* $\mathbb{M}_{\omega_0} f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$, *maka*

$$\mathcal{F}^{\theta}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = e^{\frac{i}{4}(4\omega\omega_0 \cos\theta - \omega_0^2 \sin 2\theta)} \mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega - \omega_0 \sin\theta)$$

Bukti.

$$\mathcal{F}^{\theta}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega \csc\theta} \right) \mathbb{M}_{\omega_0} f(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it\omega \csc\theta} \right) e^{i\omega_0 t} f(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{i(t^2+\omega^2)\frac{\cot\theta}{2} - it(\omega - \omega_0 \sin\,\theta) \csc\theta} \right) f(t)\, dt$$

Misalkan $u = \omega - \omega_0 \sin\theta$ dan $\omega = u + \omega_0 \sin\theta$ maka

$$\mathcal{F}^{\theta}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{i(t^2+(u+\omega_0 \sin\theta)^2)\frac{\cot\theta}{2} - itu \csc\theta} \right) f(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^{\theta} e^{i(t^2+u^2+2u\omega_0 \sin\theta + \omega_0^2 \sin^2\theta)\frac{\cot\theta}{2} - itu \csc\theta} \right) f(t)\, dt$$

$$= e^{i(2u\omega_0 \sin\theta + \omega_0^2 \sin^2\theta)\frac{\cot\theta}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^{\theta} e^{\frac{i}{2\sin\theta}(t^2+u^2)\frac{\cot\theta}{2} - itu \csc\theta}\, f(t) dt$$

$$= e^{i(2u\omega_0 \sin\theta + \omega_0^2 \sin^2\theta)\frac{\cot\theta}{2}} \mathcal{F}^{\theta}\{f\}(u)$$

$$= e^{\frac{i}{4}(4\omega\omega_0 \cos\theta - \omega_0^2 \sin 2\theta)} \mathcal{F}^{\theta}\{f\}(\omega - \omega_0 \sin\theta) \qquad \blacksquare.$$

2.9 Transformasi Fourier Fraksional *Coupled*

Pada bagian ini akan disajikan definisi dari transformasi Fourier fraksional *coupled* yang kemudian akan dicari relasi antara fungsi transformasi Fourier dengan fungsi transformasi Fraksional *coupled*. Relasi ini akan digunakan untuk memperoleh hasil utama pada penelitian ini yaitu dengan cara mengeneralisasi prinsip ketidakpastian transformasi Fourier frakasional *coupled*.

Definisi 2.9.1 Transformasi Fourier Fraksional *coupled* $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ dengan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan $\alpha + \beta \neq 2\pi\mathbb{Z}$. Parameter transformasi *coupled* yaitu $\gamma = (\alpha + \beta)/2$ dan $\delta = (\alpha - \beta)/2$ untuk setiap fungsi $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}[f](\boldsymbol{\omega}) = \tilde{d}(\gamma) \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t}) e^{-i\left(\tilde{a}(\gamma)\left(|\boldsymbol{t}|^2+|\boldsymbol{\omega}|^2\right)-\boldsymbol{t}\cdot M\boldsymbol{\omega}\right)}\, d\boldsymbol{t}, \tag{2.24}$$

dimana,

$$\tilde{a}(\gamma) = \frac{\cos\gamma}{2}, \tilde{b}\,(\gamma,\delta) = \frac{\cos\delta}{\sin\gamma}, \tilde{c}(\gamma,\delta) = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}\,, \tilde{d}(\gamma) = \frac{ie^{-i\gamma}}{2\pi\sin\gamma},$$

$$M = \begin{pmatrix} \tilde{b}(\gamma,\delta) & \tilde{c}(\gamma,\delta) \\ -\tilde{c}(\gamma,\delta) & \tilde{b}(\gamma,\delta) \end{pmatrix}.$$

Contoh 2.2: Diketahaui fungsi $f(\boldsymbol{t}) = e^{-|\boldsymbol{t}|^2}$dengan $\alpha = \frac{\pi}{2}$, dan $\beta = \frac{\pi}{2}$. Maka transformasi fraksional *coupled* didapatkan dari fungsi tersebut adalah:

Jawab:

Diketahui $\alpha = \frac{\pi}{2}$, dan $\beta = \frac{\pi}{2}$, maka

$$\gamma = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \delta = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2} = 0, \quad \tilde{a}(\gamma) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2} = 0,$$

$$\tilde{b}(\gamma,\delta) = \frac{\cos 0}{\sin\frac{\pi}{2}} = 1, \quad \tilde{c}(\gamma,\delta) = \frac{\sin 0}{\sin\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \tilde{d}(\gamma) = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\pi\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Akan dicari $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}[f](\boldsymbol{\omega})$ dengan $f(\boldsymbol{t}) = e^{-|\boldsymbol{t}|^2}$. Sesuai definisi transformasi fraksional *coupled* didapatkan

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}[f](\boldsymbol{\omega}) = \tilde{d}(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t}) e^{-i\left(\tilde{a}(\gamma)\left(|\boldsymbol{t}|^2+|\boldsymbol{\omega}|^2\right)-\boldsymbol{t}\cdot M\boldsymbol{\omega}\right)}\ d\boldsymbol{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(e^{-|\boldsymbol{t}|^2}\right) e^{-i\left(\tilde{a}(\gamma)\left(|\boldsymbol{t}|^2+|\boldsymbol{\omega}|^2\right)-\boldsymbol{t}\cdot M\boldsymbol{\omega}\right)} d\boldsymbol{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(e^{-|\boldsymbol{t}|^2}\right) e^{-i\left(\tilde{a}(\gamma)\left(|\boldsymbol{t}|^2+|\boldsymbol{\omega}|^2\right)-\boldsymbol{t}\cdot M\boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left((e^{-\left(t_1^2+t_2^2\right)} e^{-i\left(\tilde{a}(\gamma)\left(t_1^2+t_2^2\right)+\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)\right)-\left(\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}\right)} \right) d\boldsymbol{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\left(e^{-\left(t_1^2+t_2^2\right)}\right) e^{-i\left((0)\left(t_1^2+t_2^2\right)+\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)\right)} e^{i\left(\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}\right)} d\boldsymbol{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\left(e^{-\left(t_1^2+t_2^2\right)}\right) e^{-i\left((0)\left(t_1^2+t_2^2\right)+\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)\right)} e^{i\left(\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}\right)} d\boldsymbol{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\left(e^{-\left(t_1^2+t_2^2\right)}\right) e^{it_1\omega_1+it_2\omega_2}\right) d\boldsymbol{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\left(e^{-t_1^2-t_2^2}\right) e^{it_1\omega_1+it_2\omega_2}\right) d\boldsymbol{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\left(e^{-t_1^2+it_1\omega_1}\right) dt_1\right) \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\left(e^{-t_2^2+it_2\omega_2}\right) dt_2\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\left(e^{-\left(t_1-i\frac{\omega_1}{2}\right)^2} e^{\frac{-\omega_1^2}{4}}\right) dt_1\right) \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\left(e^{-\left(t_2-i\frac{\omega_2}{2}\right)^2} e^{-\frac{\omega_2^2}{4}}\right) dt_2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left(e^{-\frac{\omega_1^2}{4}}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left(e^{-\frac{\omega_2^2}{4}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(e^{-\left(\frac{\omega_1{}^2}{4}+\frac{\omega_2{}^2}{4}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{4} e^{\frac{|\boldsymbol{\omega}|^2}{4}}.$$