BILANGAN RAMSEY GRAF LENGKAP TERHADAP GRAF KIPAS

SKRIPSI

Disusun dan Diajukan Oleh:

RABIL ALWAN MARHIZA

H011191028

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

AGUSTUS 2023

BILANGAN RAMSEY GRAF LENGKAP TERHADAP GRAF KIPAS

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains ada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

RABIL ALWAN MARHIZA

H011191028

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

AGUSTUS 2023

LEMBAR PENGESAHAN

BILANGAN RAMSEY GRAF LENGKAP TERHADAP GRAF KIPAS

Disusun dan diajukan oleh:

RABIL ALWAN MARHIZA

H011191028

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 22 Agustus 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	**Pembimbing pertama,**
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19680601 199512 2 001**

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 19700807 200003 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	: Rabil Alwan Marhiza
NIM	: H011191028
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Bilangan Ramsey Graf Lengkap Terhadap Graf Lengkap

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri

apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa Sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 22 Agustus 2023

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL 10000 SEPULUH RIBU RUPIAH 60248AKX605816122

Rabil Alwan Marhiza

NIM. H011191028

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sebagai Nabi yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan dengan judul "Bilangan Ransey Graf Lengkap Terhadap Graf Kipas" sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi serta nasehat dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, izinkan penulis mengucapkan terima kasih dan memberikan penghargaan kepada kedua orang tua penulis, Ayah **Abdul Kadir** dan Ibu **Musliana** yang telah dengan sabar membesarkan dan mendidik penulis, serta memberikan dukungan do'a dan materi, sehingga penulis bisa mencapai di titik ini. Mampu menyelesaikan pendidikan di perguruan tinggi dan mendapat gelar yang insyaAllah dapat dimanfaatkan penulis di kemudian hari. Terima kasih kepada kedua adik penulis Muh. Tajrid Marhiza dan Faliha Mardiyah Marhiza, serta seluruh keluarga yang telah memberi doa dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, penulis hendak menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si**. selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin sekaligus Penguji serta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama vi menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta para **Staf Departemen Matematika** yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.
3. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku Pembimbing Utama dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S,Si., M.Si.** selaku Pembimbing Pertama yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas meluangkan banyak waktu di tengah kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.

4. Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.** selaku Penguji sekaligus Pembimbing Akademik selama penulis menempuh pendidik S1. Penulis ucapkan terima kasih telah banyak memberi nasihat, saran dan masukan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini serta waktu yang telah diberikan dalam membimbing penulis dalam segala hal terkait penyelesaian studi S1 penulis.
5. Ibu **Naimah Aris, S.Si., M.Math.** selaku Penguji yang telah memberi nasihat, saran dan masukan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi.
6. Kak Hafika yang telah membantu penulis dalam perantauan serta memberikan masukan dalam ranah dunia perkuliahan.
7. Keluarga besar SMA Negeri 1 Pasarwajo yang menjadi tempat penulis memulai masa pembentukan jati diri dan mengenal banyak hal.
8. Teman-teman Matematika 2019 yang telah memberi warna-warni masa perkuliahan, dan memberikan masukan kepada penulis dalam penyelesaian studi penulis.
9. Meli, Nabila, dan Apriani yang telah menemani penulis dalam keadaan apapun dan selalu memberikan dukungan, serta selalu ada ketika penulis membutuhkan bantuan.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibdah dan mendapat balasan dari Allah Subhanahu Wa Ta’ala. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 22 Agustus 2023

Rabil Alwan Marhiza

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Rabil Alwan Marhiza
NIM	:	H011191028
Program Studi	:	Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (Non-exclusive Royalty- Free Right)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Bilangan Ramsey Graf Lengkap Terhadap Graf Kipas

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,

Dibuat di Makassar pada tanggal 22 Agustus 2023.

Yang menyatakan,

Rabil Alwan Marhiza

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG DAN ARTINYA

Lambang	Arti dan Keterangan
$G(V, E)$	Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E
$V(G)$	Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	Himpunan sisi pada graf G
$\|V(G)\|$	Orde atau banyaknya titik pada graf G
$N_G(x)$	Himpunan tetangga titik x pada graf G
$N_G[v]$	$N_G(v) \cup \{v\}$
$\|N_G(x)\|$	Banyaknya tetangga titik x pada graf G
$d_G(x)$	Derajat titik x di graf G
$G \cup H$	Graf gabung
$G + H$	Graf jumlah
P_n	Graf lintasan berorde n
C_n	Graf siklus berorde n
K_n	Graf lengkap berorde n
W_n	Graf roda berorde $n + 1$
$\widehat{K}_n$	Graf kipas berorde $n + 1$
S_n	Graf kipas berorde n
F_n	Graf kincir berorde $2n + 1$
K_{n_1,n_2}	Graf bipartite lengkap berode $n_1 + n_2$
$K_{1,n}$	Graf bintang berode $n + 1$
K_{n_1,n_2,n_3}	Graf tripartite lengkap berode $n_1 + n_2 + n_3$
$\chi(G)$	Bilangan kromatik graf G
$C(G)$	adalah banyaknya titik pada komponen terbesar graf G

$R(G,H)$	Bilangan Ramsey Graf G dan H
$\backslash$	Selain
$\supseteq$	Memuat
$\mathbb{N}$	Bilangan asli
$\lvert X\rvert$	Kardinalitas himpunan X
$G[X]$	Subgraf G yang diinduksi himpunan titik X

ABSTRAK

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G(V, E)$, dengan V merupakan himpunan tidak kosong yang anggotanya disebut titik (vertex) dan E adalah himpunan dari pasangan-pasangan titik yang disebut sisi (edge). Bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap graf F berorde n memenuhi kondisi F memuat graf G atau $\bar{F}$ memuat H. Pada skripsi ini akan ditentukan bilangan Ramsey untuk graf lengkap K_m dan graf kipas $\widehat{K}_n$ untuk $m = 2,3,4$ dan $n \geq 3$. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa $R\left(K_2, \widehat{K}_n\right) = n + 1$, $R\left(K_3, \widehat{K}_n\right) = 2n + 1$, dan $R\left(K_4, \widehat{K}_n\right) = 3n + 1$ untuk $n \geq 3$.

Kata kunci: *graf*, *bilangan Ramsey*, *graf lengkap*, *graf kipas*.

Judul	:	Bilangan Ramsey Graf Lengkap Terhadap Graf Kipas
Nama	:	Rabil Alwan Marhiza
NIM	:	H011191028
Program Studi	:	Matematika

ABSTRACT

Graph G is a pair of sets (V, E), written with notation $G(V, E)$, where V is a non-empty set whose members are called vertices and E is a set of pairs of points called edges. The Ramsey number of a graph $R(G, H)$ is the smallest natural n such that for every n-order graph F satisfies the condition F contains graph G or $\bar{F}$ contains H. In this thesis, the Ramsey number will be determined for the complete graph K_m versus the kipas graph $\widehat{K}_n$ for $m = 2,3,4$ and $n \geq 3$. The results of this research show that $R(K_2, \widehat{K}_n) = n + 1$, $R\left(K_3, \widehat{K}_n\right) = 2n + 1$, and $R\left(K_4, \widehat{K}_n\right) = 3n + 1$ for $n \geq 3$.

Keywords: *graph, Ramsey number, complete graph, kipas graph.*

Title	:	*Ramsey Number of Complete Graph Versus Kipas Graph*
Name	:	*Rabil Alwan Marhiza*
Student ID	:	*H011191028*
Study Program	:	*Mathematics*

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Graf umumnya merupakan suatu model matematika yang digunakan untuk menganalisa banyak masalah kongkrit yang berhubungan dengan dunia nyata. Beberapa masalah dalam Fisika, Kimia, Sains Komunikasi, Teknologi Komputer, Genetika, Psikologi dan Sosiologi bisa diformulasikan sebagai masalah dalam teori graf. Selain itu, cabang matematika seperti teori grup, matriks, peluang, dan topologi juga memiliki implementasi dalam teori graf (Balakrishnan dan Ranganathan, 2012).

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan tak kosong dari obyek yang disebut titik (vertex) dan himpunan pasangan titik yang disebut sisi (edge). Banyaknya titik suatu graf disebut *orde* dan banyaknya sisi disebut *ukuran.* Jumlah sisi yang berkaitan dengan suatu titik pada suatu graf disebut derajat. Suatu graf yang memiliki dua titik berderajat 1 dan titik lainnya berderajat 2 disebut lintasan. Jika untuk setiap pasangan titik u dan v pada suatu graf, terdapat lintasan dari u ke v, maka graf tersebut disebut graf terhubung.

Terdapat beberapa graf khusus yang dikenal diantaranya graf lengkap, graf lintasan, graf siklus, graf kipas, graf roda, dan graf kincir. Graf lengkap adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda dihubungkan dengan satu sisi. Graf lengkap berorde n dilambangkan dengan K_n. Graf lintasan P_n adalah suatu graf yang memiliki dua titik berderajat 1 dan titik lainnya berderajat 2. Graf siklus adalah suatu graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua.

Operasi penjumlahan, perkalian, dan gabungan juga dapat dikenakan pada dua atau lebih graf. Sebagai contoh, graf roda yang dinotasikan dengan W_n merupakan graf hasil penjumlahan antara graf K_1 dan C_n. Terdapat juga graf kipas $\widehat{K}_n$ yang merupakan graf hasil penjumlahan antara graf K_1 dengan P_n..

Salah satu topik yang berkembang saat ini dalam bidang graf adalah Teori Ramsey yang pertama kali ditemukan oleh Frank Plumpton Ramsey (1930). Teori ini mulai terkenal setelah Paul Erdos dan George Szekeres mengemukakan ide dasar mengenai bilangan Ramsey klasik dua warna. Namun, karena dalam penentuan bilangan Ramsey klasik sangat sulit, maka banyak peneliti mencari metode atau mengkaji konsep bilangan Ramsey untuk memperumum konsep tersebut yang saat ini dikenal dengan bilangan Ramsey graf atau generalisasi bilangan Ramsey.

Beberapa peneliti yang telah mengkaji tentang bilangan Ramsey diantaranya adalah Chvátal dan Harary (1972) yang menemukan batas bawah untuk $R(G,H)$, yaitu $R(G,H) \geq (\chi(H)-1)(|G|-1)+1)$ dengan $\chi(H)$ merupakan bilangan kromatik graf H. Parson (1973) yang mengkaji tentang bilangan Ramsey untuk graf lintasan dan graf lengkap $R(P_n, K_m)$. Selanjutnya Chvátal (1977) memperluas kajian tentang bilangan Ramsey untuk graf pohon dan graf lengkap $R(T_n, K_m)$. Kemudian, Burr S.A. (1984) meneliti bilangan Ramsey $R(G, nH)$ dan $R(nG, nH)$ untuk G dan H merupakan graf lengkap K_k dan K_l dan menghasilkan

$R(K_k, nH) = n \cdot l + R(K_{k-1}, H) - 1$ serta

$R(nK_k, nK_l) = (k+l-1)n + R(K_{k-1}, K_{l-1}) - 2.$

Pada tahun 1997, L. Gupta dkk meneliti bilangan Ramsey $R(K_3, F_n)$ dan memperoleh hasil bahwa bilangan Ramsey $R(K_3, F_n) = 4n + 1$ untuk $n \geq 3$. Kemudian, pada tahun 2005, Baskoro dkk mengkaji bilangan Ramsey $R(K_4, F_n)$ dan memperoleh hasil bahwa bilangan Ramsey $R(K_4, F_n) = 6n + 1$ untuk $n \geq 4$. Lalu, pada tahun 2014 Yanbo Zhang, dan Yaojun Chen mengkaji bilangan Ramsey $R(K_5, F_n)$ dan memperoleh hasil bilangan Ramsey $R(K_5, F_n) = 8n + 1$ untuk $n \geq 5$. Selanjutnya pada tahun 2009, Kadota dkk meneliti bilangan Ramsey $R(K_6, F_n)$ dan memperoleh hasil bilangan Ramsey $R(K_6, F_n) = 10n + 1$ untuk $n \geq 6$.

Hingga saat ini perkembangan kajian tentang bilangan Ramsey berkembang dengan sangat pesat. Pada uraian sebelumnya telah dituliskan mengenai hasil-hasil kajian bilangan Ramsey dari beberapa peneliti. Masih banyak hasil penelitian tentang bilangan Ramsey yang tidak disebutkan pada tulisan ini. Namun belum ada penelitian yang mengkaji khusus untuk bilangan Ramsey graf lengkap dengan graf kipas.

Oleh karena itu, dalam penelitian kali ini akan dikaji bilangan Ramsey K_m dengan $\widehat{K}_n$ dimana m, n adalah bilangan asli.

1.2. Rumusan Masalah

Masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah

a. Bagaimana menentukan bilangan Ramsey $R\left(K_m, \widehat{K}_n\right)$?

1.3. Tujuan Penelitian

a. Menentukan bilangan Ramsey $R\left(K_m, \widehat{K}_n\right)$.

1.4. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan menambah pengetahuan Penulis tentang bilangan Ramsey $R\left(K_m, \widehat{K}_n\right)$. Selain itu, penelitian ini diharapkan menjadi bahan pembelajaran dan pengetahuan bagi pembaca serta menjadi bahan referensi bagi penelitian lain yg ingin meneliti bilangan Ramsey khususnya yang terkait dengan graf Lengkap dan graf Kipas

1.5. Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak mencakup pembahasan yang terlalu luas, maka permasalahan pada penelitian ini akan dibatasi hanya pada penentuan bilangan Ramsey untuk graf Lengkap berorde m dinotasikan K_m dan graf Kipas berorde dinotasikan $\widehat{K}_n$, untuk $m = 2,3,4$ dan $n \geq 3$.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan tentang beberapa definisi, notasi, teorema, dan contoh yang akan digunakan dalam membuktikan hasil penelitian ini.

2.1. Graf dan Unsur Graf

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang definisi graf dan definisi dari beberapa istilah dalam graf yang terkait dengan pembahasan hasil dalam penelitian ini.

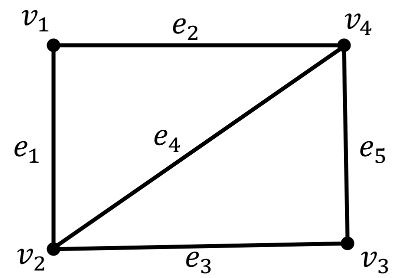
Definisi 2.1.1 Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G(V, E)$, yang dalam hal ini V merupakan himpunan tidak kosong yang anggotanya disebut titik (vertex) dan E adalah himpunan dari pasangan-pasangan titik yang disebut sisi (edge).

Pada Definisi 2.1.1 himpunan titik V pada graf G biasa ditulis dengan $V(G)$ dan himpunan sisi E pada graf G biasa ditulis dengan $E(G)$. Banyaknya titik di G disebut **orde** (*order*) dari G yang dinotasikan dengan p dan banyaknya titik di G disebut **ukuran** (*size*) dari G yang dinotasikan dengan q sehingga $p = |V(G)|$ dan $q = |E(G)|$.

Contoh 2.1.1 Diberikan graf $G(V, E)$ dengan $V(G)$ dan $E(G)$ masing-masing adalah:

- $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
- $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Misalkan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_4$, $e_3 = v_2v_3$, $e_4 = v_2v_4$, dan $e_5 = v_3v_4$, maka $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Karena banyaknya anggota di $V(G)$ adalah 4, maka orda dari graf G adalah $p = 4$. Demikian pula ukuran pada graf G adalah $q = 5$. Gambar dari graf G dapat dilihat pada Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.1 Graf G

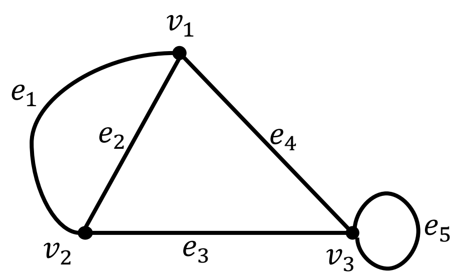
Definisi 2.1.2 Dua titik u dan v dikatakan bertetangga (adjacent) jika $uv \in E(G)$. Jika $e = uv \in E(G)$, maka u dan v masing-masing dikatakan terkait (incident) dengan e (Chartran dan Lesniak, 1986).

Pada Gambar 2.1.1 dapat dilihat bahwa v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_4 namun tidak dengan v_3. Dapat dilihat sisi e_1 terkait dengan titik v_1 dan v_2, sisi e_3 terkait dengan titik v_2 dan v_3, namun sisi e_1 tidak terkait dengan v_3, dan v_4.

Definisi 2.1.3 *Loop* merupakan sebuah sisi yg terkait pada suatu titik yang sama. Sedangkan sisi rangkap (paralel edge) merupakan dua buah sisi atau lebih yg menghubungkan pasangan titik yang sama.

Definisi 2.1.4 Graf sederhana (simple graph) adalah suatu graf tanpa *loop* dan sisi rangkap.

Contoh 2.1.2

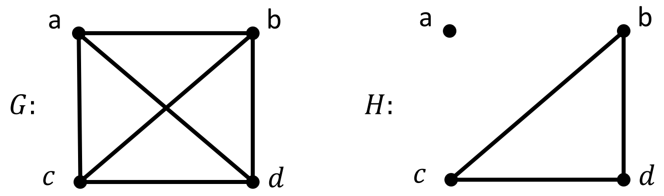


Gambar 2.1.2 Graf dengan *loop* dan sisi rangkap

Graf *G* pada Gambar 2.1.1 merupakan graf sederhana karena tidak mengandung *loop* dan sisi rangkap. Sedangkan pada Gambar 2.1.2 bukan merupakan graf sederhana karena mengandung *loop* dan sisi rangkap. Sisi e_5 merupakan *loop* karena hanya terhubung pada v_3 itu sendiri. Sedangkan Sisi e_1 dan e_2 merupakan sisi rangkap karena menghubungkan dua titik yang sama yaitu v_1 dan v_2.

Definisi 2.1.5 Misalkan dua buah graf $H = \big(V(H), E(H)\big)$ dan $G = (V(G), E(G))$. Graf H disebut subgraf dari G, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Hasmawati, 2020:18).

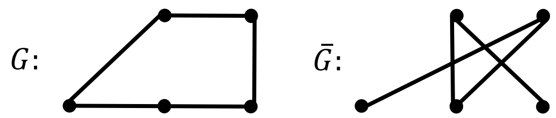
Contoh 2.1.3 Diberikan Graf deangan $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G) = \{ab, ac, ad, bc, bd. cd\}$. Kemudian, suatu graf H dengan $V(H) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G) = \{bc, bd, cd\}$. Karena $E(H) \subseteq E(G)$, maka H adalah subgraph dari G.



Gambar 2.1.3 Graf H subgraf G

Definisi 2.1.6 Graf F disebut komplemen dari subgraf G apabila $V(F) = V(G)$ dan $uv \in E(F)$ jika dan hanya jika $uv \notin E(G)$. Komplemen dari graf G dinotasikan dengan $\bar{G}$ (Hasmawati, 2020:16).

Contoh 2.1.4 Misalkan $V(G) = \{1,2,3,4,5\}$ dan $E(G) = \{12,23,34,45,51\}$. Maka graf $\bar{G}$ adalah graf dengan $V(G) = \{1,2,3,4,5\}$ dan $E(G) = \{13,14,24,25,35\}$.



Gambar 2.1.4 Graf G dan $\bar{G}$.

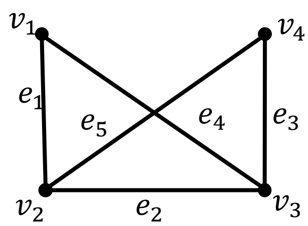
Selanjutnya adalah pengertian derajat. Pengertian derajat menggunakan humpunan tetangga seperti yang didefinisikan berikut.

Definisi 2.1.7 Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dinotasikan $N_G(v)$ yang didefiniskan sebagai berikut $N_G(v) = \{u|uv \in E(G)\}$ (Hasmawati, 2020:21).

Gabungan dari titik v dan himpunan tetangganya $N_G(v)$ adalah $N_G[v]$, atau $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

Definisi 2.1.8 Derajat suatu titik v_i dalam graf G, dilambangkan "$d(v_i)$", adalah banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $d(v_i) = |N_G(v_i)|$.

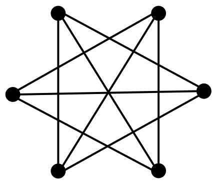
Contoh 2.1.5



Gambar 2.1.5 Graf sederhana G berorde 4 dan berukuran 5.

Dari Gambar 2.1.5 diperoleh $N_G(v_1) = N_G(v_4) = \{v_2, v_3\}$, $N_G(v_2) = \{v_1, v_{3,} v_4\}$, dan $N_G(v_3) = \{v_1, v_{2,} v_4\}$. Sehingga $d(v_1) = d(v_4) = 2$, $d(v_2) = 3$, dan $d(v_3) = 3$.

Derajat minimum dari suatu graf G menyatakan derajat terkecil di G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = min\,\{d(v): v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G)\,) = max\,\{d(v): v \in V(G)\}$. Suatu graf disebut reguler jika δ(G) = Δ(G). Graf pada Gambar 2.6 adalah graf reguler.



Gambar 2.1.6 Graf 3-reguler

2.2. Operasi dan Jenis-Jenis Graf

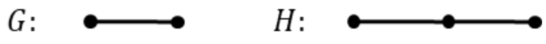
Terdapat beberapa jenis operasi pada graf yang akan digunakan dalam penelitian ini diantaranya operasi gabung dan jumlah pada graf. Menurut Hasmawati (2020), definisi dari graf gabung dan graf jumlah adalah sebagai berikut:

Definisi 2.2.1 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$dan himpunan sisi $E(H)$ maka:

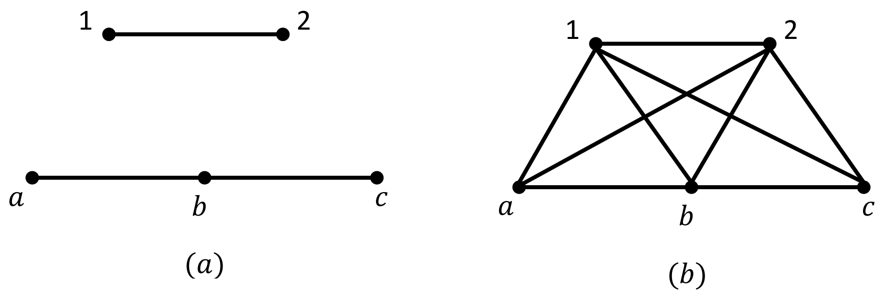
a. Graf gabung (union graph) antara G dan H ditulis $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.
b. Graf jumlah (joint graph) antara G dan H ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv: u \in V(G), v \in V(H)$.

Contoh 2.2.1

Diberikan graf G dan H dengan himpunan titik dan sisi berturut-turut: $V(G) = \{1,2\}$ dan $E(G) = \{12\}$ serta $V(H) = \{a, b, c\}$ dan $E(H) = \{ab, bc\}$.



Maka operasi gabung antara graf G dan H adalah graf $G \cup H$ dengan himpunan titik $V(G \cup H) = \{1,2, a, b, c\}$ dan $E(G \cup H) = \{12, ab, bc\}$. Gambar graf $G \cup H$ seperti pada Gambar 2.2.1 bagian (a). Sedangkan graf jumlah antara G dan H adalah graf $G + H$ dengan $V(G + H) = \{1,2, a, b, c\}$ dan $E(G + H) = \{12, 1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, ab, bc\}$ seperti pada gambar 2.2.1 bagian (b).



Gambar 2.2.1 (a) graf $G \cup H$ dan (b) graf $G + H$

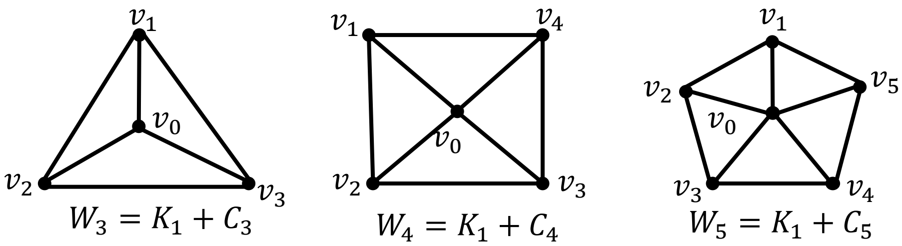
Pengertian graf jumlah akan digunakan dalam pendefinisian beberapa graf kompleks termasuk graf kipas.

Terdapat beberapa jenis graf diantaranya adalah lintasan, siklus, graf lengkap, graf bipartit, graf kipas, graf roda, graf bintang, dan graf kincir. Pengertian graf lintasan, siklus, dan graf lengkap telah diberkan pada Bab I. Berikut ini akan diberikan pengertian graf roda, graf kipas, graf bintang, graf kincir, dan graf bipartit.

Definisi 2.2.2 Graf roda adalah graf yang dibentuk dari siklus C_n dengan menambahkan satu titik yaitu x, dengan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n + 1$ dinotasikan dengan W_n (Hasmawati, 2020:49).

Jadi, graf roda W_n adalah graf hasil jumlah antara graf K_1 dan C_n, dinotasikan $W_n = K_1 + C_n$.

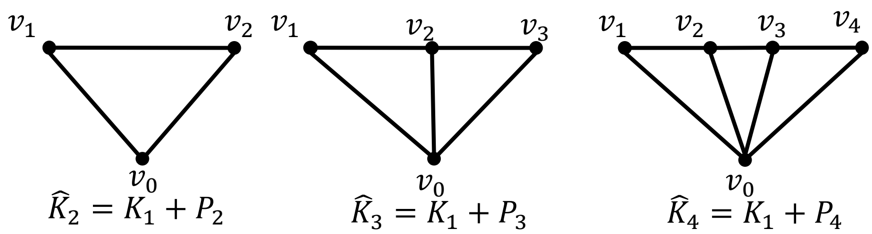
Contoh 2.2.2



Gambar 2.2.2 Graf W_3, W_4 dan W_5

Definisi 2.2.3 Graf kipas $\widehat{K}_n$ $(n \geq 2)$ adalah graf hasil jumlah antara graf lengkap K_1 dengan graf lintasan P_n, dinotasikan $F_n = K_1 + P_n$ diperoleh dengan menghubungkan semua titik dari P_n ke titik K_1. Dengan demikian, graf kipas mempunyai $(n+1)$ titik dan $(2n-1)$ sisi.

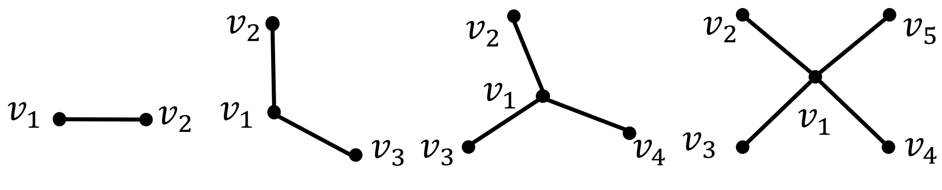
Contoh 2.2.3



Gambar 2.2.3 Graf $\widehat{K}_2$, $\widehat{K}_3$ dan $\widehat{K}_4$

Definisi 2.2.4 Graf Bintang dinotasikan S_n adalah suatu graf yang dibentuk dari graf lengkap K_1 dengan komplemen dari graf lengkap K_{n-1}, yaitu $S_n = K_1 + \overline{K}_{n-1}$.

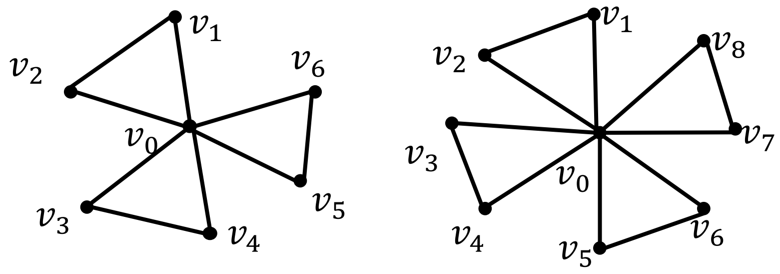
Contoh 2.2.4



Gambar 2.2.4 Graf S_2, S_3, S_4 dan S_5

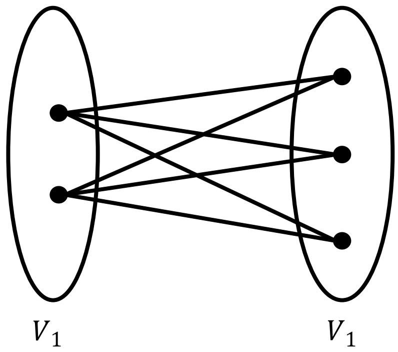
Definisi 2.2.5 Graf kincir F_n adalah graf hasil jumlah antara graf K_1 dan nK_2, dinotasikan $F_n = K_1 + nK_2$ (Radziszowski, 2011).

Contoh 2.2.5



Gambar 2.2.5 Graf F_3 dan F_4

Definisi 2.2.6 Graf bipartit (bipartite graph) yaitu graf yang himpunan titiknya dapat dipisah menjadi dua buah himpunan bagian yang tidak kosong V_1 dan V_2, sedemikian sehingga $V_1 \cup V_2 = V$ dan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Setiap sisi pada graf tersebut menghubungkan sebuah verteks di V_1 ke sebuah verteks di V_2.



Gambar 2.2.6 Contoh graf bipartit G

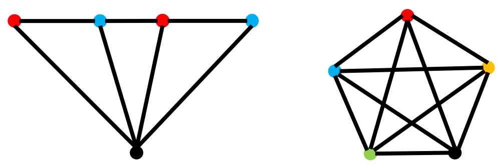
Teorema 2.1 Graf G adalah bipartit jika hanya jika setiap siklus pada G memiliki panjang genap.

Selain operasi pada graf dan jenis-jenis graf, dalam penentuan bilangan Ramsey graf perlu juga disertakan mengenai pewarnaan graf. Pewarnaan graf terbagi menjadi pewarnaan titik dan pewarnaan sisi. Pewarnaan titik. Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada himpunan titik $V(G)$ dimana untuk setiap dua titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda.

Defnisi 2.2.7 Suatu graf G dikatakan berwarna-k jika titik-titik pada graf G dapat diwarnai dengan k warna. (Hasmawati 2015:68)

Defnisi 2.2.8 Bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga G berwarna k disebut bilangan kromatik dari G, dan dinotasikan dengan $\chi(G)$. (Hasmawati 2015:68).

Contoh 2.2.7 Diberikan dua buah graf $\widehat{K}_4$ dan K_5. Maka pewarnaan titik pada graf $\widehat{K}_4$ dan K_5 dapat dilihat pada Gambar 2.2.7 berikut.



Gambar 2.2.7 Pewarnaan titik pada $\widehat{K}_4$ dan K_5

Pada Gambar 2.2.7, diperoleh bahwa jumlah warna minimum berturut-turut pada $\widehat{K}_4$ adalah 3 dan K_5 adalah 5. Sehingga diperoleh bilangan kromatik $\chi\big(\widehat{K}_4\big) = 3$ dan $\chi(K_5) = 5$.

Selain pewarnaan titik dikenal juga pewarnaan sisi. Metode pemberian warna sisi pada pewarnaan sisi tidak berbeda dengan pemberian warna titik pada pewarnaan titik. Pewarnaan sisi adalah pemberian warna pada himpunan sisi $E(G)$ dimana untuk setiap dua sisi yang bertetangga diberi warna yang berbeda.

2.3. Bilangan Ramsey

Pada Subbab 2.3 ini disajikan definisi bilangan Ramsey klasik, bilangan Ramsey graf dan bebeapa definisi lain serta teorema yang menunjang penelitian ini. Bilangan Ramsey graf adalah pengembangan dari bilangan Ramsey klasik. Karena itu, definisi bilangan Ramsey klasik disajikan terlebih dahulu.

Definisi 2.3.1 Untuk sebarang bilangan bulat positif a dan b, bilangan Ramsey $R(a, b)$ didefinisikan sebagai suatu bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap K_n, akan memuat subgraf dengan semua sisi berwarna merah yang isomorfik dengan graf lengkap K_a atau memuat subgraf dengan semua sisi berwarna biru yang isomorfik dengan graf lengkap K_b (Erdos dan Szekeres, 1935).

Selanjutnya akan disajikan definisi bilangan Ramsey graf dan definisi lain tentang bilangan Ramsey graf

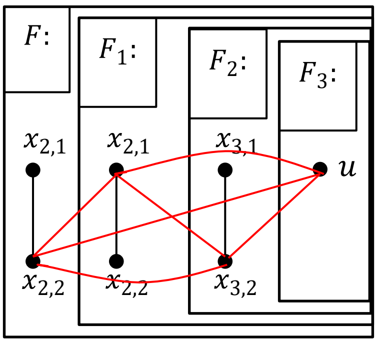
Definisi 2.3.2 Diberikan sebarang dua graf G dan H, bilangan Ramsey graf $R(G,H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap graf F berorde n memenuhi sifat berikut: F memuat graf G atau $\bar{F}$ memuat H.

Contoh 2.3.1. Bilangan Ramsey $R(S_3, K_4) = 7$.

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.3.2, maka bilangan Ramsey $R(S_3, K_4) = 7$ menyatakan bahwa untuk setiap graf F berorde 7 akan memenuhi kondisi: F memuat graf S_3 atau $\bar{F}$ memuat K_4. Andaikan graf F tidak memuat S_3, akan ditunjukkan bahwa $\bar{F}$ memuat K_4.

Karena graf F tidak memuat S_3, maka untuk setiap titik pada graf F memiliki paling tinggi berderajat 1. Sehingga, untuk setiap $x \in E(F)$, maka $d(x) \leq 1$. Pilih sebarang titik di F anggap $x_{1,1}$ dengan $d(x_{1,1}) \leq 1$ dan misalkan $X_1 = \{x_{1,2}\}$ adalah himpunan titik yang bertetangga dengan $x_{1,1}$ di F. Misalkan $F_1 = V(F) \backslash N[x_{1,1}]$, sehingga $|V(F_1)| = |V(F)| - |N[x_{1,1}]| \geq 7 - 2 = 5$. Jika $x_{2,1}$ merupakan titik berderajat paling tinggi di F_1 dengan $d(x_{2,1}) \leq 1$ dan $X_2 = \{x_{2,2}\}$ merupakan himpunan titik yang bertetangga dengan $x_{2,1}$ di F_1. Selanjutnya, misalkan $F_2 = F_1 \backslash N[x_{2,1}]$, maka $|V(F_2)| = |V(F_1)| - |N[x_{2,1}]| \geq 5 - 2 = 3$. Kemudian, Pilih sebarang titik di F anggap $x_{3,1}$ dengan $d(x_{3,1}) \leq 1$ misalkan $X_3 = \{x_{3,2}\}$ adalah himpunan titik yang bertetangga dengan $x_{1,1}$ di F. Misalkan $F_3 = V(F_2) \backslash N[x_{1,1}]$, sehingga $|V(F_3)| = |V(F_2)| - |N[x_{3,1}]| \geq 3 - 2 = 1$. Selanjutnya, misalkan u adalah himpunan titik pada F_3. Perhatikan Gambar 4.1 berikut ini.



Gambar 2.3.1 Bilangan Ramsey $R(S_3, K_4)$

Berdasarkan Gambar 2.3.1, dapat dilihat bahwa terdapat beberapa titik bebas pada F yang saling bebas, sehingga dapat membentuk K_4 pada $\bar{F}$. Jadi, $\bar{F}$ memuat K_4 dengan $K_4 = \bar{F}[\{x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, u\}]$ untuk $i \in \{1,2\}$.

Definisi 2.3.3 Suatu bilangan asli n disebut batas atas bilangan Ramsey $R(G, H)$ apabila sembarang graf dengan orde n akan selalu memuat G atau komplemennya memuat H.

Definisi 2.3.4 Diberikan graf G dan H. Suatu graf F disebut graf kritis untuk G dan H, jika F tidak memuat G dan $\bar{F}$ tidak memuat H.

Kardinalitas graf kritis untuk graf G dan H merupakan dasar dalam menentukan batas bawah bilangan Ramsey $R(G, H)$. Batas bawah secara umum telah diberikan oleh Chvátal dan Harary pada tahun 1972 dalam hasil penelitian mereka yang disajikan dalam bentuk teorema sebagai berikut.

Teorema 2.3.1 *(Chvátal dan Harary, 1972) Misalkan $\chi(H)$ adalah bilangan kromatik graf H dan $C(G)$ adalah banyaknya titik pada komponen terbesar graf G, maka $R(G, H) \geq (\chi(H) - 1)(C(G) - 1) + 1$.*

Bukti

Pandang graf $F = (\chi(H) - 1)K_{C(G)-1}$. Graf F terdiri atas $\chi(H - 1)$ graf lengkap dengan kardinalitas masing-masing $C(G) - 1$. Dengan demikian, F tidak memuat graf terhubung yang berorde paling sedikit $C(G)$. Akibatnya, F tidak memuat G. Komplemen dari F yaitu $\bar{F}$ adalah graf multipartit $K_{(\chi(H)-1)(C(G)-1)}$. Jelas $K_{(\chi(H)-1)(C(G)-1)}$ terdiri dari $\chi(H - 1)$ partisi, sehingga tidak memuat graf dengan bilangan kromatik $\chi(H)$. Jadi, F tidak memuat H. Karenanya, diperoleh:

$R(G, H) \geq F + 1 = (\chi(H) - 1)(C(G) - 1) + 1.$

Contoh 2.3.2 Penentuan batas bawah bilangan Ramsey $R(K_3, \widehat{K}_n)$.

Berdasarkan Definisi 2.2.8 dan Teorema 2.3.1 diperoleh nilai batas bawah sebagaimana dalam Table 2.3.1 berikut.

Tabel 2.3.1 Batas bawah $R(K_3, \widehat{K}_n)$

$\chi(K_3)$	n	$c(\widehat{K}_n)$	$(\chi(K_m) - 1)(c(\widehat{K}_n) - 1) + 1$
3	3	4	7
	4	5	9
	5	6	11
	6	7	13
	7	8	15
	8	9	17

Berdasarkan Definisi 2.3.2 hingga 2.3.4, maka definisi khusus bilangan Ramsey untuk graf lengkap K_m dan graf kipas $\widehat{K}_n$ pada penelitian ini, sebagai berikut.

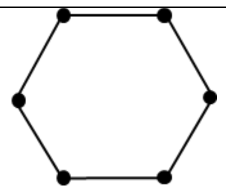
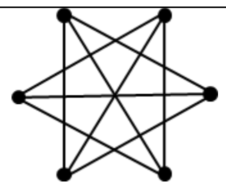
Definisi 2.3.5 Bilangan Ramsey $R(K_m, \widehat{K}_n)$ adalah adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga graf F berorde k akan memuat graf lengkap K_m atau komplemennya $(\bar{F})$ memuat graf kipas $\widehat{K}_n$.

Oleh karenanya, terdapat graf F berorde $k - 1$ tidak memuat graf lengkap K_m atau komplemennya $(\bar{F})$ memuat graf kipas $\widehat{K}_n$.

Contoh 2.3.3 Penentuan bilangan Ramsey $R(K_3, \widehat{K}_3)$

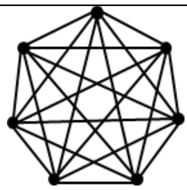
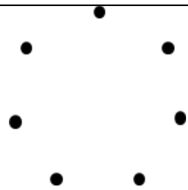
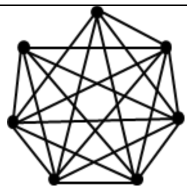
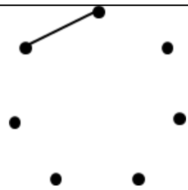
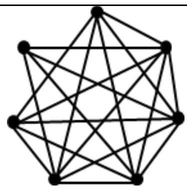
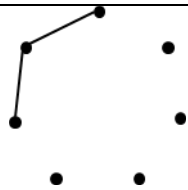
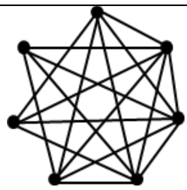
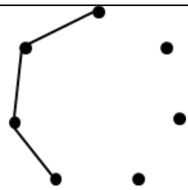
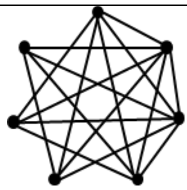
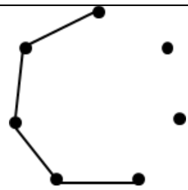
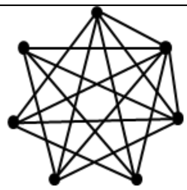
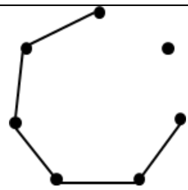
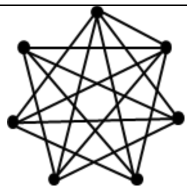
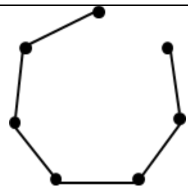
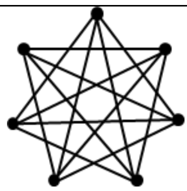
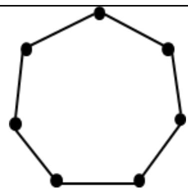
Misalkan k adalah bilangan asli terkecil untuk $R(K_3, \widehat{K}_3)$. Berdasarkan Table 2.4.2, diperoleh batas bawah $R(K_3, \widehat{K}_3)$ adalah $k = 7$.

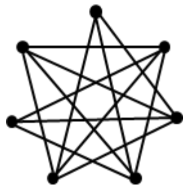
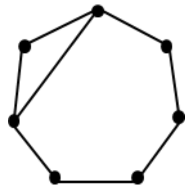
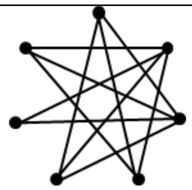
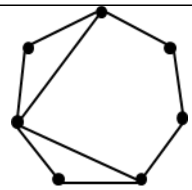
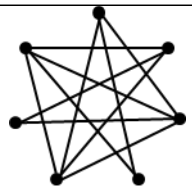
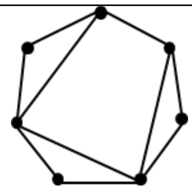
Akan ditunjukkan bahwa $R(K_3, \widehat{K}_3) = 7$. Untuk $k = 6$, terdapat graf F berorde 6 yang tidak memuat K_3 yaitu $F = C_6$ dan $\bar{F}$ juga tidak memuat $\widehat{K}_3$ yaitu $\bar{F} = 3 - reguler$. Gambar dari graf F dan $\bar{F}$ adalah sebagai berikut.

F:	$\bar{F}$:
	

Gambar 2.3.2 Graf F berorde 6 tidak memuat K_3 dan $\bar{F}$ juga tidak memuat $\widehat{K}_3$

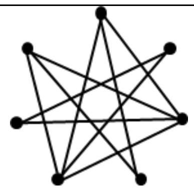
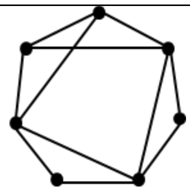
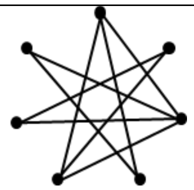
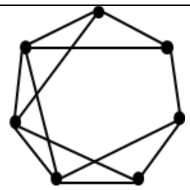
Sehingga dapat disimpulkan bilangan Ramsey $R(K_3, \widehat{K}_3) > 6$. Selanjutnya pilih $k = 7$. Maka sebarang graf F berorde 7 dan komplemennya adalah sebagai berikut.

F:	$\bar{F}$:
	
	
	
	
	
	
	
	

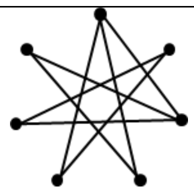
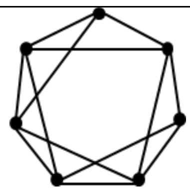
Gambar 2.3.3 Graf F Graf F berorde 7 memuat K_3 dan $\bar{F}$ tidak memuat $\widehat{K}_3$

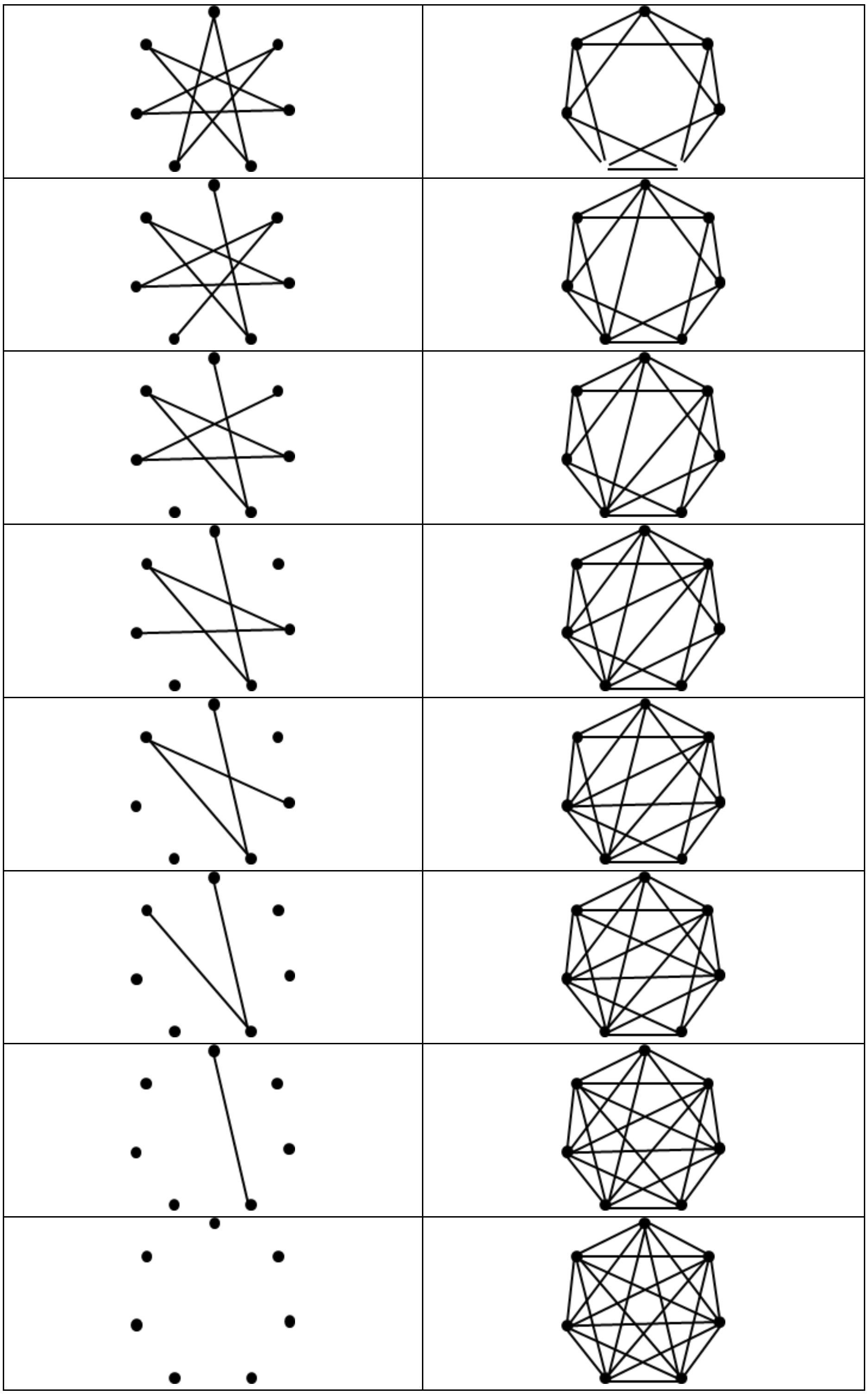
Pada Gambar 2.3.3 di atas, dapat diketahui bahwa graf F memuat K_3 sebagai subgraf dan $\bar{F}$ tidak memuat $\widehat{K}_3$ sebagai subgraf.

F:	$\bar{F}$:
	
	

Gambar 2.3.4 Graf F Graf F berorde 7 memuat K_3 dan $\bar{F}$ memuat $\widehat{K}_3$

Pada Gambar 2.3.4 di atas, dapat diketahui bahwa graf F memuat K_3 sebagai subgraf dan $\bar{F}$ memuat $\widehat{K}_3$ sebagai subgraf.

F:	$\bar{F}$:
	



Gambar 2.3.5 Graf F Graf F berorde 7 tidak memuat K_3 dan $\bar{F}$ memuat $\widehat{K}_3$

Pada Gambar 2.3.5 di atas, dapat diketahui bahwa graf F tidak memuat K_3 sebagai subgraf dan $\bar{F}$ memuat $\widehat{K}_3$ sebagai subgraf.

Berdasarkan gambar 2.3.3 hingga 2.3.5 dapat disimpulkan bahwa untuk sebarang graf F yang berorde 7 akan selalu memenuhi kondisi: graf F memuat K_3 sebagai subgraf atau $\bar{F}$ memuat $\widehat{K}_3$ sebagai subgraf, sedemikian sehingga $R\left(K_3, \widehat{K}_3\right) \leq 7$. Karena bilangan Ramsey $R\left(K_3, \widehat{K}_3\right) > 6$ dan $R\left(K_3, \widehat{K}_3\right) \leq 7$, maka dapat disimpulkan bahwa bilangan Ramsey $R\left(K_3, \widehat{K}_3\right) = 7$.

Beberapa hasil penelitian tentang bilangan Ramsey yang berkaitan dengan graf lengkap dan graf kipas dimuat dalam tabel berikut.

Tabel 2.3.2 Beberapa hasil penelitian bilangan Ramsey

Tahun	Peneliti	Hasil Penelitian
1983	Burr dan Erdos	$R(W_n, C_3) = 2n + 1$ untuk $n \geq 5$
1977	Chvátal	$R(T_n, K_m) = (m-1)(n-1) + 1$
1997	Gupta, dkk	$R(K_3, F_n) = 4n + 1$ untuk $n \geq 3$
2005	Surahmat, dkk	$R(K_4, F_n) = 6n + 1$ untuk $n \geq 4$
2007	Salman dan Broersma	$R\left(P_n, \widehat{K}_m\right) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{untuk } n = 1 \text{ dan } m \geq 3, \\ \boldsymbol{m} + \mathbf{1}, & \text{untuk } (n = 2 \text{ dan } m \geq 3) \text{ atau} \\ & (n = 3 \text{ dan genap } m \geq 4), \\ \boldsymbol{m} + \mathbf{2}, & \text{untuk } (n = 3 \text{ dan ganjil } m \geq 5), \\ \mathbf{3}\boldsymbol{n} - \mathbf{2}, & \text{untuk } (n, m = 3) \text{ atau} \\ & (n \geq 4 \text{ dan } m \text{ ganjil}, 3 \leq \mathrm{m} \leq 2\mathrm{n} - 1) \\ \mathbf{2}\boldsymbol{n} - \mathbf{1}, & \text{untuk } n \geq 4 \text{ dan } m \text{ genap}, 4 \leq m \leq n + 1 \end{cases}$
2014	Zhang dan Chen	$R(K_5, F_n) = 8n + 1$ untuk $n \geq 5$
2017	Li, dkk	Misalkan $n, m \geq 2$ 1. Jika $m \geq 2n$, maka $R\left(K_{1,n}, \widehat{K}_m\right) = \begin{cases} n + m - 1, & \text{untuk } n \text{ dan } m \text{ genap} \\ n + m, & \text{sebaliknya} \end{cases}$ 2. Jika $m \leq 2n - 1$, maka $R\left(K_{1,n}, \widehat{K}_m\right) = \begin{cases} n + \lfloor m/2 \rfloor - 1, & \text{untuk } n \text{ dan } \lfloor m/2 \rfloor \text{ genap} \\ n + \lfloor m/2 \rfloor, & \text{sebaliknya} \end{cases}$

Dari table di atas terlihat bahwa bilangan Ramsey untuk graf lengkap dengan graf kipas belum ditemukan. Karena itu, dalam penelitian kali ini akan dikaji bilangan Ramsey pada graf lengkap dengan graf kipas dengan menggunakan metode penelitian pada Bab III.