

**ANALISIS MODEL DINAMIKA POPULASI MANGSA-
PEMANGSA DENGAN KEHADIRAN PEBANGKAI DAN
FAKTOR PEMANENAN**

S K R I P S I



RAHMAT. S

H 111 13 009

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2017

**ANALISIS MODEL DINAMIKA POPULASI MANGSA-
PEMANGSA DENGAN KEHADIRAN PEBANGKAI DAN
FAKTOR PEMANENAN**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

**Universitas Hasanuddin
Makassar**

**RAHMAT. S
H 111 13 009**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2017

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

**Analisis Model Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa dengan
Kehadiran Pebangkai dan Faktor Pemanenan**

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 28 November 2017


Rahmat. S

NIM. H 111 13 009

**ANALISIS MODEL DINAMIKA POPULASI MANGSA-PEMANGSA
DENGAN KEHADIRAN PEBANGKAI DAN FAKTOR PEMANENAN**

SKRIPSI

RAHMAT S.

H11113009

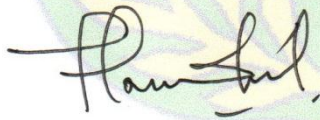
UNIVERSITAS HASANUDDIN

Telah Diperiksa dan Disetujui

Tanggal: 28 November 2017

Pembimbing Utama

Pembimbing Pertama



**Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.
NIP. 196801141994121001**



**Drs. Khaeruddin, M.Sc.
NIP. 196509141991031003**

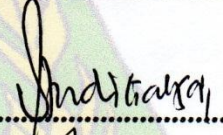
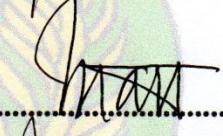
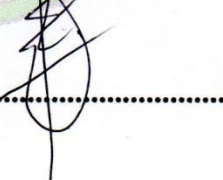
HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : Rahmat S.
NIM : H11113009
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Analisis Model Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa
dengan Kehadiran Pebangkai dan Faktor Pemanenan

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dewan Penguji

1. Ketua : **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.** (.....)
2. Sekretaris : **Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si.** (.....)
3. Anggota : **Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si.** (.....)
4. Anggota : **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.** (.....)
5. Anggota : **Drs. Khaeruddin, M.Sc.** (.....)

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 28 November 2017

KATA PENGANTAR

Puji syukur atas kehadiran Allah SWT yang karena anugerah dari-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang sangat sederhana ini dengan judul “**Analisis Model Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa dengan Kehadiran Pebangkai dan Faktor Pemanenan**” sebagai persyaratan dalam meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar kita, yaitu Nabi Muhammad SAW yang telah menunjukkan kepada kita jalan yang lurus berupa ajaran agama islam yang sempurna dan menjadi anugerah serta rahmat bagi seluruh alam semesta.

Berbagai rintangan dan hambatan penulis hadapi dalam proses penyusunan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa semuanya tidak akan berjalan lancar tanpa bantuan dan dorongan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menghanturkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dorongan dalam bentuk apapun.

Kepada Almarhum Ayah **H. Salim**, seorang ayah yang peduli kepada penulis, memberikan semangat dan do'a-do'a tulus untuk kelancaran pendidikan penulis hingga akhir hayatnya, semoga Allah SWT memberikan tempat terbaik untuk beliau. Kepada Ibu **Hj. Hasbiah** yang tiada henti-hentinya memberikan semangat, do'a, kasih sayang, dukungan dan perhatian yang tulus kepada penulis. Dan kepada satu-satunya kakak saudara **Rais Salim** yang selalu memberikan dukungan dalam bentuk apapun kepada penulis, penulis mengucapkan terima kasih sebanyak-banyaknya.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis mengucapkan banyak-banyak terima kasih kepada Bapak **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.** dan Bapak **Drs. Khaeruddin, M.Sc.** selaku pembimbing utama dan pertama, terima kasih banyak atas waktu dan kesempatan yang diberikan kepada penulis untuk menimba ilmu dari bapak sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini hingga akhir.

Untuk Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.**, selaku ketua tim penguji, Bapak **Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si.**, selaku sekretaris tim penguji sekaligus penasehat akademik penulis, dan Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si.**, selaku anggota tim penguji. Terima kasih yang sebesar-besarnya atas keluangannya waktu memberikan saran dan kritik yang membangun sehingga penulis dapat lebih menyempurnakan skripsi ini.

Untuk Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**, selaku Ketua Jurusan Matematika, Bapak **Dr. Amran, S.Si., M.Si.**, selaku Sekretaris Jurusan Matematika, dan segenap **Bapak dan Ibu Dosen** serta **Staf** Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin yang telah membekali ilmu, bimbingan, dan bantuannya selama ini kepada penulis. Semoga ilmu yang penulis dapatkan dari bapak dan ibu bisa penulis pergunakan sebaik-baiknya.

Untuk teman-teman seperjuangan **Matematika 2013** dan **Statistika 2013**, untuk kakak-kakak, adik-adik **Jurusan Matematika Unhas**, untuk teman-teman, kakak-kakak, dan adik-adik komunitas **HEC**, untuk teman-teman **SMA TBF**, teman-teman **KKN Kecamatan Belawa** khususnya posko Ongkoe, dan semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan. Terima kasih sebanyak-banyaknya atas bantuan yang diberikan kepada penulis baik secara langsung maupun tidak langsung.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini, masih terdapat kekurangan dan kesalahan. Hal ini tidak lepas dari keterbatasan penulis sebagai manusia biasa. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan adanya kritik dan saran yang positif demi penyempurnaan tugas akhir ini di masa yang akan datang.

Akhirnya, penulis berharap tugas akhir ini dapat memberikan manfaat, tidak saja bagi penulis tapi juga pada mereka yang membutuhkan.

Makassar, 28 November 2017

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rahmat. S
NIM : H11113009
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Nonexclusive Royalty and Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

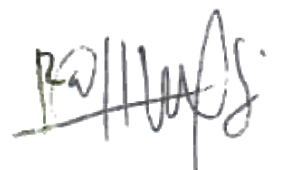
**“Analisis Model Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa dengan Kehadiran
Pebangkai dan Faktor Pemanenan”**

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/ pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan saya buat dengan sebenarnya.

Makassar, 28 November 2017

Yang menyatakan,



(Rahmat. S)

ABSTRAK

Dalam penelitian ini, dibahas model tiga interaksi yaitu populasi mangsa, populasi pemangsa, dan populasi pembangkai dengan faktor pemanenan yang dibuat dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinear. Dari model tersebut didapatkan lima titik keseimbangan yaitu E_0 (titik kepunahan semua populasi), E_1 (titik kepunahan populasi pemangsa dan pembangkai tetapi populasi mangsa tetap lestari), E_2 (titik kepunahan hanya pada populasi pemangsa), E_3 (titik kepunahan hanya pada populasi pembangkai), dan E_4 (titik dimana semua populasi dapat lestari). Titik keseimbangan dianalisis kestabilannya menggunakan linearisasi sistem. Nilai eigen dari matriks Jacobian memberikan informasi tentang kestabilan titik keseimbangan E_0, E_1, E_2, E_3 namun untuk kestabilan titik keseimbangan E_4 membutuhkan informasi lebih lanjut menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Dari nilai eigen tersebut, kestabilan yang didapat bersifat stabil asimtotik untuk beberapa nilai parameter tertentu. Adapun simulasi numerik menunjukkan bahwa pengaruh tingkat pemanenan terhadap populasi mangsa, populasi pemangsa, dan populasi pembangkai cenderung akan stabil apabila tingkat pemanenan berada dibawah nilai batas ambang tertentu.

Kata kunci: Model mangsa-pemangsa-pembangkai, faktor pemanenan, titik keseimbangan, matriks Jacobian, kriteria Routh-Hurwitz, simulasi numerik.

ABSTRACT

In this research, we discussed the model of three interacting populations, i.e prey, predator, and scavenger population with harvesting factor which is formed in nonlinear ordinary differential equation system. There are five equilibrium points were found from the model, i.e E_0 (all of population extinct), E_1 (predator and scavenger population extinct), E_2 (predator population extinct), E_3 (scavenger population extinct), and E_4 (all of the population could be persistent). The equilibrium points were analyzed for their stability using linearization system. The eigenvalues of the Jacobian matrix provides the stability of the equilibrium points E_0, E_1, E_2, E_3 but for the stability of the equilibrium point E_4 is requiring more information using Routh-Hurwitz criteria. The stability of all eigenvalues are asymptotically stable for several parameter values. Numerical simulations exhibit that the effect of harvesting rates on prey, predator and scavenger population tend to be stable if harvesting rates are under threshold values.

Keywords: Predator–prey-scavenger model, harvesting factor, equilibrium point, Jacobian matrix, Routh-Hurwitz criteria, numerical simulation.

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
HALAMAN JUDUL.....	ii
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN.....	iii
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING	iv
HALAMAN PENGESAHAN.....	v
KATA PENGANTAR	vi
PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH.....	viii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT	x
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL.....	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penulisan.....	3
1.5 Manfaat Penulisan.....	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
1.7 Alur Kerja	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	6
2.1 Ekologi.....	6
2.2 Populasi sebagai Unit Ekologi	6
2.3 Interaksi dalam Populasi	7
2.4 Interaksi Kompetitif antara Pemangsa dan Pebangkai.....	9
2.5 Pemanenan pada Populasi Hewan	11
2.6 Sistem Dinamik.....	13
2.7 Sistem Persamaan Diferensial.....	13
2.8 Titik Keseimbangan	17

2.9 Linierisasi Sistem Non-linier	18
2.10 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	20
2.11 Kriteria Routh-Hourtwiz	21
2.12 Kestabilan Titik Keseimbangan	23
2.13 Bidang fase.....	25
2.14 Model Matematika dan Proses Pemodelan Matematika.....	26
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN.....	32
3.1 Konstruksi Model Mangsa-Pemangsa dengan Kehadiran Pebangkai dan Faktor Pemanenan	32
3.2 Analisis Dimensi Parameter Model	33
3.3 Titik Keseimbangan Model.....	34
3.4 Linierisasi Model	38
3.5 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan.....	39
3.6 Simulasi Numerik Model.....	46
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	60
4.1 Kesimpulan	60
4.2 Saran	61
DAFTAR PUSTAKA	62
LAMPIRAN	65

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Interaksi antara mangsa, pemangsa, pebangkai	10
Gambar 2.2	Jenis-jenis kestabilan titik tetap.....	26
Gambar 2.3	Proses pemodelan matematika	27
Gambar 3.1	Kurva solusi kasus kepunahan semua populasi.....	47
Gambar 3.2	Bidang fase kasus kepunahan semua populasi.....	48
Gambar 3.3	Kurva solusi kasus kepunahan populasi pemangsa dan pebangkai	50
Gambar 3.4	Bidang fase kasus kepunahan pemangsa dan pebangkai	51
Gambar 3.5	Kurva solusi kasus kepunahan pemangsa	53
Gambar 3.6	Bidang fase kasus kepunahan populasi pemangsa	54
Gambar 3.7	Kurva solusi kasus kepunahan pebangkai	55
Gambar 3.8	Bidang fase kasus kepunahan populasi pebangkai.....	56
Gambar 3.9	Kurva solusi kasus kelestarian semua populasi.....	58
Gambar 3.10	Bidang fase kasus kelestarian semua populasi.....	59

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Dimensi parameter model	33
Tabel 3.2	Parameter kasus kepunahan semua populasi	47
Tabel 3.3	Parameter kasus kepunahan populasi pemangsa dan pebangkai	49
Tabel 3.4	Parameter kasus kepunahan populasi pemangsa.....	52
Tabel 3.5	Parameter kasus kepunahan populasi pebangkai	55
Tabel 3.6	Parameter kasus kelestarian semua populasi	57

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem interaksi dalam ekosistem yang merupakan pendekatan terhadap suatu fenomena fisik adalah sistem interaksi predator-prey, dimana prey sebagai populasi yang dimangsa dan predator sebagai populasi yang memangsa (Du dkk, 2007). Sistem predator-prey adalah salah satu jenis sistem yang merupakan gabungan atau interaksi dari dua populasi yaitu predator (pemangsa) dan prey (mangsa). Interaksi antar dua populasi ini sangat penting karena kelangsungan hidup makhluk hidup tergantung pada keseimbangan lingkungan di sekitarnya. Keseimbangan tersebut dapat tercapai jika jumlah rata-rata populasi dari populasi predator dan prey yang sedang berinteraksi sesuai dengan ukuran dan proporsinya.

Model matematika predator-prey yang banyak dipakai adalah model yang terdiri atas dua spesies berbeda dimana salah satu dari keduanya menyediakan makanan untuk yang lainnya. Model predator-prey pertama kali diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini juga disebut model Lotka-Volterra (Boyce dan DiPrima, 2001).

Pengembangan model predator-prey telah dilakukan oleh Previte dan Hoffman (2013) yang mengkaji interaksi mangsa-pemangsa dengan kehadiran spesies pembangkai. Pembangkai memainkan peran penting dalam ekosistem dengan mengkonsumsi hewan yang mati. Pembangkaian dapat bersifat karnivora maupun herbivora, dimana pembangkai memakan hewan yang mati dan material tanaman yang terdapat di habitatnya. Dalam literatur disebutkan bahwa terkadang suatu binatang bisa menjadi pembangkai dan juga predator misalnya *whelk buccinum undatum* dan *hyena*. Mereka mencirikan spesies pembangkai juga merupakan pemangsa dari mangsa dan mengais bangkai pemangsa lainnya. Mereka beranggapan bahwa pembangkai tidak memiliki efek negatif pada populasi yang dibangkai.

Sangatlah berguna untuk memahami dampak suatu spesies pada spesies lainnya pada saat beberapa kegiatan seperti pemanenan spesies tertentu dilakukan.

Seperti menghadirkan fungsi pemanenan misalnya fungsi Holling atau juga sebuah konstanta ke dalam model mangsa-pemangsa-pebangkai dimana pemanenan hanya terbatas pada pemangsa dan pebangkai. Dalam kasus banyak interaksi spesies, penting untuk dipahami bahwa pemanenan suatu spesies akan bermanfaat baik dari sisi ekologis maupun ekonomi.

Ketiga spesies yaitu mangsa, pemangsa, dan pebangkai dihadirkan sebuah pemanenan terhadap ketiga spesies dengan usaha dan tujuan pemanenan terhadap masing-masing spesies berbeda satu sama lain. Sistem interaksi ketiga populasi tersebut dengan tambahan pemanenan kemudian membentuk sebuah model persamaan diferensial biasa non-linier. Dari model tersebut dilakukan analisis dengan menentukan titik keseimbangan model dan menganalisis kestabilan titik keseimbangan model. Selain itu parameter pemanenan juga dianalisis untuk melihat dampak pemanenan terhadap sistem. Simulasi numerik diberikan untuk menunjang hasil yang diperoleh.

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk menganalisis perilaku sistem predator-prey dengan kehadiran pebangkai dan juga pemanenan. Sebuah penelitian yang diformulasikan dengan judul

“Analisis Model Dinamika Populasi Mangsa-Pemangsa dengan Kehadiran Pebangkai dan Faktor Pemanenan”

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah:

1. Bagaimana bentuk model mangsa-pemangsa dengan kehadiran pebangkai dan faktor pemanenan?
2. Bagaimana kestabilan titik-titik keseimbangan dari model mangsa-pemangsa dengan kehadiran pebangkai dan faktor pemanenan?
3. Bagaimana simulasi numerik model mangsa-pemangsa dengan kehadiran pebangkai dan faktor pemanenan?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini masalah yang dikaji dibatasi pada pemodelan matematika mangsa-pemangsa dengan kehadiran pebangkai yang digagas oleh Previte dan Hoffman (2013) dalam jurnal berjudul “*Period Doubling Cascades in a Predator-Prey Model with a Scavenger*” dengan tambahan adanya faktor pemanenan. Analisis terhadap model matematika dimulai dengan mencari titik keseimbangan kemudian memeriksa kestabilan titik keseimbangan tersebut. Adapun asumsi-asumsi yang digunakan adalah:

1. Pendekatan terhadap model pada masalah nyata dalam ekosistem adalah dengan mengasumsikan mangsa sebagai populasi hewan herbivora, misalnya rusa dan tidak ada mangsa lain selain hewan tersebut. Sehingga keberadaan populasi pemangsa dan pebangkai hanya bergantung pada keberadaan populasi mangsa. pemangsa diasumsikan sebagai populasi singa, dan pebangkai diasumsikan sebagai populasi hyena atau dubuk.
2. Kompetisi yang dimaksud adalah perilaku persaingan antara pemangsa dan pebangkai dalam memangsa spesies mangsa.
3. Spesies pebangkai mengais bangkai dari pemangsa tetapi tidak mengurangi populasi pemangsa secara langsung.
4. Berkurangnya populasi mangsa lebih besar diakibatkan oleh interaksi dengan mangsa serta pemangsa sehingga kematian alami pada mangsa diabaikan.
5. Tujuan pemanenan dan jumlah pemanenan setiap spesies berbeda.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah:

1. Memahami bentuk model mangsa-pemangsa dengan kehadiran pebangkai dan faktor pemanenan
2. Menganalisis kestabilan titik-titik keseimbangan dari model mangsa-pemangsa dengan kehadiran pebangkai dan faktor pemanenan
3. Membuat simulasi numerik model mangsa-pemangsa dengan kehadiran pebangkai dan faktor pemanenan

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari hasil penulisan penelitian ini adalah:

1. Bagi Penulis, manfaat yang bisa diambil adalah penulis mampu menerapkan ilmu-ilmunya, khususnya tentang pemodelan matematika.
2. Bagi Departemen Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin, sebagai bahan pustaka khususnya tentang pemodelan matematika.
3. Bagi Pembaca, menambah pengetahuan tentang pemodelan matematika dan bisa menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan berguna untuk memudahkan dalam memahami jalan pemikiran secara keseluruhan tugas akhir. Penulisan tugas akhir ini secara garis besar dibagi menjadi tiga bagian.

1. Bagian Awal

Bagian awal tugas akhir ini terdiri dari halaman sampul, halaman judul, halaman pernyataan keotentikan, halaman pengesahan pembimbing dan penguji, kata pengantar, halaman pernyataan persetujuan publikasi, abstrak, abstract, daftar isi, daftar gambar, dan daftar tabel.

2. Bagian Isi

Bagian isi tugas akhir ini terdiri dari empat bab dengan rincian sebagai berikut.

BAB 1 PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang, rumusan dan batasan masalah, tujuan dan manfaat penulisan, sistematika penulisan sebagai gambaran singkat isi tugas akhir, dan alur kerja.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Berisi kajian teori dan hasil penelitian terdahulu yang menjadi kerangka pikir dalam menyelesaikan masalah penelitian.

BAB 3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Berisi hasil dan pembahasan tentang model mangsa-pemangsa dengan kehadiran pembangkai dan faktor pemanenan yang disajikan dalam rangka menjawab permasalahan penelitian.

BAB 4 KESIMPULAN DAN SARAN

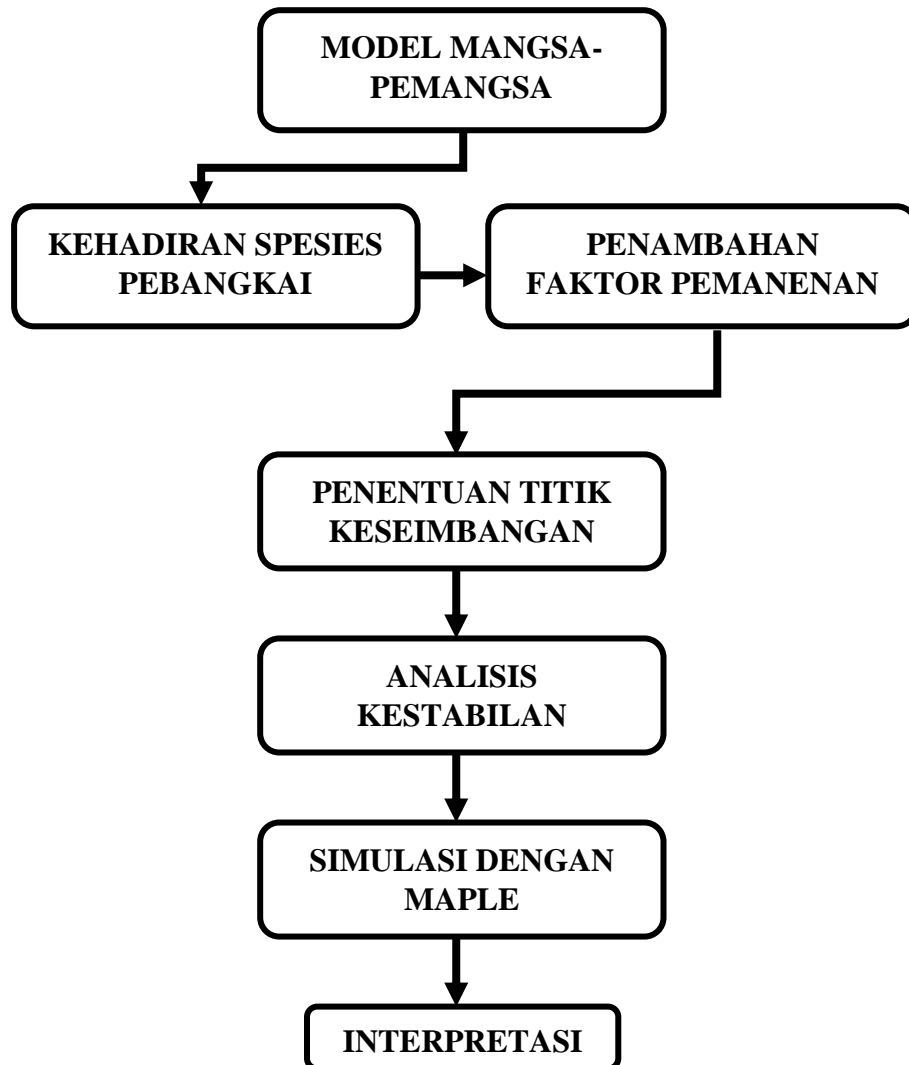
Berisi kesimpulan dan saran yang diperoleh dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan.

3. Bagian Akhir

Bagian akhir tugas akhir ini terdiri dari daftar pustaka yang merupakan informasi mengenai referensi yang digunakan serta lampiran-lampiran yang mendukung dalam penulisan tugas akhir ini.

1.7 Alur Kerja

Alur kerja dalam tugas akhir ini ditunjukkan sebagai berikut.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ekologi

Kata ekologi pertama kali diperkenalkan oleh Ernest Haeckel, ahli biologi Jerman pada tahun 1869, berasal dari bahasa Yunani: *oikos* yang berarti “rumah” atau “tempat untuk hidup” dan *logos* yang berarti ilmu, telaah, atau studi. Secara harfiah, ekologi adalah ilmu yang mempelajari organisme di rumahnya. Biasanya ekologi didefinisikan sebagai ilmu yang mempelajari hubungan timbal-balik antara makhluk hidup dengan lingkungannya. Definisi yang lain, Odum menyatakan ekologi sebagai ilmu yang mengkaji struktur dan fungsi alam. Dalam Webster’s Unbridged Dictionary, ekologi didefinisikan sebagai totalitas atau pola hubungan antara organisme dengan lingkungannya. Sementara Charles Elton mendefinisikan ekologi sebagai sejarah alam secara ilmiah.

Andrawertha secara lebih khusus menyatakan ekologi merupakan studi ilmiah mengenai distribusi organisme dan kelimpahannya. Definisi ini disempurnakan oleh Krebs yang menyatakan ekologi mempelajari interaksi-interaksi yang menentukan sebaran dan kelimpahan organisme. Kemudian Kandeigh memberikan definisi ekologi sebagai kajian tentang hewan dan tumbuhan dalam hubungannya antara suatu makhluk yang satu dengan yang lain dan antara makhluk dengan lingkungannya (Resosoedarmo dkk, 1984).

2.2 Populasi sebagai Unit Ekologi

Organisme adalah sekumpulan sistem organ yang merupakan kerja sama antara struktural dan fungsional yang harmonis, sehingga menghasilkan suatu benda hidup, jasad hidup atau makhluk hidup. Satu makhluk hidup disebut dengan individu. Kata individu berasal dari bahasa Latin: *in* artinya tidak dan *dividuus* yang artinya dapat dibagi. Contoh individu adalah seekor singa di dalam kawanannya, seekor ikan dalam kelompoknya, setiap batang pohon karet dalam suatu perkebunan, dan sebagainya.

Selain memiliki ciri khusus, individu juga memiliki persamaan ciri dengan individu lain. Persamaan ini merupakan faktor pengikat individu ke dalam satu kelompok makhluk hidup yang serupa atau sejenis disebut *populasi*.

Pengertian populasi menurut para ahli adalah sebagai berikut:

1. **Resosoedarmo**, secara umum populasi dapat dianggap sebagai suatu kelompok organisme yang terdiri dari individu yang tergolong dalam satu jenis, atau satu varietas, satu ekotipe atau satu unit taksonomi lain yang terdapat pada suatu tempat.
2. **Odum**, mendefinisikan populasi sebagai sekelompok kolektif organisme-organisme dari spesies yang sama (atau kelompok-kelompok lain di dalam mana individu-individu dapat bertukar informasi genetiknya) yang menduduki ruang atau tempat tertentu.
3. **Kendeigh**, menggunakan istilah populasi untuk suatu kumpulan setempat individu yang sedikit berbeda dari kumpulan setempat lain pada spesies yang sama.
4. **Krebs**, menerangkan populasi sebagai sekelompok makhluk hidup yang sama spesiesnya dan mendiami suatu ruang khusus pada waktu yang khusus.

Populasi dapat dibagi menjadi deme, atau populasi setempat, kelompok-kelompok yang saling membuahi, satuan kolektif terkecil populasi hewan atau tumbuhan.

2.3 Interaksi dalam Populasi

Pada dasarnya keberadaan individu di dalam populasinya ada yang sendiri (soliter), ada yang kadang-kadang berkelompok, dan ada pula yang terus menerus dalam bentuk kelompok. Kehidupan bersama antar individu dalam populasi tidak lepas dari pemenuhan berbagai kebutuhan hidup seperti makanan, tempat hidup, perlindungan diri maupun reproduksi. Beberapa bentuk interaksi yang umumnya terjadi antara populasi adalah sebagai berikut.

a) **Kanibalisme**

Interaksi intraspesies pada hewan terjadi dalam bentuk saling memakan disebut kanibalisme. Berbagai ikan karnivor seperti Oscar,

Arwana, Barramundi, Lele, dapat makan ikan sejenisnya yang berukuran lebih kecil termasuk anaknya sendiri. Dalam hal ini, kanibal terjadi sepanjang waktu. Ada pula kanibalisme yang terjadi saat tertentu. Pada belalang sembah, kanibalisme hanya terjadi saat perkawinan. Setelah kawin belalang sembah jantan dimangsa oleh betinanya. Pada ayam, hiu, bahkan manusia pada dasarnya memiliki jiwa kanibal.

b) Kompetisi

Kompetisi antar individu juga terjadi pada hewan dalam rangka memperebutkan makanan, kedudukan dalam kelompok, dan pasangan. Pada kera, hewan terbesar dan terkuat berkedudukan sebagai raja, akan memakan makanan dan mengawini betina terbaik terlebih dahulu, baru setelah kenyang baru pergi untuk kera lain. Pada bangsa kecoa walaupun tidak didahului dengan membunuh, tetapi mau memakan bangkai kecoa lain, bahkan kutikulanya sendiri yang lepas pada saat ekdisis atau berganti kulit juga akan memakannya.

Interaksi intraspecies pada hewan juga terjadi untuk tujuan perlindungan. Kerbau liar dan gajah akan selalu berkelompok dalam formasi yang jantan di luar mengelilingi betina dan anaknya. Pada singa cenderung hidup berkelompok, tiap kelompok terdiri dari 4 jantan dan 6 betina beserta anak-anaknya. Kera yang besar juga akan melindungi anggota kelompoknya. Perlindungan juga terjadi antara induk terhadap anaknya seperti pada burung dan mamalia, atau antara jantan dengan betinanya seperti pada ikan Oscar atau burung merpati (perlindungan sepanjang hidup), pada kucing dan anjing (perlindungan hanya pada musim kawin).

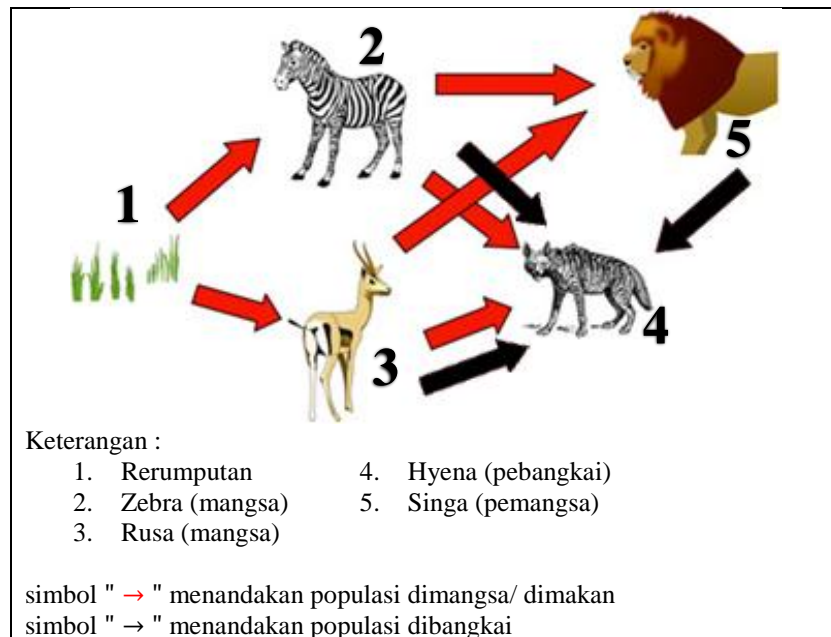
Kehidupan berkelompok membentuk masyarakat yang spesifik ditemukan pada lebah, rayap, dan semut. Pada hewan ini ada pejantan atau raja, betina sebagai ratu, dan pekerja yang masing-masing mempunyai tugas yang berbeda-beda.

2.4 Interaksi Kompetitif antara Pemangsa dan Pebangkai

Di benua Afrika, sebagian besar daerahnya merupakan gurun pasir dan padang rumput yang luas, bahkan gurun terluas di dunia pun terdapat di Afrika. Selain itu, Afrika merupakan salah satu benua yang kaya ragam akan flora dan fauna, tetapi kehidupan alam liar di Afrika sangatlah sulit; hanya yang kuat saja yang mampu bertahan hidup. Musim kering sangat sering terjadi di Afrika, sehingga membuat mata air dan sungai pun hanya menghasilkan sedikit sekali air untuk banyak fauna. Maka, menjadi hewan yang kuat di Afrika merupakan salah satu hal yang terpenting untuk dapat bertahan hidup di alam liar.

Singa utamanya terdapat di Afrika. Singa biasa hidup di dalam kelompok besar yang terdiri dari satu jantan dan banyak betina serta anak-anaknya. Banyak kelompok singa yang hidup di dalam satu daerah yang bersebelahan di Afrika, sehingga para pejantan biasanya menandai daerah kekuasaannya agar singa dari kelompok lain tidak memasuki wilayah kekuasaannya. Para betina biasanya merupakan kelompok yang bertugas untuk mencari dan membunuh mangsa untuk makanan kawanannya. Mereka berburu siang dan malam, serta terkoordinasi dengan baik dan memiliki strategi yang baik pula, sehingga mereka bahkan dapat menjatuhkan seekor kerbau dengan berat satu ton. Gigitan pejantan merupakan yang paling fatal, sehingga biasanya si pejantan yang menggigit leher mangsanya hingga mati. Singa terdiri dari 250 kg otot murni dan mampu berlari hingga 60 km per jam. Populasi singa di Afrika terdapat pada Mali, Somalia, Kenya, dan Namibia.

Seperti pada Gambar 2.1, salah satu pesaing singa dalam memperoleh buruan adalah hyena. Di Afrika ada tiga jenis hyena, yaitu yang bergaris-garis, coklat, dan bertutul. Hyena bertutul merupakan pemakan daging terbesar di Afrika. Hyena hidup dalam kelompok besar, di dalam satu kelompok dapat berisi hingga 80 ekor hyena. Walaupun ukuran hyena biasanya lebih kecil dari singa, tetapi hyena memiliki rahang yang lebih kuat dari singa sehingga ia mampu untuk memakan tulang mangsanya (Gunadarma.ac.id, 2011).



Gambar 2.1 Interaksi antara mangsa, pemangsa, dan pebangkai
(Sumber: texasgateway.org, 2014)

Hyena bertutul adalah hewan yang pandai berburu, tetapi mereka juga mengais bangkai. pesaing utama mereka dalam berburu makanan adalah singa. Di Taman Nasional Etosha, Namibia 71% kematian hyena bertutul adalah karena singa, empat anak dan satu hyena bertutul betina dewasa dibunuh oleh singa jantan selama studi 1 tahun. Hyena bertutul telah melakukan evolusi adaptasi terhadap singa dan memulai interaksi agresif dengan singa tanpa ketersediaan makanan, yang disebut perilaku mobbing atau mengepung. Hyena bertutul Etosha memulai upaya mobbing ketika singa berada di dekat sarang hyena bertutul. Mungkin, Hyena bertutul Etosha mengepung singa untuk mengalihkan perhatian singa dari sarang hyena bertutul dan memperingatkan anak-anak mereka untuk bersembunyi dari singa.

Hyena bertutul *Crocuta crocuta* dan singa *Panthera leo* memperoleh sebagian besar sumber makanan mereka dengan aktif berburu, tetapi Hyena bertutul juga mengais bangkai (Kruuk, 1972; Schaller, 1972). Kedua spesies secara potensial adalah pesaing yang berat dalam mendapatkan makanan. Di Kawah Ngorongoro, hyena bertutul secara agresif penyebab 100% dari kematian singa ketika singa jantan dewasa tidak hadir (Honer dkk, 2002), sedangkan di Chobe, Botswana, hyena bertutul mengambil 27% dari pembunuhan (Cooper,

1991). Di Taman Nasional Rwenzori, Uganda, singa kehilangan hampir sepertiga dari bangkai (makanan) yang mereka dapat yang direbut oleh hyena bertutul, meskipun dalam kebanyakan kasus singa sudah memakan sebagian dagingnya. Di Kalahari selatan, Afrika Selatan, hyena bertutul memperoleh pangan dengan mengais-ngais bangkai dari hasil perburuan singa (Mills, 1994).

Analisis komparatif mengenai studi tentang interaksi hyena bertutul-singa menunjukkan bahwa ketersediaan singa membunuh bangkai dan kesempatan hyena bertutul untuk mendapatkannya dari singa dipengaruhi oleh rasio hyena bertutul terhadap singa dalam ekosistem dan oleh rasio singa jantan dewasa dan betina dalam populasi (Cooper, 1991). Singa membunuh hyena bertutul untuk mengurangi kompetisi pangan dan pada beberapa ekosistem, singa dilaporkan menjadi sumber utama kematian hyena bertutul. Hyena bertutul telah berevolusi dalam beradaptasi dan dirancang untuk menghindari serangan singa. Hyena bertutul memulai pertemuan agresif dengan singa tanpa ketersediaan dari makanan. Perilaku ini telah ditafsirkan sebagai perilaku mobbing, dimana hyena bertutul agresif mendorong singa untuk meninggalkan daerah (Kruuk, 1972). Pengepungan hyena bertutul dapat memperingatkan atau melindungi keturunan mereka dan meningkatkan kemungkinan bertahan hidup keturunan mereka.

2.5 Pemanenan pada Populasi Hewan

Sering kita dengar istilah eksploitasi terhadap satwa liar, yang sebenarnya pengertiannya adalah sama yakni pemanfaatan, namun istilah ini memiliki konotasi pengambilan atau pengurasan sumber daya alam dan kurang memperhatikan aspek kelestarian alam. Dan istilah ini mungkin lebih cocok digunakan pada sumber daya alam yang tak terbarukan seperti tambang. Sedangkan untuk sumber daya alam yang dapat terbarukan lebih tepat digunakan istilah pemanenan, yang berarti suatu kegiatan memanen hasil. Yang artinya hasil yang diperoleh setelah kita menanam atau memelihara suatu sumber daya alam dengan baik, dan ada unsur pengelolaan.

Menurut Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 8 Tahun 1999, Penangkapan satwa liar adalah kegiatan memperoleh satwa liar dari habitat alam

untuk kepentingan pemanfaatan jenis satwa liar di luar perburuan. Pemanfaatan jenis satwa liar dilaksanakan dalam bentuk:

- a. Pengkajian, penelitian dan pengembangan;
- b. Penangkaran (Konservasi);
- c. Perburuan;
- d. Perdagangan;
- e. Peragaan;
- f. Pertukaran;
- g. Budidaya tanaman obat-obatan; dan
- h. Pemeliharaan untuk kesenangan.

Pemanenan satwa liar secara lestari adalah konsep pemanfaatan satwa liar melalui pemanenan sejumlah anggota populasi dari habitat alaminya tanpa melebihi kemampuan populasi tersebut untuk mempertahankan ukuran minimum lestarinya melalui proses reproduksi. Kegiatan pemanenan dilakukan dengan tujuan berbeda-beda, tergantung lokasi pemanenan dan siapa yang melakukan pemanenan. Pemanenan umumnya dilakukan untuk satu atau lebih dari satu alasan diantaranya nutrisi, ekonomi, budaya dan rekreasi (Bennet and Robinson, 1999). Pemanenan tidak hanya dilakukan oleh masyarakat tradisional tetapi juga dapat dilakukan oleh seluruh kalangan masyarakat dengan tujuan dan latar belakang yang berbeda-beda sehingga mempengaruhi perilakunya dalam melakukan pemanenan.

Kegiatan pemanenan harus memperhatikan analisis terhadap dinamika populasi dari satwa liar. Karena dari dinamika populasi tersebut dapat diketahui status suatu populasi, apakah dalam kondisi berkembang, stabil atau menurun. Agar dicapai tujuan kelestarian hasil yang maksimal, diperlukan beberapa pembahasan, seperti (Bailey, 1984):

1. Lamanya musim berburu
2. Waktu dibuka dan ditutupnya musim berburu
3. Daftar spesies yang boleh diburu dan jenis kelaminnya
4. Jumlah satwa liar yang dipanen (diburu).
5. Peraturan Berburu

2.6 Sistem Dinamik

Sistem dinamik banyak terdapat di alam, di dalam matematika sebuah sistem dinamik merupakan sebuah himpunan dari variabel-variabel yang berhubungan dengan perubahan waktu. Di dalam sistem dinamik kontinu, rata-rata waktu berubah dari tiap-tiap kuantitas sebuah fungsi yang diketahui dari variabel-variabelnya. Jika fungsi-fungsi ini secara eksplisit tidak bergantung waktu, maka sistem dinamik disebut autonomous. Jika sistem mempunyai tiga variabel dinamik yang bebas, maka sistem dinamik tersebut dinamakan sistem dinamik tiga dimensi. Secara geometri, sistem dinamik menggambarkan pergerakan titik-titik di dalam ruang fase sepanjang kurva-kurva penyelesaian dari sistem pada persamaan-persamaan diferensialnya (Perko, 2001).

Secara umum sistem dinamik didefinisikan sebagai sebuah masalah nyata yang dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan-persamaan diferensial dimana dalam persamaannya mengandung parameter-parameter yang saling berhubungan, serta perubahan parameter pada persamaan tersebut akan menyebabkan perubahan kestabilan dari titik keseimbangan.

2.7 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari fungsi yang diketahui.

Beberapa persamaan diferensial yang membentuk suatu sistem disebut sistem persamaan diferensial. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dengan kondisi awal $\dot{x}_i(t_0) = x_{i0}$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$. Sistem

(2.1) dapat juga ditulis menjadi

$$\dot{x} = f(x),\tag{2.2}$$

Dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), f = (f_1, f_2, \dots, f_n), \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ dan kondisi awal $x(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = x_0$. Notasi $x(t) = (x_0, t)$ merupakan solusi sistem (2.2) dengan nilai awal x_0 .

(Ilmiawan, 2016)

Contoh 2.1

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial $y' - y \sin x = 0$

Penyelesaian:

$$y' - y \sin x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \sin x dx$$

$$\ln|y| = -\cos x + c$$

$$|y| = e^{-\cos x + c}$$

Contoh 2.2

Tentukan solusi umum dari sistem persamaan diferensial berikut

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2, \\ x_2' &= 2x_1 + x_2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

Penyelesaian:

Bentuk matriks dari sistem (2.3) diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Digunakan persamaan $(A - \alpha I)\vec{\zeta} = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & 2 \\ 2 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Sistem (2.5) mempunyai solusi nontrivial jika dan hanya jika determinan dari koefisien matriks bernilai nol, sehingga

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \alpha & 2 \\ 2 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha)^2 - 4 = 0.$$

Jelas $\alpha = -1$ dan $\alpha = 3$. Nilai tersebut merupakan nilai Eigen dari koefisien matriks dalam persamaan (2.5).

Substitusi $\alpha = -1$ ke sistem (2.5), didapatkan

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Sehingga diperoleh $2\zeta_1 + 2\zeta_2 = 0$ atau $\zeta_1 = -\zeta_2$. Vektor Eigen yang bersesuaian dengan $\alpha = -1$, diberikan oleh

$$\zeta^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Substitusi $\alpha = 3$ ke sistem (2.5). dan didapatkan

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Sehingga diperoleh $-2\zeta_1 + 2\zeta_2 = 0$ atau $\zeta_1 = \zeta_2$. Vektor Eigen yang bersesuaian dengan $\alpha = 3$, diberikan oleh

$$\zeta^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Didapatkan solusi untuk sistem (2.3) yakni,

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

dan solusi umumnya diberikan oleh

$$\vec{x} = c_1 \vec{x}^{(1)} + c_2 \vec{x}^{(2)} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

2.7.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier

Sistem persamaan diferensial linier adalah sistem persamaan yang terdiri dari n buah persamaan diferensial linier dengan n buah fungsi tak diketahui berbentuk:

$$x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$

$$x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$

⋮

$$x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

sistem persamaan diferensial linier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$x_1' = a(t)x_1 + b(t)x_2 + f_1(t)$$

$$x_2' = c(t)x_1 + d(t)x_2 + f_2(t)$$

dengan dan fungsi-fungsi f_1 dan f_2 merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang I dan x_1 dan x_2 adalah fungsi t yang tidak diketahui (Finizo dan Ladas, 1988)

Contoh 2.3

- 1) $x_1' = 4x_1 + 2x_2$
 $x_2' = 3x_1 - x_2$
- 2) $x_1' = 4x_1 + x_2 + 4x_3$
 $x_2' = x_1 + 7x_2 + x_3$
 $x_3' = 4x_1 + x_2 + 4x_3$

Contoh 2.3 bagian (1) merupakan contoh sistem persamaan diferensial linier dengan dua fungsi yang tak diketahui. Sedangkan bagian (2) merupakan sistem persamaan diferensial linier dengan tiga fungsi yang tak diketahui.

2.7.2 Sistem Persamaan Diferensial Non-Linier

Sistem persamaan diferensial non-linier adalah persamaan yang terdiri dari lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Sistem dari dua persamaan diferensial tak linier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y, t)$$

dengan $F(x, y, t)$ dan $G(x, y, t)$ adalah fungsi-fungsi tak linier dari x dan y secara kualitatif dibanting kuantitatif (Waluyo, 2006)

Contoh 2.4

$$x_1' = x_1x_2 + x_1$$

$$x_2' = 2x_1^2 - x_2$$

merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x_1 dan x_2 karena terdapat perkalian antara variabel tak bebas x_1 dan x_2 pada persamaan pertama, dan pada persamaan kedua terdapat kuadrat dari variabel tak bebas x_1 .

2.8 Titik Keseimbangan

Titik ekuilibrium atau titik keseimbangan merupakan solusi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu.

Defenisi 2.1

Titik $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\hat{x}) = 0$.

(Perko, 2001)

Contoh 2.5

Akan dicari titik ekuilibrium dari sistem berikut.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + x_1(t)x_2(t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Penyelesaian:

Misal $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ adalah titik ekuilibrium sistem (2.6) maka

$$\dot{x}_1 = \hat{x}_1 - \hat{x}_2^2 = 0\tag{2.7}$$

$$\dot{x}_2 = -\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2 = 0\tag{2.8}$$

Dari persamaan (2.7) maka diperoleh

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2^2\tag{2.9}$$

Substitusikan persamaan (2.9) ke dalam persamaan (2.8) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}-\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\hat{x}_2 + \hat{x}_2^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\hat{x}_2(1 - \hat{x}_2^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \hat{x}_2 = 0 \text{ atau } \hat{x}_2 = \pm 1.\end{aligned}$$

Selanjutnya substitusikan $\hat{x}_2 = 0$ ke persamaan (2.9) sehingga diperoleh $\hat{x}_1 = 0$,

substitusikan $\hat{x}_2 = 1$ dan $\hat{x}_2 = -1$ ke persamaan (2.9) maka diperoleh $\hat{x}_1 = 1$.

Jadi titik ekuilibrium dari sistem (2.6) adalah $(0,0)^T, (1,1)^T, (1,-1)^T$.

2.9 Linierisasi Sistem Non-linier

Perhatikan sistem tak linier berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.10}$$

dimana f_1, f_2, \dots, f_n merupakan fungsi kontinu dan taklinier.

Misalkan $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$ merupakan titik keseimbangan sistem (2.10) dan misalkan

$u_i = x_i - \bar{x}_i$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ maka menurut teorema Taylor, ekspansi f di sekitar titik keseimbangan \bar{x} adalah

$$\begin{aligned}f_1(x) &= f_1(\bar{x}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x})u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x})u_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x})u_n + g_1(u) \\ f_2(x) &= f_2(\bar{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x})u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x})u_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x})u_n + g_2(u) \\ &\vdots \\ f_n(x) &= f_n(\bar{x}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x})u_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x})u_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x})u_n + g_n(u)\end{aligned}\tag{2.11}$$

jika \bar{x} merupakan titik keseimbangan maka

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_1 - \bar{x}_1) \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_2 - \bar{x}_2) \\ &\vdots \\ \frac{du_n}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_n - \bar{x}_n)\end{aligned}$$

Karena $f(x) = 0$ maka persamaan (2.11) dapat ditulis:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \\ \vdots \\ g_n(u) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

dengan $\begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \\ \vdots \\ g_n(u) \end{bmatrix}$ adalah nilai galat atau error.

Karena $u_i = x_i - \bar{x}_i$ maka persamaan (2.12) dalam notasi vektor dapat ditulis menjadi

$$\dot{u} = Au + g(u) \quad (2.13)$$

dengan $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix}, g(u) = \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \\ \vdots \\ g_n(u) \end{bmatrix}$

dan Matriks A sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

Matriks A disebut sebagai matriks Jacobian. Untuk nilai $x(t)$ yang sangat dekat dengan \bar{x} maka $g(u)$ menjadi sangat kecil dan dapat diabaikan, sehingga persamaan (2.13) dapat didekati dengan persamaan linier:

$$\dot{u} = Au$$

Dengan asumsi $|A| \neq 0$, maka titik keseimbangan nol untuk sistem linier merupakan suatu sistem terisolasi.

(Verhulst, 1990)

2.10 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Secara formal definisi nilai Eigen dan vektor Eigen adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ dan $x \in R^n, x \neq 0$. Vektor x disebut vektor Eigen/ vektor karakteristik dari A jika

$$Ax = \lambda x$$

Untuk suatu $\lambda \in R$. Bilangan λ yang memenuhi persamaan di atas disebut nilai Eigen/ nilai karakteristik. Vektor x disebut vektor Eigen yang bersesuaian dengan λ

Untuk mencari nilai Eigen dan vektor Eigen dari suatu matriks A berordo $n \times n$ adalah sebagai berikut:

Misalkan A matriks $n \times n$ dan $v \in R^n, v \neq 0$ merupakan vektor Eigen dari matriks A , maka ada $\lambda \in R \ni$

$$Av = \lambda v.$$

$$\Leftrightarrow Av = \lambda Iv$$

$$\Leftrightarrow (\lambda I - A)v = 0$$

Tampak bahwa v merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linier (SPL) homogen $(\lambda I - A)v = 0$. Karena $v \neq 0$, maka sistem persamaan homogen $(\lambda I - A)v = 0$ mempunyai penyelesaian non trivial. Ini hanya mungkin jika $\det(\lambda I - A) = 0$, artinya λ adalah penyelesaian persamaan dari $\det(\lambda I - A) = 0$. Sehingga, $\det(\lambda I - A) = 0$ ini disebut persamaan karakteristik dari matriks A .

Lemma 2.2

Misalkan A matriks $n \times n$. $\lambda \in R$ adalah nilai Eigen dari matriks A jika dan hanya jika λ adalah akar persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$. Sedangkan vektor Eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ adalah penyelesaian dari SPL homogen $(\lambda I - A)v = 0$.

(Anton dan Rorres, 2014)

2.11 Kriteria Routh-Hourtwiz

Untuk menguji sifat kestabilan diperlukan perhitungan untuk menentukan nilai-nilai Eigen dari matriks Jacobian di titik ekuilibrium. Sebagai alternatif untuk menentukan nilai Eigen tersebut digunakan kriteria Routh-Hurwitz yaitu, Jika pembuat nol pada persamaan

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n \quad (2.14)$$

mempunyai bagian real negatif, maka

$$\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0 \quad (2.15)$$

(Hahn, 1967).

Defenisi 2.3

Diberikan polinomial (2.14), dengan a_0 positif dan a_k bilangan real, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Matriks Hurwitz untuk persamaan (2.14) didefinisikan sebagai matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ yang berbentuk sebagai berikut.

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Determinan Hurwitz tingkat ke- k , dinotasikan dengan $\Delta_k; k = 1, 2, \dots, n$ yang dibentuk dari matriks Hurwitz (2.16), didefinisikan sebagai berikut.

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

\vdots

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

(Liao dkk, 2007).

Berikut ini teorema yang menjamin pembuat nol Polinomial (2.14) mempunyai bagian real negatif.

Teorema 2.4

Pembuat nol dari polinomial (2.14) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika Pertidaksamaan (2.15) dipenuhi dan

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0 \tag{2.17}$$

(Liao dkk, 2007).

Contoh 2.6

Diberikan polinomial berderajat 3: $k_0x^3 + k_1x^2 + k_2x + k_3 = 0$. Matriks

Hurwitz dari polinomial tersebut adalah $H = \begin{bmatrix} k_1 & k_0 & 0 \\ k_3 & k_2 & k_1 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$.

Dari matriks H diperoleh

$$\Delta_1 = |k_1| = k_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} k_1 & k_0 \\ k_3 & k_2 \end{vmatrix} = k_1k_2 - k_0k_3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} k_1 & k_0 & 0 \\ k_3 & k_2 & k_1 \\ 0 & 0 & k_3 \end{vmatrix} = k_3(k_1k_2 - k_0k_3)$$

Agar semua akar polinomial tersebut mempunyai bagian real negatif maka harus memenuhi:

$$\Delta_1 > 0 \Leftrightarrow k_1 > 0$$

$$\Delta_2 > 0 \Leftrightarrow k_1k_2 - k_0k_3 > 0$$

$$\Delta_3 > 0 \Leftrightarrow k_1k_2 - k_0k_3 > 0$$

$$\frac{k_1}{k_0} > 0 \Leftrightarrow k_0 > 0$$

$$\frac{k_2}{k_0} > 0 \Leftrightarrow k_2 > 0$$

$$\frac{k_3}{k_0} > 0 \Leftrightarrow k_3 > 0$$

jadi semua akar polinomial $k_0x^3 + k_1x^2 + k_2x + k_3 = 0$ mempunyai bagian real negatif apabila

1. $k_0 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0$ dan $k_3 > 0$

$$2. \quad k_1 k_2 - k_0 k_3 > 0.$$

(Kharis, 2012)

2.12 Kestabilan Titik Keseimbangan

Tinjau persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.18)$$

dimana turunan $\dot{x} = dx/dt$ dan $\dot{y} = dy/dt$ hanya bergantung pada (x, y) dan tidak bergantung secara eksplisit pada variabel t , (Atikah, 2008).

Titik keseimbangan sistem (2.18) adalah titik (x^*, y^*) sedemikian sehingga $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$. Titik keseimbangan (x^*, y^*) merupakan solusi sistem (2.1) yang bernilai konstan, karena $\dot{x} = 0$ dan $\dot{y} = 0$ pada titik (x^*, y^*) . Keadaan yang menyebabkan $\dot{x} = 0$ dan $\dot{y} = 0$ disebut sebagai keadaan seimbang, dan titik yang memenuhinya disebut titik keseimbangan (Edward dan Penney, 2001).

Perhatikan sistem linier berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \quad (2.19)$$

dimana a, b, c , dan d merupakan konstanta

Persamaan (2.19) dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

atau

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = B\vec{x} \quad (2.21)$$

dengan

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

dengan asumsi $\det B \neq 0$, karena $\det B \neq 0$ maka B mempunyai invers, dengan demikian titik $(0, 0)$ merupakan satu-satunya titik keseimbangan sistem (2.19).

Misalkan solusi sistem (2.19) adalah:

$$\vec{x} = \vec{\xi} e^{\lambda t} \quad (2.22)$$

dimana

$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

Dengan λ merupakan konstanta. Dengan mensubstitusikan (2.22) ke sistem (2.21) diperoleh

$$\lambda \vec{\xi} e^{\lambda t} = B \vec{\xi} e^{\lambda t}. \quad (2.23)$$

Jika persamaan (2.23) dibagi dengan $e^{\lambda t}$ maka persamaan tersebut menjadi $\lambda \vec{\xi} = B \vec{\xi}$ atau

$$(B - \lambda I) \vec{\xi} = 0. \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

yang mempunyai penyelesaian tak-trivial jika

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

yaitu:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (2.26)$$

Persamaan (2.26) dikenal sebagai *persamaan karakteristik* dan akar-akar persamaannya disebut *nilai Eigen*.

Teorema 2.1

1. Titik keseimbangan sistem (2.19) stabil, jika semua nilai Eigen pada persamaan karakteristik (2.26) adalah real dan tak positif, atau mempunyai bagian real tak positif.
2. Titik keseimbangan sistem (2.19) stabil asimtotik, jika semua nilai Eigen pada persamaan karakteristik (2.26) adalah real dan negatif, atau mempunyai bagian real negatif.
3. Titik keseimbangan sistem (2.19) tidak stabil, jika terdapat paling sedikit satu nilai Eigen pada persamaan karakteristik (2.26) yang bernilai real dan positif, atau jika akar kompleksnya mempunyai bagian real yang positif, (Edward dan Penney, 2001).

2.13 Bidang fase

Tinjau ulang persamaan karakteristik (2.26) berikut.

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

persamaan (2.26) dapat juga ditulis sebagai berikut.

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

dengan

$$\tau = \text{trace}(B) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\Delta = \det(B) = ad - bc = \lambda_1\lambda_2$$

dengan demikian diperoleh nilai Eigen dari B adalah:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

1. Kasus $\Delta < 0$.

Jika kedua nilai Eigen real berbeda tanda maka titik keseimbangan bersifat sadel.

2. Kasus $\Delta > 0$.

a. $\tau^2 - 4\Delta > 0$.

- Jika $\tau > 0$ dan kedua nilai Eigen real bernilai positif maka titik keseimbangan bersifat “simpul tak stabil”.
- Jika $\tau < 0$ dan kedua nilai Eigen real bernilai negatif maka titik keseimbangan bersifat “simpul stabil”.

b. $\tau^2 - 4\Delta < 0$.

- Jika $\tau > 0$ dan kedua nilai Eigen imajiner ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) maka titik keseimbangan bersifat “spiral tak stabil”.
- Jika $\tau < 0$ dan kedua nilai Eigen imajiner ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) maka titik keseimbangan bersifat “spiral stabil”.
- Jika $\tau = 0$ dan kedua nilai Eigen imajiner murni ($\lambda_{1,2} = i\beta$) maka titik keseimbangan bersifat “center”.

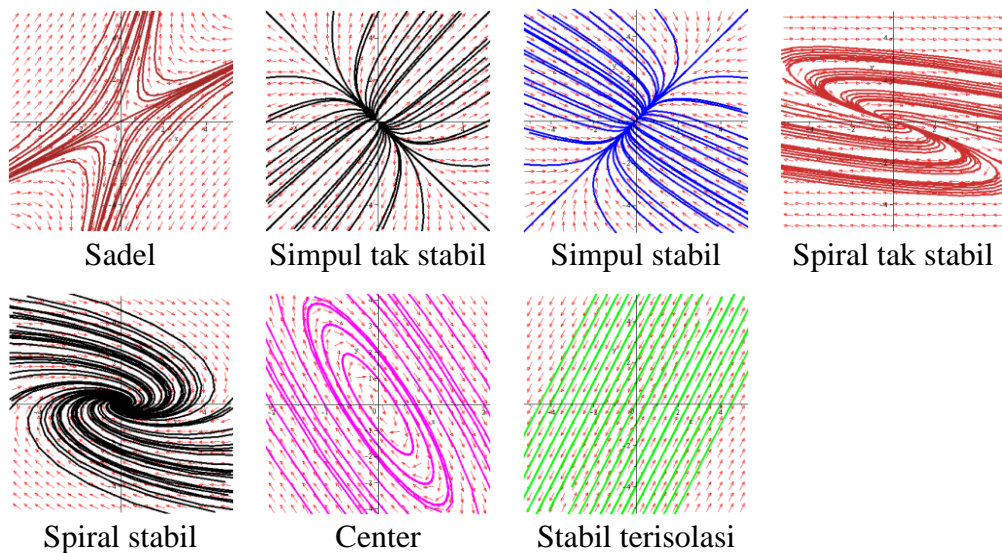
c. $\tau^2 - 4\Delta = 0$.

Parabola $\tau^2 - 4\Delta = 0$ adalah garis batas antara simpul dan spiral. *Star nodes* dan *degenerate* terletak pada parabola ini. Jika kedua nilai Eigen bernilai sama maka titik keseimbangan bersifat “simpul sejati”

3. Kasus $\Delta = 0$.

Jika salah satu nilai Eigen bernilai nol maka titik asal bersifat “titik keseimbangan tak terisolasi”.

Berikut diberikan gambar jenis-jenis kestabilan titik keseimbangan (Strogatz, 1994):

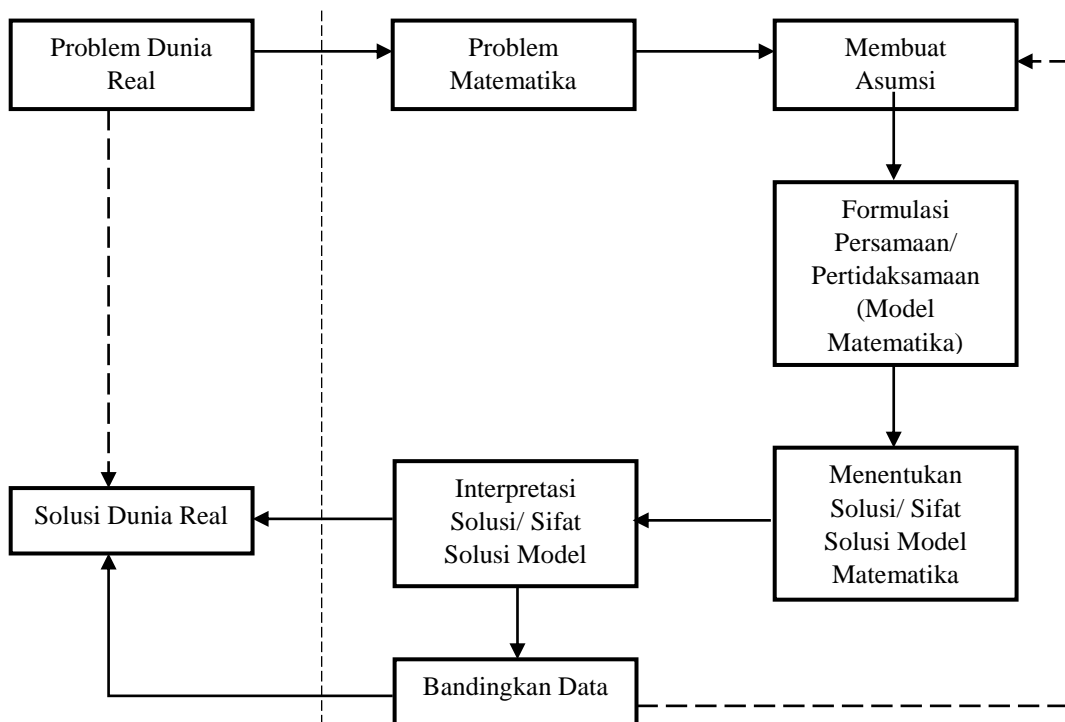


Gambar 2.2. Jenis-jenis kestabilan titik tetap

2.14 Model Matematika dan Proses Pemodelan Matematika

Model matematika merupakan salah satu ilmu matematika yang dapat membantu mendeskripsikan fenomena-fenomena dalam kehidupan nyata dalam bentuk fungsi atau persamaan. Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda seperti bidang fisika, ilmu biologi dan kedokteran, teknik, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis dan keuangan, dan juga problem – problem jaringan komputer dapat diaplikasikan ke dalam model matematika.

Proses pemodelan matematika dapat dinyatakan dalam alur diagram pada gambar 2.3 (Widowati dan Sutimin, 2007).



Gambar 2.3. Proses pemodelan matematika

Penyelesaian problem dunia real secara langsung kadang sulit didapatkan, untuk mempermudah mencari penyelesaian problem dunia real akan dibawa ke dalam dunia matematika. Dalam dunia matematika, problem diidentifikasi dengan menentukan variabel-variabel problem dan hubungan antara variabel-variabel tersebut. Selanjutnya membuat asumsi-asumsi yang sesuai dengan problem agar model yang dihasilkan nanti dapat menggambarkan dengan tepat problem dalam dunia real tersebut.

Berdasarkan variabel-variabel yang telah ditentukan, hubungan antar variabel, dan asumsi-asumsi yang telah dibuat maka dapat dibentuk persamaan atau pertidaksamaan (model matematika) yang menggambarkan problem dunia real tersebut. Dengan persamaan atau pertidaksamaan yang telah dibentuk maka dapat dicari solusi atau sifat solusi model matematika. Pada langkah berikutnya dilakukan interpretasi terhadap solusi atau sifat solusi model matematika ke dalam dunia real. Perbandingan solusi dengan data yang ada dapat membantu memperbaiki model yang telah dibentuk apakah telah sesuai atau belum, apabila belum sesuai maka dapat meninjau ulang asumsi-asumsi yang telah dibuat.

2.14.1 Model Mangsa-Pemangsa

Model Lotka-Volterra juga dikenal sebagai model mangsa-pemangsa adalah model pasangan dua persamaan diferensial nonlinear orde satu, yang banyak digunakan dalam menggambarkan dinamika sistem biologi dimana dua spesies saling berinteraksi, satu sebagai pemangsa dan yang lainnya sebagai mangsa. Laju populasi mangsa dengan tidak adanya pemangsa tumbuh cepat mendekati eksponensial dan tak terbatas dalam bentuk sebagai berikut,

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)r \quad (2.27)$$

dengan:

$x(t)$ adalah kepadatan spesies mangsa pada waktu t ,

r adalah koefisien laju pertumbuhan intrinsik spesies mangsa.

laju populasi mangsa menjadi fungsi logistik karena sumber daya alam yang terbatas, yang kemudian dapat menulisnya sebagai berikut.

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)r\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \quad (2.28)$$

dengan proporsi dan banyaknya individu dalam populasi yang belum digunakan

$\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$ dan K (*carrying capacity*). Populasi pada tingkat K kadang juga

disebut tingkat kejenuhan, karena untuk populasi besar lebih banyak kematian daripada kelahiran.

Carrying capacity atau daya dukung adalah jumlah maksimum individu yang dapat didukung atau dilayani oleh sumber daya yang ada di dalam suatu ekosistem. Dengan kata lain, *carrying capacity* dapat disebut juga sebagai kemampuan lingkungan (ekosistem) dalam mendukung kehidupan semua makhluk yang ada di dalamnya secara berkelanjutan.

Carrying capacity dalam pemodelan matematika berhubungan erat dengan ketersediaan tanaman sebagai makanan mangsa. Kemudian ditunjukkan suatu persamaan dimana mangsa dan pemangsa akan saling berinteraksi yaitu sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(t)r \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \gamma x(t)y(t) - \eta y(t).\end{aligned}\tag{2.29}$$

Dalam hal ini diasumsikan $K, \alpha, \gamma, r > 0$.

Pada persamaan (2.29) kehadiran pemangsa bersifat mengurangi jumlah populasi mangsa. Karena dalam hubungannya mangsa akan berinteraksi dengan pemangsa. Akan tetapi sebaliknya pada model pertumbuhan pemangsa, maka respon ini akan bersifat menambah jumlah pemangsa meskipun juga berkurang dengan adanya kematian alami pada pemangsa (Timuneno dkk, 2008).

2.14.2 Model Mangsa-Pemangsa dengan Kehadiran Pebangkai

Pebangkai memainkan peran penting dalam ekosistem dengan mengkonsumsi hewan yang mati dan material tanaman. Pebangkaian dapat bersifat karnivora maupun herbivora, dimana pebangkai memakan hewan yang mati dan material tanaman yang terdapat di habitatnya. Dalam literatur disebutkan bahwa terkadang suatu binatang bisa menjadi pebangkai dan juga pemangsa misalnya *whelk Buccinum undatum* dan *hyna*. Dari pandangan tersebut Previte dan Hoffman (2013) memperkenalkan sebuah spesies ketiga yaitu pebangkai ke dalam sistem mangsa-pemangsa klasik yang secara biologis masuk akal. Mereka mencirikan spesies pebangkai juga merupakan pemangsa dari mangsa dan mengais bangkai pemangsa lainnya. Mereka beranggapan bahwa pebangkai tidak memiliki efek negatif pada populasi yang dibangkai. Selain itu, di asumsikan pula bahwa pebangkai mengais bangkai pemangsa dan bersaing dengan pemangsa memburu mangsa.

Berikut adalah bentuk model tiga spesies mangsa-pemangsa-pebangkai.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(t)r \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \gamma x(t)y(t) - \eta y(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \delta x(t)z(t) + \nu y(t)z(t) - \mu z(t).\end{aligned}\tag{2.30}$$

dimana:

x adalah populasi mangsa, y adalah populasi pemangsa, z adalah populasi pebangkai. Dan parameter-parameter dijelaskan sebagai berikut

r adalah laju pertumbuhan intrinsik populasi mangsa,

k adalah *carrying capacity* mangsa,

α adalah laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pemangsa,

β adalah laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pebangkai,

γ adalah laju pertumbuhan populasi pemangsa dari interaksi dengan mangsa,

η adalah laju kematian alami pemangsa,

δ adalah laju pertumbuhan populasi pebangkai dari interaksi dengan mangsa,

ν adalah laju pertumbuhan populasi pebangkai dari hasil membangkai pemangsa,

μ adalah laju kematian alami pebangkai.

Setiap parameter diasumsikan positif, dan variabel diasumsikan non-negatif.

2.14.3 Model Mangsa-Pemangsa dengan Kehadiran Pebangkai dan Faktor Pemanenan

Sangatlah berguna untuk memahami dampak suatu spesies pada spesies lainnya pada saat beberapa kegiatan seperti pemanenan spesies tertentu dilakukan. Dalam kasus banyak interaksi spesies, penting untuk dipahami bahwa pemanenan suatu spesies akan bermanfaat baik dari sisi ekologis maupun ekonomi. Pemanenan spesies umumnya memiliki dampak yang kuat terhadap dinamika sumber daya ekologi.

Setelah sebelumnya telah dibuat model mangsa-pemangsa-pebangkai oleh Previte dan Hoffman (2013) pada persamaan (2.30) selanjutnya dipertimbangkan sebuah versi yang diperpanjang dari model tersebut dengan menggabungkan pemanenan terhadap ketiga spesies untuk mempelajari pengaruh pemanenan terhadap dinamika sistem. Diasumsikan bahwa ketiga spesies yaitu mangsa, pemangsa dan pebangkai dipanen dengan tiga agensi yang berbeda, populasi pemangsa dan pebangkai dipanen untuk tujuan konservasi dan Pemindahan ke habitat lain (*Ex-situ*) dalam rangka pemeliharaan dan pengembangbiakan, sedangkan populasi Mangsa dipanen untuk tujuan ekonomi dan perdagangan.

Usaha pemanenan E_1, E_2 , dan E_3 yang diterapkan pada tujuan ini masing-masing berbeda yang menghasilkan koefisien ketertangkapan q_1, q_2 , dan q_3 yang berbeda. Sehingga bentuk akhir model yang diusulkan adalah model pada persamaan (2.30) dengan tambahan parameter pemanenan yang diberikan pada persamaan (2.31) berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(t)r \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - H_1 x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \gamma x(t)y(t) - \eta y(t) - H_2 y(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \delta x(t)z(t) + \nu y(t)z(t) - \mu z(t) - H_3 z(t).\end{aligned}\tag{2.31}$$

dengan:

$H_1 = q_1 E_1$, adalah parameter pemanenan dengan usaha ketertangkapan mangsa sebesar E_1 dan koefisien tertangkapnya populasi mangsa yaitu q_1 .

$H_2 = q_2 E_2$, adalah parameter pemanenan dengan usaha ketertangkapan mangsa sebesar E_2 dan koefisien tertangkapnya populasi mangsa yaitu q_2 .

$H_3 = q_3 E_3$, adalah parameter pemanenan dengan usaha ketertangkapan mangsa sebesar E_3 dan koefisien tertangkapnya populasi mangsa yaitu q_3 .

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Model Mangsa-Pemangsa dengan Kehadiran Pebangkai dan Faktor Pemanenan

Pada subbab 2.14 telah dibahas model mangsa-pemangsa dengan kehadiran pebangkai dan faktor pemanenan pada persamaan (2.31). Model tersebut adalah bentuk model akhir yang telah dibuat dan yang akan diteliti dan dianalisis selanjutnya pada Bab ini. Dari model tersebut, diasumsikan bahwa spesies mangsa (x) dimangsa oleh spesies pemangsa (y) bersama pebangkai (z) dan pebangkai (z) mengais bangkai spesies pemangsa (y) (pebangkai tidak memiliki efek negatif terhadap populasi yang dibangkai). Selain itu, diasumsikan juga bahwa ketiga spesies mangsa, pemangsa, pebangkai dipanen dengan tiga agensi yang berbeda dan oleh karena itu usaha E_1 , E_2 dan E_3 yang diterapkan pada tujuan ini sangat berbeda yang menghasilkan koefisien ketertangkapan q_1 , q_2 dan q_3 yang berbeda.

Model yang diusulkan dengan adanya pemanenan terhadap mangsa, pemangsa dan pebangkai ditinjau kembali dari persamaan (2.31) sebagai berikut.

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)r \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - H_1 x(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \gamma x(t)y(t) - \eta y(t) - H_2 x(t),$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \delta x(t)z(t) + \nu y(t)z(t) - \mu z(t) - H_3 x(t).$$

dengan:

$H_1 = q_1 E_1$, adalah parameter pemanenan dengan usaha ketertangkapan mangsa sebesar E_1 dan koefisien tertangkapnya populasi mangsa yaitu q_1 .

$H_2 = q_2 E_2$, adalah parameter pemanenan dengan usaha ketertangkapan mangsa sebesar E_2 dan koefisien tertangkapnya populasi mangsa yaitu q_2 .

$H_3 = q_3 E_3$, adalah parameter pemanenan dengan usaha ketertangkapan mangsa sebesar E_3 dan koefisien tertangkapnya populasi mangsa yaitu q_3 .

Dimana $x(t), y(t), z(t) > 0$, dan $r, k, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta, \nu, \mu, q_1, q_2, q_3, E_1, E_2, E_3 > 0$, dengan:

$x(t)$ adalah banyaknya populasi mangsa pada waktu t ,

$y(t)$ adalah banyaknya populasi pemangsa pada waktu t ,

$z(t)$ adalah banyaknya populasi pebangkai pada waktu t ,

r adalah laju pertumbuhan intrinsik populasi mangsa,

k adalah *carrying capacity* mangsa,

α adalah laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pemangsa,

β adalah laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pebangkai,

γ adalah laju pertumbuhan populasi pemangsa dari interaksi dengan mangsa,

η adalah laju kematian alami pemangsa,

δ adalah laju pertumbuhan populasi pebangkai dari interaksi dengan mangsa,

ν adalah laju pertumbuhan populasi pebangkai dari hasil membangkai pemangsa,

μ adalah laju kematian alami pebangkai,

dengan kondisi awal

$$x_1(0) > 0, x_2(0) > 0, x_3(0) > 0.$$

3.2 Analisis Dimensi Parameter Model

Berikut dimensi parameter yang digunakan dalam model.

Tabel 3.1 Dimensi parameter model

Paramter Mangsa	Dimensi	Paramter Pemangsa	Dimensi	Paramter Pebangkai	Dimensi
r	$1/T$	γ	$1/PT$	δ	$1/PT$
k	P	η	$1/T$	ν	$1/PT$
α	$1/PT$	q_2	—	μ	$1/T$
β	$1/PT$	E_2	$1/T$	q_3	—
q_1	—			E_3	$1/T$
E_1	$1/T$				

Keterangan : P = Populasi; T = Tahun.

3.3 Titik Keseimbangan Model

Tinjau kembali persamaan (2.31) dengan menguraikan parameter H_1, H_2 , dan H_3 .

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x\left(r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha y - \beta z - q_1 E_1\right), \\ \frac{dy}{dt} &= y(\gamma x - \eta - q_2 E_2), \\ \frac{dz}{dt} &= z(\delta x + \nu y - \mu - q_3 E_3).\end{aligned}\tag{3.1}$$

dari persamaan (3.1), akan dicari titik keseimbangan dengan cara membuat persamaan (3.1) sama dengan nol, yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

sehingga persamaan (3.1) menjadi:

$$x \cdot \left(r - \frac{r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1\right) = 0\tag{3.2}$$

$$y \cdot (\gamma x - \eta - q_2 E_2) = 0\tag{3.3}$$

$$z \cdot (\delta x + \nu y - \mu - q_3 E_3) = 0\tag{3.4}$$

untuk persamaan (3.2) didapatkan hasil:

$$x = 0$$

atau

$$r - \frac{r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 = 0\tag{3.5}$$

untuk persamaan (3.3) didapatkan hasil:

$$y = 0$$

atau

$$\gamma x - \eta - q_2 E_2 = 0\tag{3.6}$$

untuk persamaan (3.4) didapatkan hasil:

$$z = 0$$

atau

$$\delta x + \nu y - \mu - q_3 E_3 = 0\tag{3.7}$$

dari hasil di atas didapatkan lima titik keseimbangan sebagai berikut.

3.3.1 Titik Keseimbangan $E_0(0, 0, 0)$

Titik keseimbangan E_0 adalah titik keseimbangan untuk nilai $x = 0, y = 0$, dan $z = 0$.

3.3.2 Titik Keseimbangan $E_1(x^*, 0, 0)$

Titik keseimbangan E_1 adalah titik keseimbangan untuk nilai $y = 0, z = 0$, dan nilai x dari persamaan (3.5) sebagai berikut.

$$x = \frac{rk - (\alpha yk + \beta yk + q_1 E_1 k)}{r}$$

$$x = \frac{rk - (0 + 0 + q_1 E_1 k)}{r}$$

$$x = \frac{rk - q_1 E_1 k}{r}$$

sehingga diperoleh titik keseimbangan E_1 sebagai berikut.

$$E_1 = (x^*, 0, 0) = \left(\frac{rk - q_1 E_1 k}{r}, 0, 0 \right).$$

dimana $rk > q_1 E_1 k$.

3.3.3 Titik Keseimbangan $E_2(x^*, 0, z^*)$

Titik keseimbangan E_2 adalah titik keseimbangan untuk nilai $y = 0$, dan nilai x dan z sebagai berikut.

Pertama-tama, substitusi nilai $y = 0$ ke dalam persamaan (3.7) berikut untuk mendapatkan nilai x .

$$\delta x + \nu y - \mu - q_3 E_3 = 0$$

$$\delta x = \mu + q_3 E_3 - \nu y$$

$$x = \frac{\mu + q_3 E_3 - 0}{\delta}$$

$$x = \frac{\mu + q_3 E_3}{\delta}$$

selanjutnya, substitusi nilai x dan y ke dalam persamaan (3.5) berikut untuk mendapatkan nilai z .

$$r - \frac{r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 = 0$$

$$\beta z = r - \left(\frac{r}{k} \left(\frac{\mu + q_3 E_3}{\delta} \right) + 0 + q_1 E_1 \right)$$

$$z = \frac{r - \left(\frac{r}{k} \left(\frac{\mu + q_3 E_3}{\delta} \right) + q_1 E_1 \right)}{\beta}$$

$$z = \frac{r - \left(\frac{r\mu + rq_3 E_3 + k\delta q_1 E_1}{k\delta} \right)}{\beta}$$

$$z = \frac{r\delta k - (r\mu + rq_3 E_3 + k\delta q_1 E_1)}{k\delta\beta}$$

sehingga diperoleh titik keseimbangan E_2 sebagai berikut.

$$E_2 = (x^*, 0, z^*) = \left(\frac{\mu + q_3 E_3}{\delta}, 0, \frac{r\delta k - (r\mu + rq_3 E_3 + k\delta q_1 E_1)}{k\delta\beta} \right)$$

dimana, $r\delta k > r\mu + rq_3 E_3 + k\delta q_1 E_1$.

3.3.4 Titik Keseimbangan $E_3(x^*, y^*, 0)$

Titik keseimbangan E_3 adalah titik keseimbangan untuk nilai $z = 0$, dan nilai x dan y sebagai berikut.

Pertama-tama mencari nilai x dari persamaan (3.6) sebagai berikut.

$$\gamma x - \eta - q_2 E_2 = 0$$

$$\gamma x = \eta + q_2 E_2$$

$$x = \frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma}$$

selanjutnya, substitusi nilai x dan z ke dalam persamaan (3.5) berikut untuk mendapatkan nilai y .

$$r - \frac{r}{k} x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 = 0$$

$$\alpha y = r - \frac{r}{k} x - \beta z - q_1 E_1$$

$$\alpha y = r - \frac{r}{k} \left(\frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma} \right) - 0 - q_1 E_1$$

$$\alpha y = \frac{r\gamma k - r\eta - rq_2 E_2 - k\gamma q_1 E_1}{k\gamma}$$

$$\alpha y = \frac{r\gamma k - (r\eta + rq_2 E_2 + k\gamma q_1 E_1)}{\alpha\gamma}$$

$$y = \frac{r\gamma k - (r\eta + rq_2 E_2 + k\gamma q_1 E_1)}{k\alpha\gamma}$$

sehingga diperoleh titik keseimbangan E_3 sebagai berikut.

$$E_3 = (x^*, y^*, 0) = \left(\frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma}, \frac{r\gamma k - (r\eta + r q_2 E_2 + k\gamma q_1 E_1)}{k\alpha\gamma}, 0 \right)$$

dimana, $r\gamma k > r\eta + r q_2 E_2 + k\gamma q_1 E_1$.

3.3.5 Titik Keseimbangan $E_4(x^*, y^*, z^*)$

Titik keseimbangan E_4 adalah titik keseimbangan untuk nilai x^* , y^* dan z^* sebagai berikut.

Pertama-tama mencari nilai x dari persamaan (3.6) sebagai berikut.

$$\gamma x - \eta - q_2 E_2 = 0$$

$$\gamma x = \eta + q_2 E_2$$

$$x = \frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma}$$

selanjutnya, substitusi nilai x ke dalam persamaan (3.7) berikut untuk mendapatkan nilai y .

$$\delta x + \nu y - \mu - q_3 E_3 = 0$$

$$\nu y = \mu + q_3 E_3 - \delta x$$

$$\nu y = \mu + q_3 E_3 - \delta \left(\frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma} \right)$$

$$\nu y = \frac{\gamma\mu + \gamma q_3 E_3 - \delta\eta - \delta q_2 E_2}{\gamma}$$

$$y = \frac{\gamma\mu + \gamma q_3 E_3 - (\delta\eta + \delta q_2 E_2)}{\nu\gamma}$$

terakhir, substitusi nilai x dan y ke dalam persamaan (3.5) berikut untuk mendapatkan nilai z .

$$r - \frac{r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 = 0$$

$$\beta z = r - \frac{r}{k}x - \alpha y - q_1 E_1$$

$$\beta z = r - \frac{r}{k} \left(\frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma} \right) - \alpha \left(\frac{\gamma\mu + \gamma q_3 E_3 - (\delta\eta + \delta q_2 E_2)}{\nu\gamma} \right) - q_1 E_1$$

$$\beta z = \frac{1}{k\nu\gamma} (rk\nu\gamma - r\eta\nu - r\nu q_2 E_2 - \alpha k\gamma\mu - \alpha k\gamma q_3 E_3 + \alpha k\delta\eta + \alpha k\delta q_2 E_2 - q_1 E_1 k\nu\gamma)$$

$$z = \frac{1}{\beta kv\gamma} (rkv\gamma - r\eta v - rvq_2E_2 - \alpha k\gamma\mu - \alpha k\gamma q_3E_3 + \alpha k\delta\eta + \alpha k\delta q_2E_2 - q_1E_1kv\gamma)$$

$$z = \frac{1}{\beta kv\gamma} ((rkv\gamma + \alpha k\delta\eta + \alpha k\delta q_2E_2) - (r\eta v + rvq_2E_2 + \alpha k\gamma\mu + \alpha k\gamma q_3E_3 + q_1E_1kv\gamma))$$

sehingga diperoleh titik keseimbangan sebagai berikut.

$$E_4 = (x^*, y^*, z^*)$$

$$= \left(\frac{\eta + q_2E_2}{\gamma}, \frac{\gamma\mu + \gamma q_3E_3 - (\delta\eta + \delta q_2E_2)}{v\gamma}, \frac{1}{\beta kv\gamma} ((rkv\gamma + \alpha k\delta\eta + \alpha k\delta q_2E_2) - (r\eta v + rvq_2E_2 + \alpha k\gamma\mu + \alpha k\gamma q_3E_3 + q_1E_1kv\gamma)) \right)$$

dimana, $\gamma\mu + \gamma q_3E_3 > \delta\eta + \delta q_2E_2$ dan $rkv\gamma + \alpha k\delta\eta + \alpha k\delta q_2E_2 > r\eta v + rvq_2E_2 + \alpha k\gamma\mu + \alpha k\gamma q_3E_3 + q_1E_1kv\gamma$.

3.4 Linierisasi Model

Sistem (3.1) merupakan sistem dinamik nonlinier sehingga untuk memudahkan dalam menentukan sifat kestabilan dari titik-titik keseimbangan sistem (3.1), maka harus dilakukan linierisasi sistem.

Kita tinjau ulang sistem (3.1) berikut. Misalkan,

$$f_1(x, y, z) = \frac{dx}{dt} = x \left(r - \frac{r}{k}x \right) - \alpha xy - \beta xz - q_1E_1x,$$

$$f_2(x, y) = \frac{dy}{dt} = \gamma xy - \eta y - q_2E_2y,$$

$$f_3(x, y, z) = \frac{dz}{dt} = \delta xz + vyz - \mu z - q_3E_3z.$$

Matriks linierisasi di sekitar titik keseimbangan dapat diperoleh dengan memperhatikan matriks Jacobian dari sistem non-linier. Matriks Jacobi dari sistem nonlinier (3.2) adalah

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 & -\alpha x & -\beta x \\ \gamma y & \gamma x - \eta - q_2 E_2 & 0 \\ z\delta & vz & \delta x + \nu y - \mu - q_3 E_3 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

diperoleh bentuk linier dengan matriks Jacobi (3.8).

3.5 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Akan dibahas titik keseimbangan sistem (3.1). Kestabilan titik keseimbangan dapat dilihat dari nilai eigen yang dihasilkan dan matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik keseimbangan tersebut. Selanjutnya, kestabilan di sekitar titik keseimbangan diperiksa.

3.5.1 Kestabilan Titik Keseimbangan $E_0(0, 0, 0)$

Titik keseimbangan $E_0(0, 0, 0)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi (3.8),

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 & -\alpha x & -\beta x \\ \gamma y & \gamma x - \eta - q_2 E_2 & 0 \\ z\delta & vz & \delta x + \nu y - \mu - q_3 E_3 \end{pmatrix}$$

sehingga dihasilkan matriks Jacobi $J(E_0)$ sebagai berikut.

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r - q_1 E_1 & -0 & -0 \\ 0 & -\eta - q_2 E_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - q_3 E_3 \end{pmatrix}$$

nilai eigen dari matriks $J(E_0)$ dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik $\det|J(E_0) - \lambda I| = 0$, dengan I adalah matriks identitas. Persamaan karakteristik ditulis sebagai berikut.

$$\det \begin{vmatrix} r - q_1 E_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\eta - q_2 E_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - q_3 E_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$(r - q_1 E_1 - \lambda)(-\eta - q_2 E_2 - \lambda)(-\mu - q_3 E_3 - \lambda) = 0 \quad (3.9)$$

dari penyelesaian persamaan karakteristik (3.9), diperoleh nilai eigen untuk matriks $J(E_0)$ yaitu:

$$\lambda_1 = r - q_1 E_1, \quad \lambda_2 = -\eta - q_2 E_2 < 0, \quad \text{dan} \quad \lambda_3 = -\mu - q_3 E_3 < 0.$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, kestabilan di titik keseimbangan $(0, 0, 0)$

bersifat stabil asimtotik jika $r < q_1 E_1$.

3.5.2 Kestabilan Titik Keseimbangan $E_1(x^*, 0, 0)$

Titik keseimbangan $E_1(x^*, 0, 0)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi (3.8),

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 & -\alpha x & -\beta x \\ \gamma y & \gamma x - \eta - q_2 E_2 & 0 \\ z\delta & vz & \delta x + vz - \mu - q_3 E_3 \end{pmatrix}$$

sehingga dihasilkan matriks Jacobi $J(E_1)$ sebagai berikut.

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} q_1 E_1 - r & -\alpha(x^*) & -\beta(x^*) \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix}$$

dimana,

$$P = \frac{kr\gamma - (kq_1 E_1 \gamma + \eta r + q_2 E_2 r)}{r}$$

$$Q = \frac{kr\delta - (kq_1 E_1 \delta + \mu r + q_3 E_3 r)}{r}$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_1)$ dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik $\det|J(E_1) - \lambda I| = 0$, dengan I adalah matriks identitas. Persamaan karakteristik ditulis sebagai berikut.

$$\det \begin{vmatrix} q_1 E_1 - r - \lambda & -\alpha(x^*) & -\beta(x^*) \\ 0 & P - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & Q - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$(q_1 E_1 - r - \lambda) \left(\frac{kr\gamma - (kq_1 E_1 \gamma + \eta r + q_2 E_2 r)}{r} - \lambda \right) \left(\frac{kr\delta - (kq_1 E_1 \delta + \mu r + q_3 E_3 r)}{r} - \lambda \right) = 0 \quad (3.10)$$

dari penyelesaian persamaan karakteristik (3.10), diperoleh nilai eigen untuk matriks $J(E_1)$ yaitu:

$$\lambda_1 = q_1 E_1 - r, \lambda_2 = \frac{kr\gamma - (kq_1 E_1 \gamma + \eta r + q_2 E_2 r)}{r},$$

$$\lambda_3 = \frac{kr\delta - (kq_1 E_1 \delta + \mu r + q_3 E_3 r)}{r}.$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, maka titik keseimbangan $(x^*, 0, 0)$ stabil asimtotik jika memenuhi kondisi (3.11) berikut.

1. $q_1 E_1 < r$
2. $kr\gamma < (kq_1 E_1 \gamma + \eta r + q_2 E_2 r)$
3. $kr\delta < (kq_1 E_1 \delta + \mu r + q_3 E_3 r)$

(3.11)

3.5.3 Kestabilan Titik Keseimbangan $E_2(x^*, 0, z^*)$

Titik keseimbangan $E_2(x^*, 0, z^*)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi (3.8),

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 & -\alpha x & -\beta x \\ \gamma y & \gamma x - \eta - q_2 E_2 & 0 \\ z\delta & vz & \delta x + vz - \mu - q_3 E_3 \end{pmatrix}$$

sehingga dihasilkan matriks Jacobi $J(E_2)$ sebagai berikut.

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{k}x^* & -\alpha x^* & -\beta x^* \\ 0 & \frac{\gamma q_3 E_3 + \mu \gamma - (\eta \delta + \delta q_2 E_2)}{\delta} & 0 \\ \delta z^* & vz^* & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_2)$ dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik $\det|J(E_2) - \lambda I| = 0$, dengan I adalah matriks identitas. Persamaan karakteristik ditulis sebagai berikut.

$$\det \begin{vmatrix} -\frac{r}{k}x^* - \lambda & -\alpha x^* & -\beta x^* \\ 0 & \frac{\gamma q_3 E_3 + \mu \gamma - (\eta \delta + \delta q_2 E_2)}{\delta} - \lambda & 0 \\ \delta z^* & vz^* & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{r}{k}x^* - \lambda\right) \left(\frac{\gamma q_3 E_3 + \mu \gamma - (\eta \delta + \delta q_2 E_2)}{\delta} - \lambda\right) (-\lambda)$$

$$- (\delta z^*) \left(\frac{\gamma q_3 E_3 + \mu \gamma - (\eta \delta + \delta q_2 E_2)}{\delta} - \lambda\right) (-\beta x^*) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\gamma q_3 E_3 + \mu \gamma - (\eta \delta + \delta q_2 E_2)}{\delta} - \lambda\right) \left(\left(-\frac{r}{k}x^* - \lambda\right) (-\lambda) - (\delta z^*) (-\beta x^*)\right)$$

$$= 0$$

diperoleh:

$$\left(\frac{\gamma q_3 E_3 + \mu \gamma - (\eta \delta + \delta q_2 E_2)}{\delta} - \lambda\right) = 0 \quad (3.12)$$

atau

$$\left(-\frac{r}{k}x^* - \lambda\right)(-\lambda) - (\delta z^*)(-\beta x^*) = 0 \quad (3.13)$$

dari penyelesaian persamaan karakteristik (3.12), diperoleh satu nilai eigen untuk matriks $J(E_2)$ yaitu:

$$\lambda_1 = \frac{\gamma q_3 E_3 + \mu \gamma - (\eta \delta + \delta q_2 E_2)}{\delta},$$

dan dua nilai eigen lainnya yaitu $\hat{\lambda}_{\pm}$ diberikan oleh persamaan karakteristik (3.13) berikut.

$$\left(-\frac{r}{k}x^* - \lambda\right)(-\lambda) - (\delta z^*)(-\beta x^*) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{r}{k}x^*\lambda + \delta z^*\beta x^* = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_{\pm} = \frac{-\frac{r}{k}x^* \pm \sqrt{\left(\frac{r}{k}x^*\right)^2 - 4\delta z^*\beta x^*}}{2}.$$

Karena nilai eigen $\hat{\lambda}_{\pm}$ di atas mempunyai nilai bilangan real yang negatif sehingga titik keseimbangan $(x^*, 0, z^*)$ stabil asimtotik jika nilai eigen pertama juga bernilai real dan negatif, yaitu $\gamma q_3 E_3 + \mu \gamma < (\eta \delta + \delta q_2 E_2)$.

3.5.4 Kestabilan Titik Keseimbangan $E_3(x^*, y^*, 0)$

Titik keseimbangan $E_3(x^*, y^*, 0)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi (3.8),

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 & -\alpha x & -\beta x \\ \gamma y & \gamma x - \eta - q_2 E_2 & 0 \\ z\delta & vz & \delta x + \nu y - \mu - q_3 E_3 \end{pmatrix}$$

sehingga dihasilkan matriks Jacobi $J(E_3)$ sebagai berikut.

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{k}x^* & -\alpha x^* & -\beta x^* \\ \gamma y^* & \gamma x^* - \eta - q_2 E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta x^* + \nu y^* - \mu - q_3 E_3 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_3)$ dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik $\det|J(E_3) - \lambda I| = 0$, dengan I adalah matriks identitas. Persamaan karakteristik ditulis sebagai berikut.

$$\det \begin{vmatrix} -\frac{r}{k}x^* - \lambda & -\alpha x^* & -\beta x^* \\ \gamma y^* & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta x^* + \nu y^* - \mu - q_3 E_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{r}{k}x^* - \lambda\right)(-\lambda)(\delta x^* + \nu y^* - \mu - q_3 E_3 - \lambda) - (\delta x^* + \nu y^* - \mu - q_3 E_3 - \lambda)(\gamma y^*)(-\alpha x^*) = 0$$

$$\Rightarrow (\delta x^* + \nu y^* - \mu - q_3 E_3 - \lambda) \left[\left(-\frac{r}{k}x^* - \lambda\right)(-\lambda) - (\gamma y^*)(-\alpha x^*) \right] = 0$$

diperoleh:

$$(\delta x^* + \nu y^* - \mu - q_3 E_3 - \lambda) = 0 \quad (3.14)$$

atau

$$\left(-\frac{r}{k}x^* - \lambda\right)(-\lambda) - (\gamma y^*)(-\alpha x^*) = 0 \quad (3.15)$$

dari penyelesaian persamaan karakteristik (3.14), diperoleh satu nilai eigen untuk matriks $J(E_3)$ yaitu:

$$\lambda_1 = \delta x^* + \nu y^* - \mu - q_3 E_3$$

$$= \frac{1}{k\alpha\gamma} (k\alpha\delta\eta + k\alpha\delta q_2 E_2 + \gamma k\nu r - (k\alpha\mu\gamma + \eta\nu r + k\gamma\nu q_1 E_1 + \nu r q_2 E_2 + k\alpha\gamma q_3 E_3)),$$

dan dua nilai eigen lainnya yaitu $\bar{\lambda}_{\pm}$ diberikan oleh persamaan karakteristik (3.15) berikut.

$$\left(-\frac{r}{k}x^* - \lambda\right)(-\lambda) - (\gamma y^*)(-\alpha x^*) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{r}{k}x^*\lambda + \gamma y^*\alpha x^* = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\lambda}_{\pm} = \frac{-\frac{r}{k}x^* \pm \sqrt{\left(\frac{r}{k}x^*\right)^2 - 4\gamma y^*\alpha x^*}}{2}.$$

Karena nilai eigen $\bar{\lambda}_{\pm}$ di atas mempunyai nilai bilangan real yang negatif sehingga titik keseimbangan $(x^*, y^*, 0)$ stabil asimtotik jika nilai eigen pertama juga bernilai real dan negatif, yaitu

$$k\alpha\delta\eta + k\alpha\delta q_2 E_2 + \gamma k v r < k\alpha\mu\gamma + \eta v r + k\gamma v q_1 E_1 + v r q_2 E_2 + k\alpha\gamma q_3 E_3.$$

3.5.5 Kestabilan Titik Keseimbangan $E_4(x^*, y^*, z^*)$

Titik keseimbangan $E_4(x^*, y^*, z^*)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi (3.8),

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 & -\alpha x & -\beta x \\ \gamma y & \gamma x - \eta - q_2 E_2 & 0 \\ z\delta & vz & \delta x + vy - \mu - q_3 E_3 \end{pmatrix}$$

sehingga dihasilkan matriks Jacobi $J(E_4)$ sebagai berikut.

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dengan,

$$\begin{aligned} a_{11} &= r - \frac{2r}{k}x - \alpha y - \beta z - q_1 E_1 \\ &= r - \frac{2r}{k} \left(\frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma} \right) - \frac{\alpha}{v} \left(\frac{\gamma\mu + \gamma q_3 E_3 - (\delta\eta + \delta q_2 E_2)}{\gamma} \right) - \frac{\beta}{v\gamma k\beta} (k\alpha\delta q_2 E_2 \\ &\quad + \gamma k v r + k\alpha\delta\eta - (k\alpha\gamma q_3 E_3 + \gamma k v q_1 E_1 + v r q_2 E_2 + \eta v r + \mu\gamma k\alpha)) \\ &\quad - q_1 E_1 \\ &= \frac{-r(\eta + q_2 E_2)}{\gamma k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\alpha x^* \\ &= -\alpha \left(\frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= -\beta x^* \\ &= -\beta \left(\frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= \gamma y^* \\ &= \gamma \left(\frac{\gamma\mu + \gamma q_3 E_3 - (\delta\eta + \delta q_2 E_2)}{v\gamma} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= \gamma x^* - \eta - q_2 E_2 \\ &= \gamma \left(\frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma} \right) - \eta - q_2 E_2 \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$a_{23} = 0;$$

$$a_{31} = \delta z^*$$

$$= \frac{\delta}{v\gamma k\beta} (k\alpha\delta q_2 E_2 + \gamma k v r + k\alpha\delta\eta - (k\alpha\gamma q_3 E_3 + \gamma k v q_1 E_1 + v r q_2 E_2 + \eta v r + \mu\gamma k\alpha));$$

$$a_{32} = v z^*$$

$$= \frac{v}{v\gamma k\beta} (k\alpha\delta q_2 E_2 + \gamma k v r + k\alpha\delta\eta - (k\alpha\gamma q_3 E_3 + \gamma k v q_1 E_1 + v r q_2 E_2 + \eta v r + \mu\gamma k\alpha));$$

$$a_{33} = \delta x^* + v y^* - \mu - q_3 E_3$$

$$= \delta \left(\frac{\eta + q_2 E_2}{\gamma} \right) + v \left(\frac{\gamma\mu + \gamma q_3 E_3 - (\delta\eta + \delta q_2 E_2)}{v\gamma} \right) - \mu - q_3 E_3$$

$$= 0,$$

sehingga diperoleh

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{k}x^* & -\alpha x^* & -\beta x^* \\ \gamma y^* & 0 & 0 \\ \delta z^* & v z^* & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_4)$ dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik $\det|J(E_4) - \lambda I| = 0$, dengan I adalah matriks identitas. Persamaan karakteristik ditulis sebagai berikut.

$$\det \begin{vmatrix} -\frac{r}{k}x^* - \lambda & -\alpha x^* & -\beta x^* \\ \gamma y^* & -\lambda & 0 \\ \delta z^* & v z^* & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\lambda^3 + \xi_1 \lambda^2 + \xi_2 \lambda + \xi_3 = 0$$

dimana,

$$\xi_1 = \frac{r}{k}x^* > 0,$$

$$\xi_2 = \beta\delta x^* z^* + \alpha\gamma x^* y^* > 0,$$

$$\xi_3 = \beta\gamma v x^* y^* z^* > 0.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz titik keseimbangan $E_4(x^*, y^*, z^*)$ bersifat stabil asimtotik jika $\frac{r}{k}x^*(\beta\delta x^* z^* + \alpha\gamma x^* y^*) > \beta\gamma v x^* y^* z^*$.

3.6 Simulasi Numerik Model

Simulasi numerik digunakan untuk mengetahui solusi yang tidak dapat diselesaikan dengan cara analitik. Adapun simulasi dilakukan dengan menggunakan program Maple 17. Simulasi numerik dibagi menjadi lima kasus dimana setiap kasus menjelaskan dinamika setiap populasi. Kasus-kasus tersebut merujuk pada titik-titik keseimbangan yang eksis. Dimana untuk kasus kepunahan semua populasi terjadi pada titik keseimbangan E_0 , dititik ini populasi mangsa, pemangsa, dan pebangkai berturut-turut stabil di titik $(0,0,0)$. Untuk kasus kepunahan populasi pemangsa dan pebangkai akan tetapi populasi mangsa menuju kestabilan terjadi di titik keseimbangan E_1 , dititik ini populasi mangsa, pemangsa, dan pebangkai berturut-turut stabil di titik $(x^*,0,0)$. Untuk kasus kepunahan hanya pada populasi pemangsa terjadi di titik keseimbangan E_2 , dititik ini populasi mangsa, pemangsa, dan pebangkai berturut-turut stabil di titik $(x^*,0,z^*)$. Untuk kasus kepunahan hanya pada populasi pebangkai terjadi di titik keseimbangan E_3 , dititik ini populasi mangsa, pemangsa, dan pebangkai berturut-turut stabil di titik $(x^*,y^*,0)$. Terakhir, kasus kelestarian semua populasi terjadi di titik keseimbangan E_4 , di titik ini populasi mangsa, pemangsa, dan pebangkai berturut-turut stabil di titik (x^*,y^*,z^*) . Adapun simulasi lebih lanjut ditunjukkan sebagai berikut.

3.6.1 Kasus Kepunahan Semua Populasi

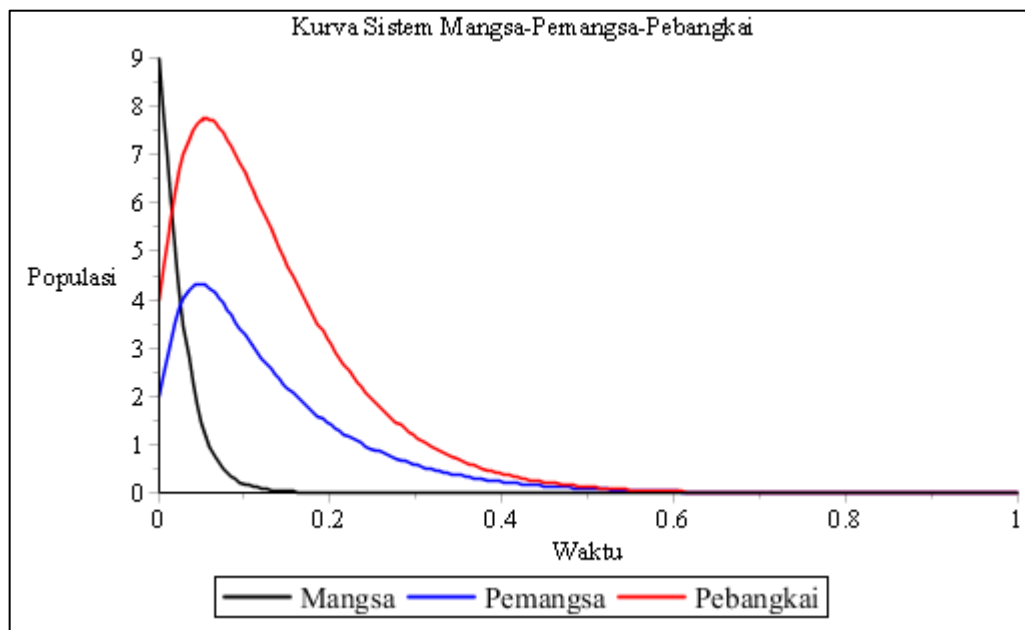
Pada kasus pertama, yaitu kepunahan dari semua populasi terjadi di titik keseimbangan E_0 dimana untuk beberapa nilai awal populasi yang diberikan akan berakhir dengan kepunahan yaitu kurva menunjukkan penurunan menuju titik awal $(0,0,0)$. Nilai-nilai parameter yang digunakan tertera pada tabel 3.2. dari titik keseimbangan $(0,0,0)$ kemudian disubstitusikan ke dalam matriks Jacobian (3.9) berdasarkan nilai-nilai parameter tabel 3.2 sehingga diperoleh matriks Jacobian $J(E_0)$ sebagai berikut,

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -0.200 & -0.000 & -0.000 \\ 0.000 & -8.800 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -11.100 \end{pmatrix}.$$

Tabel 3.2 Parameter kasus kepunahan semua populasi

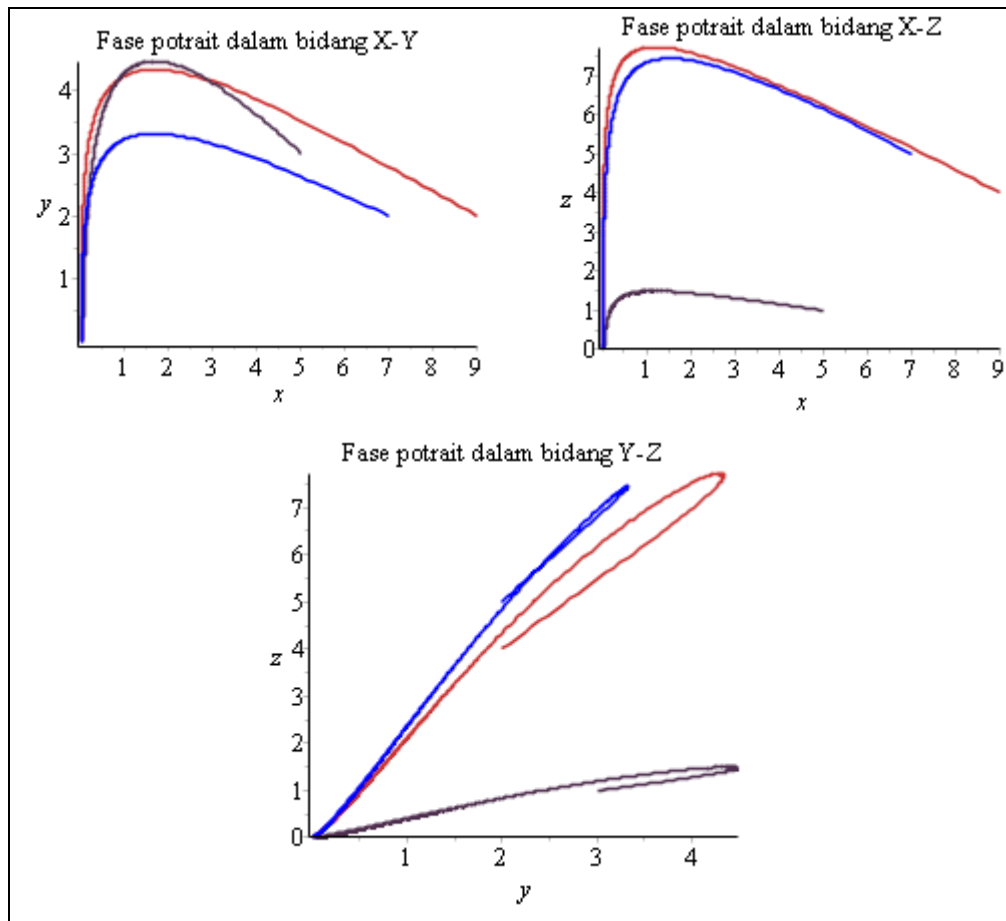
Mangsa	Nilai	Sumber Data	Pe-mangsa	Nilai	Sumber Data	Pe-bangkai	Nilai	Sumber Data
r	23	Previte,J	γ	5.3	Previte,J	δ	4.2	Previte,J
k	130	Previte,J	η	0.4	Previte,J	ν	1.4	Previte,J
α	4.2	Previte,J	q_3	0.7	Asumsi	μ	0.9	Previte,J
β	3.1	Previte,J	E_2	12	Asumsi	q_3	0.6	Asumsi
q_1	0.8	Asumsi				E_3	17	Asumsi
E_1	29	Asumsi						

Nilai eigen dari matriks $J(E_0)$ dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik $\det|J(E_0) - \lambda I| = 0$ sehingga diperoleh nilai eigen untuk matriks $J(E_0)$ yaitu, $\lambda_1 = -11.100$, $\lambda_2 = -8.800$, dan $\lambda_3 = -0.200$. Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, kestabilan di titik keseimbangan $(0, 0, 0)$ bersifat stabil asimtotik jika $r < H_1$ dan nilai pada parameter yang digunakan telah memenuhi yaitu $r = 23 < H_1 = 23.2$. Adapun solusi dapat dilihat dari kurva maupun bidang fase pada gambar 3.1 untuk nilai awal populasi yaitu populasi awal mangsa 9, populasi awal pemangsa 2, dan populasi awal pebangkai 4, masing-masing populasi akan menuju ke titik keseimbangan $(0, 0, 0)$ pada saat $t > 0.8$.



Gambar 3.1 Kurva solusi kasus kepunahan semua populasi

Populasi mangsa, pemangsa, dan pebangkai mengalami kepunahan pada waktu $t > 0.8$ seperti yang diperlihatkan dari gambar 3.1, dimana populasi pemangsa sedikit mengalami kenaikan sebelum turun menuju kepunahan, sedangkan populasi pebangkai mengalami kenaikan tertinggi secara signifikan mendekati nilai 8 sebelum akhirnya juga mengalami kepunahan.



Gambar 3.2 Bidang fase kasus kepunahan semua populasi

Hal ini karena selain mendapatkan makanan dari mangsa, pebangkai juga mengais bangkai pemangsa. Penyebab dari kepunahan sendiri adalah karena nilai parameter laju pertumbuhan intrinsik mangsa yang lebih kecil dari laju pemanenan sehingga sebelum mangsa dapat berkembangbiak terlebih dahulu, mangsa telah mengalami kepunahan karena pemanenan yang berlebihan. berkurangnya mangsa secara langsung turut mempengaruhi jumlah populasi pemangsa dan pebangkai yang bergantung kepada mangsa. Adapun populasi pebangkai mencapai kenaikan tertinggi diakibatkan oleh perilaku mobbing

pebangkai sehingga mendapatkan keuntungan mendapatkan makanan dari bangkai pemangsa selain berburu mangsa secara langsung. Pada gambar 3.2, terdapat tiga nilai awal masing-masing populasi. Pertama, populasi mangsa 9, populasi pemangsa 2, populasi pebangkai 4. Kedua, populasi mangsa 5, populasi pemangsa 3, populasi pebangkai 1. Ketiga, populasi mangsa 7, populasi pemangsa 2, populasi pebangkai 5. Dari ketiga nilai awal tersebut, kurva akan menuju ke titik keseimbangan $(0,0,0)$ dimana gambar fase potrait menunjukkan sifat stabil simpul.

3.6.2 Kasus Kepunahan Populasi Pemangsa dan Pebangkai

Kasus kepunahan populasi pemangsa dan pebangkai terjadi pada titik keseimbangan E_1 dimana untuk beberapa nilai awal populasi dari pemangsa dan pebangkai akan berakhir dengan kepunahan, sedangkan populasi mangsa menuju

Tabel 3.3 Parameter kasus kepunahan populasi pemangsa dan pebangkai

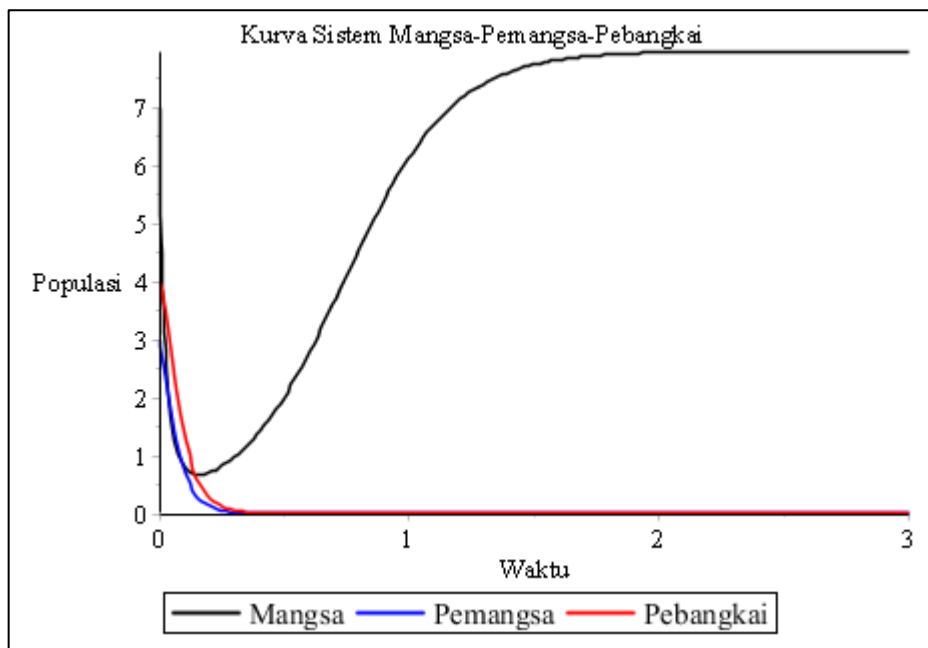
mangsa	Nilai	Sumber Data	Pe-mangsa	Nilai	Sumber Data	Pe-bangkai	Nilai	Sumber Data
r	75	Previte,J	γ	2.3	Previte,J	δ	2.2	Previte,J
k	130	Previte,J	η	6.4	Previte,J	ν	1.2	Previte,J
α	9.2	Previte,J	q_3	0.7	Asumsi	μ	7.5	Previte,J
β	3.1	Previte,J	E_2	18	Asumsi	q_3	0.6	Asumsi
q_1	0.8	Asumsi				E_3	17	Asumsi
E_1	88	Asumsi						

ke titik keseimbangan dan tidak mengalami kepunahan. Nilai-nilai parameter yang digunakan tertera pada tabel 3.3. dari nilai-nilai parameter tabel 3.3, diperoleh titik keseimbangan $E_1 = (x^*, 0, 0) = (7.973, 0, 0)$. Titik keseimbangan tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam matriks Jacobian (3.9) sehingga diperoleh matriks Jacobian $J(E_1)$ sebagai berikut,

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -4.600 & -73.355 & -24.717 \\ 0.000 & -0.661 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.159 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_1)$ dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik $det|J(E_1) - \lambda I| = 0$ sehingga diperoleh nilai eigen untuk matriks $J(E_1)$ yaitu,

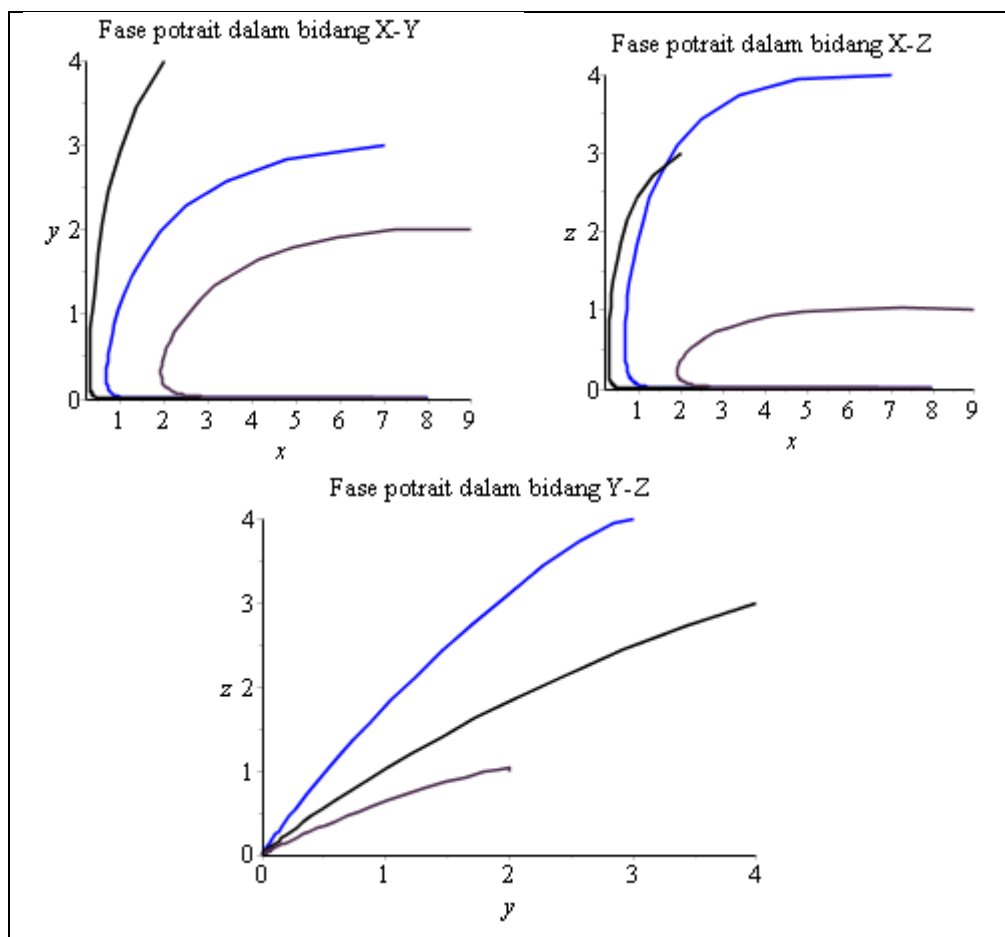
$\lambda_1 = -4.600, \lambda_2 = -0.661$, dan $\lambda_3 = -0.159$. Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, kestabilan di titik keseimbangan $(x^*, 0, 0)$ bersifat stabil asimtotik jika $E_2 > 17.02$, dan $E_3 > 16.68$ dan nilai pada parameter yang digunakan telah memenuhi yaitu $E_2 = 18$, dan $E_3 = 17$. Adapun solusi dapat dilihat dari kurva maupun fase portrait pada gambar 3.3 untuk nilai awal populasi yaitu populasi awal mangsa 7, populasi awal pemangsa 3, dan populasi awal pebangkai 4, masing-masing populasi akan menuju ke titik keseimbangan $(7.973, 0, 0)$ pada saat $t > 2$. Dari gambar 3.3 memperlihatkan populasi pemangsa dan pebangkai mengalami kepunahan sedangkan populasi mangsa stabil dengan populasi mendekati 8 pada saat $t > 2$.



Gambar 3.3 Kurva solusi kasus kepunahan populasi pemangsa dan pebangkai

Meskipun sebelumnya populasi mangsa juga hampir mengalami kepunahan akan tetapi setelah kepunahan pemangsa dan pebangkai, mangsa kemudian dapat mempertahankan keberadaannya dan mengalami kenaikan secara signifikan sebelum akhirnya stabil pada titik 7,973. Populasi mangsa tidak mengalami kenaikan secara terus menerus meskipun interaksi predasi telah selesai karena adanya aktivitas pemanenan yang besar terhadap mangsa. Pemangsa mengalami kepunahan karena besarnya kematian alami atau ketatnya kompetisi

dengan pembangkai serta besarnya aktivitas pemanenan terhadap kedua populasi tersebut dibandingkan dengan kemampuan pemangsa bereproduksi dimana $kr\gamma < (kq_1E_1\gamma + \eta r + q_2E_2r)$. Sama halnya dengan pemangsa, pembangkai juga mengalami kepunahan karena faktor kematian dan pemanenan yang lebih besar daripada kemampuan bereproduksi dimana $kr\delta < (kq_1E_1\delta + \mu r + q_3E_3r)$. Pada gambar 3.4, terdapat tiga nilai awal masing-masing populasi. Pertama, populasi mangsa 7, populasi pemangsa 3, populasi pembangkai 4. Kedua, populasi mangsa 2, populasi pemangsa 4, populasi pembangkai 3. Ketiga, populasi mangsa 9, populasi pemangsa 2, populasi pembangkai 1. Dari ketiga nilai awal tersebut, kurva akan menuju ke titik keseimbangan $(7.973, 0, 0)$ dimana gambar fase potrait menunjukkan sifat stabil simpul.



Gambar 3.4 Bidang fase kasus kepunahan pemangsa dan pembangkai

3.6.3 Kasus Kepunahan Populasi Pemangsa

Kasus kepunahan populasi pemangsa terjadi pada titik keseimbangan E_2 dimana untuk beberapa nilai awal populasi dari pemangsa akan berakhir dengan kepunahan, sedangkan populasi mangsa dan pebangkai akan menuju ke titik keseimbangan tertentu dan tidak mengalami kepunahan. Nilai-nilai parameter yang digunakan tertera pada tabel 3.4.

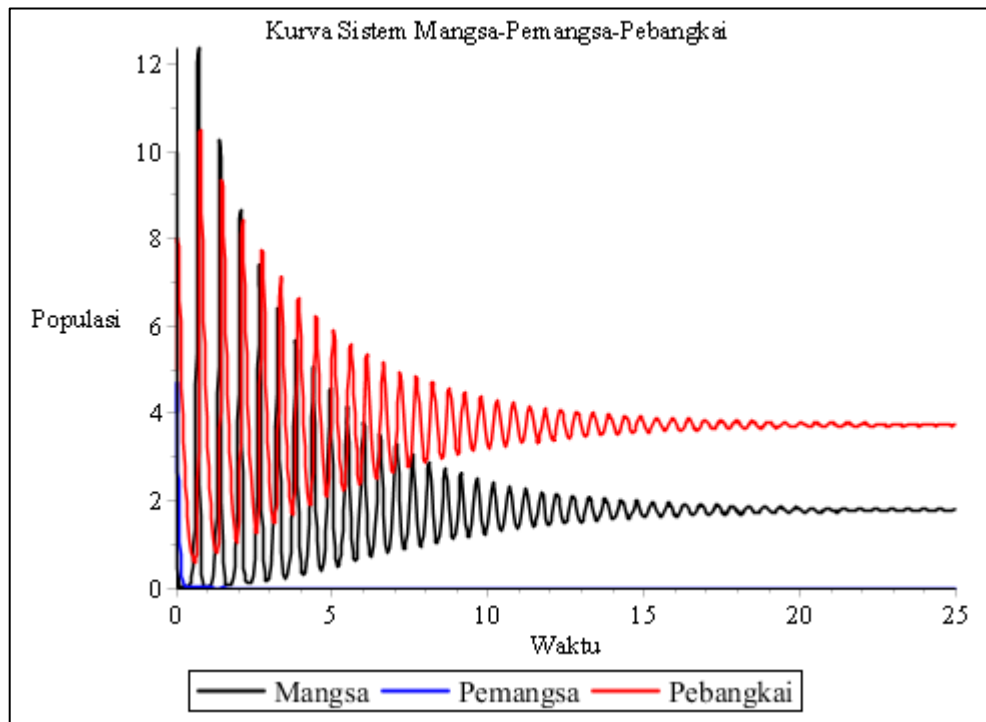
Tabel 3.4 Parameter kasus kepunahan populasi pemangsa

mangsa	Nilai	Sumber Data	Pe-mangsa	Nilai	Sumber Data	Pe-bangkai	Nilai	Sumber Data
r	35	Previte,J	γ	4.3	Previte,J	δ	3.2	Previte,J
k	130	Previte,J	η	5.4	Previte,J	ν	1.2	Previte,J
α	9.2	Previte,J	q_3	0.7	Asumsi	μ	1.5	Previte,J
β	7.1	Previte,J	E_2	18	Asumsi	q_3	0.6	Asumsi
q_1	0.8	Asumsi				E_3	7	Asumsi
E_1	10	Asumsi						

dari nilai-nilai parameter tabel 3.4, diperoleh titik keseimbangan $E_2 = (x^*, 0, z^*) = (1.781, 0, 3.735)$. Titik keseimbangan tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam matriks Jacobian (3.9) sehingga diperoleh matriks Jacobian $J(E_2)$ sebagai berikut,

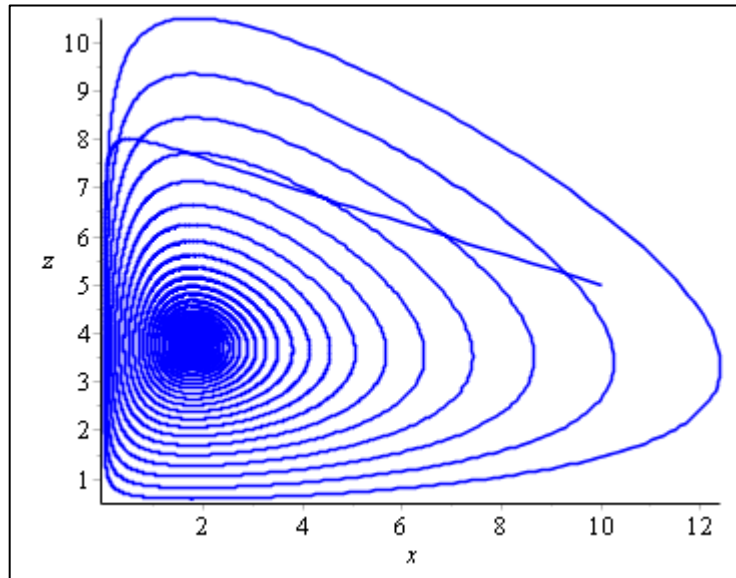
$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -0.480 & -16.388 & -12.647 \\ 0.000 & -10.341 & 0.000 \\ 11.953 & 4.482 & 0.000 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_2)$ dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik $\det|J(E_2) - \lambda I| = 0$ sehingga diperoleh nilai eigen untuk matriks $J(E_2)$ yaitu, $\lambda_1 = -0.240 + 12.293 i$, $\lambda_2 = -0.240 - 12.293 i$, dan $\lambda_3 = -10.341$. Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, kestabilan di titik keseimbangan $(x^*, 0, z^*)$ bersifat stabil asimtotik jika $E_2 > 3.22$ dan nilai pada parameter yang digunakan telah memenuhi yaitu $E_2 = 18$. Adapun solusi dapat dilihat dari kurva maupun bidang fase pada gambar 3.5 untuk nilai awal populasi yaitu populasi awal mangsa 10, populasi awal pemangsa 4, dan populasi awal pebangkai 5,



Gambar 3.5 Kurva solusi kasus kepunahan pemangsa

masing-masing populasi akan menuju ke titik keseimbangan $(1.781, 0, 3.735)$ pada saat $t > 20$. Gambar 3.5 memperlihatkan populasi pemangsa mengalami kepunahan sedangkan populasi mangsa stabil dengan populasi mendekati 2 dan populasi pebangkai stabil dengan populasi mendekati 4. Meskipun sebelumnya populasi mangsa, pemangsa, dan pebangkai hampir mengalami kepunahan, akan tetapi setelah pemangsa akhirnya punah, populasi mangsa dan pebangkai bersama-sama berhasil mempertahankan populasinya dan menuju ke titik keseimbangan. Pada waktu $0 < t < 20$ populasi mangsa dan pebangkai sempat mengalami ketidakstabilan populasi yang terlihat dengan munculnya osilasi dimana populasi mangsa dan pebangkai mengalami kondisi naik turun. Pada waktu $0 < t < 3$ populasi mangsa lebih mendominasi dimana kenaikan populasi mangsa diikuti oleh kenaikan populasi pebangkai dan sebaliknya berkurangnya populasi mangsa diikuti pula oleh berkurangnya populasi pebangkai, setelah $t > 3$ terjadi kebalikan dimana populasi pebangkai lebih mendominasi daripada populasi mangsa, hal inilah yang menunjukkan terjadinya osilasi pada kurva solusi. Akan tetapi seiring berjalannya waktu osilasi semakin kecil dan pada akhirnya menjadi stabil pada saat $t > 20$.



Gambar 3.6 Bidang fase kasus kepunahan populasi pemangsa

Penyebab dari kepunahan populasi pemangsa sendiri adalah karena dari nilai parameter terlihat bahwa laju pemanenan dan kematian alami dari pemangsa lebih besar dari kemampuan pemangsa bereproduksi, dan laju pemanenan dan kematian alami pebangkai yang lebih kecil serta dengan kematian pemangsa membuat keuntungan pebangkai dalam mengais bangkai pemangsa membuat pebangkai tidak mengalami kepunahan meskipun dengan adanya pemanenan dan kematian alami pada pebangkai. Pada gambar 3.6, nilai awal masing-masing populasi yaitu populasi mangsa 10, populasi pemangsa 4, populasi pebangkai 5. Dari nilai awal tersebut, kurva akan menuju ke titik keseimbangan $(1.781, 0, 3.735)$ dimana gambar fase potrait menunjukkan sifat stabil spiral.

3.6.4 Kasus Kepunahan Populasi Pebangkai

Kasus kepunahan populasi pebangkai terjadi pada titik keseimbangan E_3 dimana untuk beberapa nilai awal populasi dari pebangkai akan berakhir dengan kepunahan, sedangkan populasi mangsa dan pemangsa akan menuju ke titik keseimbangan tertentu dan tidak mengalami kepunahan. Nilai-nilai parameter yang digunakan tertera pada tabel 3.5. Dari nilai-nilai parameter tabel 3.5, diperoleh titik keseimbangan $E_3 = (x^*, y^*, 0) = (1.203, 3.334, 0)$. Titik keseimbangan tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam matriks Jacobian (3.9)

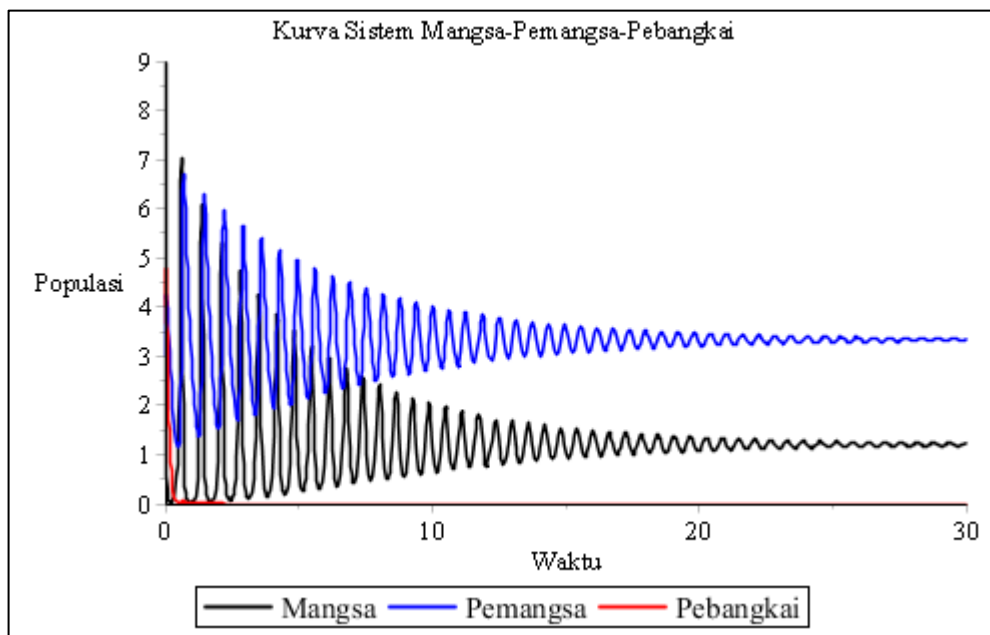
sehingga diperoleh matriks Jacobian $J(E_3)$ sebagai berikut,

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} -0.324 & -11.072 & -10.951 \\ 9.670 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -6.948 \end{pmatrix}.$$

Tabel 3.5 Parameter kasus kepunahan populasi pebangkai

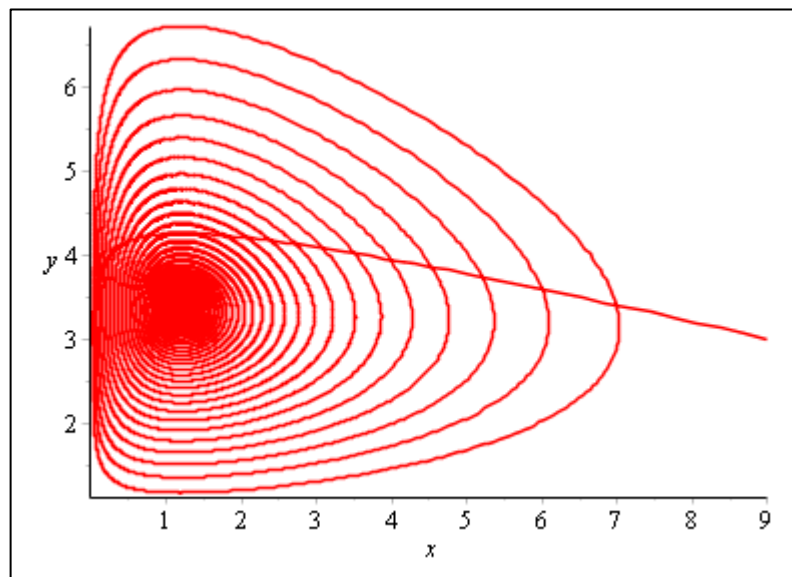
mangsa	Nilai	Sumber Data	Pe-mangsa	Nilai	Sumber Data	Pe-bangkai	Nilai	Sumber Data
r	35	Previte,J	γ	2.9	Previte,J	δ	3.2	Previte,J
k	130	Previte,J	η	0.9	Previte,J	ν	1.2	Previte,J
α	9.2	Previte,J	q_3	0.7	Asumsi	μ	4.6	Previte,J
β	9.1	Previte,J	E_2	3.7	Asumsi	q_3	0.6	Asumsi
q_1	0.8	Asumsi				E_3	17	Asumsi
E_1	5	Asumsi						

Nilai eigen dari matriks $J(E_3)$ dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik $\det|J(E_3) - \lambda I| = 0$ sehingga diperoleh nilai eigen untuk matriks $J(E_3)$ yaitu, $\lambda_1 = -0.162 + 10.346 i$, $\lambda_2 = -0.162 - 10.346 i$, dan $\lambda_3 = -6.498$. Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, kestabilan di titik keseimbangan $(x^*, y^*, 0)$ bersifat stabil asimtotik jika $E_3 > 5.42$ dan nilai pada parameter yang digunakan telah memenuhi yaitu $E_3 = 17$.



Gambar 3.7 Kurva solusi kasus kepunahan pebangkai

Adapun solusi dapat dilihat dari kurva maupun bidang fase pada gambar 3.7 untuk nilai awal populasi yaitu populasi awal mangsa 9, populasi awal pemangsa 3, dan populasi awal pebangkai 4 masing-masing populasi akan menuju ke titik keseimbangan $(1.203, 3.334, 0)$ pada saat $t > 30$. Gambar 3.7 memperlihatkan populasi pebangkai mengalami kepunahan dan populasi mangsa stabil dengan populasi mendekati 2 dan populasi pemangsa stabil dengan populasi mendekati 4. Meskipun sebelumnya populasi mangsa, pemangsa, dan pebangkai hampir mengalami kepunahan akan tetapi setelah pebangkai akhirnya punah, populasi mangsa dan pemangsa bersama-sama berhasil mempertahankan populasinya dan menuju ke titik keseimbangan. Pada waktu $0 < t < 30$ populasi mangsa dan pemangsa sempat mengalami ketidakstabilan populasi yang terlihat dengan munculnya osilasi dimana populasi mangsa dan pemangsa mengalami kondisi naik turun.



Gambar 3.8 Bidang fase kasus kepunahan populasi pebangkai

Pada waktu $0 < t < 1$ populasi mangsa lebih mendominasi dimana kenaikan populasi mangsa diikuti oleh kenaikan populasi pemangsa dan sebaliknya berkurangnya populasi mangsa diikuti pula oleh berkurangnya populasi pemangsa, setelah $t > 1$ terjadi kebalikan dimana populasi pemangsa lebih mendominasi daripada populasi mangsa, hal inilah yang menunjukkan terjadinya osilasi pada kurva solusi. Akan tetapi seiring berjalannya waktu osilasi semakin

kecil dan pada akhirnya menjadi stabil pada saat $t > 30$. Penyebab dari kepunahan populasi pebangkai sendiri adalah karena dari nilai parameter terlihat bahwa laju pemanenan dan kematian alami dari pemangsa lebih besar dari kemampuan pemangsa bereproduksi, dan laju pemanenan dan kematian alami pemangsa yang lebih kecil membuat pemangsa tidak mengalami kepunahan. Pada gambar 3.8, nilai awal masing-masing populasi yaitu populasi mangsa 9, populasi pemangsa 3, populasi pebangkai 4. Dari nilai awal tersebut, kurva akan menuju ke titik keseimbangan $(1.203, 3.334, 0)$ dimana gambar fase potrait menunjukkan sifat stabil spiral.

3.6.5 Kasus Kelestarian Semua Populasi

Kasus kelestarian semua populasi terjadi pada titik keseimbangan E_4 dimana untuk beberapa nilai awal populasi dari mangsa, pemangsa, dan pebangkai akan menuju ke suatu titik keseimbangan tanpa mengalami kepunahan. Nilai-nilai parameter yang digunakan tertera pada tabel 3.6.

Tabel 3.6 Parameter kasus kelestarian semua populasi

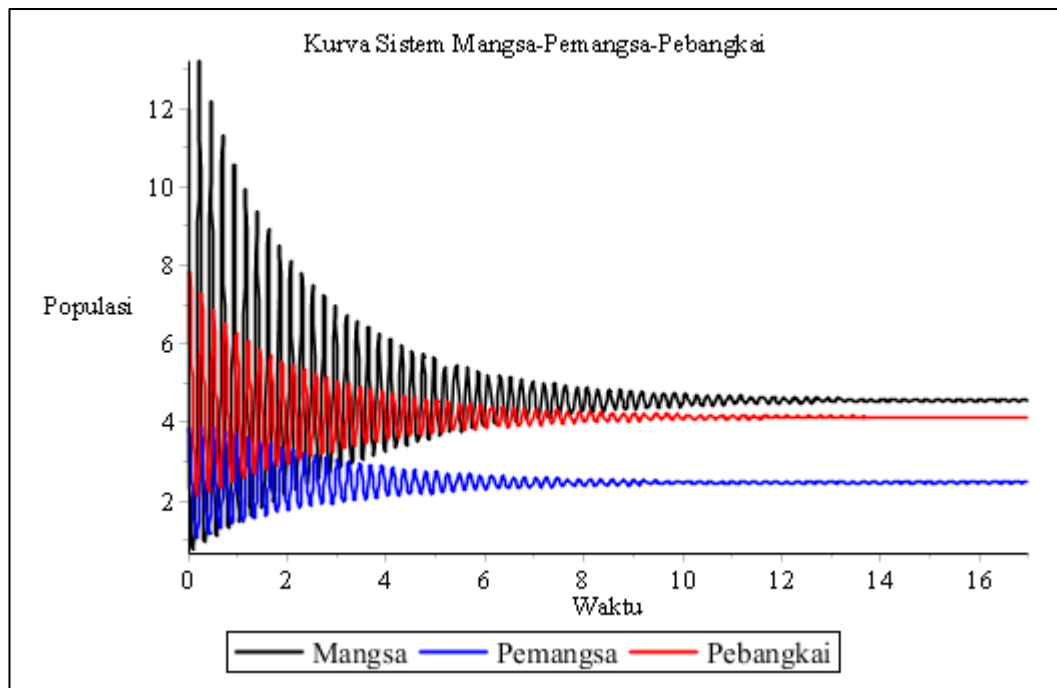
mangsa	Nilai	Sumber Data	Pe-mangsa	Nilai	Sumber Data	Pe-bangkai	Nilai	Sumber Data
r	75	Previte,J	γ	3.0	Previte,J	δ	2.9	Previte,J
k	130	Previte,J	η	3.4	Previte,J	ν	1.2	Previte,J
α	9.2	Previte,J	q_3	0.7	Asumsi	μ	3.6	Previte,J
β	9.1	Previte,J	E_2	14.7	Asumsi	q_3	0.6	Asumsi
q_1	0.8	Asumsi				E_3	21	Asumsi
E_1	15	Asumsi						

dari nilai-nilai parameter tabel 3.6, diperoleh titik keseimbangan $E_4 = (x^*, y^*, z^*) = (4.563, 2.472, 4.135)$.

Titik keseimbangan tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam matriks Jacobian (3.9) sehingga diperoleh matriks Jacobian $J(E_4)$ sebagai berikut,

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} -2.633 & -41.983 & -41.526 \\ 7.416 & 0.000 & 0.000 \\ 11.991 & 4.962 & 0.000 \end{pmatrix}.$$

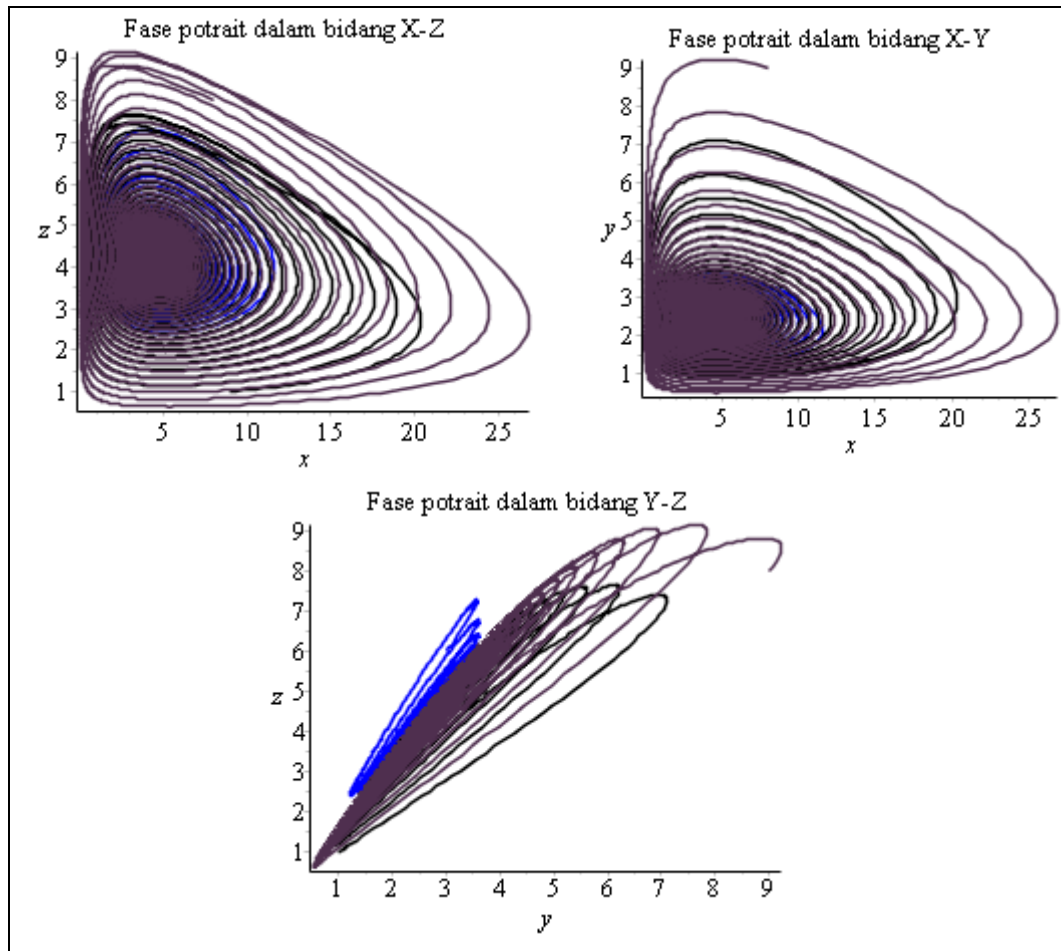
Nilai eigen dari matriks $J(E_4)$ dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik $\det|J(E_4) - \lambda I| = 0$ sehingga diperoleh nilai eigen untuk matriks $J(E_4)$ yaitu, $\lambda_1 = -0.371 + 28.420 i$, $\lambda_2 = -0.371 - 28.420 i$, dan $\lambda_3 = -1.891$. dari nilai eigen yang diperoleh, kestabilan di titik keseimbangan (x^*, y^*, z^*) bersifat stabil asimtotik jika $E_1 < 94.61$ dan nilai pada parameter yang digunakan telah memenuhi yaitu $E_1 = 15$. Hasilnya adalah dapat dilihat dari kurva maupun bidang fase pada gambar 3.9 untuk nilai awal populasi yaitu populasi mangsa 12, populasi pemangsa 3, dan populasi pembangkai 6 masing-masing populasi akan menuju ke titik keseimbangan $(4.563, 2.472, 4.135)$ pada saat $t > 16$.



Gambar 3.9 Kurva solusi kasus kelestarian semua populasi

Gambar 3.9 memperlihatkan bahwa populasi mangsa, pemangsa, dan pembangkai tidak mengalami kepunahan dan stabil menuju titik keseimbangan meskipun pada waktu $0 < t < 16$ terjadi ketidakstabilan dimana kurva terdapat sebuah osilasi dan setelah $t > 16$ semua populasi menunjukkan kestabilan. Semua populasi dapat lestari meskipun dilakukan pemanenan dan dengan laju kematian pemangsa dan pembangkai yang tinggi dikarenakan oleh laju pertumbuhan intrinsik dan daya kapasitas populasi mangsa yang sangat tinggi sehingga meskipun jumlah awal populasi mangsa yang sedikit tetapi dengan tingginya laju reproduksi mangsa

membuat dalam jangka waktu tertentu populasi mangsa dapat tumbuh dengan pesat. Hal ini dapat terjadi apabila kondisi ekosistem dari mangsa yang sangat baik dan mendukung proses reproduksi dari mangsa. Sedangkan pemangsa dan pebangkai sendiri juga diuntungkan dengan banyaknya ketersediaan makanan dari hasil memangsa.



Gambar 3.10 Bidang fase kasus kelestarian semua populasi

Pada gambar 3.10, terdapat tiga nilai awal masing-masing populasi. Pertama, populasi mangsa 10, populasi pemangsa 3, populasi pebangkai 6. Kedua, populasi mangsa 9, populasi pemangsa 1, populasi pebangkai 1. Ketiga, populasi mangsa 8, populasi pemangsa 9, populasi pebangkai 8. Dari ketiga nilai awal tersebut, kurva akan menuju ke titik keseimbangan $(4.563, 2.472, 4.135)$ dimana gambar fase potrait menunjukkan sifat stabil spiral.

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, berikut kesimpulan yang diperoleh.

1. Model interaksi populasi mangsa-pemangsa dengan kehadiran pebangkai dan faktor pemanenan adalah sebagai berikut.

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)r \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - H_1 x(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \gamma x(t)y(t) - \eta y(t) - H_2 y(t),$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \delta x(t)z(t) + \nu y(t)z(t) - \mu z(t) - H_3 z(t).$$

Populasi mangsa, pemangsa, dan pebangkai dimodelkan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinier untuk mengetahui perubahan populasi terhadap waktu. Karena keterbatasan sumber daya alam maka mangsa berkembang biak berdasarkan fungsi logistik. Interaksi antara mangsa dengan pemangsa dan pebangkai membuat populasi mangsa berkurang karena dimangsa, sebaliknya menguntungkan pemangsa dan pebangkai karena mendapatkan makanan. Selain memangsa secara langsung, pebangkai juga memperoleh makanan dengan membangkai sisa makanan dari pemangsa. Pemangsa dan pebangkai dapat mengalami kematian secara alami sedangkan kematian alami pada mangsa tidak diselidiki karena pada kebanyakan kasus mangsa hanya berkurang karena interaksi dengan pemangsa dan pebangkai. Karena faktor ekologis dan ekonomis, maka masing-masing populasi dipanen dengan tujuan berbeda-beda.

2. Hasil analisis model menunjukkan terdapat lima titik keseimbangan yang eksis yaitu titik keseimbangan E_0 , E_1 , E_2 , E_3 dan E_4 . Kestabilan semua titik keseimbangan dapat tercapai jika setiap parameter memenuhi beberapa kondisi yaitu E_0 stabil asimtotik jika parameter $r < q_1 E_1$. E_1

stabil asimtotik jika parameter $q_1 E_1 < r$, $k r \gamma < (k q_1 E_1 \gamma + \eta r + q_2 E_2 r)$, dan $k r \delta < (k q_1 E_1 \delta + \mu r + q_3 E_3 r)$. E_2 stabil asimtotik jika parameter $\gamma q_3 E_3 + \mu \gamma < (\eta \delta + \delta q_2 E_2)$. E_3 stabil asimtotik jika parameter $k \alpha \delta \eta + k \alpha \delta q_2 E_2 + \gamma k v r < k \alpha \mu \gamma + \eta v r + k \gamma v q_1 E_1 + v r q_2 E_2 + k \alpha \gamma q_3 E_3$. Dan E_4 stabil asimtotik jika parameter $r/k x^* (\beta \delta x^* z^* + \alpha \gamma x^* y^*) > \beta \gamma v x^* y^* z^*$.

3. Simulasi numerik model terbagi menjadi lima kasus berdasarkan lima titik keseimbangan yang eksis. Pertama, Titik keseimbangan E_0 adalah titik keseimbangan dimana semua populasi mengalami kepunahan. Hal ini dapat terjadi jika laju pemanenan mangsa lebih besar daripada laju pertumbuhan intrinsik mangsa. Kedua, titik keseimbangan E_1 adalah titik keseimbangan dimana populasi pemangsa dan pebangkai mengalami kepunahan, hal ini dapat terjadi apabila usaha pemanenan $E_2 > 17.02$, dan $E_3 > 16.68$. Ketiga, titik keseimbangan E_2 adalah titik keseimbangan dimana hanya populasi pemangsa mengalami kepunahan, hal ini dapat terjadi apabila usaha pemanenan $E_2 > 3.22$. Keempat, titik keseimbangan E_3 adalah titik keseimbangan dimana hanya populasi pebangkai yang mengalami kepunahan, hal ini dapat terjadi apabila usaha pemanenan $E_3 > 5.42$. Kelima, titik keseimbangan E_4 adalah titik keseimbangan dimana semua populasi dapat lestari. Hal ini dapat terjadi apabila usaha pemanenan $E_1 < 94.61$.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada model mangsa-pemangsa-pebangkai dengan memberikan perlakuan pemanenan berupa fungsi pemanenan (misalnya fungsi Holling Type II) kepada salah satu atau semua populasi mangsa, pemangsa, dan pebangkai kemudian pemberian kontrol optimal agar didapatkan pemanenan optimal yang bermanfaat baik dari segi ekologis maupun ekonomis. Selain itu dapat juga dilakukan analisis lebih lanjut terhadap parameter pemanenan yang dapat mengindikasikan terjadinya bifurkasi hopf pada solusi karena beberapa nilai eigen yang memiliki nilai imajiner.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. dan Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra*. Wiley, Canada.
- Atikah, S. N. 2008. *Analisis Kestabilan Model Matematika Penyakit Chronic Myelogenous Leukimia dengan Delay*. Skripsi Jurusan Matematika Fmipa Universitas Brawijaya, Malang.
- Bailey, J. A. 1984. *Principles of Wildlife Management*. Colorado State University, United State of America.
- Bennet, R. J. dan Robinson, S. L. 1999. *Development of A Measure of Workplace Deviance*. *Journal Of Applied Psychology*, 85 : 349-360.
- Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems: Seventh Edition*. John Wiley and Sons, New York.
- Cooper, S. M. 1991. *Optimal Hunting Group Size: The Need for Lions to Defend Their Kills Against Loss to Spotted Hyaenas*. *Afr. J. Ecol*, 29 : 130–136.
- Du, N. H., Man, N. M., dan Trung T. T. 2007. *Dynamics of Predator-Prey Population with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes*. *Acta Mathematica Vietnamica*, 32(1) : 99-111.
- Edward, C. H. dan Penney, D.E. 2001. *Differential Equation and Liniear Algebra*. Prentice Hall, Inc. New Jersey.
- Finizo, N. dan Ladas, G. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa*. Erlangga, Jakarta.
- Gunadarma.ac.id. (2011). *Wartawarga: Yang Kuat Yang Bertahan Hidup*. <http://wartawarga.gunadarma.ac.id/2011/03/yang-kuat-yang-bertahan-hidup/>. Diakses Pada Tanggal 19 September 2017.
- Hanh, W. 1967. *Stability of Motion*. Springer, New York.

- Honer, O.P., Wachter, B., East, M.L., dan Hofer, H. 2002. *The Response of Spotted Hyaenas to Long-Term Changes in Prey Populations: Functional Response and Interspecific Kleptoparasitism*. J. Anim. Ecol, 71 : 236–246.
- Ilmiawan, D. F. 2016. *Analisis Dinamik Model Predator-Prey pada Populasi Eceng Gondok dengan Adanya Ikan Grass Carp dan Pemanenan*. Skripsi Jurusan Matematika Fmipa Unnes, Semarang.
- Kharis, M. 2012. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Jurusan Matematika UNNES, Semarang.
- Kruuk, H. 1972. *The Spotted Hyena: A Study of Predation and Social Behaviour*. University Of Chicago Press, Chicago.
- Liao, X., Wang, L., dan Yu, P. 2007. *Stability of Dynamical Systems*. Elsevier, Netherlands.
- Mills, M. G. L. dan Briggs, H. C. 1993. *Prey Apportionment and Related Ecological Relationships between Large Carnivores in Kruger National Park*. Symp. Zool. Soc. L, 65 : 253–268.
- Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical System*. 3rd. Springer, New York.
- Previte, J. dan Hoffman, K. 2013. *Period Doubling Cascades in A Predator-Prey Model with A Scavenger*. Siam Review, 55(3) : 523-546.
- Resosoedarmo, S., Kartawinata, K., dan Soegiarto, A. 1984. *Pengantar Ekologi*. CV Remadja Karya, Bandung.
- Schaller, G. B. 1972. *The Serengeti Lion: A Study of Predator-Prey Relations*. University of Chicago Press, Chicago.
- Septian, J. 2012. *Strategi Program Konservasi Satwa Liar di Wilayah Kalimantan Guna Memperkecil Dampak Kepunahan*. Fakultas Kehutanan IPB, Bogor.

- Strogatz, S. H. 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos, With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Wesley Publishing Company Reading, Massachusetts.
- Texasgateway.org. 2014. *Organism and Environments – Organisms Interactions*. <https://www.texasgateway.org/resource/organisms-and-environments-organisms-interactions>. Diakses Pada Tanggal 2 Oktober 2017.
- Timuneno, H.M., Utomo, R. H. S., dan Widowati. 2008. *Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda*. Jurnal Matematika, 11(1) : 43-51.
- Trinkel, M. dan Kastberger, G. 2005. *Competitive Interactions between Spotted Hyenas and Lions in the Etosha National Park*. Afr. J. Ecol, 43 : 220-224.
- Verhulst, F. 1990. *Nonlinear Differential Equation and Dynamical System*. Springer, Germany.
- Waluyo, S. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Widowati dan Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Jurusan Matematika Universitas Diponegoro, Semarang.

LAMPIRAN

LAMPIRAN I : Kasus Kepunahan Semua Populasi

```

> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> PARAMETER :
> mangsa :
> r := 23 : #laju pertumbuhan mangsa:
> k := 130 : #carrying capacity mangsa:
> α := 4.2 : #laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pemangsa :
> β := 3.1 : #laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pebangkai:
> q1 := 0.8 : #koefisien tertangkapnya mangsa:
> E1 := 29 : #usaha pemanenan mangsa:
> pemangsa :
> ξ := 5.3 : #menggantikan parameter γ laju pertumbuhan populasi pemangsa
    dari interaksi dengan mangsa :
> η := 0.4 : #laju kematian alami pemangsa:
> q2 := 0.7 : #koefisien tertangkapnya pemangsa:
> E2 := 12 : #usaha pemanenan pemangsa:
> pebangkai :
> δ := 4.2 : #laju pertumbuhan populasi pebangkai dari interaksi dengan mangsa:
> v := 1.4 : #laju pertumbuhan populasi pebangkai dari hasil membangkai
    pemangsa :
> μ := 0.9 : #laju kematian alami pebangkai:
> q3 := 0.6 : #koefisien tertangkapnya pebangkai:
> E3 := 17 : #usaha pemanenan pebangkai:
> FORMULASI MODEL :
> dx := diff(x(t), t) = x(t) · r ·  $\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \alpha \cdot x(t) \cdot y(t) - \beta \cdot x(t) \cdot z(t) - q1 \cdot E1$ 
    · x(t) :
> dy := diff(y(t), t) = ξ · x(t) · y(t) - η · y(t) - q2 · E2 · y(t) :
> dz := diff(z(t), t) = δ · x(t) · z(t) + v · y(t) · z(t) - μ · z(t) - q3 · E3 · z(t) :
> TITIK EKUILIBRIUM DAN NILAI EIGEN :
> fx := x · r ·  $\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha \cdot x \cdot y - \beta \cdot x \cdot z - q1 \cdot E1 \cdot x$  :
> fy := ξ · x · y - η · y - q2 · E2 · y :
> fz := δ · x · z + v · y · z - μ · z - q3 · E3 · z :
> interface(displayprecision = 3) :
> titiktetap := solve( {fx = 0, fy = 0, fz = 0}, {x, y, z} ) :
> E0 := titiktetap[1] : E1 := titiktetap[3] : E2 := titiktetap[2] : E3
    := titiktetap[5] : E4 := titiktetap[4] :
> JAC := jacobian( [fx, fy, fz], [x, y, z] )
JAC :=  $\begin{bmatrix} -0.200 - \frac{23}{65}x - 4.200y - 3.100z, & -4.200x, & -3.100x \end{bmatrix}$ ,

```

(1)

$$\begin{bmatrix} 5.300y, 5.300x - 8.800, 0 \\ 4.200z, 1.400z, 4.200x + 1.400y - 11.100 \end{bmatrix}$$

> JAC0 := subs(E0, evalm(JAC)); JAC1 := subs(E1, evalm(JAC)); JAC2 := subs(E2, evalm(JAC)); JAC3 := subs(E3, evalm(JAC)); JAC4 := subs(E4, evalm(JAC));

$$JAC0 := \begin{bmatrix} -0.200 & -0.000 & -0.000 \\ 0.000 & -8.800 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & -11.100 \end{bmatrix}$$

$$JAC1 := \begin{bmatrix} 0.200 & 4.748 & 3.504 \\ 0.000 & -14.791 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & -15.848 \end{bmatrix}$$

$$JAC2 := \begin{bmatrix} -0.468 & -11.100 & -8.193 \\ 0.000 & 5.207 & 0 \\ -0.904 & -0.301 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$JAC3 := \begin{bmatrix} -0.294 & -6.974 & -5.147 \\ 15.621 & -3.000 \cdot 10^{-9} & 0 \\ -17.441 & -5.814 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$JAC4 := \begin{bmatrix} -0.294 & -6.974 & -5.147 \\ -0.623 & -3.000 \cdot 10^{-9} & 0 \\ 0.000 & 0.000 & -4.291 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> E0; eigenvalues(JAC0)

$$\{x = 0.000, y = 0.000, z = 0.000\} \\ -11.100, -8.800, -0.200 \quad (3)$$

> E1; eigenvalues(JAC1)

$$\{x = -1.130, y = 0.000, z = 0.000\} \\ 0.200, -14.791, -15.848 \quad (4)$$

> E2; eigenvalues(JAC2)

$$\{x = 2.643, y = 0.000, z = -0.215\} \\ -2.966, 2.498, 5.207 \quad (5)$$

> E3; eigenvalues(JAC3)

$$\{x = 1.660, y = 2.947, z = -4.153\} \\ -3.575 + 7.443I, -3.575 - 7.443I, 6.856 \quad (6)$$

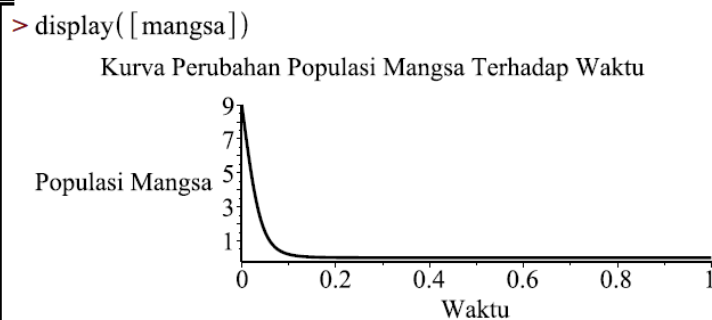
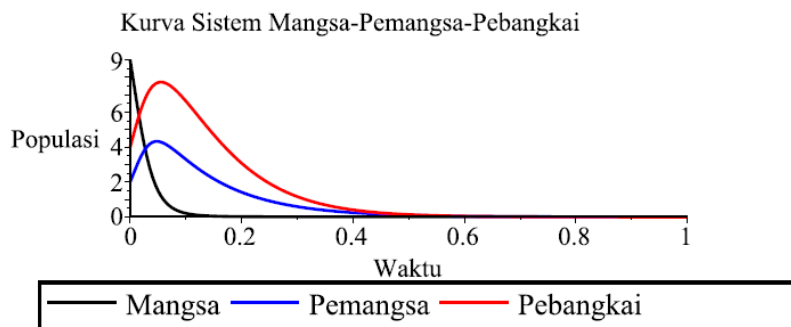
> E4; eigenvalues(JAC4)

$$\{x = 1.660, y = -0.118, z = 0.000\} \\ -2.237, 1.943, -4.291 \quad (7)$$

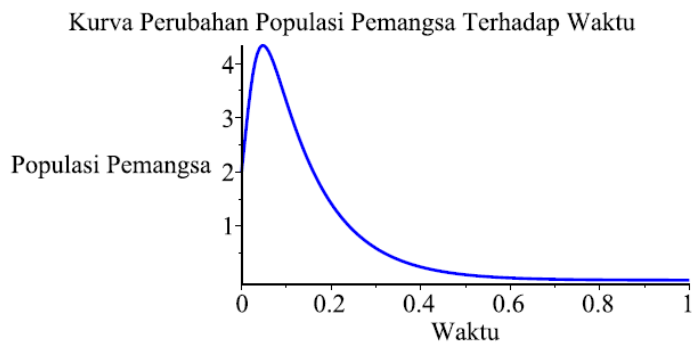
```

> NILAI AWAL POPULASI :
> s2 := {x(0) = 9, y(0) = 2, z(0) = 4} :
> SOLUSI MODEL :
> s1 := {dx, dy, dz} :
> J := dsolve(s1 union s2, [x(t), y(t), z(t)], type=numeric, output
= listprocedure) :
> sol_x := subs(J, x(t)) : sol_y := subs(J, y(t)) : sol_z := subs(J, z(t)) :
> KURVA SOLUSI :
> with(plots) :
> sistem := plot([sol_x, sol_y, sol_z], 0..1, color = [black, blue, red], labels
= ["Waktu", "Populasi"], title
= ["Kurva Sistem Mangsa-Pemangsa-Pebangkai"], legend = ["Mangsa",
"Pemangsa", "Pebangkai"], thickness = 1) : mangsa := plot([sol_x], 0..1, color
= [black], labels = ["Waktu", "Populasi Mangsa"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Mangsa Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
pemangsa := plot([sol_y], 0..1, color = [blue], labels = ["Waktu",
"Populasi Pemangsa"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Pemangsa Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
pebangkai := plot([sol_z], 0..1, color = [red], labels = ["Waktu",
"Populasi Pebangkai"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Pebangkai Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
> display([sistem])

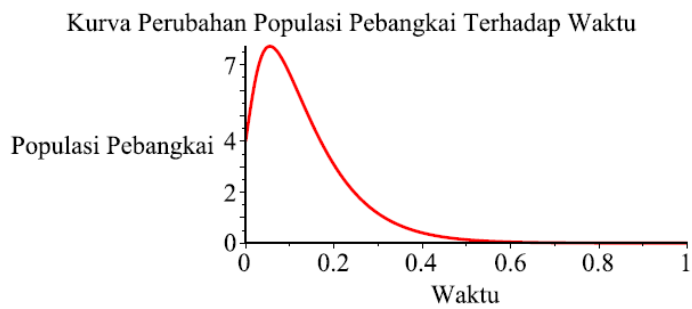
```



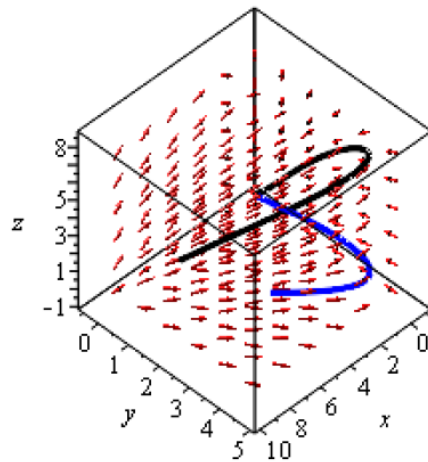

```
> display([pemangsa])
```



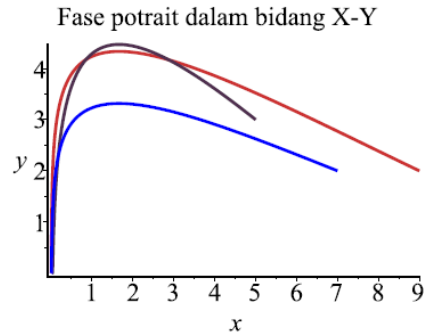
```
> display([pebangkai])
```



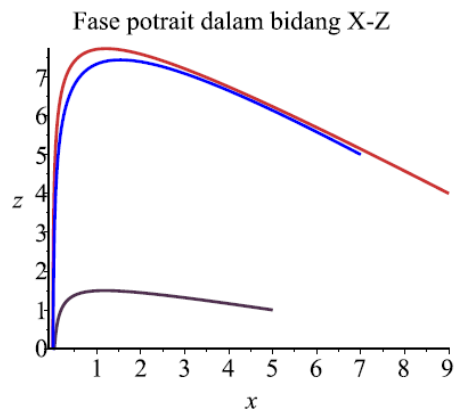
```
> DEplot3d([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..1, [[x(0) = 9, y(0) = 2, z(0) = 4], [x(0) = 5, y(0) = 3, z(0) = 1]], scene = [x, y, z], linecolour = [black, blue], thickness = 3, stepsize = 0.001, arrows = hex)
```



```
> DEplot([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..1, [[x(0) = 9, y(0) = 2, z(0) = 4], [x(0) = 5,
y(0) = 3, z(0) = 1], [x(0) = 7, y(0) = 2, z(0) = 5]], scene = [x, y], title
= ["Fase potrait dalam bidang X-Y"], linecolour = [orange, violet, blue],
thickness = 1, stepsize = 0.001, arrows = small)
```

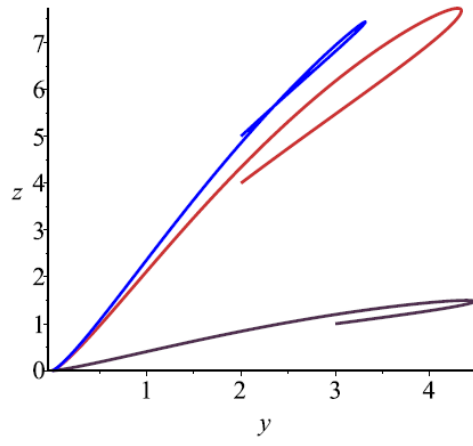


```
> DEplot([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..1, [[x(0) = 9, y(0) = 2, z(0) = 4], [x(0) = 5,
y(0) = 3, z(0) = 1], [x(0) = 7, y(0) = 2, z(0) = 5]], scene = [x, z], title
= ["Fase potrait dalam bidang X-Z"], linecolour = [orange, violet, blue],
thickness = 1, stepsize = 0.001, arrows = small)
```



```
> DEplot([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..1, [[x(0) = 9, y(0) = 2, z(0) = 4], [x(0) = 5,
y(0) = 3, z(0) = 1], [x(0) = 7, y(0) = 2, z(0) = 5]], scene = [y, z], title
= ["Fase potrait dalam bidang Y-Z"], linecolour = [orange, violet, blue],
thickness = 1, stepsize = 0.001, arrows = small)
```

Fase potrait dalam bidang Y-Z



LAMPIRAN II : Kasus Kepunahan Populasi Pemangsa dan Pebangkai

```

> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> PARAMETER :
> mangsa :
> r := 75 : #laju pertumbuhan mangsa:
> k := 130 : #carrying capacity mangsa:
> α := 9.2 : #laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pemangsa:
> β := 3.1 : #laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pebangkai:
> q1 := 0.8 : #koefisien tertangkapnya mangsa:
> E1 := 88 : #usaha pemanenan mangsa:
> pemangsa :
> ξ := 2.3 : #menggantikan parameter γ laju pertumbuhan populasi pemangsa dari
interaksi dengan mangsa :
> η := 6.4 : #laju kematian alami pemangsa:
> q2 := 0.7 : #koefisien tertangkapnya pemangsa:
> E2 := 18 : #usaha pemanenan pemangsa:
> pebangkai :
> δ := 2.2 : #laju pertumbuhan populasi pebangkai dari interaksi dengan mangsa:
> v := 1.2 : #laju pertumbuhan populasi pebangkai dari hasil membangkai
pemangsa :
> μ := 7.5 : #laju kematian alami pebangkai:
> q3 := 0.6 : #koefisien tertangkapnya pebangkai:
> E3 := 17 : #usaha pemanenan pebangkai:
> FORMULASIMODEL :
> dx := diff(x(t), t) = x(t) · r ·  $\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \alpha \cdot x(t) \cdot y(t) - \beta \cdot x(t) \cdot z(t) - q1 \cdot E1$ 
· x(t) :
> dy := diff(y(t), t) = ξ · x(t) · y(t) - η · y(t) - q2 · E2 · y(t) :
> dz := diff(z(t), t) = δ · x(t) · z(t) + v · y(t) · z(t) - μ · z(t) - q3 · E3 · z(t) :
> TITIKEKUILIBRIUMDANNILAIEIGEN :
> fx := x · r ·  $\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha \cdot x \cdot y - \beta \cdot x \cdot z - q1 \cdot E1 \cdot x$  :
> fy := ξ · x · y - η · y - q2 · E2 · y :
> fz := δ · x · z + v · y · z - μ · z - q3 · E3 · z :
> interface(displayprecision = 3) :
> titiktetap := solve( {fx = 0, fy = 0, fz = 0}, {x, y, z} ) :
> E0 := titiktetap[1] : E1 := titiktetap[5] : E2 := titiktetap[2] : E3
:= titiktetap[3] : E4 := titiktetap[4] :
> JAC := jacobian( [fx, fy, fz], [x, y, z] )
JAC :=  $\left[ \left[ 4.600 - \frac{15}{13} x - 9.200 y - 3.100 z, -9.200 x, -3.100 x \right], \right.$ 

```

(1)

$$\left[2.300 y, 2.300 x - 19.000, 0 \right],$$

$$\left[2.200 z, 1.200 z, 2.200 x + 1.200 y - 17.700 \right]$$

> JAC0 := subs(E0, evalm(JAC)); JAC1 := subs(E1, evalm(JAC)); JAC2
:= subs(E2, evalm(JAC)); JAC3 := subs(E3, evalm(JAC)); JAC4
:= subs(E4, evalm(JAC));

$$JAC0 := \begin{bmatrix} 4.600 & -0.000 & -0.000 \\ 0.000 & -19.000 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & -17.700 \end{bmatrix}$$

$$JAC1 := \begin{bmatrix} -4.600 & -73.355 & -24.717 \\ 0.000 & -0.661 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & -0.159 \end{bmatrix}$$

$$JAC2 := \begin{bmatrix} -4.642 & -74.018 & -24.941 \\ 0.000 & -0.495 & 0 \\ -0.030 & -0.016 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$JAC3 := \begin{bmatrix} -4.766 & -76.000 & -25.609 \\ -0.908 & 0.000 & 0 \\ 2.461 & 1.342 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$JAC4 := \begin{bmatrix} -4.766 & -76.000 & -25.609 \\ -0.041 & 0.000 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & 0.452 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> E0; eigenvalues(JAC0)

$$\{x = 0.000, y = 0.000, z = 0.000\}$$

$$-19.000, -17.700, 4.600 \quad (3)$$

> E1; eigenvalues(JAC1)

$$\{x = 7.973, y = 0.000, z = 0.000\}$$

$$-4.600, -0.661, -0.159 \quad (4)$$

> E2; eigenvalues(JAC2)

$$\{x = 8.045, y = 0.000, z = -0.013\}$$

$$-4.795, 0.154, -0.495 \quad (5)$$

> E3; eigenvalues(JAC3)

$$\{x = 8.261, y = -0.395, z = 1.119\}$$

$$-4.597, -2.692, 2.523 \quad (6)$$

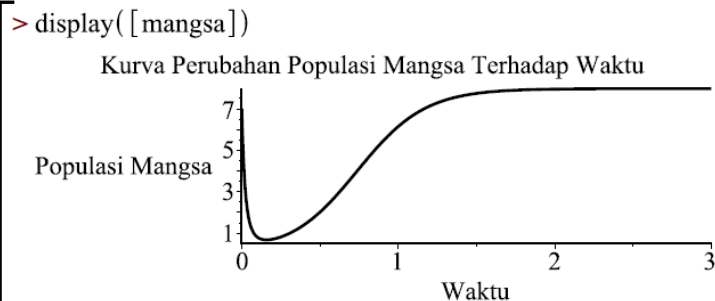
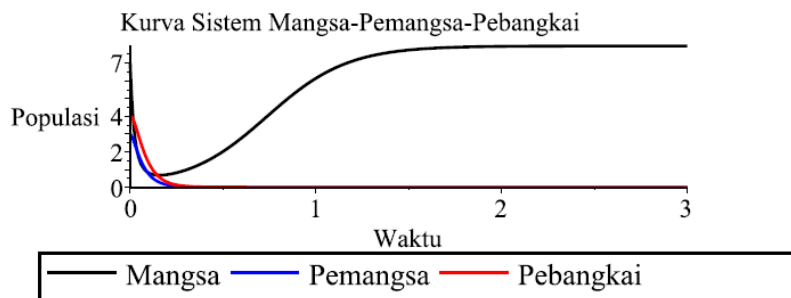
> E4; eigenvalues(JAC4)

$$\{x = 8.261, y = -0.018, z = 0.000\}$$

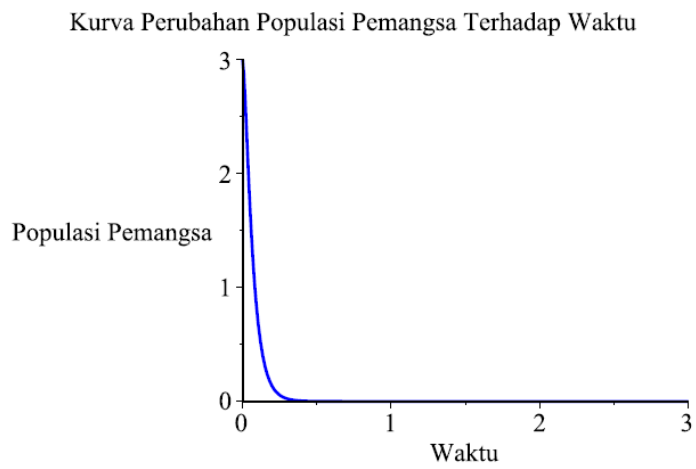
-5.355, 0.589, 0.452

(7)

```
> NILAI AWAL POPULASI :
> s2 := {x(0) = 7, y(0) = 3, z(0) = 4} :
> SOLUSI MODEL :
> s1 := {dx, dy, dz} :
> J := dsolve(s1 union s2, [x(t), y(t), z(t)], type=numeric, output
= listprocedure) :
> sol_x := subs(J, x(t)) : sol_y := subs(J, y(t)) : sol_z := subs(J, z(t)) :
> KURVA SOLUSI :
> with(plots) :
> sistem := plot([sol_x, sol_y, sol_z], 0..3, color = [black, blue, red], labels
= ["Waktu", "Populasi"], title
= ["Kurva Sistem Mangsa-Pemangsa-Pebangkai"], legend = ["Mangsa",
"Pemangsa", "Pebangkai"], thickness = 1) : mangsa := plot([sol_x], 0..3, color
= [black], labels = ["Waktu", "Populasi Mangsa"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Mangsa Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
pemangsa := plot([sol_y], 0..3, color = [blue], labels = ["Waktu",
"Populasi Pemangsa"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Pemangsa Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
pebangkai := plot([sol_z], 0..3, color = [red], labels = ["Waktu",
"Populasi Pebangkai"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Pebangkai Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
> display([sistem])
```



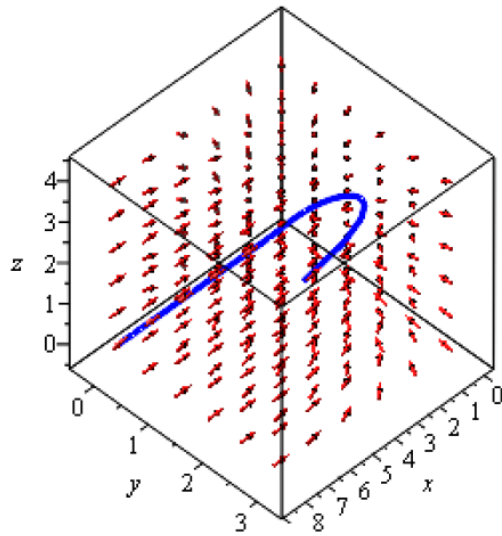
```
> display([pemangsa])
```



```
> display([pebangkai])
```

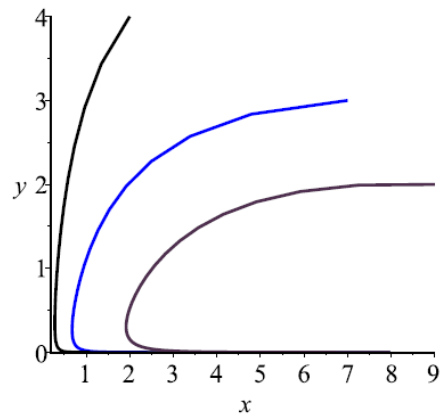


```
> DEplot3d([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..7, [s2], scene = [x, y, z], linecolour = [blue], thickness = 3, stepsize = 0.01, arrows = hex)
```



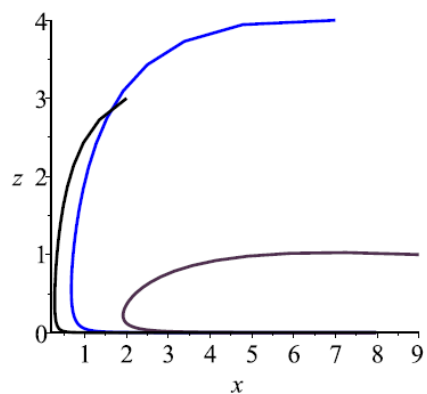
```
> DEplot([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..7, [[x(0) = 7, y(0) = 3, z(0) = 4], [x(0) = 2,
y(0) = 4, z(0) = 3], [x(0) = 9, y(0) = 2, z(0) = 1]], scene = [x, y], title
= ["Fase potrait dalam bidang X-Y"], linecolour = [blue, black, violet],
thickness = 1, stepsize = 0.01, arrows = small)
```

Fase potrait dalam bidang X-Y



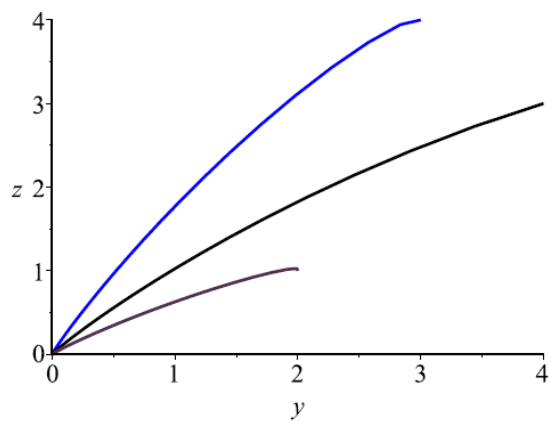
```
> DEplot([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..7, [[x(0) = 7, y(0) = 3, z(0) = 4], [x(0) = 2,
y(0) = 4, z(0) = 3], [x(0) = 9, y(0) = 2, z(0) = 1]], scene = [x, z], title
= ["Fase potrait dalam bidang X-Z"], linecolour = [blue, black, violet],
thickness = 1, stepsize = 0.01, arrows = small)
```


Fase potrait dalam bidang X-Z



```
> DEplot( [ dx, dy, dz ], [ x, y, z ], t = 0..7, [ [ x(0) = 7, y(0) = 3, z(0) = 4 ], [ x(0) = 2, y(0) = 4, z(0) = 3 ], [ x(0) = 9, y(0) = 2, z(0) = 1 ] ], scene = [ y, z ], title = [ "Fase potrait dalam bidang Y-Z" ], linecolour = [ blue, black, violet ], thickness = 1, stepsize = 0.01, arrows = small)
```

Fase potrait dalam bidang Y-Z



LAMPIRAN III : Kasus Kepunahan Populasi Pemangsa

```

> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> PARAMETER :
> mangsa :
> r := 35 : #laju pertumbuhan mangsa:
> k := 130 : #carrying capacity mangsa:
> α := 9.2 : #laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pemangsa:
> β := 7.1 : #laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pebangkai:
> q1 := 0.8 : #koefisien tertangkapnya mangsa:
> E1 := 10 : #usaha pemanenan mangsa:
> pemangsa :
> ξ := 4.3 : #menggantikan parameter γ laju pertumbuhan populasi pemangsa dari
interaksi dengan mangsa :
> η := 5.4 : #laju kematian alami pemangsa:
> q2 := 0.7 : # koefisien tertangkapnya pemangsa:
> E2 := 18 : #usaha pemanenan pemangsa:
> pebangkai :
> δ := 3.2 : #laju pertumbuhan populasi pebangkai dari interaksi dengan mangsa:
> v := 1.2 : #laju pertumbuhan populasi pebangkai dari hasil membangkai
pemangsa :
> μ := 1.5 : #laju kematian alami pebangkai:
> q3 := 0.6 : #koefisien tertangkapnya pebangkai:
> E3 := 7 : # usaha pemanenan pebangkai:
> FORMULASIMODEL :
> dx := diff(x(t), t) = x(t) · r ·  $\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \alpha \cdot x(t) \cdot y(t) - \beta \cdot x(t) \cdot z(t) - q1 \cdot E1$ 
· x(t) :
> dy := diff(y(t), t) = ξ · x(t) · y(t) - η · y(t) - q2 · E2 · y(t) :
> dz := diff(z(t), t) = δ · x(t) · z(t) + v · y(t) · z(t) - μ · z(t) - q3 · E3 · z(t) :
> TITIKEKUILIBRIUMDANNILAIEIGEN :
> fx := x · r ·  $\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha \cdot x \cdot y - \beta \cdot x \cdot z - q1 \cdot E1 \cdot x$  :
> fy := ξ · x · y - η · y - q2 · E2 · y :
> fz := δ · x · z + v · y · z - μ · z - q3 · E3 · z :
> interface(displayprecision = 3) :
> titiktetap := solve( {fx = 0, fy = 0, fz = 0}, {x, y, z} ) :
> E0 := titiktetap[1] : E1 := titiktetap[2] : E2 := titiktetap[3] : E3
:= titiktetap[5] : E4 := titiktetap[4] :
> JAC := jacobian( [fx, fy, fz], [x, y, z] )
JAC :=  $\left[ \left[ 27.000 - \frac{7}{13}x - 9.200y - 7.100z, -9.200x, -7.100x \right], \right.$ 

```

(1)

$$\begin{bmatrix} 4.300y, 4.300x - 18.000, 0 \\ 3.200z, 1.200z, 3.200x + 1.200y - 5.700 \end{bmatrix}$$

> JAC0 := subs(E0, evalm(JAC)); JAC1 := subs(E1, evalm(JAC)); JAC2 := subs(E2, evalm(JAC)); JAC3 := subs(E3, evalm(JAC)); JAC4 := subs(E4, evalm(JAC)) :

$$JAC0 := \begin{bmatrix} 27.000 & -0.000 & -0.000 \\ 0.000 & -18.000 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & -5.700 \end{bmatrix}$$

$$JAC1 := \begin{bmatrix} -27.000 & -922.629 & -712.029 \\ 0.000 & 413.229 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & 315.214 \end{bmatrix}$$

$$JAC2 := \begin{bmatrix} -0.480 & -16.388 & -12.647 \\ 0.000 & -10.341 & 0 \\ 11.953 & 4.482 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$JAC3 := \begin{bmatrix} -1.127 & -38.512 & -29.721 \\ 12.093 & 0.000 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & 11.070 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> E0; eigenvalues(JAC0)

$$\{x = 0., y = 0., z = 0.\} \\ -18.000, -5.700, 27.000 \quad (3)$$

> E1; eigenvalues(JAC1)

$$\{x = 100.2857143, y = 0., z = 0.\} \\ -27.000, 413.229, 315.214 \quad (4)$$

> E2; eigenvalues(JAC2)

$$\{x = 1.781250000, y = 0., z = 3.735272210\} \\ -0.240 + 12.293 I, -0.240 - 12.293 I, -10.341 \quad (5)$$

> E3; eigenvalues(JAC3)

$$\{x = 4.186046512, y = 2.812281248, z = 0.\} \\ -0.564 + 21.573 I, -0.564 - 21.573 I, 11.070 \quad (6)$$

> E4; eigenvalues(JAC4)

$$\{x = 4.186046512, y = -6.412790698, z = 11.95361435\} \\ -11.209 + 20.653 I, -11.209 - 20.653 I, 21.290 \quad (7)$$

> NILAI AWAL POPULASI :

> s2 := {x(0) = 10, y(0) = 4, z(0) = 5} :

> SOLUSI MODEL :

> s1 := {dx, dy, dz} :

```

> J := dsolve(s1 union s2, [x(t), y(t), z(t)], type=numeric, output
= listprocedure) :
> sol_x := subs(J, x(t)) : sol_y := subs(J, y(t)) : sol_z := subs(J, z(t)) : a

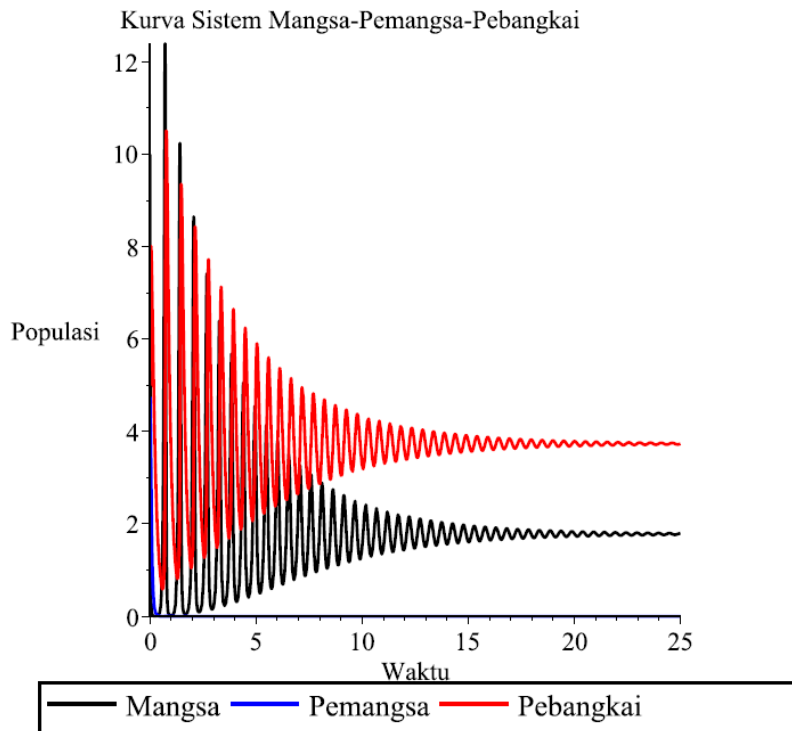
```

(8)

```

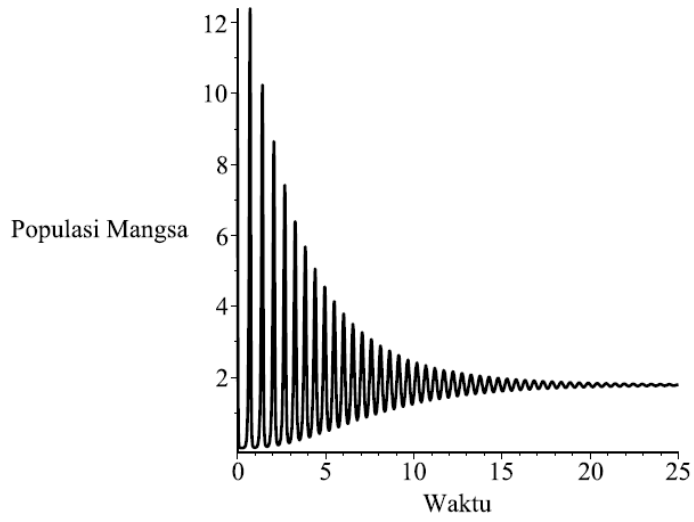
> KURVA SOLUSI :
> with(plots) :
> sistem := plot([sol_x, sol_y, sol_z], 0..25, color = [black, blue, red], labels
= ["Waktu", "Populasi"], title
= ["Kurva Sistem Mangsa-Pemangsa-Pebangkai"], legend = ["Mangsa",
"Pemangsa", "Pebangkai"], thickness = 1) : mangsa := plot([sol_x], 0..25,
color = [black], labels = ["Waktu", "Populasi Mangsa"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Mangsa Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
pemangsa := plot([sol_y], 0..25, color = [blue], labels = ["Waktu",
"Populasi Pemangsa"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Pemangsa Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
pebangkai := plot([sol_z], 0..25, color = [red], labels = ["Waktu",
"Populasi Pebangkai"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Pebangkai Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
> display([sistem])

```



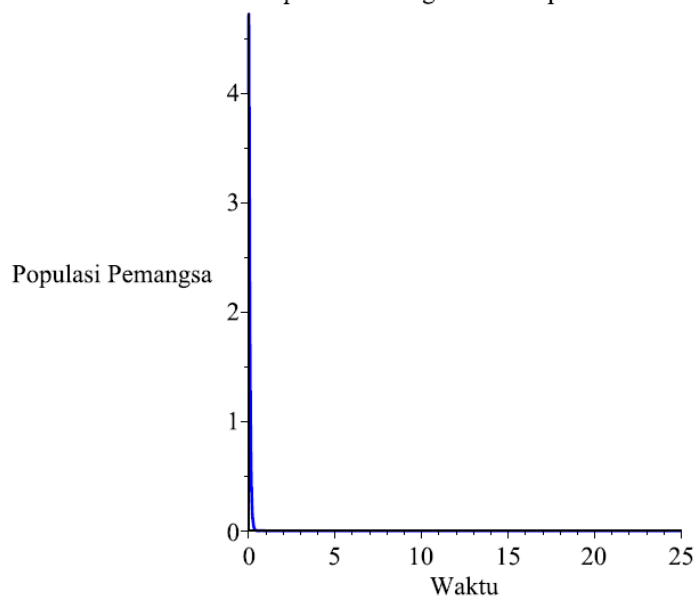
```
> display([mangsa])
```

Kurva Perubahan Populasi Mangsa Terhadap Waktu



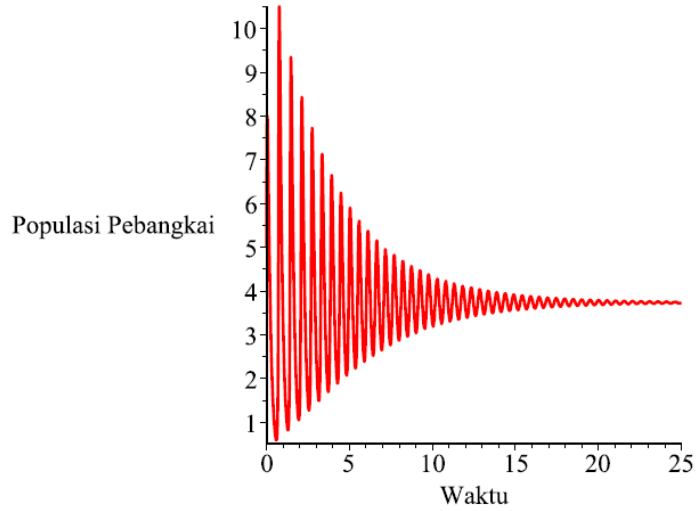
```
> display([pemangsa])
```

Kurva Perubahan Populasi Pemangsa Terhadap Waktu

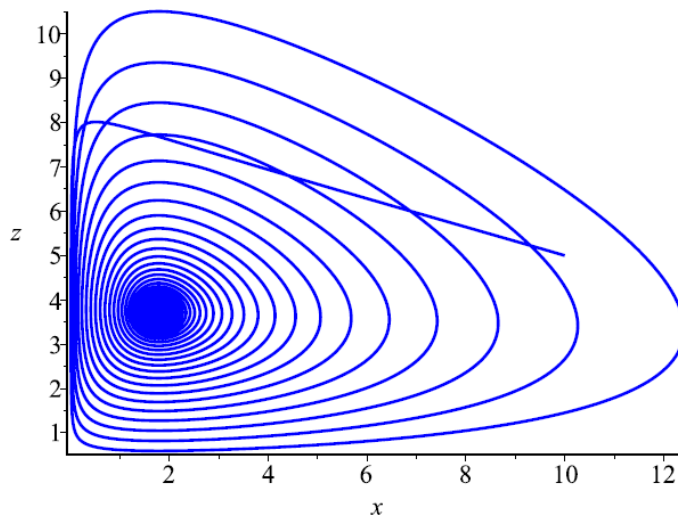


```
> display([pebangkai])
```

Kurva Perubahan Populasi Pebangkai Terhadap Waktu



```
> DEplot([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..25, [s2], scene = [x, z], linecolour = [blue],  
thickness = 1, stepsize = 0.001, arrows = small)
```



```
>
```

LAMPIRAN IV : Kasus Kepunahan Populasi Pebangkai

```

> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> PARAMETER :
> mangsa :
> r := 35 : #laju pertumbuhan mangsa:
> k := 130 : #carrying capacity mangsa:
> α := 9.2 : #laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pemangsa:
> β := 9.1 : #laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pebangkai:
> q1 := 0.8 : #koefisien tertangkapnya mangsa:
> E1 := 5 : #usaha pemanenan mangsa:
> pemangsa :
> ξ := 2.9 : #menggantikan parameter γ laju pertumbuhan populasi pemangsa dari
interaksi dengan mangsa :
> η := 0.9 : #laju kematian alami pemangsa:
> q2 := 0.7 : #koefisien tertangkapnya pemangsa:
> E2 := 3.7 : #usaha pemanenan pemangsa:
> pebangkai :
> δ := 3.2 : #laju pertumbuhan populasi pebangkai dari interaksi dengan mangsa:
> v := 1.2 : #laju pertumbuhan populasi pebangkai dari hasil membangkai
pemangsa :
> μ := 4.6 : #laju kematian alami pebangkai:
> q3 := 0.6 : #koefisien tertangkapnya pebangkai:
> E3 := 17 : #usaha pemanenan pebangkai:
> FORMULASI MODEL :
> dx := diff(x(t), t) = x(t) · r ·  $\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \alpha \cdot x(t) \cdot y(t) - \beta \cdot x(t) \cdot z(t) - q1 \cdot E1$ 
· x(t) :
> dy := diff(y(t), t) = ξ · x(t) · y(t) - η · y(t) - q2 · E2 · y(t) :
> dz := diff(z(t), t) = δ · x(t) · z(t) + v · y(t) · z(t) - μ · z(t) - q3 · E3 · z(t) :
> TITIKEKUILIBRIUMDANNILAIEIGEN :
> fx := x · r ·  $\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha \cdot x \cdot y - \beta \cdot x \cdot z - q1 \cdot E1 \cdot x$  :
> fy := ξ · x · y - η · y - q2 · E2 · y :
> fz := δ · x · z + v · y · z - μ · z - q3 · E3 · z :
> interface(displayprecision = 3) :
> titiktetap := solve( {fx = 0, fy = 0, fz = 0}, {x, y, z} ) :
> E0 := titiktetap[1] : E1 := titiktetap[3] : E2 := titiktetap[2] : E3
:= titiktetap[5] : E4 := titiktetap[4] :
> JAC := jacobian( [fx, fy, fz], [x, y, z] )
JAC :=  $\left[ \left[ 31.000 - \frac{7}{13} x - 9.200 y - 9.100 z, -9.200 x, -9.100 x \right], \right.$  (1)

```

$$\begin{bmatrix} 2.900 y, 2.900 x - 3.490, 0 \\ 3.200 z, 1.200 z, 3.200 x + 1.200 y - 14.800 \end{bmatrix}$$

> JAC0 := subs(E0, evalm(JAC)); JAC1 := subs(E1, evalm(JAC)); JAC2 := subs(E2, evalm(JAC)); JAC3 := subs(E3, evalm(JAC)); JAC4 := subs(E4, evalm(JAC));

$$JAC0 := \begin{bmatrix} 31.000 & -0.000 & -0.000 \\ 0.000 & -3.490 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & -14.800 \end{bmatrix}$$

$$JAC1 := \begin{bmatrix} -1.245 & -42.550 & -42.088 \\ 0.000 & 9.923 & 0 \\ 10.463 & 3.924 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$JAC2 := \begin{bmatrix} -31.000 & -1059.314 & -1047.800 \\ 0.000 & 330.424 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & 353.657 \end{bmatrix}$$

$$JAC3 := \begin{bmatrix} -0.324 & -11.072 & -10.951 \\ 9.670 & 0.000 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & -6.948 \end{bmatrix}$$

$$JAC4 := \begin{bmatrix} -0.324 & -11.072 & -10.951 \\ 26.460 & 0.000 & 0 \\ -18.731 & -7.024 & 0.000 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> E0; eigenvalues(JAC0)
 $\{x = 0.000, y = 0.000, z = 0.000\}$
 $-14.800, -3.490, 31.000$ (3)

> E1; eigenvalues(JAC1)
 $\{x = 4.625, y = 0.000, z = 3.270\}$
 $-0.623 + 20.976 I, -0.623 - 20.976 I, 9.923$ (4)

> E2; eigenvalues(JAC2)
 $\{x = 115.143, y = 0.000, z = 0.000\}$
 $-31.000, 330.424, 353.657$ (5)

> E3; eigenvalues(JAC3)
 $\{x = 1.203, y = 3.334, z = 0.000\}$
 $-0.162 + 10.346 I, -0.162 - 10.346 I, -6.948$ (6)

> E4; eigenvalues(JAC4)
 $\{x = 1.203, y = 9.124, z = -5.853\}$

-5.316 + 13.007 I, -5.316 - 13.007 I, 10.309

(7)

> **NILAI AWAL POPULASI :**

> s2 := {x(0) = 9, y(0) = 3, z(0) = 4} :

> **SOLUSI MODEL :**

> s1 := {dx, dy, dz} :

> J := dsolve(s1 union s2, [x(t), y(t), z(t)], type=numeric, output
= listprocedure) :

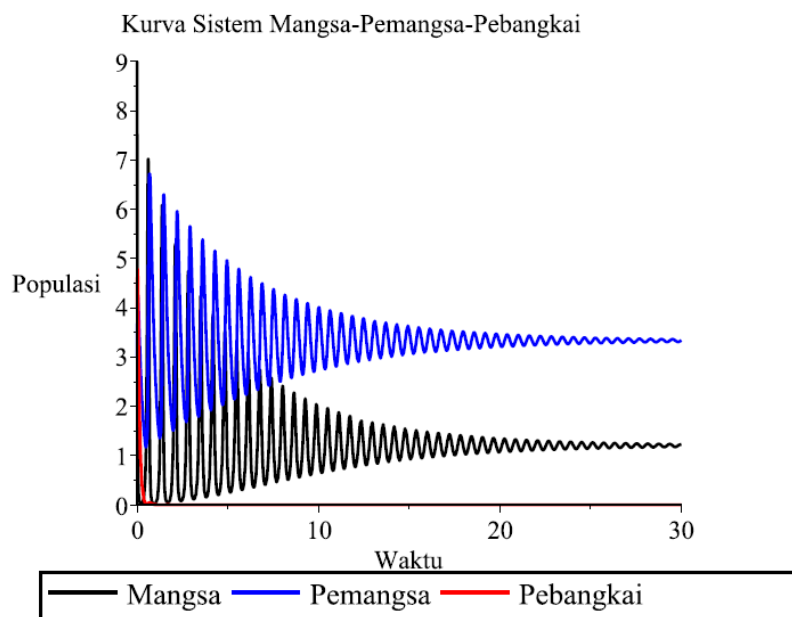
> sol_x := subs(J, x(t)) : sol_y := subs(J, y(t)) : sol_z := subs(J, z(t)) :

> **KURVA SOLUSI :**

> with(plots) :

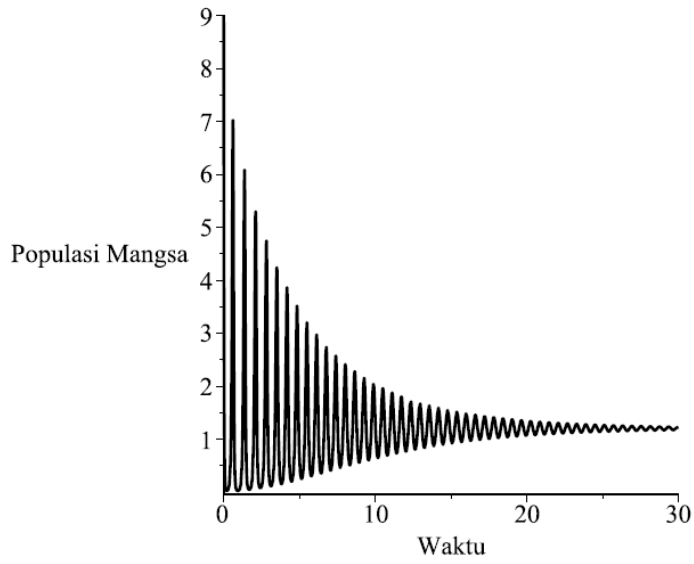
> sistem := plot([sol_x, sol_y, sol_z], 0..30, color = [black, blue, red], labels
= ["Waktu", "Populasi"], title
= ["Kurva Sistem Mangsa-Pemangsa-Pebangkai"], legend = ["Mangsa",
"Pemangsa", "Pebangkai"], thickness = 1) : mangsa := plot([sol_x], 0..30,
color = [black], labels = ["Waktu", "Populasi Mangsa"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Mangsa Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
pemangsa := plot([sol_y], 0..30, color = [blue], labels = ["Waktu",
"Populasi Pemangsa"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Pemangsa Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
pebangkai := plot([sol_z], 0..30, color = [red], labels = ["Waktu",
"Populasi Pebangkai"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Pebangkai Terhadap Waktu"], thickness = 1) :

> display([sistem])



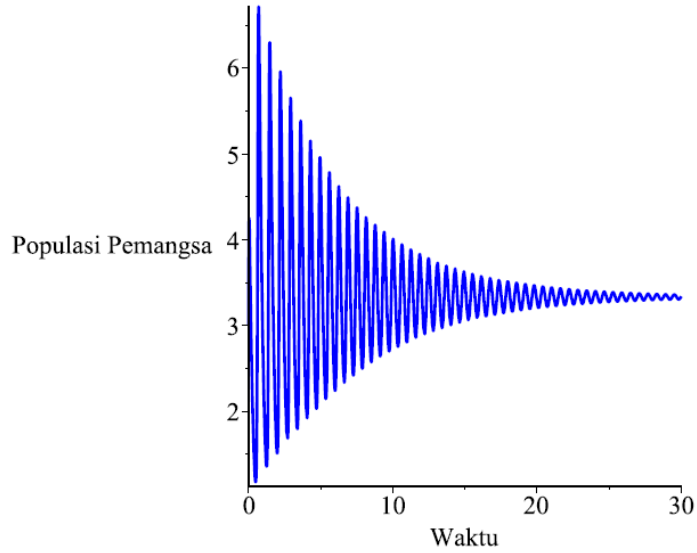
```
> display([mangsa])
```

Kurva Perubahan Populasi Mangsa Terhadap Waktu



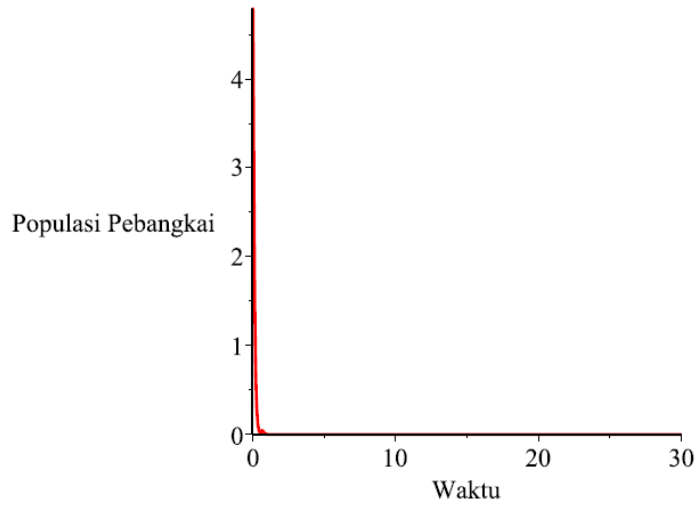
```
> display([pemangsa])
```

Kurva Perubahan Populasi Pemangsa Terhadap Waktu

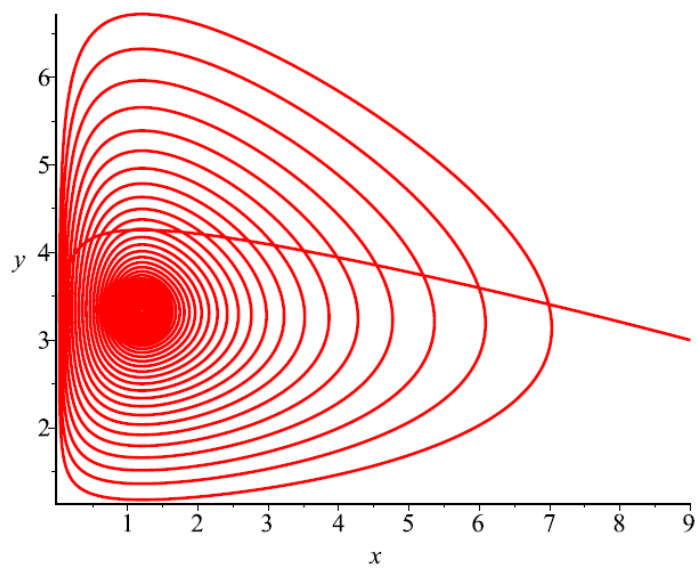


```
> display([pebangkai])
```

Kurva Perubahan Populasi Pebangkai Terhadap Waktu



```
> DEplot([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..30, [s2], scene = [x, y], linecolour = [red],  
thickness = 1, stepsize = 0.001, arrows = small)
```



```
>
```

LAMPIRAN V : Kasus Kelestarian Semua Populasi

```

> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> PARAMETER :
> mangsa :
> r := 75 : #laju pertumbuhan mangsa:
> k := 130 : #carrying capacity mangsa:
> α := 9.2 : #laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pemangsa:
> β := 9.1 : #laju penurunan populasi mangsa dari interaksi dengan pebangkai:
> q1 := 0.8 : #koefisien tertangkapnya mangsa:
> E1 := 15 : #usaha pemanenan mangsa:
> pemangsa :
> ξ := 3.0 : #menggantikan parameter γ laju pertumbuhan populasi pemangsa dari
interaksi dengan mangsa :
> η := 3.4 : #laju kematian alami pemangsa:
> q2 := 0.7 : #koefisien tertangkapnya pemangsa:
> E2 := 14.7 : #usaha pemanenan pemangsa:
> pebangkai :
> δ := 2.9 : #laju pertumbuhan populasi pebangkai dari interaksi dengan mangsa:
> v := 1.2 : #laju pertumbuhan populasi pebangkai dari hasil membangkai
pemangsa :
> μ := 3.6 : #laju kematian alami pebangkai:
> q3 := 0.6 : #koefisien tertangkapnya pebangkai:
> E3 := 21 : #usaha pemanenan pebangkai
> FORMULASI MODEL :
> dx := diff(x(t), t) = x(t) · r ·  $\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \alpha \cdot x(t) \cdot y(t) - \beta \cdot x(t) \cdot z(t) - q1 \cdot E1$ 
· x(t) :
> dy := diff(y(t), t) = ξ · x(t) · y(t) - η · y(t) - q2 · E2 · y(t) :
> dz := diff(z(t), t) = δ · x(t) · z(t) + v · y(t) · z(t) - μ · z(t) - q3 · E3 · z(t) :
> TITIKEKUILIBRIUMDANNILAIEIGEN :
> fx := x · r ·  $\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha \cdot x \cdot y - \beta \cdot x \cdot z - q1 \cdot E1 \cdot x$  :
> fy := ξ · x · y - η · y - q2 · E2 · y :
> fz := δ · x · z + v · y · z - μ · z - q3 · E3 · z :
> interface(displayprecision = 3) :
> titiktetap := solve( {fx = 0, fy = 0, fz = 0}, {x, y, z} ) :
> E0 := titiktetap[1] : E1 := titiktetap[3] : E2 := titiktetap[2] : E3
:= titiktetap[5] : E4 := titiktetap[4] :
> JAC := jacobian( [fx, fy, fz], [x, y, z] )
JAC :=  $\left[ \left[ 63.000 - \frac{15}{13} x - 9.200 y - 9.100 z, -9.200 x, -9.100 x \right], \right.$  (1)

```

$$\begin{bmatrix} 3.000 y, 3.000 x - 13.690, 0 \\ 2.900 z, 1.200 z, 2.900 x + 1.200 y - 16.200 \end{bmatrix}$$

> JAC0 := subs(E0, evalm(JAC)); JAC1 := subs(E1, evalm(JAC)); JAC2
:= subs(E2, evalm(JAC)); JAC3 := subs(E3, evalm(JAC)); JAC4
:= subs(E4, evalm(JAC));

$$JAC0 := \begin{bmatrix} 63.000 & -0.000 & -0.000 \\ 0.000 & -13.690 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & -16.200 \end{bmatrix}$$

$$JAC1 := \begin{bmatrix} -3.223 & -51.393 & -50.834 \\ 0.000 & 3.069 & 0 \\ 19.050 & 7.883 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$JAC2 := \begin{bmatrix} -63.000 & -1004.640 & -993.720 \\ 0.000 & 313.910 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & 300.480 \end{bmatrix}$$

$$JAC3 := \begin{bmatrix} -2.633 & -41.983 & -41.526 \\ 19.685 & 0.000 & 0 \\ 0.000 & 0.000 & 4.908 \end{bmatrix}$$

$$JAC4 := \begin{bmatrix} -2.633 & -41.983 & -41.526 \\ 7.416 & 0.000 & 0 \\ 11.991 & 4.962 & 0.000 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> E0; eigenvalues(JAC0)
{x = 0.000, y = 0.000, z = 0.000}
-16.200, -13.690, 63.000

(3)

> E1; eigenvalues(JAC1)
{x = 5.586, y = 0.000, z = 6.569}
-1.611 + 31.077 I, -1.611 - 31.077 I, 3.069

(4)

> E2; eigenvalues(JAC2)
{x = 109.200, y = 0.000, z = 0.000}
-63.000, 313.910, 300.480

(5)

> E3; eigenvalues(JAC3)
{x = 4.563, y = 6.562, z = 0.000}
-1.316 + 28.718 I, -1.316 - 28.718 I, 4.908

(6)

> E4; eigenvalues(JAC4)
{x = 4.563, y = 2.472, z = 4.135}

-0.371 + 28.420 I, -0.371 - 28.420 I, -1.891

(7)

> **NILAI AWAL POPULASI :**

> s2 := {x(0) = 12, y(0) = 3, z(0) = 6} :

> **SOLUSI MODEL :**

> s1 := {dx, dy, dz} :

> J := dsolve(s1 union s2, [x(t), y(t), z(t)], type=numeric, output
=listprocedure) :

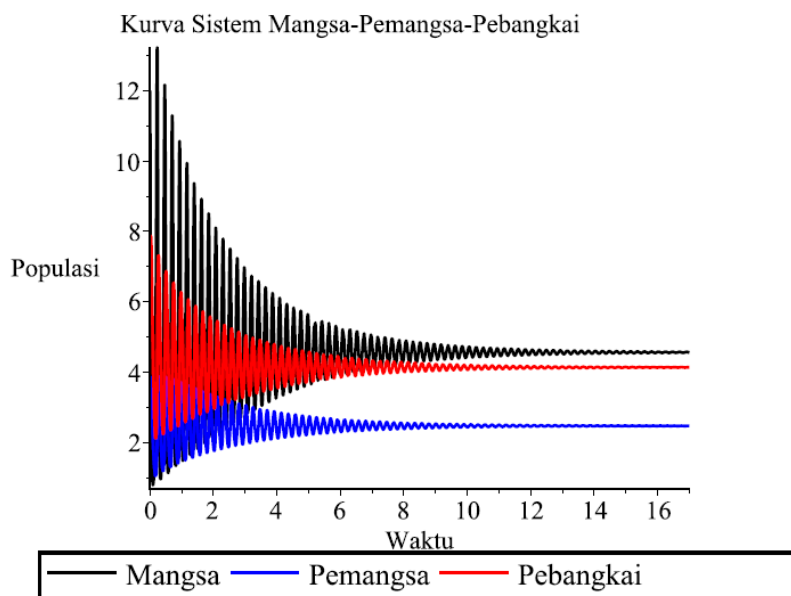
> sol_x := subs(J, x(t)) : sol_y := subs(J, y(t)) : sol_z := subs(J, z(t)) :

> **KURVA SOLUSI :**

> with(plots) :

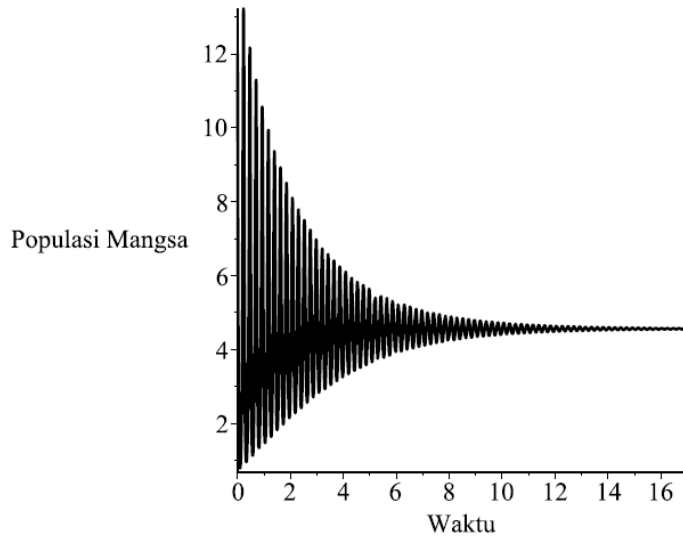
> sistem := plot([sol_x, sol_y, sol_z], 0..17, color = [black, blue, red], labels
= ["Waktu", "Populasi"], title
= ["Kurva Sistem Mangsa-Pemangsa-Pebangkai"], legend = ["Mangsa",
"Pemangsa", "Pebangkai"], thickness = 1) : mangsa := plot([sol_x], 0..17,
color = [black], labels = ["Waktu", "Populasi Mangsa"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Mangsa Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
pemangsa := plot([sol_y], 0..17, color = [blue], labels = ["Waktu",
"Populasi Pemangsa"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Pemangsa Terhadap Waktu"], thickness = 1) :
pebangkai := plot([sol_z], 0..17, color = [red], labels = ["Waktu",
"Populasi Pebangkai"], title
= ["Kurva Perubahan Populasi Pebangkai Terhadap Waktu"], thickness = 1) :

> display([sistem])



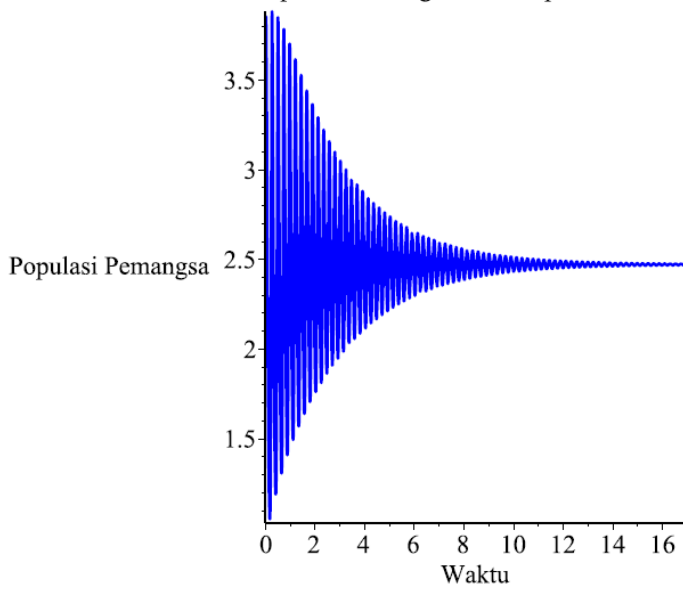
```
> display([mangsa])
```

Kurva Perubahan Populasi Mangsa Terhadap Waktu



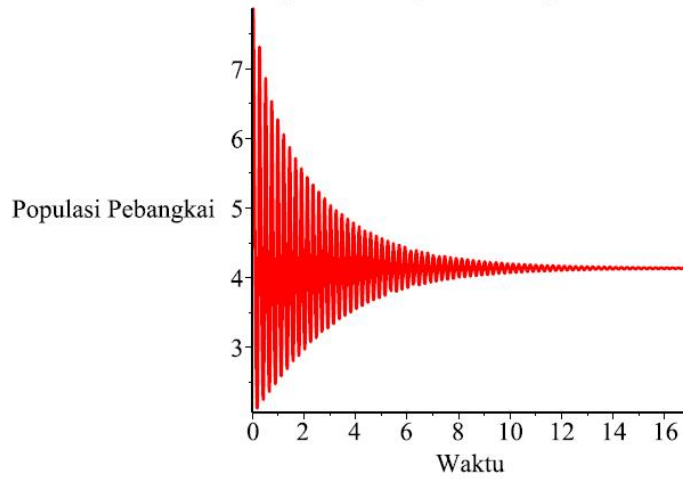
```
> display([pemangsa])
```

Kurva Perubahan Populasi Pemangsa Terhadap Waktu

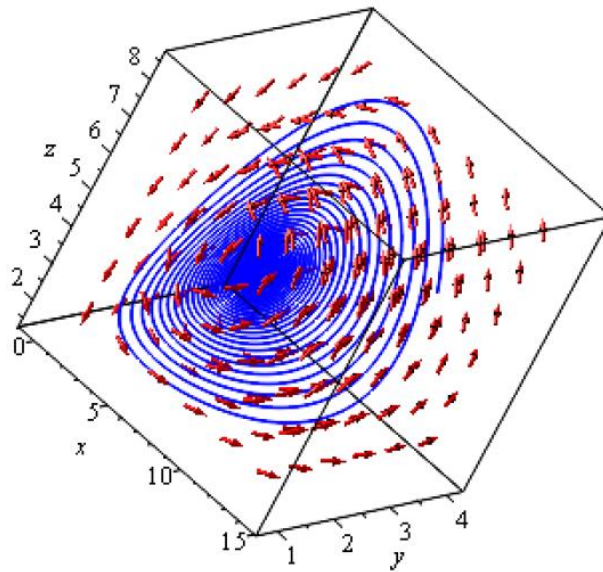


```
> display([pebangkai])
```

Kurva Perubahan Populasi Pebangkai Terhadap Waktu



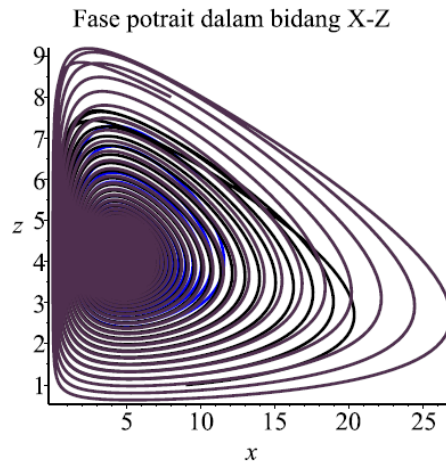
```
> DEplot3d([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..17, [s2], scene = [x, y, z], linecolour = [blue], thickness = 1, stepsize = 0.001, arrows = hex)
```



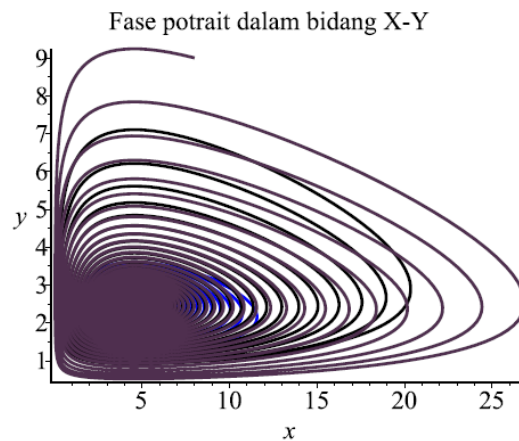
```
> DEplot([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..17, [[x(0) = 10, y(0) = 3, z(0) = 6], [x(0)
```



```
= 9, y(0) = 1, z(0) = 1], [x(0) = 8, y(0) = 9, z(0) = 8]], scene = [x, z], title
= ["Fase potrait dalam bidang X-Z"], linecolour = [blue, black, violet],
thickness = 1, stepsize = 0.001, arrows = small)
```



```
> DEplot([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..17, [[x(0) = 10, y(0) = 3, z(0) = 6], [x(0)
= 9, y(0) = 1, z(0) = 1], [x(0) = 8, y(0) = 9, z(0) = 8]], scene = [x, y], title
= ["Fase potrait dalam bidang X-Y"], linecolour = [blue, black, violet],
thickness = 1, stepsize = 0.001, arrows = small)
```



```
> DEplot([dx, dy, dz], [x, y, z], t = 0..17, [[x(0) = 10, y(0) = 3, z(0) = 6], [x(0)
= 9, y(0) = 1, z(0) = 1], [x(0) = 8, y(0) = 9, z(0) = 8]], scene = [y, z], title
= ["Fase potrait dalam bidang Y-Z"], linecolour = [blue, black, violet],
thickness = 1, stepsize = 0.001, arrows = small)
```

Fase potrait dalam bidang Y-Z

