

**NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK PADA
GRAF MATAHARI YANG DIMODIFIKASI**

SKRIPSI



SRI WAHYUNI DM

H011171007

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Sri Wahyuni Dm

Nim : H011171007

Program Studi : Matematika

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Nilai Total Ketidakteraturan Titik Pada Graf Matahari yang Dimodifikasi

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan tulisan orang lain bahwa Skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 17 Juni 2022

Yang Menyatakan



Sri Wahyuni Dm
NIM. H011171007

LEMBAR PENGESAHAN

**Nilai Total Ketidakteraturan Titik pada Graf Matahari yang
Dimodifikasi**

Disusun dan diajukan oleh

SRI WAHYUNI DM

H011171007

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka
Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Pada tanggal 17 Juni 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan,

Menyetujui,

Pembimbing Utama

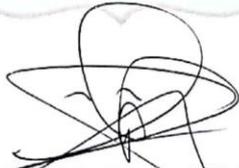
Pembimbing Pertama


Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002


Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc
NIP. 19680803 199202 1 001

Ketua Program Studi,




Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

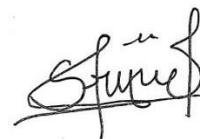
Segala puji syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga bisa menyelesaikan skripsi dengan judul **Nilai Total Ketidakteraturan Titik pada Graf Matahari yang Dimodifikasi** ini dengan tepat waktu. Tanpa pertolongan-Nya tentunya penulis tidak akan sanggup untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Salawat serta salam semoga terlimpahkan curahkan kepada baginda tercinta kita yaitu Nabi Muhammad SAW yang kita nanti-nantikan syafa'atnya di akhirat nanti. Skripsi ini disusun sebagai tugas akhir penulis dalam menyelesaikan pendidikan pada prodi matematika, Fakultas MIPA, Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati, penulis sampaikan terima kasih kepada:

1. Orang tua penulis, Ayah **Dama, S.Sos** senantiasa memberikan kasih sayang, doa dan materi kepada penulis dan Ibu **Hj. Gustina, S.Pd (Almh)** yang telah mendidik dan menitipkan amanah kepada penulis.
2. Saudara **Ns. Mita Lestari, S.Kep.** senantiasa memberikan doa dan motivasi kepada penulis.
3. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya dan **Dr. Eng. Amiruddin**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
4. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si** selaku pembimbing utama sekaligus ketua Departemen Matematika FMIPA UNHAS yang telah membimbing dan mengarahkan jalannya penelitian ini dengan penuh kesabaran dan keikhlasan.
5. **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku pembimbing pertama sekaligus dosen Penasehat Akademik yang selama ini telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, arahan dan motivasi dengan penuh ketulusan kepada penulis.

6. Dosen penguji Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** dan Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** yang telah memberikan masukan, kritik dan saran yang membangun untuk membantu penulis dalam menyempurnakan skripsi ini.
7. **Bapak, Ibu Dosen dan Staff Administrasi program studi Matematika FMIPA UNHAS** yang telah memberikan banyak ilmu, dukungan, dan membantu mengurus kelancaran studi.
8. Saudara dan saudariku selama perkuliahan **Defi, Riswan, Ayu, Mukayis, Farah, Nanda, Cahyu** dan seluruh teman-teman **Math17** yang telah memberikan semangat dan pencerahan serta menjadi tempat berbagi ilmu dan juga cerita.
9. Sahabat seperjuangan **Ika Indriani Rahayu** dan **Yuni Syahrani** yang selalu menemani dari awal perkuliahan hingga selesai.
10. Sahabat grup Buntu Squad **Defi, Fika, Riska, Sarti, Ayu, MJ, Muto,** dan **Hafsah** yang selalu membantu dan menjadi tempat berbagi cerita.
11. Sahabat Annisa Squad **Nurjanna, Nurhidayah Haruna Rio, Sri Wahyunia, Nurhalisa Amalia Achmad, Eka Fitriani,** dan **Rezki Amalia** yang selalu menemani, membantu, memberi semangat dan motivasi serta mendengar semua keluh kesah selama perkuliahan.
12. Terkhusus grup Nyenyenyeye **Nurjanna** dan **Nurfadilah S** senantiasa menemani dan memberi dukungan dalam hal apapun.
13. Spesial untuk teman baik penulis **Andy Savarix** yang selalu memberikan semangat dan motivasinya sehingga penulisan skripsi ini dapat selesai tepat pada waktunya.
14. Semua pihak yang namanya tidak sempat disebutkan satu persatu atas segala bentuk bantuan dan perhatiannya kepada penulis.

Makassar, 17 Juni 2022



Sri Wahyuni Dm

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Sri Wahyuni Dm
NIM : H011171007
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

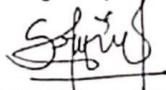
“Nilai Total Ketidakteraturan Titik pada Graf Matahari yang Dimodifikasi”

berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,

Dibuat di Makassar pada tanggal 17 Juni 2022

Yang menyatakan



(Sri Wahyuni Dm)

ABSTRAK

Salah satu jenis pelabelan graf adalah pelabelan total tidak teratur titik. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi (MSU_n). Penentuan nilai total ketidakteraturan titik graf matahari yang dimodifikasi dilakukan dengan cara menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah terbesar ditentukan berdasarkan sifat-sifat graf MSU_n menggunakan teorema yang dikembangkan oleh Bača dkk dan batas atas terkecil ditentukan dengan pelabelan total tidak teratur titik pada graf MSU_n .

Berdasarkan penelitian yang dilakukan diperoleh nilai total ketidakteraturan titik graf matahari yang dimodifikasi adalah

$$tvs(MSU_n) = \left\lceil \frac{2n + 3}{6} \right\rceil.$$

Kata kunci : *Graf Matahari yang Dimodifikasi, Pelabelan-k Total Tidak Teratur Titik, Nilai Total Ketidakteraturan Titik.*

ABSTRACT

One type of graph labeling is vertex irregular total k-labeling. The purpose of this research is to determine the total vertex irregularity strength of modified sun graph, denoted by MSU_n . The total vertex irregularity strength of MSU_n graph was conducted by determining the greatest lower bound and the least upper bound. The greatest lower bound is determined by based on the properties of the MSU_n graph using the theorem developed by – and the least upper bound is determined by vertex irregular total k-labeling on the MSU_n graph.

According to the research conducted, the total vertex irregularity strength of the modified sun graphs is

$$tvs(MSU_n) = \left\lceil \frac{2n + 3}{6} \right\rceil.$$

Keywords : modified sun graph, vertex irregularity total k-labeling, total vertex irregularity strength.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS	vi
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR NOTASI.....	xii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Pengertian Graf	5
2.2 Terminologi Graf	6
2.3 Operasi Corona pada Graf.....	8
2.4 Jenis-jenis Graf	8
2.5 Pelabelan Graf.....	11
2.6 Pelabelan Total Tidak Teratur Titik.....	12
BAB III METODE PENELITIAN	15
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	16
4.1 Graf Matahari yang Dimodifikasi ($MSUn, n \geq 3$).....	16

4.2	Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Matahari Yang Dimodifikasi (<i>MSUn</i> , $n \geq 3$)	16
BAB V PENUTUP		56
5.1	Kesimpulan	56
5.2	Saran	56
DAFTAR PUSTAKA		57

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G	5
Gambar 2.2 Graf G	7
Gambar 2.3 Graf Terhubung dan Tak Terhubung	7
Gambar 2.4 Graf $C3 \oplus P3$	8
Gambar 2.5 (a) Graf sederhana, (b) Graf tak sederhana, (c) Graf tak sederhana....	9
Gambar 2.6 Graf Lintasan.....	9
Gambar 2.7 Graf Siklus.....	9
Gambar 2.8 Graf Lengkap.....	10
Gambar 2.9 Graf Matahari $SU6$	10
Gambar 2.10 Graf Matahari yang Dimodifikasi $MSU6$	11
Gambar 2.11 Pelabelan Total pada Graf $C5$	12
Gambar 2.12 Beberapa Pelabelan Total pada Graf $K5$	13
Gambar 2.13 Pelabelan-2 Total Ketidakteraturan Titik pada Graf $MSU3$	14
Gambar 4.1 Graf Matahari yang Dimodifikasi	16
Gambar 4.2 Pelabelan-2 total tidak teratur titik pada graf $MSU3$	18
Gambar 4.3 Pelabelan-2 total tidak teratur titik pada graf $MSU4$	18
Gambar 4.4 Pelabelan-3 total tidak teratur titik pada graf $MSU5$	19
Gambar 4.5 Pelabelan-3 total tidak teratur titik pada graf $MSU6$	19
Gambar 4.6 Pelabelan-3 total tidak teratur titik pada graf $MSU7$	20
Gambar 4.7 Pelabelan-4 total tidak teratur titik pada graf $MSU8$	20
Gambar 4.8 Pelabelan-4 total tidak teratur titik pada graf $MSU9$	21
Gambar 4.9 Graf matahari yang dimodifikasi.....	21

DAFTAR NOTASI

$G(V, E)$: Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E
$V(G)$: Himpunan titik dari graf G
$E(G)$: Himpunan sisi dari graf G
$p(G)$: Orde atau banyaknya titik dari graf G
$q(G)$: Ukuran atau banyaknya sisi dari graf G
$\delta(G)$: Derajat minimum dari graf G
$\Delta(G)$: Derajat maksimum dari graf G
MSU_n	: Graf matahari yang dimodifikasi
$G \oplus H$: Graf corona G dan H
P_n	: Graf lintasan
C_n	: Graf siklus
K_n	: Graf lengkap
SU_n	: Graf matahari
$wt(v)$: Bobot titik v
$f(v)$: Fungsi pelabelan titik v
$f(uv)$: Fungsi pelabelan sisi uv
$tvs(G)$: Nilai total ketidakteraturan titik graf G

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu dasar yang mempunyai peran yang sangat penting dalam kehidupan manusia. Secara umum, dalam kehidupan sehari-hari tidak terasa bahwa manusia telah menggunakan aplikasi dari kegunaan ilmu matematika itu sendiri. Salah satunya adalah persoalan teori graf.

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh Leonard Euler, seorang matematikawan asal Swiss, sebagai upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg. Pada masalah itu, ia memikirkan kemungkinan untuk melintasi semua jembatan di kota Königsberg, Rusia, tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Untuk mengatasi masalah tersebut Euler mengganti daratan dengan titik dan jembatan sebagai sisi yang kemudian dikenal sebagai teori graf.

Secara matematis graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan $G = (V, E)$, dimana V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertex*) dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik. Definisi tersebut menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu titik tanpa sisi dinamakan graf trivial. Biasanya titik digambarkan dengan titik-titik pada bidang dan sisi digambarkan dengan garis yang menghubungkan dua titik pada bidang.

Penerapan teori graf dalam kehidupan sehari-hari sangatlah luas. Misalnya penerapan teori graf dalam sistem lalu lintas dimana titik digunakan untuk menyatakan suatu persimpangan jalan dan sisi digunakan untuk menyatakan jalan yang menghubungkan dua simpang jalan serta arah pada sisi dinyatakan sebagai arah jalan yang dapat dilalui. Bobot atau nilai dari sisi graf menyatakan jarak antar persimpangan.

Salah satu topik yang terdapat dalam teori graf adalah pelabelan. Pelabelan graf merupakan pemberian nilai dengan bilangan bulat positif pada titik, sisi atau

keduanya dari suatu graf sehingga memenuhi kondisi tertentu. Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi maka pelabelan disebut pelabelan sisi. Jika domain dari fungsi adalah gabungan himpunan titik dan himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total.

Salah satu jenis dari pelabelan total adalah pelabelan total tidak teratur. Konsep pelabelan total tidak teratur pertama kali diperkenalkan pada tahun 1988 oleh Chartrand, dkk. Pada tahun 2007, Bača dkk mengkaji pelabelan total tidak teratur ke dalam dua tipe, yaitu pelabelan total tidak teratur titik dan pelabelan total tidak teratur sisi [1].

Pelabelan total tidak teratur titik pada suatu graf merupakan pemetaan himpunan titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga bobot setiap titiknya berbeda. Bobot yang dimaksud adalah penjumlahan label titik dan label sisi-sisi yang terkait dengan titik tersebut. Nilai total ketidakaturan titik suatu graf G dinotasikan dengan $tvs(G)$, yaitu suatu bilangan bulat positif terkecil k , sedemikian sehingga fungsi yang memetakan himpunan titik dan sisi dari suatu graf G pada himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k\}$ menghasilkan bobot yang berbeda pada setiap titiknya.

Beberapa peneliti telah menentukan nilai total ketidakaturan titik pada graf, diantaranya Slamin, Dafik, dan Wyse Winnona, menentukan nilai total ketidakaturan titik pada gabungan terpisah graf matahari [2]. Pada tahun 2015, Riskawati telah menentukan nilai total ketidakaturan titik graf sarang lebah [3], dan Ali Ahmad, dkk telah menentukan nilai total ketidakaturan titik pada graf helm dan graf matahari [4]. Andi Daniah Pahrany pada tahun 2017 telah menentukan nilai total ketidakaturan titik graf *unidentified flying object* [5]. Pada tahun 2018, Sitti Fatimah telah menentukan nilai total ketidakaturan titik graf *splitting* [6] dan Sitti Ardianty Badawi telah menentukan nilai total ketidakaturan titik graf grid [7]. ST.Maryam Mahaseng pada tahun 2020 telah menentukan nilai total ketidakaturan titik graf kincir $Wd_{5,m}$ [8]. Pada tahun 2021, Corry Corazon Marzuki, dkk. telah menentukan nilai total ketidakaturan dari empat copy graf bintang [9]. Nurdin Hinding, dkk. telah menentukan nilai

total ketidakteraturan titik graf *hexagonal cluster* [10]. Salamah Fitriani Harianja telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik dari graf seri paralel $(m, 1, 5)$ [11].

Pada penelitian sebelumnya telah diperoleh nilai total ketidakteraturan titik graf matahari, dimana graf matahari merupakan graf yang titiknya berderajat satu dan tiga, dengan hasil $tvs(SU_n) = \lfloor (3n + 1)/4 \rfloor$ [4]. Berdasarkan hasil penelusuran, belum didapatkan keterangan tentang nilai total ketidakteraturan titik dari graf matahari yang dimodifikasi. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang nilai total ketidakteraturan titik graf matahari yang dimodifikasi menjadi graf yang titiknya berderajat tiga dan lima dengan judul **“Nilai Total Ketidakteraturan Titik pada Graf Matahari yang Dimodifikasi”**.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi?
2. Bagaimana menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas tentang pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi sedemikian sehingga titik-titik graf matahari yang dimodifikasi hanya berderajat 3 dan 5 dengan notasi $MSU_n, n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi.
2. Untuk menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Dapat mengetahui pelabelan total tidak teratur titik dan nilai total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi.
2. Dapat dijadikan sebagai referensi bagi pihak-pihak yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari 5 bab sebagai berikut:

- a) Bab I Pendahuluan, yang memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.
- b) Bab II Tinjauan Pustaka, dalam bab ini disajikan secara singkat mengenai konsep dasar yang relevan dengan pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi, antara lain membahas tentang pengertian graf, terminologi, operasi, jenis-jenis graf, dan pelabelan total tidak teratur titik.
- c) Bab III Metode Penelitian, yang berisi tentang metode penelitian dan langkah-langkah yang digunakan dalam menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi.
- d) Bab IV Hasil dan Pembahasan, dalam bab ini membahas mengenai hasil dan pembahasan yang diperoleh dalam menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf matahari yang dimodifikasi.
- e) Bab V Penutup, yang berisi tentang kesimpulan dan saran-saran.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

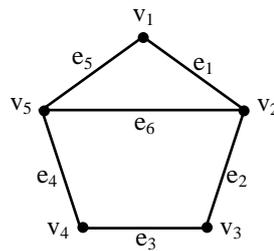
2.1 Pengertian Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736, ketika Euler mencoba untuk mencari solusi dari permasalahan jembatan Konigsberg. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi dimana himpunan titik tidak boleh kosong. Secara umum, definisi graf adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 *Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) , dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.*[12]

Berdasarkan Definisi 2.1.1, Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E dinotasikan dengan $G = (V,E)$. Himpunan titik (*vertex set*) dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$, dan himpunan sisi (*edge set*) dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya unsur dari $V(G)$ disebut orde (*order*) dari G dan dinotasikan dengan $p(G)$, sedangkan banyaknya unsur dari $E(G)$ disebut ukuran (*size*) dari G dan dinotasikan dengan $q(G)$. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan sisi yang menghubungkan u dan v ditulis $e = (u, v)$. Untuk penyederhanaan penulisan (u, v) diganti dengan uv .

Contoh 2.1.1



Gambar 2.1 Graf G

Pada gambar 2.1 himpunan titik dan sisi graf G adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$, $e_4 = v_4v_5$, $e_5 = v_1v_5$, dan $e_6 = v_2v_5$.

2.2 Terminologi Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf. Berikut didefinisikan beberapa terminologi yang akan digunakan pada tugas akhir ini.

Definisi 2.2.1 *Dua buah titik pada graf G disebut bertetangga (adjacent) jika keduanya dihubungkan oleh satu sisi. Dengan kata lain, u dan v bertetangga jika uv adalah sebuah sisi pada graf G .*[7]

Definisi 2.2.2 *Misalkan G adalah suatu graf dan $u, v \in V(G)$, jika $e = uv \in E(G)$ maka sisi e dikatakan terkait (incident) dengan titik u dan v .* [7]

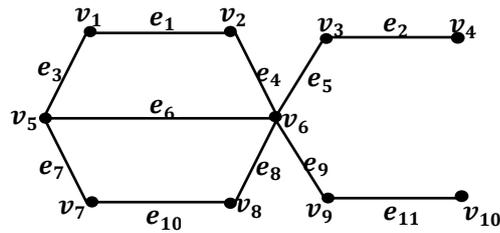
Definisi 2.2.3 *Jika e_1 dan e_2 adalah sisi yang berbeda pada graf G yang terkait dengan sebuah titik yang sama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi-sisi bertetangga (adjacent edges).*[13]

Definisi 2.2.4 *Banyaknya anggota $V(G)$ dari suatu graf G disebut order, sedangkan banyaknya anggota $E(G)$ dari suatu graf G disebut ukuran (size).*

Definisi 2.2.5 *Misalkan v adalah suatu titik pada graf G . Derajat titik v adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v yang dinotasikan dengan $\deg(v)$. $\Delta(G)$ merupakan notasi yang menyatakan derajat maksimum dari graf G dan $\delta(G)$ merupakan notasi yang menyatakan derajat minimum dari graf G .*[7]

Definisi 2.2.6 *Lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n di dalam graf G adalah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2 \dots v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = v_0v_1, e_2 = v_1v_2, \dots, e_n = v_{n-1}v_n$ adalah sisi-sisi dari graf.*[13]

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*), sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan terbuka (*open path*).



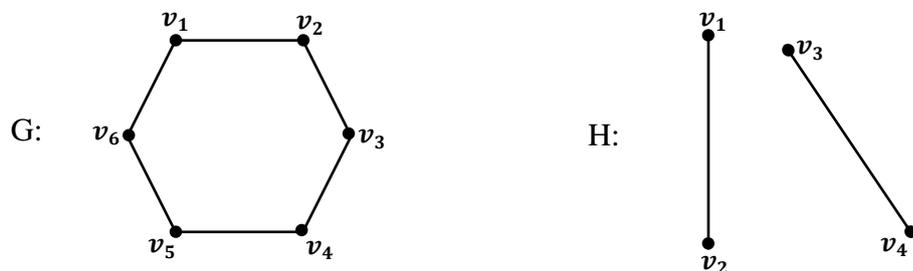
Gambar 2.2 Graf G

Berdasarkan graf G pada gambar 2.2, diperoleh:

- i. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_5 sedangkan titik v_1 dan titik v_3 tidak bertetangga.
- ii. Sisi $e_1 = v_1v_2$ terkait dengan titik v_1 dan titik v_2 , sedangkan sisi e_1 tidak terkait dengan titik v_5 dan v_6 .
- iii. Sisi e_4, e_5, e_6, e_8 dan e_9 merupakan sisi yang bertetangga karena terkait dengan titik yang sama yaitu titik v_6 .
- iv. Derajat dari setiap titiknya adalah $deg(v_1) = deg(v_2) = deg(v_3) = deg(v_7) = deg(v_8) = deg(v_9) = 2, deg(v_4) = deg(v_{10}) = 1, deg(v_5) = 3,$ dan $deg(v_6) = 5$. Sehingga derajat maksimum dari graf G adalah $\Delta(G) = 5$ dan derajat minimum dari graf G adalah $\delta(G) = 1$.
- v. Lintasan tertutup pada graf G yaitu $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_6 \rightarrow v_5 \rightarrow v_1$, sedangkan lintasan terbuka pada graf G yaitu $v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6 \rightarrow v_9 \rightarrow v_{10}$.

Definisi 2.2.7 Misalkan G adalah graf sederhana. Graf G disebut graf terhubung apabila setiap dua titik pada graf tersebut termuat pada suatu lintasan.[12]

Contoh 2.2.7



Gambar 2.3 Graf Terhubung dan Tak Terhubung

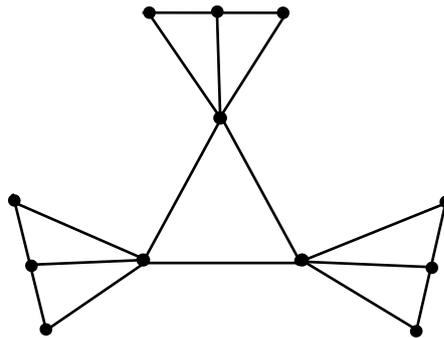
Pada gambar 2.3 menunjukkan G adalah graf terhubung karena setiap dua titik yang berbeda dari G terdapat lintasan. Sedangkan H adalah graf tak terhubung karena terdapat dua titik berbeda yang tidak memiliki lintasan yaitu titik v_1 dengan v_3 dan v_4 , dan titik v_2 dengan titik v_3 dan v_4 .

2.3 Operasi Corona pada Graf

Pada sub bab ini akan didefinisikan operasi corona pada suatu graf.

Definisi 2.3.1 Misalkan G graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m . Graf corona G dan H dinotasikan $G \oplus H$ adalah menggandakan graf H sebanyak n kali namakan H_1, H_2, \dots, H_n , dan mengaitkan setiap titik v_i di G dengan setiap titik di graf $H_i, i=1, 2, \dots, n$. [12]

Contoh 2.3



Gambar 2.4 Graf $C_3 \oplus P_3$

2.4 Jenis-jenis Graf

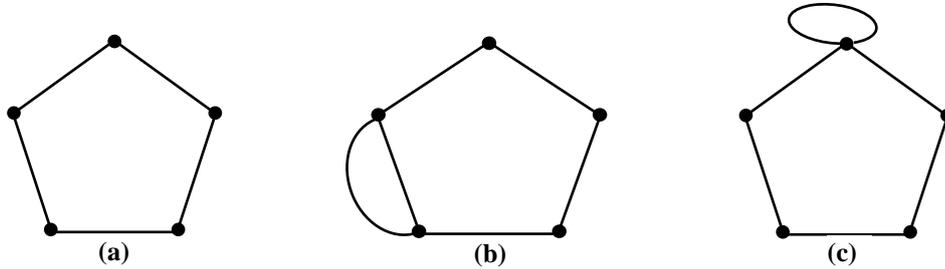
Beberapa graf dikelompokkan berdasarkan ciri khusus dari setiap graf. Pada bagian ini, akan dipaparkan beberapa jenis graf yang akan digunakan pada penelitian ini.

Definisi 2.4.1 Graf sederhana G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (vertex), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (edge). [12]

Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung *loop* (gelang) dan *multiple edges* (sisi ganda). *Loop* (gelang) adalah sisi yang berawal dan berakhir

pada titik yang sama, sedangkan *multiple edges* (sisi ganda) adalah sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama.

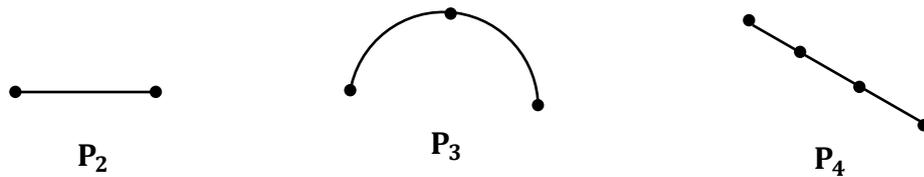
Contoh 2.4.1



Gambar 2.5 (a) Graf sederhana, (b) Graf tak sederhana, (c) Graf tak sederhana

Definisi 2.4.2 Misalkan $P_n: v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dengan panjang $n-1$. Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas satu lintasan maksimal.

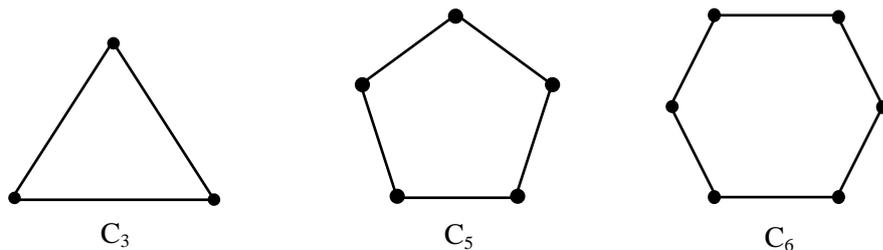
Contoh 2.4.2



Gambar 2.6 Graf Lintasan

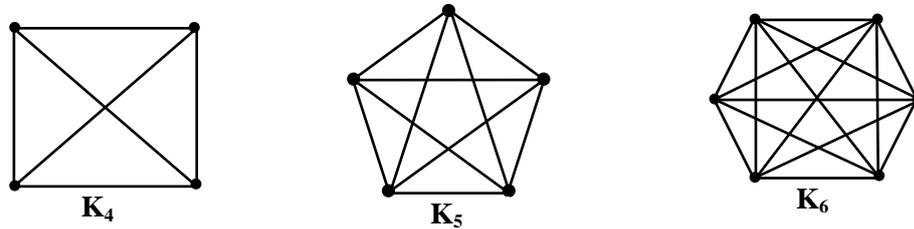
Definisi 2.4.3 Graf siklus (cycle) dengan n titik dan n sisi dimana $n \geq 3$, dinotasikan dengan C_n adalah graf terhubung yang dibentuk dari lintasan tertutup yang berawal dan berakhir pada titik yang sama, dimana setiap titiknya berderajat 2 dan masing-masing titiknya dilalui tepat satu kali.

Contoh 2.4.3



Gambar 2.7 Graf Siklus

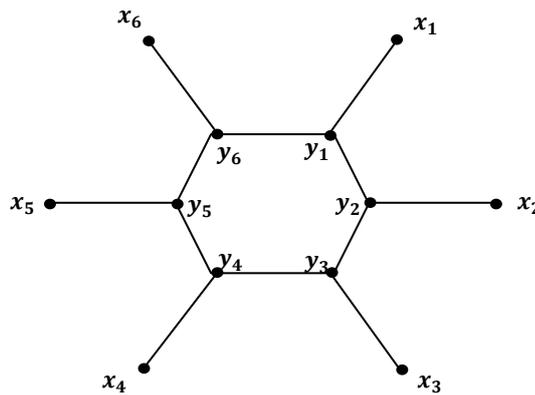
Definisi 2.4.4 Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n adalah graf sederhana yang setiap dua titiknya bertetangga.[12]



Gambar 2.8 Graf Lengkap

Definisi 2.4.5 Misalkan $C_n, n \geq 3$ adalah suatu graf siklus dan graf K_1 . Graf matahari adalah graf hasil corona antara C_n dan K_1 yang dinotasikan dengan $SU_n, n \geq 3$.

Contoh 2.4.5

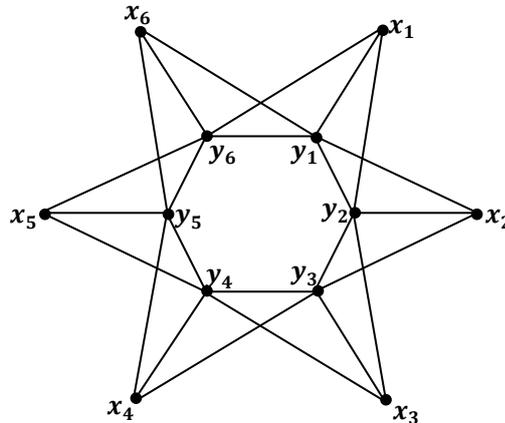


Gambar 2.9 Graf Matahari SU_6

Pada penelitian ini, penulis akan melakukan pelabelan pada graf matahari yang dimodifikasi. Secara formal graf matahari yang dimodifikasi didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.6 Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf matahari adalah $V(SU_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n \text{ dan } y_1, y_2, \dots, y_n\}$ dan $E(SU_n) = \{x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_1\}$. Graf matahari yang dimodifikasi merupakan graf yang diperoleh dari graf matahari dengan menambah sebanyak $2n$ sisi, sedemikian sehingga x_1 bertetangga dengan y_2 dan y_n , x_i bertetangga dengan y_{i-1} dan y_{i+1} dengan $i = 2, 3, \dots, n - 1$, dan x_n bertetangga dengan y_{n-1} dan y_1 . Graf matahari yang dimodifikasi dinotasikan dengan $MSU_n, n \geq 3$.

Contoh 2.4.6

Gambar 2.10 Graf Matahari yang Dimodifikasi MSU_6

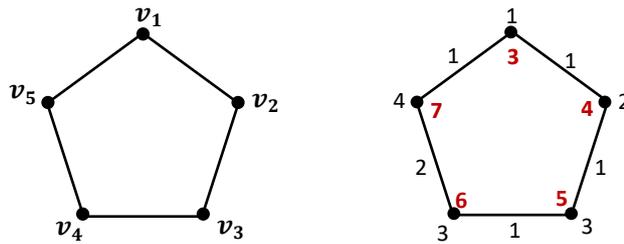
2.5 Pelabelan Graf

Dalam subbab ini, akan dibahas mengenai definisi pelabelan dan bobot dari suatu graf.

Definisi 2.5.1 *Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan setiap elemen graf G ke suatu himpunan bilangan bulat positif [7].*

Himpunan bilangan yang menjadi kodomain dari pelabelan disebut himpunan label. Berdasarkan domainnya, pelabelan graf terbagi menjadi tiga yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Jika domain dari fungsi pelabelan adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut dengan pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domain dari fungsi pelabelan adalah himpunan sisi, maka disebut dengan pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika domain dari fungsi pelabelan adalah gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut adalah pelabelan total (*total labeling*).

Definisi 2.5.2 *Bobot titik v pada pelabelan total f adalah label titik v yang ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v , yaitu $wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in E} f(uv)$ [11].*



Gambar 2.11 Pelabelan Total pada Graf C_5

Misal f adalah pelabelan total pada C_5 maka pelabelan titiknya adalah

$$f(v_1) = 1, \quad f(v_2) = 2,$$

$$f(v_3) = 3, \quad f(v_4) = 3,$$

$$f(v_5) = 4.$$

Adapun pelabelan sisinya yaitu:

$$f(v_1v_2) = 1, \quad f(v_1v_5) = 1,$$

$$f(v_2v_3) = 1, \quad f(v_3v_4) = 1,$$

$$f(v_4v_5) = 2.$$

Sehingga diperoleh bobot titiknya sebagai berikut.

$$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1, v_2) + f(v_1, v_5) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_1, v_2) + f(v_2, v_3) = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_2, v_3) + f(v_3, v_4) = 3 + 1 + 1 = 5$$

$$wt(v_4) = f(v_4) + f(v_3, v_4) + f(v_4, v_5) = 3 + 1 + 2 = 6$$

$$wt(v_5) = f(v_5) + f(v_4, v_5) + f(v_1, v_5) = 4 + 2 + 1 = 7$$

2.6 Pelabelan Total Tidak Teratur Titik

Pelabelan total tidak teratur titik pertama kali diperkenalkan oleh Bača dkk pada tahun 2007. Menurut Bača dkk dalam [11], pelabelan total tak teratur titik dan nilai total ketidakteraturan titik diberikan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.6.1 Misalkan $G(V,E)$ adalah graf sederhana. Pelabelan total $f:V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots,k\}$ disebut suatu pelabelan- k total tidak teratur titik (total vertex irregular k -labeling) pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V , berlaku

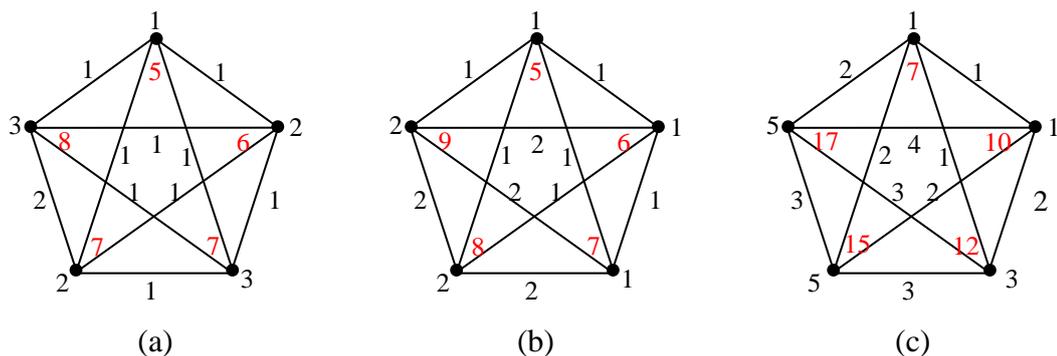
$$wt(x) \neq wt(y)$$

dimana

$$wt(x) = f(x) + \sum_{xy \in E(G)} f(xy).$$

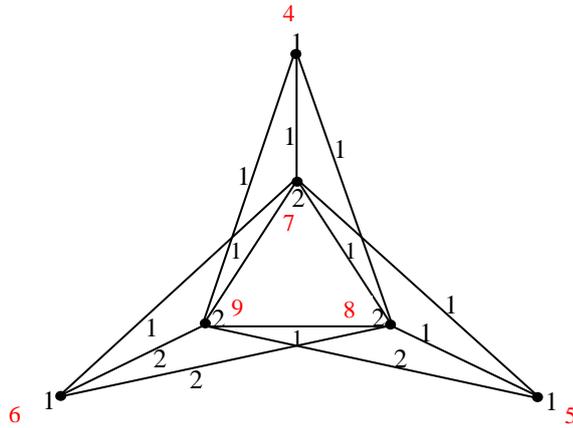
Definisi 2.6.2 Nilai total ketidakteraturan titik (total vertex irregularity strength) dari graf G , dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan- k total tidak teratur titik.

Contoh 2.6.2:



Gambar 2.12 Beberapa Pelabelan Total pada Graf K_5

Gambar 2.12 menunjukkan beberapa pelabelan total pada graf K_5 . Pada bagian (a) bukan merupakan pelabelan-3 total ketidakteraturan titik karena terdapat bobot titik yang sama. Sedangkan pada bagian (b) merupakan pelabelan-2 total ketidakteraturan titik dan bagian (c) merupakan pelabelan-5 total ketidakteraturan titik karena masing-masing memiliki bobot yang berbeda. Dengan demikian nilai total ketidakteraturan titik pada graf lengkap K_5 adalah 2 atau dapat ditulis $tvs(K_5) = 2$.



Gambar 2.13 Pelabelan-2 Total Ketidakteraturan Titik pada Graf MSU_3

Gambar 2.13 merupakan pelabelan-2 total ketidakteraturan titik pada graf MSU_3 karena masing-masing memiliki bobot yang berbeda. Dengan demikian nilai total ketidakteraturan titik pada graf MSU_3 adalah 2 atau dapat ditulis $tvs(MSU_3) = 2$.

Nilai total ketidakteraturan titik pada graf G telah dikembangkan oleh Bača,dkk [14] menjadi suatu teorema yang dituliskan sebagai berikut:

Teorema 2.6.1 Misalkan sebuah graf $G(V,E)$ dengan n adalah banyaknya titik, $\delta(G)$ adalah derajat minimum, dan $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum, maka berlaku:

$$\left\lceil \frac{(n + \delta(G))}{(\Delta(G) + 1)} \right\rceil \leq tvs(G) \leq n + \Delta(G) - 2\delta(G) + 1.$$

Teorema 2.6.1 dapat digunakan dalam menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik serta pemberian label pada titik dan sisi untuk menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik.