KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA POPULASI PENDERITA DIABETES MELALUI EMPAT PILAR PENATALAKSANAAN DIABETES SERTA PENGOBATAN KOMPLIKASI

SKRIPSI

MUHAMMAD HARDIANSYAH H

H011181018

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

AGUSTUS 2023

KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA POPULASI PENDERITA DIABETES MELALUI EMPAT PILAR PENATALAKSANAAN DIABETES SERTA PENGOBATAN KOMPLIKASI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

MUHAMMAD HARDIANSYAH H

H011181018

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

AGUSTUS 2023

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Kontrol Optimal Model Dinamika Populasi Penderita Diabetes Melalui Empat Pilar Penatalaksanaan Diabetes serta Pengobatan Komplikasi

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 25 Juli 2023

METERAI TEMPEL
CF81AAKX561313412

Muhammad Hardiansyah H

H011181018

LEMBAR PENGESAHAN

KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA POPULASI PENDERITA DIABETES MELALUI EMPAT PILAR PENATALAKSANAAN DIABETES SERTA PENGOBATAN KOMPLIKASI

Disusun dan diajukan oleh:

MUHAMMAD HARDIANSYAH H
H011181018

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal sidang 11 Agustus 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.	**Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.**
NIP. 198009042003122001	**NIP. 196801141994121001**

Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan kesehatan jasmani dan rohani, rahmat, hidayah, serta inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dalam penyelesaian skripsi ini cukup banyak kesulitan yang penulis alami, namun Alhamdulillah penulis dapat atasi berkat limpahan rahmat dan petunjuk-Nya serta bantuan dari segala pihak. Oleh karena itu, perkenankanlah penulis dengan segala kerendahan hati menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang tak terhingga kepada ayahanda **Haseng** dan ibunda **Syahriani** tercinta, yang telah mendidik dan membesarkan penulis dengan penuh kesabaran dan ketulusan hati serta kesungguhannya dalam memberikan semangat dan dukungan kepada penulis selama menjalani proses pendidikan secara khusus selama proses penggarapan skripsi ini. Kemudian, untuk adikku **Nur Fitriani H**, terima kasih banyak atas pengaruh positif yang luar biasa kepada penulis dan juga selalu mengingatkan satu sama lain dalam hal kebaikan.

Selain itu, penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada:

1. **Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing utama dan **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.** selaku pembimbing pertama, yang selalu bersabar dalam membimbing dan membagi ilmunya kepada penulis dan telah bersedia meluangkan waktunya disela-sela rutinitasnya yang begitu padat demi membimbing penulis dari awal hingga skripsi ini selesai;
2. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku penguji pertama sekaligus penasehat akademik dan **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku penguji kedua yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini;

3. Bapak/Ibu **Tenaga Pendidik/Dosen** Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah membekali ilmu kepada penulis selama masa perkuliahan;
4. Seluruh **Staf Departemen Matematika** yang turut bekerja sama membantu perihal administrasi dan persuratan selama penulisan skripsi ini;
5. Seluruh **keluarga** penulis, secara khusus kepada **Zity**, **Adel**, dan **Ica** yang tiada hentinya memberikan semangat dan motivasi kepada penulis, yang juga selalu menemani dalam proses penggarapan skripsi di Minasa Upa;
6. Kepada tante **Marla** yang banyak membantu penulis dalam bantu meringankan biaya-biaya yang terkait dengan biaya perkuliahan selama menjalani pendidikan di perguruan tinggi;
7. Sahabat seperjuangan sehidup semati masyaallah surgaki **Gamers Gendut** (Diang, Ami, Dian Indah, Nisya, Sekar) yang selalu mendengarkan keluh kesah, cerita sedih dan senang penulis selama penulis menyelesaikan skripsi;
8. Teman-teman penulis di masa perkuliahan **Tadika Mezra**, secara khusus kepada Nasra, Saski, Aryu, Hana yang selalu membantu menyelesaikan banyak perkara terkait "perbimbingan" ini yang sangat *complicated*;
9. Teman-teman Matematika Unhas 2018 yang senantiasa membersamai dan membentu penulis semasa perkuliahan;
10. Semua pihak yang telah membanu penulis dan tak sempat penulis sebutkan satu per satu, penulis ucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Semoga segala bantuan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapat imbalan yang setimpal dari Allah SWT. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membutuhkan. Amin.

Makassar, 25 Juli 2023

Muhammad Hardiansyah H

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPERLUAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Muhammad Hardiansyah H
NIM	: H011181018
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royaliti Nonekslusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah yang berjudul:

"Kontrol Optimal Model Dinamika Populasi Penderita Diabetes Melalui Empat Pilar Penatalaksanaan Diabetes serta Pengobatan Komplikasi"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan), Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengolah dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 25 Juli 2023.

Yang menyatakan

Muhammad Hardiansyah H

ABSTRAK

Penyakit diabetes ditandai dengan tingginya kadar glukosa dalam darah. Pencegahan dan pengendalian berupa penerapan empat pilar penatalaksaan diabetes perlu dilakukan untuk mengurangi risiko menderita komplikasi diabetes yang dapat berujung kematian. Adapun empat pilar penatalaksanaan diabetes yang dimaksud yaitu edukasi, aktivitas fisik, pengaturan pola makan, dan terapi farmakologi. Pada penelitian ini, dikembangkan model dinamika popuasi penderita diabetes dengan menerapkan faktor kontrol empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan komplikasi. Secara analitik, diperoleh solusi model yang positif dan terbatas untuk total populasi tidak melebihi I/μ. Prinsip Minimum Pontryagin digunakan untuk memperoleh lima bentuk fungsi kontrol optimal, dimana terdapat beberapa fungsi kontrol optimal yang secara implisit bergantung pada fungsi kontrol optimal yang lain. Sistem optimal diperoleh dengan menggunakan metode *forward-backward* Runge Kutta. Pada simulasi numerik, untuk melihat efek penerapan empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan komplikasi, dibentuk tiga skenario, dimana bobot biaya kontrol tiap skenario diubah-ubah. Diperoleh kesimpulan bahwa dengan memfokuskan aktivitas fisik, total populasi penderita diabetes dapat diminimumkan dengan biaya yang minimum.

Kata kunci: kontrol optimal, empat pilar penatalaksanaan diabetes, penderita diabetes

ABSTRACT

High blood sugar levels characterize diabetes. Prevention and management, such as implementing four pillars of diabetes management, need to be done to reduce the risk of diabetes complications which can cause death. The four pillars of diabetes management are education, physical activity, dietary management, and pharmacological therapy. In this paper, we propose an optimal control strategy for the dynamic population of diabetics with four pillars diabetes management and treatment of complications. Analytically, we have that the solution of the model is positive and bounded to I/μ. Pontryagin's Minimum Principle is used to find the optimal control functions, and forward-backward Runge Kutta solves the optimality system. In the numerical simulation, to see the effect of applying four pillars of diabetes management and treatment of complications, three scenarios are formed where the weight of control cost is varied in each scenario. Then, we conclude that by focusing on physical activity, the total population of diabetics can be minimized with minimum costs.

Keywords: optimal control, four pillars diabetes management, diabetics

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Diabetes merupakan salah satu penyakit tidak menular yang ditandai dengan tingginya kadar glukosa dalam darah yang akan memicu pankreas untuk memproduksi hormon insulin (Fatimah, 2015). Hormon ini membantu glukosa dalam mencapai sel tubuh manusia untuk digunakan sebagai energi. Kondisi ketika sel tubuh kurang sensitif terhadap insulin atau bahkan pankreas tidak dapat memproduksi insulin maka terjadi penumpukan glukosa dalam darah (Walker, 2020). Hal tersebut tidak hanya disebabkan oleh pola hidup yang kurang sehat namun bisa juga terjadi karena faktor genetik (Pittara, 2022).

Berdasarkan data IDF (*International Diabetes Federation*), pada tahun 2021 jumlah penderita diabetes di Indonesia sekitar 19.5 juta jiwa dan diprediksi akan meningkat hingga sekitar 28.6 juta jiwa pada tahun 2045. Data tersebut menunjukkan bahwa Indonesia menduduki peringkat kelima dengan jumlah penderita diabetes terbanyak di dunia (IDF, 2021). Agar permasalahan ini tidak berdampak luas maka perlu dilakukan pencegahan, pengendalian, dan pengobatan. Selain itu juga upaya secara matematis dapat dilakukan melalui pengkonstruksian model matematika.

Beberapa peneliti sebelumnya telah mengkaji secara matematis terkait pemodelan dinamika populasi penyakit diabetes. Seperti yang dilakukan oleh Permatasari, dkk. (2015). Model yang dikonstruksi terdiri atas empat kompartemen, yaitu kompartemen pra-diabetes, penderita diabetes tanpa komplikasi, penderita diabetes dengan komplikasi, dan penderita diabetes yang telah sembuh dari penyakit diabetes dengan komplikasi. Kontrol yang diberikan berupa kontrol pengobatan dan terapi diet glukosa. Selanjutnya penelitian oleh Kouidere, dkk. (2019) yang mengkonstruksi model dalam empat kompartemen, yaitu kompartemen orang yang berisiko terkena diabetes karena faktor genetik, pola hidup tidak sehat atau masalah psikologis, kompartemen penderita diabetes tanpa dan dengan komplikasi. Dari model yang dikonstruksi kemudian diterapkan tiga kontrol, yaitu program kesadaran atau edukasi, pengobatan, dan dukungan psikologis. Selain itu juga, Kouidere, dkk. (2020) mengkonstruksi model dinamika populasi penderita diabetes dalam enam kompartemen, yaitu kompartemen orang sehat, orang yang berisiko terkena diabetes karena faktor genetik dan pola hidup tidak sehat, penderita diabetes tanpa komplikasi, serta penderita diabetes dengan komplikasi sedang dan komplikasi serius. Model yang dikonstruksi kemudian diberikan kontrol berupa pengobatan diabetes atau terapi farmakologi, pengobatan komplikasi diabetes, dan program kesadaran atau edukasi.

Dalam menekan angka kejadian diabetes, perlu dilakukan pencegahan, pengendalian, maupun pengobatan penyakit diabetes yang berkelanjutan. Pengobatan tersebut perlu dilakukan untuk mencegah munculnya komplikasi yang berakibat fatal jika tidak ditangani dengan baik. Upaya pencegahan hingga pengendalian dapat dilakukan dengan menerapkan empat pilar penatalaksanaan diabetes. Empat pilar penatalaksanaan tersebut antara lain edukasi, pengelolaan makanan, aktivitas fisik (olahraga), dan terapi farmakologi (Simamora, dkk., 2021). Penelitian oleh Kouidere, dkk. (2020) belum sepenuhnya menerapkan kontrol empat pilar penatalaksanaan diabetes. Adapun kontrol yang belum diterapkan yaitu kontrol pengelolaan makanan dan aktivitas fisik (olahraga). Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengembangkan penelitian Kouidere, dkk. (2020) dengan menerapkan secara keseluruhan empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan komplikasi. Untuk melihat efek penerapan faktor kontrol empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan komplikasi, tiga skenario dibentuk dimana tiap skenario, bobot biaya kontrol diubah-ubah. Dari ketiga skenario yang dibentuk, nantinya skenario terbaik akan menjelaskan bahwa skenario tersebut dapat mengurangi jumlah populasi penderita diabetes dengan biaya yang minimum. Berdasarkan uraian permasalahan di atas, penulis tertarik untuk mengembangkan penelitian Kouidere, dkk. (2020) yang dituangkan dalam bentuk penelitian skripsi dengan judul:

"***Kontrol Optimal Model Dinamika Populasi Penderita Diabetes Melalui Empat Pilar Penatalaksanaan Diabetes serta Pengobatan Komplikasi***"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah uraikan sebelumnya maka rumusan masalah yang diperoleh adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana pengembangan model dinamika populasi penderita diabetes dengan kontrol empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan pada komplikasi?
2. Bagaimana analisis model dinamika populasi penderita diabetes dengan kontrol empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan pada komplikasi?
3. Bagaimana bentuk kontrol optimal dengan empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan komplikasi pada model dinamika populasi penderita diabetes?
4. Bagaimana hasil simulasi numerik pada model dinamika populasi penderita diabetes tanpa dan dengan kontrol?

1.3 Batasan Masalah

Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model tanpa kontrol yang dikembangkan oleh Kouidere, dkk. (2020). Model tersebut diamati pada enam kompartemen yaitu kompartemen orang sehat (H), orang yang berisiko terkena diabetes karena faktor genetik (P), orang yang berisiko terkena diabetes karena pola hidup tidak sehat (E), penderita diabetes tanpa komplikasi (D), penderita diabetes komplikasi sedang (C_T), dan penderita diabetes komplikasi serius (C_S).

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan penelitian adalah sebagai berikut.

1. Mengembangkan model dinamika populasi penderita diabetes dengan kontrol empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan pada komplikasi.
2. Menganalisis model dinamika populasi penderita diabetes dengan kontrol empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan pada komplikasi.
3. Mendapatkan bentuk kontrol optimal dengan empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan komplikasi pada model dinamika populasi penderita diabetes.

4. Menginterpretasi hasil simulasi numerik pada model dinamika populasi penderita diabetes tanpa dan dengan kontrol.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Sebagai sarana untuk menambah pengetahuan dan pemahaman kepada penderita diabetes maupun masyarakat umum terkait pentingnya empat pilar penatalaksanaan diabetes bagi kelangsungan hidup penderita.
2. Sebagai bahan kajian untuk penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Tinjauan Umum Diabetes

Tubuh manusia memerlukan energi untuk melakukan aktivitas sehari-hari. Energi yang diperlukan oleh tubuh berasal dari makanan yang dikonsumsi. Sumber energi utama bagi tubuh sebagian besar berasal dari karbohidrat (Fitri dan Fitriani, 2020). Selama proses pencernaan berlangsung, makanan yang dikonsumsi berupa karbohidrat akan dipecah menjadi glukosa (Paruntu, 2012).

Setelah karbohidrat dipecah, glukosa masuk ke dalam alirah darah yang mengakibatkan jumlah glukosa dalam darah meningkat. Meningkatnya jumlah glukosa dalam darah mengakibatkan pankreas memproduksi hormon insulin. Hormon insulin dibutuhkan agar glukosa dalam darah dapat terserap oleh sel-sel tubuh yang nantinya akan digunakan sebagai sumber energi. Setelah glukosa diserap dengan bantuan insulin maka jumlah glukosa dalam darah tentunya akan kembali normal atau berkurang. Siklus tersebut terjadi terus menerus ketika tidak terjadi gangguan dalam tubuh (Walker, 2020). Gangguan tersebut berupa kekurangan hormon insulin atau bahkan hormon insulin tidak bekerja sebagaimana mestinya yang akan mengakibatkan terjadinya penumpukan glukosa dalam darah. Penumpukan glukosa dalam darah dengan jumlah yang tak biasa akan mengakibatkan terjadinya diabetes (Hayati, dkk., 2020).

Diabetes adalah suatu penyakit kronis yang ditandai kadar gula darah melebihi batas normal (Walker, 2020). Adapun kisaran gula darah normal yaitu kurang dari 100 mg/dL jika berpuasa 8 jam terlebih dahulu, kurang dari 140 mg/dL jika dua jam setelah makan, dan kurang dari 200 mg/dL saat pemeriksaan gula darah sewaktu (Seery, 2019).

2.1.1 Tipe-tipe Diabetes

Berdasarkan penyebabnya, diabetes dikelompokkan menjadi empat jenis, yaitu diabetes tipe satu, tipe dua, diabetes kehamilan (gestasional), dan diabetes spefisik lainnya (Pulungan, dkk., 2019). Adapun tipe diabetes yang akan dibahas pada bagian ini ialah diabetes tipe pertama dan kedua.

1. Diabetes Tipe 1

Diabetes tipe 1 adalah diabetes yang disebabkan oleh rusaknya sel beta pankreas karena masalah autoimun ataupun genetik sehingga pankreas kurang atau bahkan tidak memproduksi hormon insulin (Faida, dkk., 2020).

2. Diabetes Tipe 2

Diabetes tipe 2 adalah diabetes yang disebabkan karena ketidakpekaan insulin sehingga tidak dapat bekerja secara optimal pada sel-sel targetnya, seperti sel otot, sel lemak, dan sel hepar (Sulistiowati, dkk., 2018). Pada diabetes tipe kedua, tubuh memproduksi hormon insulin namun tidak bekerja secara optimal (Decroli, 2019).

Selain itu untuk lebih mudah membedakan antara diabetes tipe 1 dan tipe 2, disajikan perbedaan antara keduanya dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Perbedaan antara diabetes tipe 1 dan diabetes tipe 2

Diabetes Tipe 1	Diabetes Tipe 2
Bisa terjadi pada usia berapapun, lebih sering terjadi pada masa kanak-kanak	Biasanya terjadi pada usia diatas 30 tahun
Gejala muncul dengan cepat	Gejala tidak muncul secara langsung
Tidak bergantung pada berat badan	Bergantung pada berat badan berlebih
Pengobatan harus dengan suntik insulin	Bisa diatasi dengan pola hidup sehat atau konsumsi obat diabetes

2.1.2 Komplikasi Diabetes

Seorang penderita yang tidak mengontrol kadar gula darahnya, tidak ada perubahan pola hidup, serta tidak adanya pengobatan yang dilakukan, maka dapat menyebabkan komplikasi penyakit serius lainnya. Berikut ini komplikasi pada penderita diabetes dari tingkat sedang hingga parah (Swari, 2021)

1. Kerontokan Rambut

   Kerontokan rambut pada penderita diabetes merupakan komplikasi yang terbilang cukup ringan. Kerontokan ini terjadi akibat kurangnya pasokan darah kaya akan nutrisi ke folikel rambut. Jika tidak ditanangi lebih lanjut maka kerontokan rambut pada penderita dapat menyebabkan kebotakan.

2. Masalah Gigi dan Mulut

   Komplikasi ini umumnya muncul karena gula darah yang tidak terkontol. Hal tersebut memicu bakteri untuk berkembang dan menyebabkan infeksi serta berbagai masalah lainnya seperti bau mulut, radang gusi, mulut kering, hingga infeksi jamur di mulut.

3. Masalah Reproduksi

   Masalah reproduksi yang sering terjadi pada penderita diabetes yaitu impotensi (disfungsi ereksi) pada pria dan infeksi jamur vagina pada wanita.

4. Komplikasi Mikrovaskuler

   Lestari, dkk. (2021) menyatakan bahwa komplikasi mikrovaskuler berupa retinopati, neuropati, dan nefropati. Retinopati merupakan gangguan pada mata akibat rusaknya pembuluh darah di retina, seperti katarak dan glaukoma. Neuropati merupakan kerusakan saraf yang menyebabkan gangguan sensorik berupa kesemutan pada jari-jari tangan dan kaki, mati rasa, nyeri, kebas atau bahkan sensasi terbakar. Nefrofati merupakan kerusakan pada ginjal yang dapat menyebabkan gagal ginjal.

5. Penyaki Arteri Koroner

   Penyakit jantung koroner disebabkan oleh kerusakan pada arteri koroner. Gula darah yang tinggi dapat menyebabkan dinding pembuluh darah menebal dan menghambat aliran darah.

6. Penyakit Cerebrovaskuler

   Penyakit cerebrovaskuler atau stroke adalah gangguan fungsi otak secara mendadak dikarenakan pasokan darah yang kaya akan nutrisi dan oksigan tidak tersalurkan ke bagian otak.

7. Kardiomiopati Diabetik

   Kardiomiopati adalah penyakit kelainan pada otot jantung yang ditandai dengan melemahnya kemampuan jantung dalam memopa darah

8. Kaki Diabetik

   Tidak adanya pasokan darah yang kaya nutrisi dan oksigen pada kaki akibat pembuluh darah yang rusak membuat proses penyembuhan luka yang lama. Hal tersebut membuat penderita tak menyadari adanya lupa pada kaki hingga semakin parah karena tidak adanya perawatan (Winatha, 2022).

2.2 Empat Pilar Penatalaksanaan Diabetes

Langkah pertama yang harus dilakukan dalam penatalaksanaan diabetes adalah penatalaksanaan tanpa obat, seperti diet dan olahraga. Jika penatalaksanaan tersebut belum juga tercapai maka dapat dikombinasikan dengan pemberian obat berupa terapi insulin, obat oral, atau keduanya (Muchid, dkk., 2005).

Diabetes dapat dikendalikan melalui empat pilar penatalaksanaan diabetes seperti edukasi, diet atau pengelolaan makanan, olahraga fisik, dan obat-obatan atau farmakologi (Simamora, dkk., 2021).

1. Edukasi

   Pemberian edukasi kepada penderita diabetes bertujuan untuk mendidik penderita dalam mengontrol gula darahnya. Edukasi yang diberikan dapat berupa pemahaman tentang penyakit, pentingnya pencegahan dan pengendalian penyakit, perlunya latihan fisik yang teratur, dan pentingnya pemantauan gula darah (Putra dan Berawi, 2015).

2. Diet atau Pengelolaan Makanan

   Pengaturan makan yang baik akan mengurangi beban kerja insulin sehingga hal ini merupakan bagian penting dari penatalaksanaan diabetes (Putra dan Berawi, 2015). Menurut Muchid, dkk. (2005), diet yang dianjurkan adalah makanan komposisi seimbang dengan kecukupan gizi sebesar 60-70% karbohidrat, 10-15% protein, dan 20-25% lemak.

3. Olahraga Fisik

   Melakukan olahraga dengan rutin dan teratur dapat menurunkan dan menjaga kadar gula darah. Olahraga juga dapat meningkatkan kepekaan insulin dalam tubuh (Muchid, dkk., 2005).

4. Terapi Farmakologi

   Jika pengobatan tanpa obat berupa pengelolaan makanan dan olahraga fisik belum berhasil dalam mengendalikan kadar gula darah penderita maka perlu dilakukan tindakan selanjutnya berupa terapi farmakologi. Terapi farmakologi atau dengan obat-obatan terdiri atas obat oral dan suntikan. Terapi ini diberikan bersama dengan pengaturan makan dan latihan jasmani (Putra dan Berawi, 2015).

2.3 Teorema Eksistensi dan Ketunggalan

Konsep tentang eksistensi dan ketunggalan sangatlah penting dalam memodelkan permasalahan nyata secara matematis. Seringkali permasalahan tersebut dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Ketika solusi persamaan model tersebut ada, artinya model sistem dapat digunakan untuk memprediksi perilaku sistem di masa yang akan datang. Kemudian, jika solusi tersebut juga tunggal maka untuk setiap waktu yang akan datang hanya ada satu kemungkinan keadaan yang tidak menimbulkan banyak interpretasi (William dan Mark, 2012). Berikut akan disajikan teorema yang berkaitan dengan eksistensi dan ketunggal solusi model.

Teorema 2.1 (William dan Mark, 2012) *Misalkan* $F(t, y)$ *adalah fungsi kontinu yang memenuhi syarat Lipschitz pada bidang* $\mathcal{S} = \{(t, y): a \le t \le b, -\infty \le y \le \infty\}$, *sehingga*

$$\left|F(t, y_1) - F(t, y_2)\right| \le K\left|y_1 - y_2\right|,$$

dimana $K > 0$ *disebut sebagai konstanta Lipschitz. Jika* (t_0, y_0) *adalah titik yang berada pada daerah* $\mathcal{S}$, *maka terdapat solusi tunggal pada*

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Contoh (William dan Mark, 2012)

Misal diberikan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} = |ty|, \quad y(0) = 0. \tag{2.1}$$

Akan ditunjukkan bahwa solusi Persamaan (2.1) pada $\mathbb{R}$ dan memenuhi Teorema 2.1 pada $\mathcal{S} = \{(t, y): -a \le t \le a, -\infty \le y \le \infty\}$. Misal $F(t, y) = |ty|$, maka

$$\begin{aligned}\left|F(t, y_1) - F(t, y_2)\right| &= \Big|\,|ty_1| - |ty_2|\,\Big|, \\ &= \Big|\,|t|\left(|y_1| - |y_2|\right)\Big|, \\ &\le |t|\left|y_1 - y_2\right|,\end{aligned}$$

karena nilai maksimum t pada interval $[-a, a]$ adalah a, maka

$$\left|F(t, y_1) - F(t, y_2)\right| \le a\left|y_1 - y_2\right|,$$

sehingga diperoleh bahwa $F(t, y) = |ty|$ memenuhi syarat Lipschitz dengan $K = a$. Karena a merupakan sebarang bilangan, terdapat solusi Persamaan (2.1) dan juga solusinya tunggal pada $\mathbb{R}$. ■

2.4 Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan-turunan dari satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui (Toaha, 2008). Orde persamaan diferensial ditentukan oleh turunan tertinggi dalam persamaan tersebut. Bentuk umum persamaan diferensial orde satu dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) dapat ditulis ulang sebagai

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0, \tag{2.3}$$

dimana $M(t, y) = -f(t, y)$ dan $N(t, y) = 1$. Namun, terdapat cara lain yang dapat dilakukan untuk menulis ulang Persamaan (2.2) tersebut dengan menggunakan bentuk pemisalan yang berbeda.

Jika M adalah fungsi yang hanya bergantung pada variabel t dan N adalah fungsi yang hanya bergantung pada variabel y, maka Persamaan (2.3) menjadi

$$M(t) + N(y)\frac{dy}{dt} = 0, \tag{2.4}$$

dimana Persamaan (2.4) ekuivalen dengan

$$M(t)dt + N(y)dy = 0, \tag{2.5}$$

(Boyce, dkk., 2017).

2.5 Teori Kontrol Optimal

Dalam permasalahan kontrol optimal dilakukan penentuan variabel kontrol $u(t)$ diantara variabel-variabel kontrol yang *admissible* yaitu kontrol yang membawa sistem dari *state* awal $x(t_0)$ pada waktu awal t_0 ke *state* akhir $x(t_f)$ pada waktu akhir t_f, sedemikian sehingga memberikan nilai minimum atau maksimum pada fungsi tujuan (Tu, 1984).

2.5.1 Persamaan *State*, Variabel Kontrol, dan Fungsi Tujuan

State atau keadaan dari suatu sistem kontinu pada waktu t direpresentasikan dalam sistem persamaan diferensial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t)), \tag{2.6}$$

dengan $u(t)$ merupakan variabel kontrol yang dapat mempengaruhi suatu *state*, $u(t) \in U$, $\forall\, t \in [t_0, t_f]$, dan $U = \{u(t): 0 \leq u \leq 1\}$ (Tu, 1984).

Pemilihan variabel kontrol $u(t)$ dilakukan dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan. Secara umum, fungsi tujuan berbentuk

$$J(u) = \phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t))\, dt, \tag{2.7}$$

Fungsi tujuan pada Persamaan (2.7) merupakan fungsi tujuan bentuk Bolza. Bentuk khusus dari bentuk Bolza dengan $\phi(x(t_f)) = 0$ disebut sebagai fungsi tujuan bentuk Lagrange. Bentuk $\phi(x(t_f))$ selanjutnya disebut sebagai *payoff term* (Lenhart dan Workman, 2007). Jika $f(x(t), u(t), t) = 0$ maka disebut sebagai fungsi tujuan bentuk Mayer (Lestari, 2020).

2.5.2 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Diberikan masalah kontrol optimal

$$\min_u (J(u)) = \min_u \left(\phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t))\, dt \right), \tag{2.8}$$

dengan kendala

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t)), \tag{2.9}$$

dan syarat awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Akan dicari syarat perlu keoptimalan fungsi tujuan Persamaan (2.8).

Asumsikan terdapat fungsi kontrol optimal $u^*(t)$ pada permasalahan (2.8). Jika fungsi kontrol $u^*(t)$ disubstitusikan pada persamaan *state* (2.9) maka

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u^*(t)),$$

yang selanjutnya jika diselesaikan akan diperoleh *state* optimal $\mathbf{x}^*(t)$. Misalkan terdapat fungsi kontrol yang lain yaitu

$$u^\epsilon(t) = u^*(t) + \epsilon h(t),$$

dengan $h(t)$ adalah fungsi variasi kontinu dan konstanta $\epsilon \in \mathbb{R}$. Misalkan pula $\mathbf{x}^\epsilon(t)$ adalah *state* yang bersesuaian dengan fungsi kontrol $u^\epsilon(t)$ sehingga

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^\epsilon(t) = \dot{\mathbf{x}}^\epsilon(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t)),$$

dengan nilai awal yang sama yaitu $\mathbf{x}^\epsilon(t_0) = \mathbf{x}_0$. Fungsi tujuan pada permasalahan (2.8) yang dievaluasi di $u^\epsilon(t)$ menjadi

$$J(u^\epsilon) = \phi(\mathbf{x}^\epsilon(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t))\, dt. \tag{2.10}$$

Diberikan fungsi adjoin $\boldsymbol{\lambda}(t)$ yang terturunkan pada $[t_0, t_f]$ dan dengan menggunakan teorema dasar kalkulus diperoleh

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{x}^\epsilon(t)\big)\, dt \quad = \boldsymbol{\lambda}(t_f)\mathbf{x}^\epsilon(t_f) - \boldsymbol{\lambda}(t_0)\mathbf{x}^\epsilon(t_0),$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{x}^\epsilon(t)\big)\, dt - \boldsymbol{\lambda}(t_f)\mathbf{x}^\epsilon(t_f) + \boldsymbol{\lambda}(t_0)\mathbf{x}^\epsilon(t_0) \quad = 0. \tag{2.11}$$

Jika Persamaan (2.11) ditambahkan ke dalam Persamaan (2.10) maka diperoleh

$$J(u^\epsilon) = \phi(\mathbf{x}^\epsilon(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \left[f(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{x}^\epsilon(t)\big)\right] dt \; - \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f)\mathbf{x}^\epsilon(t_f) + \boldsymbol{\lambda}(t_0)\mathbf{x}^\epsilon(t_0),$$

$$J(u^\epsilon) = \phi(\mathbf{x}^\epsilon(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \left[f(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \Big(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\mathbf{x}^\epsilon(t) + \boldsymbol{\lambda}(t)\dot{\mathbf{x}}^\epsilon(t)\Big)\right] dt \; - \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f)\mathbf{x}^\epsilon(t_f) + \boldsymbol{\lambda}(t_0)\mathbf{x}^\epsilon(t_0). \tag{2.12}$$

Diketahui bahwa $\dot{\mathbf{x}}^\epsilon(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t))$ dan $\mathbf{x}^\epsilon(t_0) = \mathbf{x}_0$, maka Persamaan (2.12) dapat ditulis ulang sebagai

$$J(u^\epsilon) = \phi(\mathbf{x}^\epsilon(t_f)) - \boldsymbol{\lambda}(t_f)\mathbf{x}^\epsilon(t_f) + \boldsymbol{\lambda}(t_0)\mathbf{x}_0 + \\ \int_{t_0}^{t_f} \left[f(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \Big(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\mathbf{x}^\epsilon(t) + \boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{g}(t, \mathbf{x}^\epsilon(t), u^\epsilon(t))\Big)\right] dt, \tag{2.13}$$

Karena nilai minimum dari J terhadap kontrol u terjadi pada u^*, turunan dari $J(u^\epsilon)$ terhadap ϵ (dalam arah h) adalah nol, atau

$$\left.\frac{dJ(u^\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon = 0} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon} = 0.$$

Berdasarkan teorema *Lebesgue Dominated Convergence* (Royden, 1968), bentuk limit maupun turunan dapat dipindahkan ke dalam bentuk integral sehingga

$$\left.\frac{dJ(u^\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon = 0} = 0,$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\left(\int_{t_0}^{t_f}\left[f(t,\mathbf{x}^\epsilon(t),u^\epsilon(t)) + \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\mathbf{x}^\epsilon(t)+\boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{g}(t,\mathbf{x}^\epsilon(t),u^\epsilon(t)\right)\right]dt + \phi(\mathbf{x}^\epsilon(t_f))\right.$$
$$\left.\left. - \boldsymbol{\lambda}(t_f)\mathbf{x}^\epsilon(t_f) + \boldsymbol{\lambda}(t_0)\mathbf{x}_0\right)\right|_{\epsilon=0} = 0\ ,$$

$$\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{d\epsilon}\left[f(t,\mathbf{x}^\epsilon(t),u^\epsilon(t)) + \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\mathbf{x}^\epsilon(t)+\boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{g}(t,\mathbf{x}^\epsilon(t),u^\epsilon(t)\right)\right]dt\Bigg|_{\epsilon=0}$$
$$+\frac{d}{d\epsilon}\left[\phi(\mathbf{x}^\epsilon(t_f)) - \boldsymbol{\lambda}(t_f)\mathbf{x}^\epsilon(t_f) + \boldsymbol{\lambda}(t_0)\mathbf{x}_0\ \right]\Bigg|_{\epsilon=0} = 0\ .$$

Jika menggunakan aturan rantai turunan maka diperoleh

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[f_x\frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial\epsilon} + f_u\frac{\partial u^\epsilon}{\partial\epsilon} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial\epsilon} + \boldsymbol{\lambda}(t)\left(\mathbf{g}_x\frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial\epsilon} + \mathbf{g}_u\frac{\partial u^\epsilon}{\partial\epsilon}\right)\right]dt\Bigg|_{\epsilon=0}$$
$$+\left(\frac{\partial\phi(\mathbf{x}^\epsilon(t_f))}{\partial\mathbf{x}^\epsilon(t_f)} - \boldsymbol{\lambda}(t_f)\right)\frac{\partial\mathbf{x}^\epsilon(t_f)}{\partial\epsilon}\Bigg|_{\epsilon=0} = 0\ ,$$

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[f_x\frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial\epsilon} + f_u\frac{\partial u^\epsilon}{\partial\epsilon} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial\epsilon} + \boldsymbol{\lambda}(t)\left(\mathbf{g}_x\frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial\epsilon} + \mathbf{g}_u\frac{\partial u^\epsilon}{\partial\epsilon}\right)\right]dt\Bigg|_{\epsilon=0}$$
$$+\left(\dot{\phi}(\mathbf{x}^\epsilon(t_f)) - \boldsymbol{\lambda}(t_f)\right)\frac{\partial\mathbf{x}^\epsilon(t_f)}{\partial\epsilon}\Bigg|_{\epsilon=0} = 0\ , \quad (2.14)$$

dengan f_x, f_u, $\mathbf{g}_x$, dan $\mathbf{g}_u$ adalah fungsi terhadap $(t,\ x^*(t),\ u^*(t))$. Persamaan (2.14) dapat ditulis ulang sebagai

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(f_x + \boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{g}_x + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\right)\frac{\partial \mathbf{x}^\epsilon}{\partial\epsilon} + \left(f_u + \boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{g}_u\right)\frac{\partial u^\epsilon}{\partial\epsilon}\right]dt\Bigg|_{\epsilon=0}$$
$$-\left(\boldsymbol{\lambda}(t_f)) - \dot{\phi}(\mathbf{x}^\epsilon(t_f)\right)\frac{\partial\mathbf{x}^\epsilon}{\partial\epsilon}(t_f)\Bigg|_{\epsilon=0} = 0\ . \quad (2.15)$$

Akan dipilih fungsi adjoin dengan menghilangkan koefisien $\left.\frac{\partial\mathbf{x}^\epsilon}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$ pada Persamaan (2.15) maka diperoleh

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\left[f_x(t,\mathbf{x}^*(t),u^*(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{g}_x(t,\mathbf{x}^*(t),u^*(t))\right], \quad (2.16)$$

dengan syarat batas atau syarat transversilitas

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f)) = \dot{\phi}(\mathbf{x}^\epsilon(t_f)), \quad (2.17)$$

sehingga Persamaan (2.15) menjadi

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(f_u + \boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{g}_u\right)h\right] dt = 0.$$

Berdasarkan bentuk di atas diperoleh fungsi yang memenuhi syarat optimal yaitu

$$f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) = 0. \tag{2.18}$$

(Lenhart dan Workman, 2007).

2.5.3 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip minimum Pontryagin dikembangkan oleh seorang ilmuwan yang bernama Pontryagin pada tahun 1962. Secara umum prinsip ini memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan dengan menyertakan variablel kontrol dan kendala (Pareallo, dkk., 2018).

Diberikan persaman *state* atau persamaan keadaan $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t))$ dan fungsi tujuan

$$J(u) = \phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t))\, dt, \tag{2.19}$$

dengan syarat batas $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_f) = x_f$ bebas. Berikut langkah-langkah penyelesaian masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin (Wardiman, 2018).

1. Membentuk fungsi Hamiltonian sebagai kombinasi fungsi dari $f(t, \mathbf{x}, u)$ serta perkalian antara fungsi adjoin dan ruas kanan persamaan *state* atau

   $$\mathcal{H}\left(t, \mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\right) = f\left(t, \mathbf{x}(t), u(t)\right) + \boldsymbol{\lambda}(t)\mathbf{g}\left(t, \mathbf{x}(t), u(t)\right).$$

2. Memaksimumkan $\mathcal{H}\left(t, \mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\right)$ terhadap semua variabel kontrol $u(t)$ dengan cara

   $$\left(f_u + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}_u\right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0,$$

   sehingga diperoleh $u^* = u^*(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$.

3. Mensubstitusikan u^* dari langkah 2 maka diperoleh fungsi Hamiltonian baru yang optimal yaitu

   $$\mathcal{H}^*\left(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\right) = \mathcal{H}\left(t, \mathbf{x}(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\right) = \min_{\mathbf{x} \in U} \mathcal{H}\left(t, \mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\right).$$

4. Menyelesaikan persamaan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}\big(t, \mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\big)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)_*, \tag{2.20}$$

dengan nilai awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, dan

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}\big(t, \mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\big)}{\partial \mathbf{x}}\right)_*, \tag{2.21}$$

dengan kondisi transversal $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \dot{\phi}(\mathbf{x}^*(t_f))$. Persamaan (2.20) disebut persamaan *state* atau persamaan keadaan dan Persamaan (2.21) disebut persamaan *co-state* atau persamaan kokeadaan.

5. Mensubstitusikan solusi yang diperoleh dari langkah 4 ke dalam kontrol optimal u^* pada langkah 2 untuk kontrol yang optimal.

2.6 *Metode Forward-Backward* Runge Kutta

Solusi persamaan *state* dan *co-state* diperoleh secara numerik dengan menggunakan metode *forward-backward* Runge Kutta orde 4. Solusi persamaan *state* yaitu $x(t)$ diperoleh dengan *forward* Runge Kutta, sedangkan solusi persamaan *co-state* yaitu $\lambda(t)$ diperoleh dengan *backward* Runge Kutta.

Dalam penyelesaian *forward* Runge Kutta, diberikan syarat awal $x(t_0)$ dan *step size h* dalam penyelesaian persamaan *state*. Pendekatannya melalui $x(t+h)$ dan $x(t)$, sehingga bentuk umum metode *forward* Runge Kutta yaitu:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{2.22}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f\big(t, x(t)\big), \\ k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t + h, x(t) + hk_1). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Sedangkan pada *backward* Runge Kutta, diberikan syarat batas atau kondisi transversal $\lambda(t_f)$ dan *step size h* dalam penyelesaian persamaan *co-state*. Pendekatannya melalui $\lambda(t-h)$ dan $\lambda(t)$, sehingga bentuk umum metode *backward* Runge Kutta yaitu:

$$\lambda(t-h) = \lambda(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{2.24}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f\big(t, \lambda(t)\big), \\ k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t + h, \lambda(t) - hk_1), \end{aligned} \tag{2.25}$$

(Lenhart dan Workman, 2007).

2.7 Metode *Steepest Decent*

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai metode numerik yang digunakan dalam proses pencarian nilai kontrol optimal u^*. Adapun metode numerik yang dimaksud adalah metode *steepest decent*. Misal diberikan fungsi tujuan

$$J(u) = \phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t))\, dt.$$

Langkah awal dalam mencari nilai kontrol optimal dimulai dengan mengatur nilai awal u sebagau u_{lama} . Jika $z(u)$ merupakan vektor unit dan arah *steepest decent* berlawanan dengan gradien fungsi tujuan $\nabla J(u)$, maka nilai baru u atau u_{baru} diperoleh dengan

$$u_{baru} = u_{lama} - \alpha z(u). \tag{2.26}$$

Diketahui bahwa

$$\nabla J(u) = \frac{\partial J(u)}{\partial u}, \text{ dan } z(u) = \frac{\nabla J(u)}{|\nabla J(u)|},$$

maka Persamaan (2.26) dapat ditulis ulang sebagai

$$u_{baru} = u_{lama} - \alpha \frac{\nabla J(u)}{\|\nabla J(u)\|}. \tag{2.27}$$

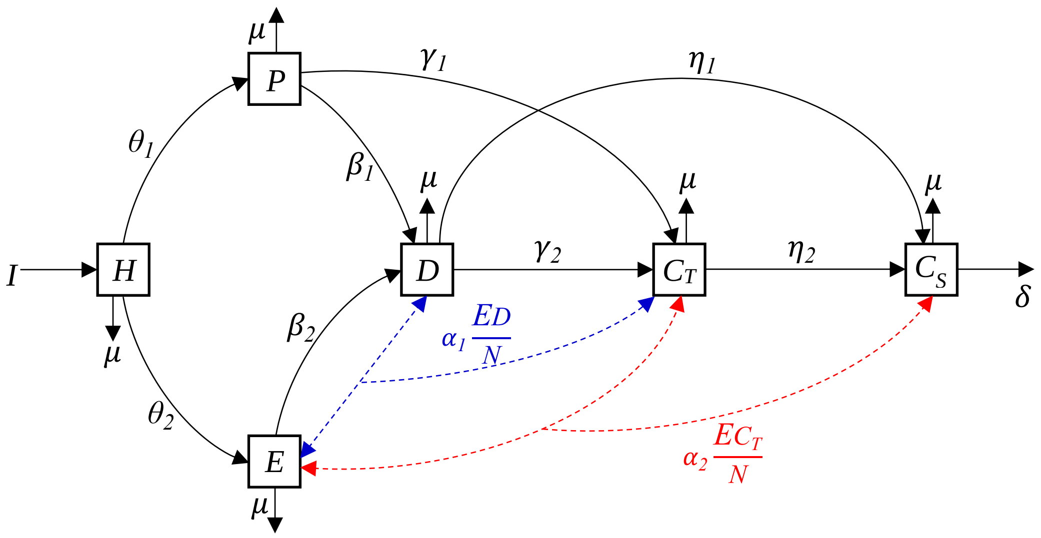
Nilai α merupakan besar ukuran langkah pada metode *steepest decent*. Semakin kecil nilai tersebut maka semakin lama dan banyak waktu komputasi yang dibutuhkan (Ogunbiyi, dkk., 2020).

Kriteria penghentian metode *steepest decent* adalah dengan mengecek $\|\nabla J(u)\|$, jika nilai tersebut tidak lebih besar dari suatu toleransi yang diberikan maka iterasi dihentikan. Sebagai alternatif, dapat juga dilakukan dengan menghitung nilai $error = |J(u_{baru}) - J(u_{lama})|$, jika nilai *error* tidak lebih besar dari suatu toleransi yang diberikan, maka iterasi dihentikan (Lestari, 2016).

2.7 Model Dinamika Populasi Penderita Diabetes Tanpa Kontrol

Pada bagian ini akan dibahas mengenai model dinamika populasi penderita diabetes tanpa kontrol oleh Kouidere, dkk. (2020) dimana model tersebut nantinya akan dikembangkan dengan menerapkan kontrol empat pilar penatalaksanaan diabetes serta pengobatan komplikasi.

Penelitian oleh Kouidere, dkk. (2020), membagi total populasi N menjadi enam kompartemen. Model yang dikonstruksi adalah model $HPEDC_TC_S$ yang menggambarkan dinamika populasi penderita diabetes. Berikut ini diagram kompartemen model dinamika populasi penderita diabetes.



Gambar 2.1 Diagram kompartemen model dinamika populasi penderita diabetes

Kompartemen H merupakan kompartemen orang sehat. Bertambahnya populasi pada kompartemen ini dipengaruhi karena adanya insidensi orang sehat I. Orang sehat yang memiliki pola hidup tidak sehat berisiko menderita diabetes sehingga terjadi perpindahan jumlah populasi dari kompartemen H ke kompartemen E sebesar $\theta_2 H(t)$. Selain itu, orang sehat dapat berisiko menderita diabetes melalui faktor genetik, sehingga jumlah populasi orang sehat pada kompartemen H berkurang sebesar $\theta_1 H(t)$. Jumlah populasi kompartemen H juga akan berkurang karena kematian alami μ. Berdasarkan uraian tersebut, laju perubahan jumlah populasi pada kompartemen H dinyatakan sebagai

$$\frac{dH(t)}{dt} = I - (\theta_1 + \theta_2 + \mu)H(t).$$

Kompartemen P merupakan kompartemen orang-orang yang berisiko menderita diabetes karena faktor genetik. Orang yang berisiko terkena diabetes karena faktor genetik dapat menderita diabetes tanpa komplikasi maupun dengan komplikasi. Jika tidak mendapatkan perawatan atau pengobatan lebih awal maka dapat menderita diabetes dengan komplikasi sedang, namun jika dilakukan perawatan atau pengobatan lebih awal maka komplikasi diabetes dapat dicegah, sehingga kompartemen P berkurang karena orang-orang pada kompartemen tersebut menderita diabetes tanpa komplikasi sebesar $\beta_1 P(t)$ dan menderita diabetes dengan komplikasi sedang sebesar $\gamma_1 P(t)$. Kompartemen P juga dapat berkurang karena adanya kematian alami dengan laju μ. Berdasarkan uraian tersebut, laju perubahan jumlah individu pada kompartemen P dinyatakan sebagai

$$\frac{dP(t)}{dt} = \theta_1 H(t) - (\beta_1 + \gamma_1 + \mu)P(t).$$

Kompartemen E merupakan kompartemen orang-orang yang berisiko menderita diabetes karena pola hidup yang tidak sehat. Orang sehat yang memiliki pola hidup tidak sehat menyebabkan perpindahan orang sehat dari kompartemen H ke kompartemen E, sehingga kompartemen E bertambah sebesar $\theta_2 H(t)$. Orang-orang pada kompartemen E yang tidak mengubah pola hidup tidak sehatnya secepat mungkin maka lama kelamaan akan menderita diabetes tanpa komplikasi, sehingga kompartemen E berkurang sebesar $\beta_2 E(t)$. Diasumsikan bahwa pola hidup yang dilakukan adalah pola hidup tidak sehat yang tidak terlalu parah sehingga tidak menimbulkan komplikasi. Oleh karena itu, tidak ada perpindahan dari kompartemen E ke kompartemen penderita diabetes dengan komplikasi yaitu C_T dan C_S. Kompartemen E berkurang karena adanya kematian alami dengan laju μ. Berdasarkan uraian tersebut, laju perubahan jumlah individu pada kompartemen E dinyatakan sebagai

$$\frac{dE(t)}{dt} = \theta_2 H(t) - (\beta_2 + \mu)E(t).$$

Kompartemen D merupakan kompartemen penderita diabetes tanpa komplikasi. Seseorang yang beresiko terkena diabetes karena faktor genetik dapat menderita diabetes tanpa komplikasi sehingga terjadi perpindahan dari kompartemen P ke kompartemen D dengan laju β_1. Selain itu, seseorang yang memiliki pola hidup tidak sehat juga beresiko terkena diabetes sehingga terjadi perpindahan dari kompartemen E ke kompartemen D dengan laju β_2. Penderita diabetes dapat menderita komplikasi dengan tingkat keparahan sedang dan serius. Penderita diabetes tanpa komplikasi yang mampu mengontrol dan menjaga kadar gula darahnya serta melakukan pengobatan pada penyakit diabetes yang diderita maka penderita tidak langsung terkena komplikasi dengan tingkat keparahan yang serius namun tingkat keparahan yang sedang. Oleh karena itu, kompartemen D berkurang sebesar $\gamma_2 D(t)$. Penderita diabetes tanpa komplikasi yang juga memiliki pola hidup yang tidak sehat karena melakukan kontak dengan kompartemen E maka dapat menderita diabetes dengan komplikasi sedang dengan laju α_1. Dengan kata lain, penyebaran pola hidup tidak sehat seperti penyebaran infeksi penyakit. Selanjutnya, jika penderita mengabaikan penyakit diabetes yang dideritanya maka penderita bisa saja menderita komplikasi dengan tingkat keparahan yang serius, sehingga jumlah populasi pada kompartemen D berkurang sebesar $\eta_1 D(t)$. Berdasarkan uraian tersebut, laju perubahan jumlah individu pada kompartemen D dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dD(t)}{dt} = \beta_1 P(t) + \beta_2 E(t) - \alpha_1 \frac{E(t)D(t)}{N} - (\gamma_2 + \eta_1 + \mu)D(t).$$

Kompartemen C_T merupakan kompartemen penderita diabetes dengan komplikasi sedang. Seseorang yang beresiko terkena diabetes karena faktor genetik dan tidak mendapatkan perawatan atau pengobatan lebih awal maka dapat menderita diabetes komplikasi sedang, sehingga kompartemen C_T bertambah sebesar $\gamma_1 P(t)$. Penderita diabetes tanpa komplikasi dapat menderita diabetes dengan komplikasi sedang sebesar $\gamma_2 D(t)$. Penderita diabetes tanpa komplikasi yang memiliki pola hidup tidak sehat juga dapat menderita diabetes dengan komplikasi sedang dengan laju α_1, sehingga menyebabkan jumlah individu pada kompartemen C_T bertambah. Selain itu, penderita diabetes dengan komplikasi sedang yang memiliki pola hidup tidak sehat dapat menderita diabetes dengan komplikasi yang lebih serius dengan laju α_2. Seseorang yang menderita diabetes komplikasi sedang yang tidak mendapatkan pengobatan atau perawatan maka dapat menderita diabetes dengan komplikasi sedang sehingga kompartemen C_T berkurang sebesar $\eta_2 C_T(t)$. Selain itu, kompartemen C_T juga dapat berkurang karena adanya kematian alami μ. Berdasarkan uraian tersebut, laju perubahan jumlah individu pada kompartemen C_T dinyatakan sebagai

$$\frac{dC_T(t)}{dt} = \gamma_1 P(t) + \gamma_2 D(t) + \alpha_1 \frac{E(t)D(t)}{N} - \alpha_2 \frac{E(t)C_T(t)}{N} - (\eta_2 + \mu)C_T(t).$$

Kompartemen C_S merupakan kompartemen penderita diabetes dengan komplikasi serius. Penderita diabetes tanpa komplikasi yang mengabaikan penyakit diabetes yang dideritanya dalam jangka waktu yang panjang maka akan menderita komplikasi dengan tingkat keparahan yang serius, sehingga kompartemen C_S bertambah sebesar $\eta_1 D(t)$. Jika penderita diabetes komplikasi sedang tidak mendapatkan pengobatan atau perawatan maka komplikasi yang diderita akan bertambah parah. Hal tersebut mengakibatkan jumlah individu pada kompartemen C_S bertambah sebesar $\eta_2 C_T(t)$. Selain itu juga, penderita diabetes komplikasi sedang dan memiliki pola hidup yang tidak sehat karena berinteraksi dengan orang-orang yang berada pada kompartemen E maka komplikasinya akan semakin parah, sehingga kompartemen C_S bertambah dengan laju α_2. Diasumsikan komplikasi diabetes dengan tingkat parah mengakibatkan kematian karena penyakit komplikasi. Kematian karena penyakit komplikasi dengan laju δ terjadi pada kompartemen C_S, sehingga berkurang sebesar $\delta C_S(t)$. Kematian alami dengan laju μ juga terjadi pada kompartemen ini. Berdasarkan uraian tersebut, laju perubahan jumlah individu pada kompartemen C_S dinyatakan sebagai

$$\frac{dC_S(t)}{dt} = \eta_1 D(t) + \eta_2 C_T(t) + \alpha_2 \frac{E(t)C_T(t)}{N} - (\delta + \mu)C_S(t).$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh model dinamika populasi penderita diabetes tanpa kontrol oleh Kouidere, dkk. (2020) sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dfrac{dH(t)}{dt} = I - (\theta_1 + \theta_2 + \mu)H(t), \\ \dfrac{dP(t)}{dt} = \theta_1 H(t) - \left(\beta_1 + \gamma_1 + \mu\right)P(t), \\ \dfrac{dE(t)}{dt} = \theta_2 H(t) - \left(\beta_2 + \mu\right)E(t), \\ \dfrac{dD(t)}{dt} = \beta_1 P(t) + \beta_2 E(t) - \alpha_1 \dfrac{E(t)D(t)}{N} - \left(\gamma_2 + \eta_1 + \mu\right)D(t), \\ \dfrac{dC_T(t)}{dt} = \gamma_1 P(t) + \gamma_2 D(t) + \alpha_1 \dfrac{E(t)D(t)}{N} - \alpha_2 \dfrac{E(t)C_T(t)}{N} - \left(\eta_2 + \mu\right)C_T(t), \\ \dfrac{dC_S(t)}{dt} = \eta_1 D(t) + \eta_2 C_T(t) + \alpha_2 \dfrac{E(t)C_T(t)}{N} - (\delta + \mu)C_S(t), \end{cases} \tag{2.28}$$

dengan $H(0) \geq 0$, $P(0) \geq 0$, $E(0) \geq 0$, $D(0) \geq 0$, $C_T(0) \geq 0$, dan $C_S(0) \geq 0$.