

**NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF  
PISAU PEMOTONG RUMPUT**

**SKRIPSI**



**YUNI SYAHRANI**

**H011171509**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2023**

# **NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF PISAU PEMOTONG RUMPUT**

## **SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas  
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**



**YUNI SYAHRANI**

**H011171509**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGELOLAAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2023**

**PERNYATAAN KEASLIAN**

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Yuni Syahrani

Nim : H01117150

Program Studi : Matematika

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

**Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Pisau Pemotong Rumput**

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan tulisan orang lain bahwa Skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 4 Agustus 2023

Yang menyatakan



**YUNI SYAHRANI**

NIM. H011171509

LEMBAR PENGESAHAN  
NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF  
PISAU PEMOTONG RUMPUT

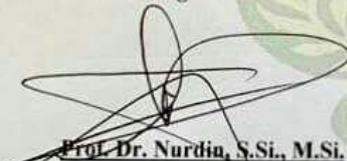
Disusun dan diajukan oleh

YUNI SYAHRANI  
H011171509

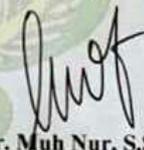
Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka  
Penyelesaian Studi Program Sarjana Studi Matematika Fakultas  
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada  
tanggal 4 Agustus 2023  
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama

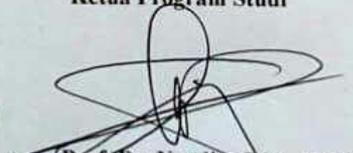
  
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.  
NIP. 19700807 200003 1 002

Pembimbing Pertama

  
Dr. Muh Nur, S.Si., M.Si.  
NIP.19850529 200812 1 002

Ketua Program Studi



  
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.  
NIP. 19700807 200003 1 002

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbi'alamin. Puji syukur penulis hanturkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul “**Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Pisau Pemetong Rumput**”. Shalawat dan salam senantiasa penulis kirimkan kepada Baginda Rasulullah SAW, yang telah mengajarkan kebenaran dan membimbing umat-umatnya ke arah yang benar.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini dapat terselesaikan berkat bantuan,dukungan,bimbingan,nasehat dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang tak terhingga serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada orang tua dan suami penulis, Ayahanda **H.SUARDI**, Ibunda **HJ.JENNI** dan suami **TAHAQ** yang telah sabar mendidik, memberi motivasi, solusi, nasehat, serta selalu mendoakan setiap langkah dan proses penulis dalam mencari ilmu dengan segala pengorbanan yang telah diberikan yang takkan bisa penulis balas. Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan **Dr. Eng. Amiruddin**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika sekaligus dosen pembimbing utama yang telah meluangkan banyak waktunya dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, arahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan. **Segenap dosen pengajar dan staf Departemen Matematika** yang telah membekali banyak ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
3. **Bapak Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah sabar dan tulus meluangkan waktunya untuk membimbing dan memberikan saran serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.

4. **Ibu Naimah Aris, S.Si., M.Math.** selaku dosen penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih banyak atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat serta dukungan telah membimbing penulis menjalani pendidikan di Departemen Matematika.
5. **Ibu Nur Rohmah Oktaviani P., S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan saran serta kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
6. **Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika** yang telah membimbing, mendidik, dan memberikan ilmunya kepada penulis.
7. Terima kasih kepada **Defi, Sarti, Nanda, Sumarni, Eda, Riska, Riswan, Fira, Khandy, Hafsah, Mj dan Math17** yang telah memberikan warna selama perkuliahan dan memberi semangat kepada penulis.
8. Spesial untuk sahabat penulis **Ayu dan uni** atas rasa persaudaraan yang diberikan kepada penulis.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebut satu per satu yang telah mendukung dan membantu sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini. Dengan segala kerendahan hati, penulis menerima kritik dan saran demi tercapainya kesempurnaan pada skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pihak yang berkepentingan.

Makassar, 4 Agustus 2023



Yuni Syahrani

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK  
KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Yuni Syahrani  
NIM : H011171509  
Program Studi : Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Non-exclusive royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

**“Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Pisau Pemetong Rumput”**

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 4 Agustus 2023

Yang Menyatakan



(Yuni Syahrani)

## ABSTRAK

Misalkan  $G$  adalah suatu graf sederhana. Pelabelan total  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  disebut suatu pelabelan- $k$  total tidak teratur titik pada graf  $G$  jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada  $V$  berlaku  $wt(x) \neq wt(y)$  dimana  $wt(x) = f(x) + \sum_{u \in V} f(xu)$ . Nilai total ketidakteraturan titik dari graf  $G$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $k$  sedemikian sehingga  $G$  mempunyai suatu pelabelan- $k$  total ketidakteraturan titik.

Skripsi ini membahas mengenai nilai total ketidakteraturan titik graf pisau pemotong rumput untuk  $n \geq 6$  dimana  $n$  adalah bilangan bulat genap. Hasil yang diperoleh sebagai berikut:

$$tvs(GCK_n) = \left\lceil \frac{3n + 3}{6} \right\rceil.$$

Kata kunci : Graf Pisau Pemotong Rumput, Pelabelan Total Ketidakteraturan Titik, Nilai Total Ketidakteraturan Titik.

**ABSTRACT**

Let  $G$  be a simple graph. A total labeling  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  is called a vertex irregular total  $k$ -labeling of  $G$  if for any two different vertices in  $V$  then  $wt(x) \neq wt(y)$  where  $wt(x) = f(x) + \sum_{u \in V} f(xu)$ . The minimum  $k$  for which a graph  $G$  has a vertex irregular total  $k$ -labeling is called the total vertex irregularity strength of  $G$ .

This thesis discusses the total irregularity value of the point graph of a lawn mower, denoted by  $GCK_n$ , for  $n \geq 6$  and  $n$  is even integers. The result obtained are as follows.

$$tvs(GCK_n) = \left\lceil \frac{3n + 3}{6} \right\rceil.$$

Keyword : Grass Cutting Knife Graph, Vertex Irregular Total  $k$ -labeling, Total Vertex Irregularity Strength.

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	ii
PERNYATAAN KEASLIAN.....	iii
LEMBAR PENGESAHAN .....	iv
KATA PENGANTAR .....	v
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS .....	vii
ABSTRAK .....	viii
ABSTRACT.....	ix
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xii
DAFTAR LAMBANG .....	xiii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Pengertian Graf.....	5
2.2 Terminologi Graf.....	6
1.3 Jenis-jenis Graf.....	8
1.4 Pelabelan Graf .....	11
1.5 Pelabelan Total Tidak Teratut Titik .....	12
BAB III METODE PENELITIAN.....	14
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN .....	15
4.1 Graf pisau pemotong rumput.....	15
4.2 Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Pisau Pemotong Rumput.....	15
BAB V PENUTUP.....	81

5.1	Kesimpulan.....	81
5.2	Saran.....	81
	DAFTAR PUSTAKA .....	82

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1.1</b> Graf $G$ .....	5
<b>Gambar 2.2.1</b> Graf $G$ .....	7
<b>Gambar 2.3.1</b> (a) Graf sederhana, (b) Graf tak sederhana, (c) Graf tak sederhana	8
<b>Gambar 2.3.2</b> Graf Lintasan .....	8
<b>Gambar 2.3.3</b> Graf Siklus .....	8
<b>Gambar 2.3.4</b> Graf Lintasan x Graf Siklus .....	9
<b>Gambar 2.3-5</b> Graf pisau pemotong rumput.....	10
<b>Gambar 2.4-1</b> Pelabelan total pada graf siklus $C_5$ .....	11
<b>Gambar 2.5-1</b> Beberapa pelabelan total pada graf siklus $C_5$ .....	13
<b>Gambar 4.1-1</b> Graf pisau pemotong rumput.....	15
<b>Gambar 4.2-1</b> Pelabelan-3 total tidak teratur titik pada graf $GCK_4$ .....	17
<b>Gambar 4.2-2</b> Pelabelan-4 total tidak teratur titik pada graf $GCK_6$ .....	17
<b>Gambar 4.2-3</b> Pelabelan-5 total tidak teratur titik pada graf $GCK_8$ .....	18
<b>Gambar 4.2-4</b> Pelabelan-6 total tidak teratur titik pada graf $GCK_{10}$ .....	18
<b>Gambar 4.2-5</b> Pelabelan-7 total tidak teratur titik pada graf $GCK_{12}$ .....	19
<b>Gambar 4.2-6</b> Pelabelan-8 total tidak teratur titik pada graf $GCK_{14}$ .....	19
<b>Gambar 4.2-7</b> Pelabelan-9 total tidak teratur titik pada graf $GCK_{16}$ .....	20

## DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali di halaman
$GCK_n$	Graf pisau pemotong rumput	3
$V(G)$	Himpunan titik graf $G$	5
$E(G)$	Himpunan sisi graf $G$	5
$N_G(v)$	Himpunan tetangga suatu titik graf $G$	6
$d(v_i)$	Derajat suatu titik $v$ pada graf	6
$\Delta(G)$	Derajat maksimum graf $G$	7
$\delta(G)$	Derajat minimum graf $G$	7
$P_n$	Graf lintasan	8
$C_n$	Graf siklus	8
$wt(v)$	Bobot titik $v$	11
$f(v)$	Fungsi pelabelan titik $v$	11
$f(uv)$	Fungsi pelabelan sisi $uv$	11
$tvs(G)$	Nilai total ketidakteraturan titi graf $G$	13

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh Leonard Euler. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Teori graf mengandung banyak aspek penting dalam studinya, salah satunya adalah pelabelan. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1963), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan merupakan pemetaan satu-satu yang memetakan unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, dan pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Pelabelan sisi dan titik pada graf dapat dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Ada beberapa pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan total ketidakteraturan, pelabelan ajaib dan pelabelan anti ajaib. Pada tahun 2007, Baca dkk mengkaji suatu jenis pelabelan total, yaitu pelabelan total tidak teratur (*irregular total labeling*). Baca dkk meneliti pelabelan total tidak teratur ke dalam dua jenis, yaitu pelabelan total tidak teratur titik dan pelabelan total tidak teratur sisi. Pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf  $G$  merupakan suatu pemetaan yang memetakan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf  $G$  ke himpunan bilangan  $\{1, 2, \dots, k\}$  sedemikian sehingga semua titik mempunyai bobot yang berbeda. Nilai total ketidakteraturan titik dari graf  $G$  adalah nilai  $k$  terkecil dimana graf  $G$  memenuhi pelabelan- $k$  total tidak teratur titik.

Beberapa peneliti telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf. Pada tahun 2015, Riskawati telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf sarang lebah [1]. Andi Daniah Pahrany telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf *unidentified flying object* [2]. Sitti Fatimah telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf *splitting* [3]. Riskawati, dkk telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *series parallel* [4]. ST.

Maryam Mahaseng telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf kincir  $Wd_{5,m}$  [5]. Nurdin Hinding, dkk telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf *hexagonal cluster* [6].

Nurlindah telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf dodecahedral yang dimodifikasi [7]. Cahyudi Gratio Tandirerung telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf grid  $G_{4n}$  yang dimodifikasi [8]. Ika Indriani Rahayu telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf *sunflower* yang dimodifikasi [9]. Sri Wahyuni DM telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi [10]. Defi Lestari telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi dengan  $4n$  titik untuk  $n$  ganjil [11].

Penelitian-penelitian yang telah dilakukan oleh [7], [8], [9], [10], [11] adalah menentukan nilai total ketidakteraturan titik untuk graf yang memiliki derajat yang sama yaitu derajat minimum 3 dan derajat maksimum 5. Berdasarkan penelitian tersebut belum ditemukan nilai total ketidakteraturan titik graf pisau pemotong rumput yang memiliki titik sebanyak  $3n$ , derajat minimum 3 dan maksimum 5. Karena itu penulis tertarik untuk meneliti nilai total ketidakteraturan titik graf pisau pemotong rumput yang nantinya akan dibandingkan apakah memiliki hasil yang sama dengan penelitian-penelitian tersebut. Adapun judul penelitian ini yaitu “**Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Pisau Pemotong Rumput**”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Adapun masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf pisau pemotong rumput ?
2. Bagaimana menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf pisau pemotong rumput ?

### 1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas tentang pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf pisau pemotong rumput dengan notasi  $GCK_n$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  bilangan bulat genap.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf pisau pemotong rumput.
2. Menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf pisau pemotong rumput.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui pelabelan total tidak teratur titik dan nilai total ketidakteraturan titik pada graf pisau pemotong rumput.
2. Untuk menambah pemahaman pembaca tentang pelabelan tidak teratur titik dan nilai total ketidakteraturan titik.
3. Dapat dijadikan sebagai sumber referensi bagi peneliti selanjutnya.

### 1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari 5 bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

- a) Bab I Pendahuluan, yang berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.
- b) Bab II Tinjauan Pustaka, dalam bab ini berisi mengenai teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan dalam Tugas Akhir ini antara lain konsep dasar graf yang relevan dengan pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf pisau pemotong rumput.
- c) Bab III Metode Penelitian, yang berisi tentang metode penelitian dan langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf pisau pemotong rumput.

- d) Bab IV Hasil dan Pembahasan, yang berisi mengenai hasil yang diperoleh dalam menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf pisau pemotong rumput.
- e) Bab V Penutup, yang berisi tentang kesimpulan dan saran.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan konsep dasar pada teori graf, jenis-jenis graf, terminologi graf, serta penjelasan mengenai pelabelan pada graf yang digunakan pada bab selanjutnya.

### 2.1 Pengertian Graf

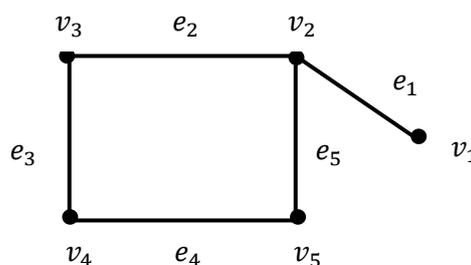
Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Secara umum, definisi graf adalah sebagai berikut:

*Definisi 2.1.1 Graf adalah pasangan himpunan  $(V, E)$ , dengan  $V$  adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan  $E$  adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota  $V$  yang disebut sisi [12].*

*Definisi 2.1.2 Graf sederhana  $G$  adalah pasangan  $V(G), E(G)$ , dengan  $V(G)$  adalah himpunan diskrit berhingga dan tak kosong, yang anggotanya disebut titik (vertex), dan  $E(G)$  adalah himpunan pasangan-pasangan yang tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota  $V(G)$  yang disebut sisi (edge).*

Misalkan  $G$  adalah graf. Himpunan titik graf  $G$  biasanya dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$ . Banyaknya unsur dari  $V(G)$  disebut *order* dari  $G$ , sedangkan banyaknya anggota dari  $E(G)$  disebut ukuran (*size*) dari  $G$ . Misalkan  $u, v \in V(G)$  dan sisi yang menghubungkan  $u$  dan  $v$  biasanya ditulis dengan  $e = (u, v)$ . Penulisan sisi  $e = (u, v)$  dapat ditulis dengan  $e = uv$ .

Contoh 2.1.1



**Gambar 2.1.1** Graf  $G$

Himpunan titik dan sisi graf  $G$  pada Gambar 2.2.1 masing-masing adalah :

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ , dimana  $e_1 = v_1v_2$ ,  $e_2 = v_2v_3$ ,  $e_3 = v_3v_4$ ,  $e_4 = v_4v_5$ , dan  $e_5 = v_2v_5$  sehingga *orde* dan *size* dari graf  $G$  masing-masing adalah 5.

## 2.2 Terminologi Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa terminologi atau istilah yang berkaitan dengan dengan graf. Berikut didefinisikan beberapa terminologi yang akan digunakan pada tugas akhir ini.

Definisi 2.2.1 *Misalkan  $G$  adalah suatu graf dan  $v_i, v_j \in V(G)$  serta  $x \in E(G)$ .. Jika  $x = v_i v_j$ , maka dikatakan bahwa titik  $v_i$  bertetangga (adjacent) dengan titik  $v_j$  dan sisi  $x$  terkait (incident) dengan titik  $v_i$ , demikian pula untuk  $v_j$ .*

Himpunan tetangga suatu titik  $v$  pada graf  $G$  dinotasikan dengan  $N_G(v)$  yang didefinisikan sebagai berikut:

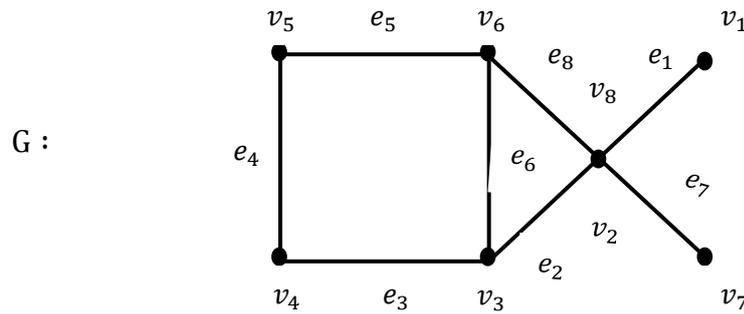
$$N_G(v) = \{u \mid uv \in E(G)\}.$$

Definisi 2.2.2 *Derajat suatu titik  $v_i$  dalam graf  $G$ , dilambangkan “ $d(v_i)$ ”, adalah banyaknya sisi  $x \in E(G)$  yang terkait dengan titik  $v_i$  atau  $d(v_i) = |N_G(v_i)|$ .*

Definisi 2.2.3 *Misalkan  $G$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ , dan himpunan sisi  $E(G) = \{e_i, e_i = v_i v_j \text{ untuk suatu } i, j\}$ . Jalan  $Wl_k$  pada graf  $G$  dengan panjang  $k$  adalah barisan titik dan sisi  $:v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k$  dengan  $e_i = v_i v_{i+1}, i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ . Jadi panjang suatu jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jika  $v_i \neq v_j$  untuk setiap  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ , maka  $W$  disebut lintasan.*

Definisi 2.2.4 *Graf  $G$  disebut graf terhubung apabila setiap dua titik pada graf tersebut termuat pada suatu lintasan.*

Contoh 2.2.1



Gambar 2.2.1 Graf G

Himpunan titik dan sisi dari graf G pada Gambar 2.3-1 masing-masing adalah:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}.$$

Berdasarkan graf G pada Gambar 2.2.1 diperoleh :

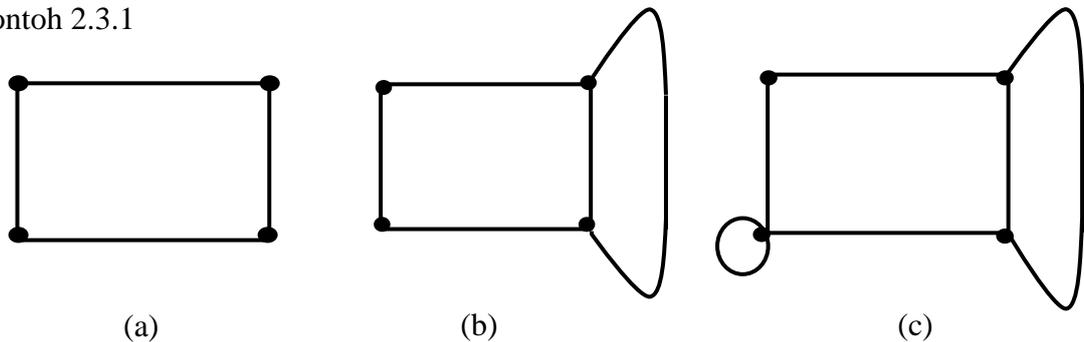
- i. Titik  $v_1$  dengan titik  $v_2$  bertetangga, sedangkan titik  $v_1$  dengan  $v_5$  tidak bertetangga.
- ii. Sisi  $e_1 = v_1v_2$  terkait dengan titik  $v_1$  dan titik  $v_2$ , sedangkan sisi  $e_1$  tidak terkait dengan titik  $v_3$  dan titik  $v_4$ .
- iii. Derajat dari setiap titiknya adalah  $\deg(v_1) = \deg(v_7) = 1$ ,  $\deg(v_3) = \deg(v_6) = 3$ ,  $\deg(v_4) = \deg(v_5) = 2$ ,  $\deg(v_2) = \deg(v_8) = 4$ . Sehingga derajat maksimum dari graf G adalah  $\Delta(G) = 4$  dan derajat minimum dari graf G adalah  $\delta(G) = 1$ .
- iv. Salah satu jalan graf G pada gambar 2.2.1 adalah  $W := v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6, e_8, v_2, e_2, v_3, e_6, v_6, e_8, v_2, e_7, v_7$ . Panjang jalan  $W$  adalah 10.
- v. Lintasan pada graf G adalah  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ .

### 2.3 Jenis-jenis Graf

Graf dikelompokkan berdasarkan ciri khusus pada setiap graf. Pada subbab ini akan dipaparkan jenis graf yang akan digunakan pada peneliti ini.

Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung sisi ganda (*multiple edges*) dan gelang (*loop*). Sisi ganda (*multiple edges*) merupakan sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama, sedangkan gelang (*loop*) merupakan sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama.

Contoh 2.3.1



Gambar 2.3.1 (a) Graf sederhana, (b) Graf tak sederhana, (c) Graf tak sederhana

Definisi 2.3.2 Misalkan  $P_n : v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$  adalah lintasan berorde  $n$  dengan panjang  $n - 1$ . Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas satu lintasan maksimal.

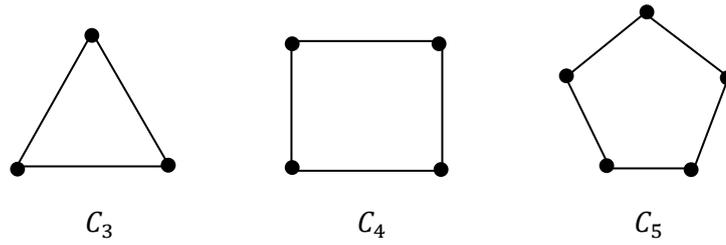
Contoh 2.3.2



Gambar 2.3.2 Graf Lintasan

Definisi 2.3.3 Graf siklus (*cycle*) dengan  $n$  titik dan  $n$  sisi dimana  $n \geq 3$ , dinotasikan dengan  $C_n$  adalah graf terhubung yang dibentuk dari lintasan tertutup yang berawal dan berakhir pada titik yang sama, dimana setiap titiknya berderajat 2 dan masing-masing titiknya dilalui tepat satu kali.

Contoh 2.3.3

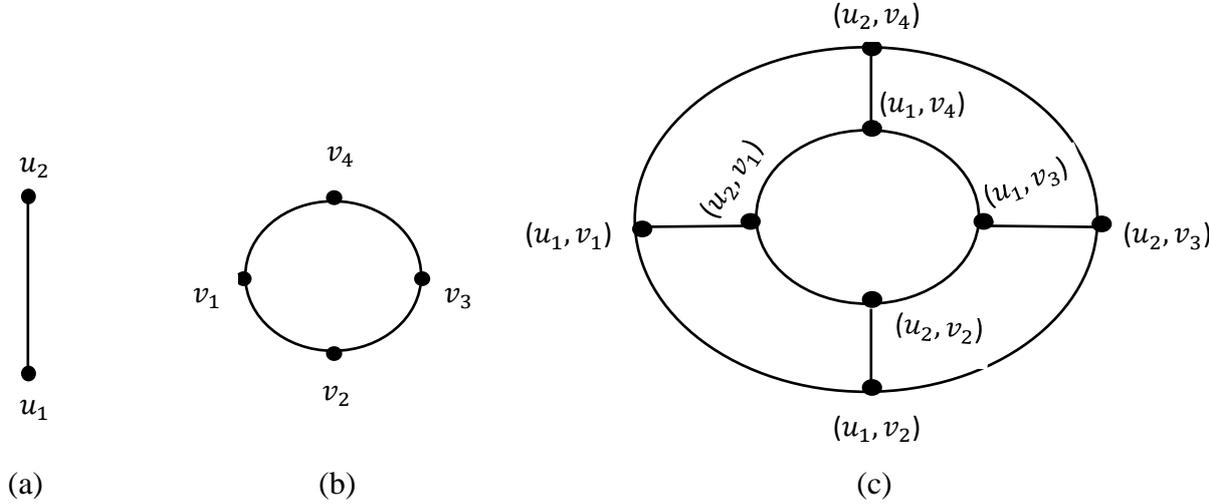


Gambar 2.3.3 Graf Siklus

Definisi 2.3.4 Misalkan  $G$  dan  $H$  adalah graf dengan himpunan titik masing-masing adalah  $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  dan  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  maka graf  $G \times H$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$  dan  $e = (u_i, v_j)(u_k, v_l)$  adalah suatu sisi dari  $G \times H$  jika dan hanya jika memenuhi satu dari dua item berikut:

1.  $i = k$  dan  $v_j, v_l \in E(H)$  atau
2.  $j = l$  dan  $u_i, u_k \in E(G)$  [13].

Contoh 2.3.4



Gambar 2.3.4 (a) Graf  $P_2$  (b) Graf  $C_4$  (c) Graf  $P_2 \times C_4$

Berikut diberikan definisi pisau pemotong rumput yang digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 2.3.5 Misalkan  $C_n$  dan  $P_2$  adalah masing-masing graf siklus pada  $n$  titik dan graf lintasan pada 2 titik serta  $C_n \times P_2$  adalah graf hasil kali kartesius antara graf  $C_n$  dan graf  $P_2$  dengan himpunan titik dan himpunan sisi masing-masing adalah

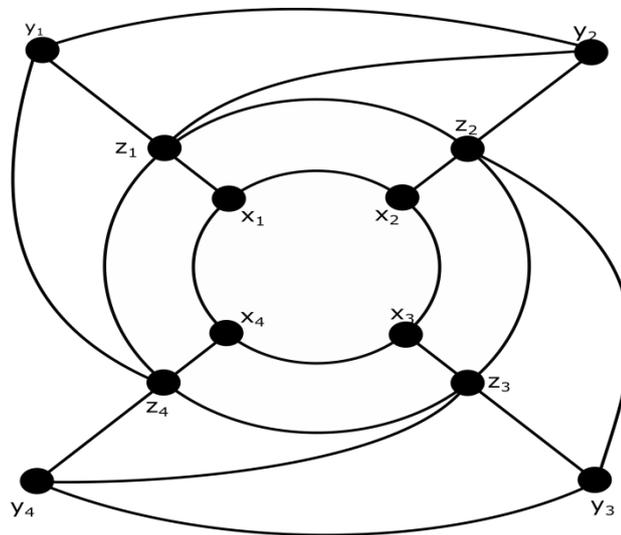
$$V(C_n \times P_2) = \{x_i, z_i | i = 1, 2, \dots, n\}$$

dan

$$E(C_n \times P_2) = \{x_i x_{i+1}, z_i z_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n - 1\} \cup \{x_i, z_i | i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Graf pisau pemotong rumput adalah graf yang dikonstruksi dari graf  $C_n \times P_2$  dengan menambahkan titik  $y_i : i = 1, 2, \dots, n$ , sisi  $y_i y_{i+1}$ ,  $z_i y_i$  dengan  $i$  bilangan bulat positif ganjil, sisi  $z_i y_i$  dengan  $i$  bilangan bulat positif genap, dan sisi  $y_i z_i$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Contoh 2.3.5



Gambar 2.3.5 Graf pisau pemotong rumput

## 2.4 Pelabelan Graf

Pada subbab ini akan dibahas beberapa definisi pelabelan graf dan bobot dari graf.

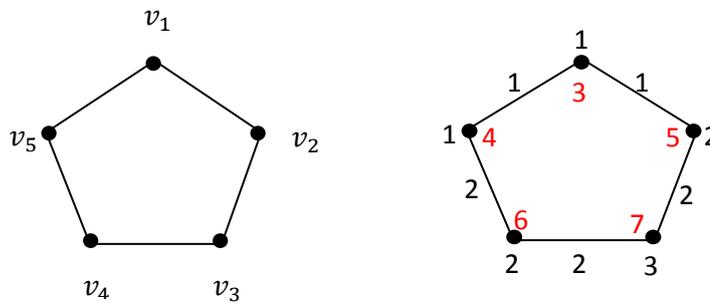
Definisi 2.4.1 *Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf ke suatu himpunan bilangan bulat positif.*

Himpunan bilangan yang menjadi kodomain dari pelabelan disebut himpunan label. Berdasarkan domainnya, pelabelan graf terbagi menjadi tiga yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Suatu pelabelan graf disebut pelabelan titik (*vertex labeling*) jika domain dari fungsinya adalah himpunan titik, dan disebut pelabelan sisi (*edge labeling*) jika domainnya adalah himpunan sisi dan jika domainnya adalah gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut adalah pelabelan total (*total labeling*).

Definisi 2.4.2 *Bobot titik  $v$  pada pelabelan total adalah label titik  $v$  yang ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan  $v$ , yaitu*

$$wt(v) = f(v) + \sum_{u \in V} f(uv).$$

Contoh 2.4.1



Gambar 2.4.1 Pelabelan total pada graf siklus  $C_5$

Misal  $f$  adalah pelabelan total pada  $C_5$  maka pelabelan titiknya adalah

$$f(v_1) = 1, \quad f(v_2) = 2,$$

$$f(v_3) = 3, \quad f(v_4) = 2,$$

$$f(v_5) = 1.$$

Adapun pelabelan sisinya yaitu :

$$f(v_1v_2) = 1, \quad f(v_1v_5) = 1,$$

$$f(v_2v_3) = 2, \quad f(v_3v_4) = 2,$$

$$f(v_4v_5) = 2.$$

Sehingga diperoleh bobot titiknya sebagai berikut.

$$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_5) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_3) = 2 + 1 + 2 = 5,$$

$$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_2v_3) + f(v_3v_4) = 3 + 2 + 2 = 7,$$

$$wt(v_4) = f(v_4) + f(v_3v_4) + f(v_4v_5) = 2 + 2 + 2 = 6,$$

dan

$$wt(v_5) = f(v_5) + f(v_4v_5) + f(v_1v_5) = 1 + 2 + 1 = 4.$$

## 2.5 Pelabelan Total Tidak Teratur Titik

Pada subbab ini, akan dibahas mengenai definisi pelabelan total tidak teratur, nilai total ketidakteraturan titik serta Teorema yang dapat digunakan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf.

Definisi 2.5.1 Misalkan  $G(V, E)$  adalah graf sederhana. Pelabelan total  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$  disebut suatu pelabelan- $k$  total tidak teratur titik (total vertex irregular  $k$ -labeling) pada graf  $G$  jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada  $V$ , berlaku

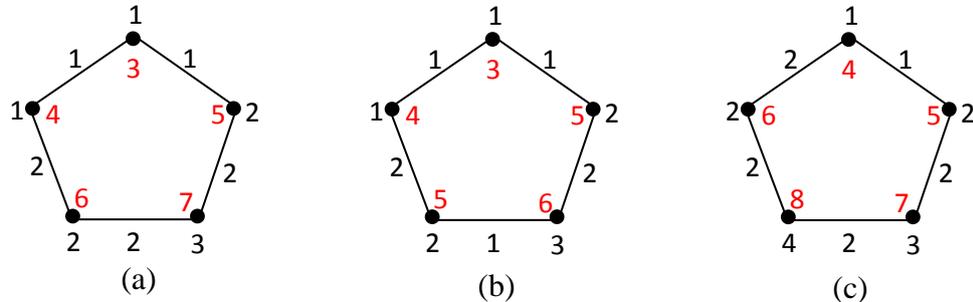
$$wt(x) \neq wt(y)$$

dengan

$$wt(x) = f(x) + \sum_{xu \in E} f(xu).$$

Definis 2.5.2 Nilai total ketidakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari  $G$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $k$  sedemikian sehingga  $G$  mempunyai suatu pelabelan- $k$  total tidak teratur titik, yang dinotasikan dengan  $tvs(G)$ .

Contoh 2.5.1 :



Gambar 2.5.1 Beberapa pelabelan total pada graf siklus  $C_5$

Gambar 2.5.1 Menunjukkan beberapa pelabelan total pada graf siklus  $C_5$ . Pada gambar bagian (a) merupakan pelabelan-3 total ketidakteraturan titik sedangkan bagian (b) bukan merupakan pelabelan-3 total ketidakteraturan titik karena memiliki bobot titik yang sama dan bagian (c) merupakan pelabelan-4 total ketidakteraturan titik karena masing-masing memiliki bobot titik yang berbeda. Dengan demikian nilai total ketidakteraturan titik pada graf siklus  $C_5$  adalah 3 atau dapat ditulis  $tvs(C_5) = 3$ .

Nilai total ketidakteraturan titik pada graf  $G$  telah dikembangkan oleh Bača, dkk [14] menjadi suatu teorema yang dituliskan sebagai berikut.

Teorema 2.5.1 Misalkan sebuah graf  $G(V, E)$  dengan  $n$  adalah banyaknya titik,  $\delta(G)$  adalah derajat minimum, dan  $\Delta(G)$  adalah derajat maksimum, maka berlaku :

$$\left\lceil \frac{(n + \delta(G))}{(\Delta(G) + 1)} \right\rceil \leq tvs(G) \leq n + \Delta(G) - 2\delta(G) + 1.$$

Teorema 2.5.1 dapat digunakan untuk menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik serta pemberian label pada titik dan sisi untuk menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik.