BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF BUNGA MATAHARI

SKRIPSI

MUH.YUSRIL

H011181317

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF BUNGA MATAHARI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

MUH.YUSRIL

H011181317

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	:	Muh.Yusril
NIM	:	H011181317
Program Studi	:	Matematika
Jenjang	:	S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya yang berjudul

Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Bunga Matahari

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 4 Agustus 2023

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL

10000

38AAKX561029239

Muh. Yusril

NIM. H011181317

HALAMAN PENGESAHAN

BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA
GRAF BUNGA MATAHARI

Disusun dan diajukan oleh

MUH.YUSRIL
H011181317

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 4 Agustus 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19700807 200003 1 002**

Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M. Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi Rabbil ‘Alamin, segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah Subhanahu wa Ta’ala yang telah melimpahkan rahmat dan karunianya sehingga penulisan skripsi ini yang berjudul “Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Bunga Matahari” dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurah kepada junjungan besar kita semua Rasulullah Muhammad Shollallahu ‘alaihi wa sallam yang menjadi suri tauladan bagi umat islam dalam menjalankan kehidupannya. Penulisan skripsi ini dilakukan sebagai persyaratan akademik untuk meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Dalam penyelesaian skripsi ini diperlukan proses yang sangat panjang, dengan banyak tantangan dan hambatan mulai dari penyusunan hingga akhirnya skripsi ini dapat dirampungkan.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
2. Bapak Dr. Eng Amiruddin, M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanussin beserta jajarannya, dan seluruh pihak birokrasi atas pengetahuan dan kemudahan-kemudahan yang diberikan, baik dalam bidang akademik maupun bidang kemahasiswaan.
3. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika sekaligus Ketua Program Studi Matematika atas ilmu, nasehat, dan saran yang telah diberikan kepada penulis.
4. Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. dan Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama dan dosen pembimbing pertama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran dalam mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini.

5. Bapak Dr. Muhammad Zakir, M.Si. dan Bapak Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan dalam penulisan skripsi ini.
6. Para dosen dan staf departemen Matematika yang telah membantu selama perkuliahan dan berbagai persuratan dalam penulisan skripsi ini.
7. Orang tua dan keluarga saya yang selalu mendukung agar penulisan skrispsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
8. Teman-teman seperjuangan dan kakak senior yang telah membantu selama perkuliahan hingga penulisan skripsi ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu penulis dalam merampungkan penulisan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menerima kritik dan saran demi tercapainya kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya bagi penulis, Aamiin ya Rabbal ‘Alamin.

Makassar, 4 Agustus 2023

Muh.Yusril

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	:	Muh.Yusril
NIM	:	H011181317
Program Studi	:	Matematika
Depertwmen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Bunga Matahari

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencamtukan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 4 Agustus 2023

Yang menyatakan,

(Muh.Yusril)

ABSTRAK

Pewarnaan lokasi merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan titik pada suatu graf. Banyaknya warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan lokasi dari graf G disebut dengan bilangan kromatik lokasi, yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Pada penelitian ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf bunga matahari, yang dinotasikan dengan SF_n. Metode yang digunakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf bunga matahari SF_n adalah dengan menentukan batas bawah dan batas atasnya. Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh bilangan kromatik lokasi pada graf bunga matahari SF_n sebagai berikut:

$$\chi_L(SF_n) = \begin{cases} 4\ , & untuk\ n = 3 \\ 5\ , & untuk\ 4 \leq n \leq 28 \end{cases}$$

Karena $\chi(SF_n) \leq \chi_L(SF_n)$, maka bilangan kromatik lokasi pada graf bunga matahari SF_n untuk $n > 28$ adalah $\chi(SF_n) \leq \chi_L(SF_n) \leq min\{k \mid n < 2k^2 - 5k + 4\}$.

Kata Kunci: Graf Bunga Matahari, Pewarnaan Graf, Bilangan Kromatik Lokasi

Judul	:	Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Bunga Matahari
Nama	:	Muh.Yusril
NIM	:	H011181317
Program Studi	:	Matematika

ABSTRACT

Location coloring is an extension of the concept of partition dimension and vertex coloring in a graph. The minimum number of colors used in the location coloring of a graph G is called the location chromatic number, which is denoted by $\chi_L(G)$*. In this study, the location chromatic number of sunflower graph will be determined, denoted by* SF_n*. The method used to determine the location chromatic number of the sunflower graph* SF_n *is by determining its lower and upper bounds. Based on the results of the research conducted, the location chromatic number of sunflower graph* SF_n *is obtained as follows:*

$$\chi_L(SF_n) = \begin{cases} 4\ , & for\ n = 3 \\ 5\ , & for\ 4 \leq n \leq 28 \end{cases}$$

Since $\chi(SF_n) \leq \chi_L(SF_n)$*, the chromatic number of locations in sunflower graph* SF_n *for* $n > 28$ *is* $\chi(SF_n) \leq \chi_L(SF_n) \leq min\{k \mid n < 2k^2 - 5k + 4\}$.

Keywords: Sun Flower Graph, Graph Coloring, Locating Chromatic Number

Title	:	*The Location Chromatic Number of Sunflower Graph*
Name	:	*Muh.Yusril*
Student ID	:	*H011181317*
Study Program	:	*Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan
$\boldsymbol{G = (V, E)}$	Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E
$\boldsymbol{\lvert V(G)\rvert}$	Banyaknya titik pada graf G
$\boldsymbol{\lvert E(G)\rvert}$	Banyaknya sisi pada graf G
$\Delta(\boldsymbol{G})$	Derajat titik maksimum pada graf G
$\boldsymbol{\delta(G)}$	Derajat titik minimum pada graf G
$\boldsymbol{P_n}$	Graf lintasan
$\boldsymbol{C_n}$	Graf siklus
$\boldsymbol{S_n}$	Graf bintang
$\boldsymbol{W_n}$	Graf roda
$\boldsymbol{SF_n}$	Graf bunga matahari
$\boldsymbol{pd(G)}$	Dimensi partisi pada graf G
$\boldsymbol{\chi(G)}$	Bilangan kromatik pada graf G
$\boldsymbol{\chi'(G)}$	Indeks kromatik pada graf G
$\boldsymbol{\chi_L(G)}$	Bilangan kromatik lokasi pada graf G

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Sejak abad ke-19, kajian tentang teori graf berkembang dengan sangat pesat khususnya materi yang terkait dengan dimensi metrik, dimensi partisi, pewarnaan graf, dan bilangan ramsey. Pewarnaan graf diyakini pertama kali muncul sebagai masalah pewarnaan peta, dimana warna setiap daerah pada peta yang berbatasan dibuat berlainan sehingga mudah untuk dibedakan. Banyak permasalahan yang mempunyai karakteristik seperti pewarnaan graf, sehingga menjadikan pewarnaan graf ini menarik untuk dipelajari lebih dalam. Masalah pewarnaan di dalam graf memiliki banyak variasi dengan tipe yang berbeda. Pewarnaan graf dibagi dalam tiga bagian, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*) (Gross dan Yellen, 2006).

Menurut Afriantini dkk. (2019) pewarnaan graf adalah pemetaan warna-warna pada titik, sisi, atau wilayah pada graf sedemikian sehingga setiap titik, sisi, atau wilayah yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Graf G dikatakan berwarna n jika terdapat pewarnaan dari graf yang menggunakan sebanyak n warna. Pada pewarnaan titik, jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai suatu graf G disebut bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G, yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Sedangkan pada pewarnaan sisi, jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai suatu graf G disebut indeks kromatik (*chromatic index*) dari graf G, yang dinotasikan dengan $\chi'(G)$.

Dalam pewarnaan graf, terdapat juga pewarnaan yang disebut dengan pewarnaan lokasi. Pewarnaan lokasi merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan titik pada suatu graf. Konsep dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, dkk. pada tahun 1998, sebagai pengembangan dari konsep dimensi metrik graf. Mereka mengelompokkan titik di graf G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menghitung jarak setiap titik di G terhadap semua kelas partisi untuk merepresentasikan setiap titik pada graf G. Konsep dimensi partisi digunakan pada pewarnaan lokasi untuk mencari kode warna semua titik pada graf. Suatu pewarnaan titik pada graf G dikatakan memenuhi pewarnaan lokasi jika setiap titik pada graf memiliki kode warna yang berbeda. Banyaknya warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan lokasi disebut dengan bilangan kromatik lokasi dari graf G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ (Kabang dkk., 2019).

Bilangan kromatik lokasi merupakan salah satu kajian yang masih menarik sampai saat ini, karena belum adanya teorema yang dapat digunakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf secara umum. Penelitian tentang bilangan kromatik lokasi untuk pertama kali dikaji oleh Chartrand, dkk. (2002). Mereka telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf, yaitu graf lintasan, graf siklus, graf bintang ganda, dan graf multipartit lengkap. Bilangan kromatik lokasi pada graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$ adalah $\chi_L(P_n) = 3$. Pada graf siklus C_n diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Pada graf bintang ganda $S_{a,b}$ diperoleh $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$ bila $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$. Misalkan graf terhubung G berorde $n \geq 3$, maka $\chi_L(G) = n$ jika dan hanya jika graf multipartit lengkap. Sehingga bilangan kromatik lokasi pada graf lengkap K_n adalah n. Chartrand, dkk. (2003) juga telah berhasil mengkonstruksi graf pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasinya bervariasi mulai dari 3 sampai dengan n, kecuali $n - 1$.. Asmiati, dkk. (2012) telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf kembang api. Behtoei dan Anbarloei (2014) telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf kipas, graf roda, dan graf persahabatan. Inayah, dkk. (2021) telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf buku B_n.

Berdasarkan penelusuran literatur yang telah dilakukan, belum ada penelitian yang berkaitan dengan penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf bunga matahari. Graf bunga matahari atau biasa disebut graf sunflower yang dinotasikan dengan SF_n adalah suatu graf yang serupa dengan graf roda. Perbedaan yang dimiliki graf bunga matahari dengan graf roda yaitu, graf bunga matahari memiliki titik tambahan yang bertetangga dengan dua titik pada graf roda untuk masing-masing titik tambahan. Oleh karena itu, penulis merumuskan judul pada proposal ini, yaitu bilangan kromatik lokasi pada graf bunga matahari.

1.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana mewarnai titik-titik pada graf bunga matahari SF_n dengan menggunakan warna seminimum mungkin untuk mendapatkan partisi warna dari himpunan titik graf bunga matahari SF_n sedemikian sehingga setiap titik pada graf bunga matahari SF_n memiliki kode warna yang berbeda.

1.3. Batasan Masalah

Pewarnaan titik pada graf terbagi menjadi beberapa jenis, seperti pewarnaan titik biasa, pewarnaan lokasi, pewarnaan ganda, dan lain sebagainya. Pada penelitian ini, penulis hanya mengkaji penentuan pewarnaan titik biasa dan pewarnaan lokasi dari graf bunga matahari SF_n, dengan $n \geq 3$.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf bunga matahari SF_n.

1.5. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat antara lain:

1. Dapat menentukan bilangan kromatik lokasi untuk graf bunga matahari SF_n.
2. Menambah wawasan bagi penulis dan pembaca mengenai bilangan kromatik lokasi, khususnya untuk graf bunga matahari SF_n.
3. Sebagai bahan referensi penelitian lanjutan tentang menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf bunga matahari SF_n.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan konsep dasar pada teori graf, jenis-jenis graf, pewarnaan graf, dimensi partisi, serta penjelasan mengenai bilangan kromatik lokasi graf yang digunakan pada bab selanjutnya.

2.1 Konsep Dasar Graf

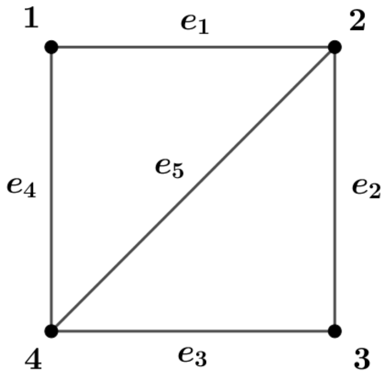
Pada subbab ini diberikan definisi graf dan beberapa istilah-istilah dalam teori graf beserta contoh yang digunakan dalam penelitian ini. Agar lebih mudah memahami konsep graf, maka pada subbab ini diawali dengan definisi graf.

Definisi 2.1.1 *Graf adalah pasangan himpunan* (V, E), *dengan* V *adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan* E *adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota* V *yang disebut sisi (Hasmawati, 2020).*

Berdasarkan Definisi 2.1.1, himpunan V disebut himpunan titik (*vertex* set), dan E disebut himpunan sisi (*edge* set). Jika graf (V, E) dinotasikan G, dengan kata lain $G = (V, E)$, maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$. Titik pada graf dapat dilabeli dengan huruf, seperti $a, b, c, \cdots, z$, dengan bilangan asli $1, 2, 3, \cdots$, atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v dinyatakan dengan lambang e. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v, maka e dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$. Untuk penyederhanaan penulisan, sisi $e = (u, v)$ cukup ditulis $e = uv$. Banyaknya anggota dari $V(G)$ disebut orde (*order*) dari G yang dinotasikan $|V(G)|$ dan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut ukuran (*size*) dari G yang dinotasikan $|E(G)|$. Secara geometri, graf digambarkan sebagai sekumpulan noktah (titik) di dalam bidang dwimatra yang dihubungkan dengan sekumpulan garis (sisi).

Contoh 2.1.1 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{12, 23, 34, 14, 24\}$. Sehingga orde dari graf G adalah 4, dinotasikan $|V(G)| = 4$. Sedangkan ukuran dari graf G adalah 5, dinotasikan

$|E(G)| = 5$. Jika $e_1 = 12$, $e_2 = 23$, $e_3 = 34$, $e_4 = 14$, dan $e_5 = 24$, maka bentuk graf G dapat dilihat pada Gambar 2.1.1 berikut.



Gambar 2.1.1 Graf G

Definisi 2.1.2 *Misalkan G adalah suatu graf dan $u, v \in V(G)$. Jika sisi $e = uv$ merupakan suatu sisi di graf G, maka titik u dikatakan **bertetangga** (adjacent) dengan titik v. Sedangkan sisi e dikatakan **bersisian** (incident) dengan titik u dan titik v (Chartrand dan Lesniak, 1996).*

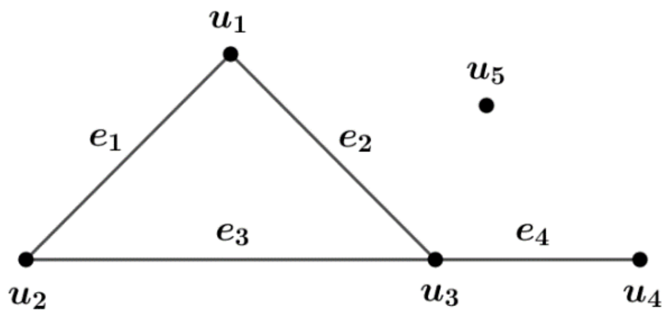
Definisi 2.1.3 ***Titik terisolasi*** *adalah titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya. Atau, dapat juga dinyatakan bahwa titik terisolasi adalah titik yang tidak satupun bertetangga dengan titik-titik lainnya (Munir, 2010).*

Definisi 2.1.4 ***Derajat*** *suatu titik pada graf adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Notasi $d(v)$ menyatakan derajat titik v. Derajat maksimum dari graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ (Munir, 2010).*

Definisi 2.1.5 ***Lintasan*** *yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n didalam graf G adalah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = v_0v_1$, $e_2 = v_1v_2$, $\cdots$, $e_n = v_{n-1}v_n$ adalah sisi-sisi dari graf G (Munir, 2010).*

Definisi 2.1.6 *Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut* ***sirkuit*** *atau* ***siklus*** *(Munir, 2010).*

Contoh 2.1.2 Diberikan graf H dengan himpunan titik $V(H) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan himpunan sisi $E(H) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3, u_3u_4\}$. Jika $e_1 = u_1u_2$, $e_2 = u_1u_3$, $e_3 = u_2u_3$, dan $e_4 = u_3u_4$, maka bentuk graf H dapat dilihat pada Gambar 2.1.2. berikut.



Gambar 2.1.2 Graf H

Berdasarkan graf H diperoleh:

i. Titik u_1 bertetangga dengan titik u_2 dan u_3, tetapi titik u_1 tidak bertetangga dengan titik u_4 dan u_5.

ii. Sisi $e_1 = u_1u_2$ bersisian dengan titik u_1 dan u_2, tetapi sisi $e_1 = u_1u_2$ tidak bersisian dengan titik u_3, u_4, dan u_5.

iii. Titik u_5 merupakan titik terisolasi.

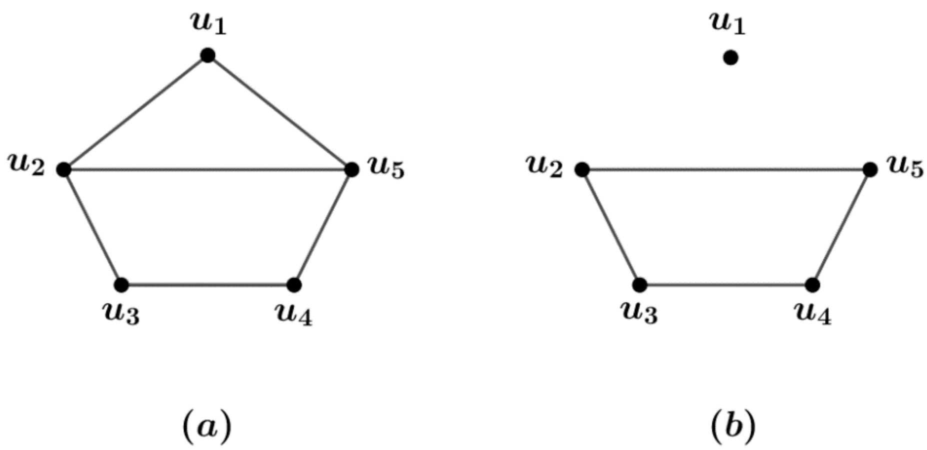
iv. Derajat dari setiap titik pada graf H adalah $d(u_1) = 2$, $d(u_2) = 2$, $d(u_3) = 3$, $d(u_4) = 1$, dan $d(u_5) = 0$. Sehingga derajat maksimum dari graf H adalah $\Delta(H) = 3$ dan derajat minimum dari graf H adalah $\delta(H) = 0$.

v. $u_2 - e_1 - u_1 - e_2 - u_3 - e_4 - u_4$ merupakan contoh lintasan graf H.

vi. $u_2 - e_1 - u_1 - e_2 - u_3 - e_3 - u_2$ merupakan contoh siklus dari graf H.

Definisi 2.1.6 *Graf G disebut **graf terhubung** (connected graph) jika untuk setiap pasang titik u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v. Jika tidak, maka graf G disebut graf tak terhubung (disconnected graph) (Munir, 2010).*

Contoh 2.1.3

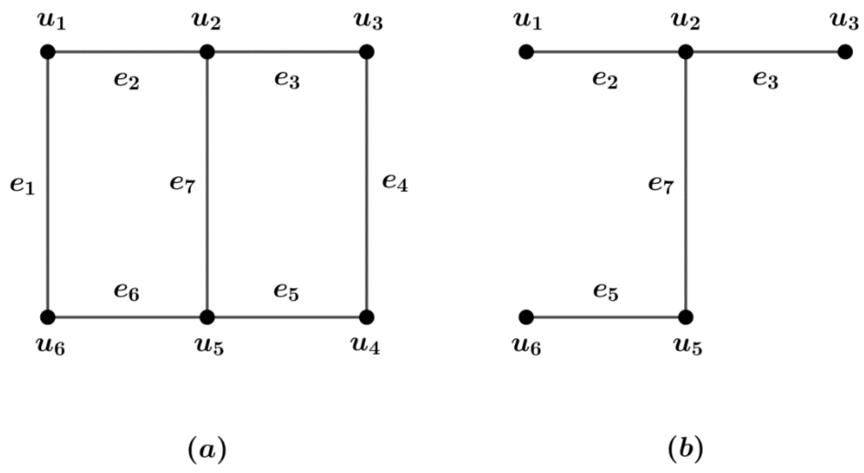


Gambar 2.1.3 (a) Graf Terhubung (b) Graf Tak Terhubung

Graf pada gambar 2.1.3 (a) merupakan contoh graf terhubung, karena berdasarkan gambar terlihat bahwa untuk setiap dua titik pada graf tersebut, terdapat lintasan yang memuat kedua titik tersebut. Sedangkan graf pada gambar 2.1.3 (b) merupakan contoh graf tak terhubung, karena terdapat dua titik yang berbeda pada graf tersebut, yaitu tititk u_1 dan u_2 tetapi tidak ada lintasan yang memuat kedua titik tersebut.

Definisi 2.1.7 *Graf H dikatakan **subgraf** dari graf G dinotasikan dengan $H \subseteq G$ jika dan hanya jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Asmiati, 2016).*

Contoh 2.1.4 Misalkan graf G dengan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_6, u_1u_6, u_2u_5\} = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_1, e_7\}$. Misalkan pula graf H dengan $V(H) = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6\}$ dan $E(H) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_5, u_5u_6\} = \{e_2, e_3, e_5, e_7\}$. Karena $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, maka H merupakan subgraf dari graf G.



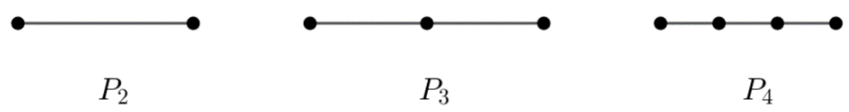
Gambar 2.1.4 (a) Graf G, (b) Graf H (subgraf dari graf G)

2.2 Jenis-Jenis Graf

Penentuan beberapa jenis graf pada umumnya merujuk pada buku pengantar dan jenis-jenis graf oleh Hasmawati tahun 2020. Pada subbab ini, akan dipaparkan beberapa jenis graf, meliputi graf lintasan (P_n), graf siklus (C_n), graf bintang (S_n), graf roda (W_n), dan graf bunga matahari (SF_n).

Definisi 2.2.1 *Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas satu lintasan. Graf lintasan yang berorde n, dinotasikan dengan P_n (Hasmawati, 2020).*

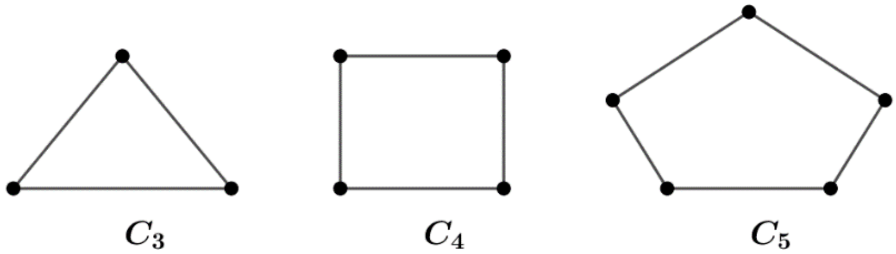
Contoh 2.2.1:



Gambar 2.2.1 Graf Lintasan P_2, P_3, dan P_4

Definisi 2.2.2 *Graf siklus adalah graf sederhana hanya terdiri atas satu siklus. Graf siklus yang berorde n, dinotasikan dengan C_n (Hasmawati, 2020).*

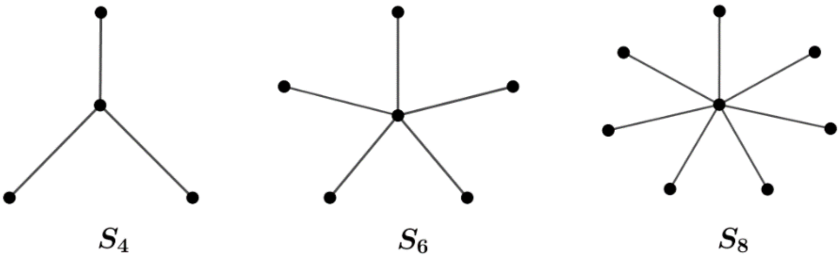
Contoh 2.2.2:



Gambar 2.2.2 Graf Siklus C_3, C_4, dan C_5

Definisi 2.2.3 *Graf bintang berorde n dinotasikan dengan* S_n *adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat* $n-1$ *dan* $n-1$ *berderajat satu. (Hasmawati, 2020).*

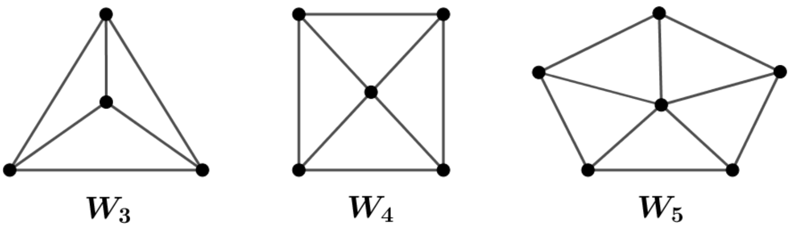
Contoh 2.2.3:



Gambar 2.2.3 Graf Bintang S_4, S_6, dan S_8

Definisi 2.2.4 *Graf roda adalah graf yang dibentuk dari graf siklus* C_n *dengan menambahkan satu titik pusat* x*, dengan* x *bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde* $n+1$ *dinotasikan dengan* W_n *(Hasmawati, 2020).*

Contoh 2.2.4:

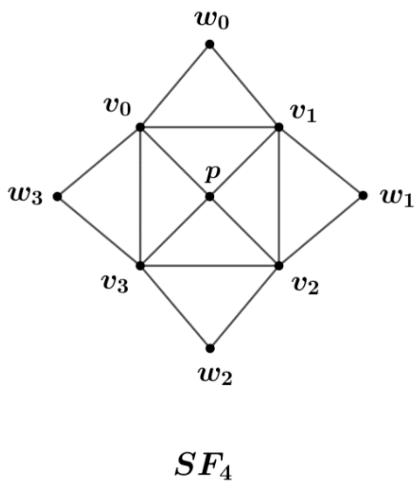


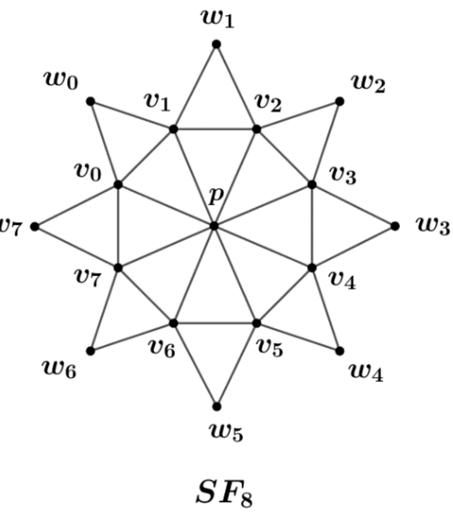
Gambar 2.2.4 Graf roda W_3, W_4, dan W_5

Definisi 2.2.5 *Graf bunga matahari SF_n untuk $n \geq 3$ adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan titik pusat p dan sikel berorde n, $v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ dan n titik tambahan $w_0, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}$, selanjutnya w_i dikaitkan dengan sisi ke v_i dan v_{i+1} untuk $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, dengan $i+1$ merupakan modulo n (Javaid dan Shokat, 2008).*

Graf bunga matahari SF_n berorde $2n+1$ dan berukuran $4n$. Titik-titik pada SF_n terdiri atas 3 macam, yakni n titik berderajat lima dan n titik berderajat dua, serta 1 titik berderajat n. Titik dengan derajat dua disebut titik minor, titik dengan derajat lima disebut titik mayor, dan titik yang berderajat n disebut titik pusat.

Contoh 2.2.5 Diberikan graf bunga matahari SF_4 dengan himpunan titik $V(SF_4) = \{p, v_0, v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3\}$ dan himpunan sisi $E(SF_4) = \{pv_0, pv_1, pv_2, pv_3,$ $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_0, v_0w_0, v_1w_1, v_2w_2, v_3w_3, v_1w_0, v_2w_1, v_3w_2, v_0w_3\}$, dengan cara yang sama untuk graf bunga matahari SF_8. Bentuk graf bunga matahari SF_4 dan SF_8 dapat dilihat pada Gambar 2.2.5 berikut.





Gambar 2.2.5 Graf Bunga Matahari SF_4 dan SF_8

2.3 Pewarnaan Graf

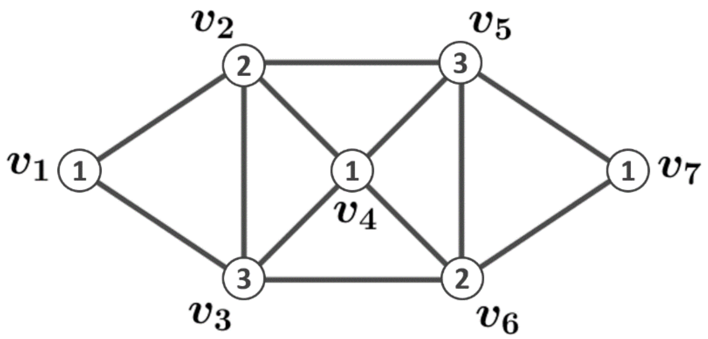
Konsep pewarnaan graf diperkenalkan oleh Francis Guthrie pada tahun 1852, yang menyadari bahwa untuk mewarnai peta wilayah Britania Raya dibutuhkan maksimal empat warna yang berbeda, sehingga setiap dua daerah yang bersebelahan selalu memiliki dua warna yang berbeda. Warna yang diberikan bisa direpresentasikan dengan bilangan asli terurut mulai dari 1 atau dapat juga direpresentasikan langsung dengan menggunakan warna, seperti merah, biru, hijau, dan lain-lain. Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan bidang. Terkait dengan topik pembahasan, maka penulis hanya membahas kajian tentang pewarnaan titik.

Definisi 2.3.1 *Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada titik-titik didalam graf sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna berbeda. Pewarnaan-k titik sejati dari graf* G *adalah suatu pemetaan* $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$ *sedemikian sehingga* $c(u) \neq c(v)$ *untuk setiap* $u, v \in V(G)$ *dan* $uv \in E(G)$ *(Darmawahyuni, 2019).*

Di dalam pewarnaan titik, kita tidak hanya sekedar mewarnai titik-titik dengan warna yang berbeda dari warna titik tetangganya saja, namun kita juga menginginkan jumlah warna yang digunakan sesedikit mungkin. Bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga graf G mempunyai suatu *pewarnaan-k* titik sejati disebut dengan bilangan kromatik graf G, dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Suatu graf G yang mempunyai bilangan kromatik k dilambangkan dengan $\chi(G) = k$. Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong N_n memiliki $\chi(G) = 1$, karena semua titik tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Grap lengkap K_n memiliki $\chi(G) = n$, karena semua titik saling terhubung, maka diperlukan n buah warna. Graf bipartit $K_{m,n}$ mempunyai $\chi(G) = 2$, satu warna untuk titik-titik di himpunan V_1 dan satu warna lagi untuk titik-titik di V_2. Graf siklus C_n dengan n ganjil memiliki $\chi(G) = 3$, sedangkan jika n genap maka $\chi(G) = 2$. Sembarang pohon T memiliki $\chi(T) = 2$. Untuk graf-graf yang lain tidak dapat dinyatakan secara umum bilangan kromatiknya (Munir, 2010).

Contoh 2.3.1 Diberikan contoh pewarnaan titik pada graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ seperti pada gambar 2.3.1. Dapat dilihat bahwa graf G tersebut dapat diwarnai dengan menggunakan minimum tiga warna dan setiap dua titik yang saling bertetangga memiliki warna yang berbeda, sehingga bilangan kromatik dari graf G adalah 3, dinotasikan $\chi(G) = 3$.



Gambar 2.3.1 Pewarnaan Titik pada Graf G dengan Tiga Warna

2.4 Dimensi Partisi

Konsep dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, dkk. (1998), sebagai pengembangan dari konsep dimensi metrik graf. Berikut ini diberikan beberapa definisi yang terkait dengan konsep dimensi partisi.

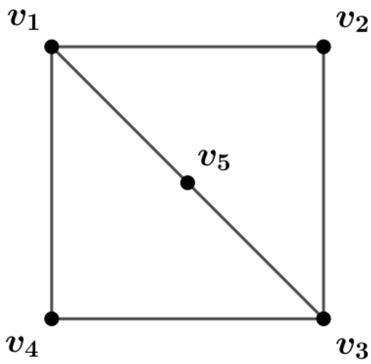
Definisi 2.4.1 *Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf terhubung, $v \in V(G)$, dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S yang dinotasikan dengan $d(v, S)$, didefinisikan sebagai $d(v, S) = min\{d(v, x), x \epsilon S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x (Chartrand dkk., 1998).*

Definisi 2.4.2 *Misalkan $\prod = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ adalah himpunan partisi dari $V(G)$ dengan $S_1, S_2, \cdots, S_k$ adalah kelas-kelas partisi dari $\prod$. Misalkan $v \in V(G)$, Representasi v terhadap $\prod$ yang dinotasikan dengan $r(v|\prod)$, adalah k-vektor $\big(d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)\big)$ (Chartrand dkk., 1998).*

Definisi 2.4.3 *Himpunan partisi $\prod = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Nilai k*

terkecil sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas disebut dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$ (Chartrand dkk., 1998).

Contoh 2.4.1 Misalkan diberikan graf G dengan hinmpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ seperti pada gambar 2.4.1.



Gambar 2.4.1 Graf G dengan 5 titik

Misalkan himpunan titik pada graf G dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_5\}$, $S_2 = \{v_3\}$, dan $S_3 = \{v_4\}$. Diperoleh representasi semua titik terhadap Π pada graf G, yaitu $r(v_1|\Pi) = (0, 2, 1)$, $r(v_2|\Pi) = (0, 1, 2)$, $r(v_3|\Pi) = (1, 0, 1)$, $r(v_4|\Pi) = (1, 1, 0)$, dan $r(v_5|\Pi) = (0, 1, 2)$. Karena representasi semua titik pada graf G berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf G, sehingga diperoleh batas atas $pd(G) \leq 3$. Andaikan terdapat partisi dari himpunan titik pada graf G, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $S_2 = \{v_4, v_5\}$. Karena titik v_4 dan v_5 akan memiliki representasi yang sama, yaitu $r(v_4|\Pi) = r(v_5|\Pi) = (1, 0)$, maka Π bukan partisi pembeda dari graf G. Akibatnya diperoleh batas bawah $pd(G) \geq 3$. Jadi, dimensi partisi dari graf G adalah $pd(G) = 3$.

2.5 Bilangan Kromatik Lokasi

Bilangan kromatik lokasi graf pertama kali dikaji oleh Chartrand, dkk. pada tahun 2002. Konsep ini merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan titik pada graf. Berikut ini diberikan definisi bilangan kromatik lokasi graf yang diambil dari Chartrand, dkk. (2002).

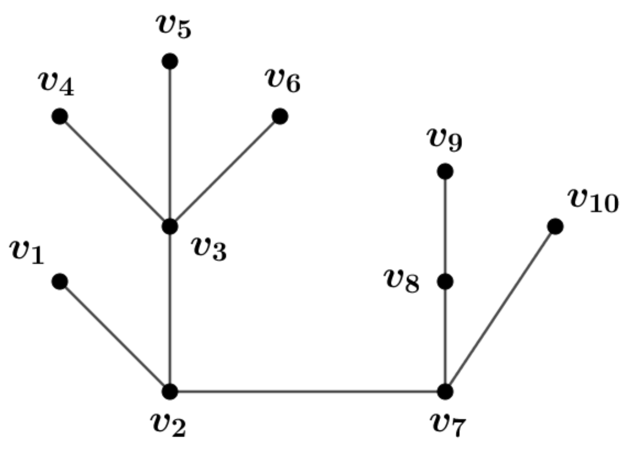
Definisi 2.5.1 *Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i untuk $i = 1, 2, \cdots, k$, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\prod = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ merupakan partisi yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna dari v, dinotasikan dengan $c_{\prod}(v)$ adalah k-vektor $\big(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k)\big)$ dengan $d(v, C_i) = min\{d(v, x) | x \epsilon C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari graf G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ (Chartrand dkk., 2002).*

Berikut ini merupakan teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi menurut Chartrand, dkk. (2002).

Teorema 2.5.1 *(Chartrand dkk., 2002) Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan $N(v)$ merupakan himpunan dari tetangga titik v. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\prod = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari $\prod$. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_{\prod}(u) = c_{\prod}(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$.

Contoh 2.5.1 Misalkan diberikan suatu graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ seperti pada gambar 2.5.1.



Gambar 2.5.1 Graf G dengan 10 Titik

Akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi dari graf G. Misalkan c adalah pewarnaan titik dengan empat warna. Titik-titik pada graf G diwarnai sebagai berikut: $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 1$, $c(v_4) = 2$, $c(v_5) = 3$, $c(v_6) = 4$, $c(v_7) = 3$, $c(v_8) = 2$, $c(v_9) = 1$, dan $c(v_{10}) = 1$. Diperoleh partisi warna dari himpunan titik graf G, yaitu $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan:

$$C_1 = \{v_1, v_3, v_9, v_{10}\},$$

$$C_2 = \{v_2, v_4, v_8\},$$

$$C_3 = \{v_5, v_7\},$$

$$C_4 = \{v_6\}.$$

Kode warna untuk setiap titik pada graf G terhadap $\prod$ adalah sebagai berikut.

$$c_{\prod}(v_1) = \big(d(v_1, C_1), d(v_2, C_2), d(v_1, C_3), d(v_1, C_4)\big) = (0, 1, 2, 3)$$

$$c_{\prod}(v_2) = \big(d(v_2, C_1), d(v_2, C_2), d(v_2, C_3), d(v_2, C_4)\big) = (1, 0, 1, 2)$$

$$c_{\prod}(v_3) = \big(d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3), d(v_3, C_4)\big) = (0, 1, 1, 1)$$

$$c_{\prod}(v_4) = \big(d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3), d(v_4, C_4)\big) = (1, 0, 2, 2)$$

$$c_{\prod}(v_5) = \big(d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3), d(v_5, C_4)\big) = (1, 2, 0, 2)$$

$$c_{\prod}(v_6) = \big(d(v_6, C_1), d(v_6, C_2), d(v_6, C_3), d(v_6, C_4)\big) = (1, 2, 2, 0)$$

$c_{\prod}(v_7) = \big(d(v_7, C_1), d(v_7, C_2), d(v_7, C_3), d(v_7, C_4)\big) = (1, 1, 0, 3)$

$c_{\prod}(v_8) = \big(d(v_8, C_1), d(v_8, C_2), d(v_8, C_3), d(v_8, C_4)\big) = (1, 0, 1, 4)$

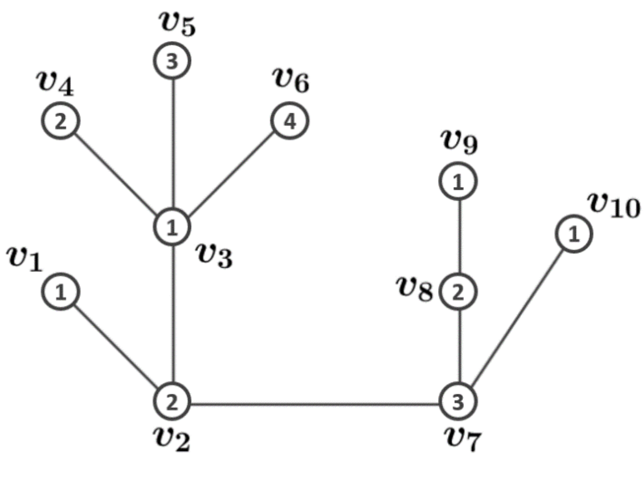
$c_{\prod}(v_9) = \big(d(v_9, C_1), d(v_9, C_2), d(v_9, C_3), d(v_9, C_4)\big) = (0, 1, 2, 5)$

$c_{\prod}(v_{10}) = \big(d(v_{10}, C_1), d(v_{10}, C_2), d(v_{10}, C_3), d(v_{10}, C_4)\big) = (0, 2, 1, 4)$

Dapat dilihat bahwa kode warna semua titik pada graf G berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi dengan menggunakan empat warna. Sehingga diperoleh batas atas $\chi_L(G) \leq 4$.

Selanjutnya akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf G. Andaikan c adalah pewarnaan lokasi dengan menggunakan tiga warna. Karena titik v_3 memuat 3 daun, maka akan terdapat dua daun yang berwarna sama. Perhatikan bahwa kedua daun tersebut mempunyai jarak yang sama terhadap titik-titik yang lain (selain kedua daun tersebut). Akibatnya, kedua daun itu akan mempunyai kode warna yang sama, suatu kontradiksi. Sehingga diperoleh batas $\chi_L(G) \geq 4$.

Berdasarkan uraian diatas diperoleh batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf G, yaitu $4 \leq \chi_L(G) \leq 4$. Jadi, bilangan kromatik lokasi pada graf G adalah $\chi_L(G) = 4$.



Gambar 2.5.2 Pewarnaan Lokasi Minimum pada Graf G

Proposisi 2.5.2 *Misalkan H adalah subgraf dari graf G, maka $\chi_L(G) \geq \chi_L(H)$.*

Bukti. Apapun warna-warna yang digunakan pada simpul-simpul dari subgraf H dalam pewarnaan lokasi minimum dari graf G juga dapat digunakan dalam pewarnaan lokasi dari subgraf H dengan sendirinya.

Teorema 2.5.3 *(Chartrand dkk., 2002) Bilangan kromatik lokasi pada graf siklus C_n dengan n titik sebagai berikut.*

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3\ , & jika\ n\ ganjil \\ 4\ , & jika\ n\ genap \end{cases}$$

Bukti. Misalkan himpunan titik $V(C_n) = \{v_i : i \in [0, n-1]\}$ dan himpunan sisi $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : i \in [0, n-1]\}$, dengan $i + 1$ merupakan modulo n.

a. Kasus 1, untuk n ganjil. Jelas bahwa sekurang-kurangnya dibutuhkan tiga warna untuk mewarnai titik-titik pada C_n, untuk n ganjil. Jadi, $\chi_L(C_n) \geq 3$. Misalkan c adalah pewarnaan menggunakan tiga warna. Warnai titik-titik pada C_n sebagai berikut: $c(v_i) = 1$, untuk i ganjil; $c(v_i) = 2$, untuk i genap dan $i \neq n-1$; $c(v_{n-1}) = 3$. Jelas bahwa kode warna semua titik berbeda. Jadi, $\chi_L(C_n) \leq 3$. Terbukti bahwa $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil.

b. Kasus 2, untuk n genap. Serupa dengan pembuktian Kasus 1, akan diperoleh $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap.

Teorema 2.5.4 *(Behtoei, 2014) Untuk $n \geq 3$, misalkan $W_n = K_1 + C_n$ dan $m = min\left\{k \in N \,\middle|\, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\right\}$. Maka,*

$$\chi_L(W_n) = \begin{cases} 1 + \chi_L(C_n), & jika\ 3 \leq n < 9 \\ m + 1, & jika\ n \neq \frac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1\ dan\ n \geq 9 \\ m + 2, & jika\ n = \frac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1\ dan\ n \geq 9 \end{cases}$$