# METODE GALERKIN UNTUK MENENTUKAN KEBERADAAN DAN KETUNGGALAN SOLUSI LEMAH SUATU PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR TAK HOMOGEN ORDE DUA

**SKRIPSI**


**NURFADILLAH RAHIM**

**H011171002**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**


**MARET 2022**

# METODE GALERKIN UNTUK MENENTUKAN KEBERADAAN DAN KETUNGGALAN SOLUSI LEMAH SUATU PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR TAK HOMOGEN ORDE DUA

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

**NURFADILLAH RAHIM**

**H011171002**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**JUNI 2022**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

| | |
|---|---|
| Nama | : Nurfadillah Rahim |
| NIM | : H011171002 |
| Program Studi | : Matematika |
| Jenjang | : S1 |

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

**Metode Galerkin untuk Menentukan Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Lemah Suatu Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Orde Dua**

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 15 Juni 2022

g menyatakan,

METERAI TEMPEL
7728AAJX919352406

Nurfadillah Rahim

NIM. H011171002

# LEMBAR PENGESAHAN

## METODE GALERKIN UNTUK MENENTUKAN KEBERADAAN DAN KETUNGGALAN SOLUSI LEMAH SUATU PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR TAK HOMOGEN ORDE DUA

**Disusun dan diajukan oleh**

**NURFADILLAH RAHIM**

**H011171002**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 21 Juni 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

**Pembimbing Utama,**

**Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.**
**NIP. 19580802 198403 1 002**

**Pembimbing Pertama,**

**Naimah Aris, S.Si., M.Math.**
**NIP. 19711003 199702 2 001**

**Ketua Program Studi,**

**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**
**NIP. 197008072000031002**

# KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Subhanahu Wa Ta'ala, karena atas berkat dan rahmat-Nya sehingga penulis diberikan kesempatan dan kesehatan dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Shalawat dan salam tak henti-hentinya tercurah kepada Baginda Rasulullah Muhammad Shalallahu Alaihi Wassalaam, sebagai tauladan yang telah membawa Al-Qur'an sebagai pedoman dunia dan akhirat. Hanya dengan taufik dan hidayah dari Allah Subhanahu Wa Ta'ala sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Metode Galerkin untuk Menentukan Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Lemah Suatu Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Orde Dua**" yang disusun sebagai persyaratan akademik dalam meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang mendalam dan tak terhingga kepada Ayahanda dan Ibunda tersayang, **Abdul Rahim SH., MH** dan **Sitti Nurliah, SE** yang telah mendidik dan membesarkan penulis dengan penuh kesabaran dan kasih sayang serta dengan penuh ketulusan hati yang tak henti-hentinya memberikan dukungan serta doa untuk penulis demi keberhasilan penulis dalam menjalani segala proses pendidikan. Semoga Allah Subhanahu Wa Ta'ala memberikan kesehatan dan umur panjang yang berkah Aamiin. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada saudari **Nur Rahmi Rahim, S.Tr.Keb** yang telah menjadi kakak terbaik bagi penulis. Terima kasih atas kebersamaan, dukungan, semangat, serta doa yang tiada hentinya untuk penulis. Semoga kita semua selalu dalam lindungan Allah Subhanahu Wa Ta'ala dan tetap menjadi keluarga yang harmonis. Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis dengan segala keterbatasan, kemampuan, dan pengetahuan dapat melewati segala hambatan berkat bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih dengan penuh keikhlasan kepada :

1. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS** selaku pembimbing utama dan Ibu **Naimah Aris, S.Si., M.Math** selaku pembimbing pertama. Terimakasih atas segala kesabaran dan keikhlasan untuk meluangkan banyak waktu, tenaga, dan pikiran dalam mengarahkan dan membimbing penulis dari awal penyusunan hingga selesainya tugas akhir ini, serta terima kasih atas segala perhatian dan semangat yang luar biasa kepada penulis untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika, Ibu **Dr. Kasbawati, M.Si.,** selaku Sekretaris Departemen Matematika, dan segenap bapak dan ibu dosen serta staf **Departemen Matematika** yakni Pak Nasir, Pak Iswan, kak Ruwaidah, dan kak Irma, yang telah membekali ilmu dan bantuan kepada penulis.
3. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si** selaku anggota tim penguji dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si** selaku penasehat akademik sekaligus anggota tim penguji yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, kritik, dan saran yang sangat membangun dalam penyusunan skripsi ini.
4. Teman seperjuangan di **Matematika 2017**, terimakasih atas kebersamaan, semangat serta arahan bagi penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Saudara(i) **DISKRIT 2017** yang telah memberikan penulis pengalaman yang sangat berharga dan bisa merasakan arti kebersamaan. Terima kasih atas kebersamaan dan ikatan persaudaraan yang telah terjalin dari mahasiswa baru hingga sekarang, semoga kita tetap “Bersatu, Erat, dan Kuat!”.
6. Keluarga besar **Himatika FMIPA Unhas**, sebagai keluarga kedua bagi penulis yang telah memberikan pengalaman berharga dalam berlembaga yang mungkin tidak bisa didapatkan di tempat lain. “Bravo Himatika!”.
7. Teman-teman **MIPA 2017**, terimakasih atas segala kebersamaan yang terjalin dari awal mahasiswa baru hingga penulis menyelesaikan tugas akhir ini.

Semoga kita semua bisa tetap menjalin ikatan persaudaraan. Salam **“**Kita Semua Bersaudara!**”**.

8. Keluarga besar **BEM FMIPA Unhas**, terimakasih atas segala pembelajaran, pengalaman, dan persaudaraan bagi penulis dalam berlembaga. Salam “*Use Your Mind Be The Best!*”.
9. Sahabat seperjuangan **Lucknut 24/7**, yang telah menemani penulis dari awal mahasiswa baru hingga penulis menyelesaikan tugas akhir ini. Spesial untuk **Teka, Indi**, **Upi**, **Cahyudi**, dan **Riswan**, terimakasih atas segala pengalaman, bantuan, semangat, serta dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
10. Kawan seperjuangan **Program Kreativitas Mahasiswa**, yakni **Afifah** dan **Fika**. Terimakasih atas pengalaman berharga yang telah diberikan kepada penulis dalam mengejar PIMNAS 2020 kala itu, semoga kita bisa tetap kompak dalam meraih masa depan. Salam Puskesnel dan 1K4L!!!
11. Kawan seperjuangan skripsi **Farah**, terimakasih sudah menjadi partner skripsi bagi penulis dalam topik analisis. Serta terimakasih kepada **Muthmainna MJ**, **Iqbal** dan **Alfian**, yang telah menemani penulis saat bimbingan serta memberikan masukan bagi penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
12. Teman-teman **KKN 104 Jeneponto 1**, terimakasih atas segala pengalaman yang begitu berharga serta segala arahan dan masukan bagi penulis. Semoga kita semua tetap kompak.
13. Teman-teman komunitas **Sobat Living in Telkom**, yang telah memberikan pengalaman yang sangat berharga bagi penulis. Tekhusus untuk **Jane**, **Puteri**, **Lutfi**, **Fauzi**, **Zikri**, **Syafri, dan Nico** terimakasih atas semangat dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. *Let’s Learn, Grow, and Contribute to* Indonesia.

Serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebut satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian tugas akhir ini. Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima untuk menyempurnakan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membacanya. Aamiin.

Makassar, 20 April 2022

Nurfadillah Rahim

## PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nurfadillah Rahim
NIM : H011171002
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**Metode Galerkin untuk Menentukan Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Lemah Suatu Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Orde Dua**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 15 Juni 2022.

Yang menyatakan,

Nurfadillah Rahim

# ABSTRAK

Solusi lemah dari persamaan diferensial linear tak homogen orde dua diteliti pada skripsi ini. Solusi lemah diperoleh dengan memperluas ruang solusi persamaan diferensial tersebut yang berupa solusi pendekatan dari formulasi lemah persamaan diferensial yang diberikan. Metode yang digunakan dalam menentukan keberadaan solusi lemah persamaan diferensial yang diberikan adalah metode Galerkin. Pendekatan metode ini dilakukan dengan membangun subruang pada ruang solusi dengan memilih basis pada subruang yang kemudian membentuk sebuah matriks sparse sebagai dasar untuk menentukan solusi pendekatan dari formulasi lemah persamaan diferensialnya. Keberadaan pendekatan berupa fungsi linear yang kontinu sepotong-sepotong serta ketunggalan solusi lemahnya diperoleh dengan membuktikan sistem linear $\boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{b}$ yang merupakan sistem dengan determinan $A \neq 0$.

**Kata Kunci:** *Persamaan Diferensial, metode Galerkin, keberadaan, ketunggalan, solusi lemah.*

# ABSTRACT

Weak solutions of second-order inhomogeneous linear differential equations are investigated in this thesis. Weak solutions are obtained by expanding the solution space of the differential equation in the form of an approximate solution of the weak formulation of the given differential equation. The method used in determining the existence of a weak solution to the given differential equation is the Galerkin method. This method approach is carried out by constructing a subspace in the solution space by selecting a base on the subspace which then forms a sparse matrix as the basis for determining the approximate solution from the weak formulation of the differential equation. The existence of an approximation in the form of a piecewise continuous linear function and the uniqueness of the weak solution is obtained by proving a linear system $\boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{b}$ which is a system with $A \neq 0$ determinant.

**Keywords:** *Differential equation, Galerkin method, existence, uniqueness, weak solution.*

# DAFTAR ISI

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Berbagai fenomena yang terjadi di alam dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan turunan-turunannya terhadap variabel bebas. Secara umum suatu persamaan diferensial mempunyai sebuah solusi, yang disebut solusi klasik yang memenuhi persamaan diferensial yang diberikan. Namun, tidak semua persamaan diferensial mempunyai solusi dan dapat dengan mudah ditentukan solusi klasiknya. Oleh karena itu, dibentuk suatu persamaan diferensial yang ekuivalen dengan persamaan diferensial awalnya agar solusinya dapat diperoleh (Baccouch, 2021). Solusi yang dihasilkan dari persamaan ini, itulah yang disebut sebagai solusi lemah (*weak solution*).

Solusi lemah diperoleh dengan memperluas ruang solusi dari persamaan diferensial kemudian dilakukan pendekatan solusi dari persamaan diferensial yang ekuivalen yang disebut sebagai formulasi lemah dari persamaan diferensial awalnya (Kinnunen, 2018). Keberadaan dan ketunggalan solusi dari formulasi lemah ini dapat ditentukan dengan menggunakan metode Galerkin.

Metode Galerkin adalah suatu metode yang digunakan untuk mengubah masalah operator kontinu (seperti persamaan diferensial) ke bentuk diskrit. Metode ini digunakan ketika persamaan diferensial terlalu rumit untuk diselesaikan secara analitik yang secara alami mengarah ke Elemen Hingga (Setiawan, Analisis Numerik untuk Mengukur Keratan Permukaan Suatu Pelat Baja Dua Dimensi dengan Metoda Galerkin & Algoritma Householder, 2000).

Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik untuk membuktikan keberadaan dan ketunggalan solusi lemah (*weak solution*) dari suatu persamaan diferensial yang kemudian dituangkan dalam bentuk skripsi berjudul **"Metode Galerkin untuk Menentukan Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Lemah Suatu Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Orde Dua"**, sebagai bahan tugas akhir untuk memenuhi persyaratan dalam meraih gelar sarjana pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

**1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan diatas, maka diperoleh rumusan masalah yang akan dikaji pada penelitian ini yaitu bagaimana menunjukkan atau membuktikan keberadaan dan ketunggalan solusi lemah suatu persamaan diferensial menggunakan metode Galerkin.

**1.3 Batasan Masalah**

Adapun batasan masalah pada penelitian ini yaitu sebuah persamaan diferensial linear tak homogen ber-orde 2 sebagai berikut :

$$-u'' + q(x)u = f(x),$$

dengan syarat awal

$$u(0) = u_0, x \in \Omega = (a,b) \tag{1.1}$$

dan syarat batas

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Dalam hal ini metode yang digunakan untuk menentukan solusi lemah adalah metode Galerkin.

**1.4 Tujuan Penelitian**

Adapun tujuan penelitian dalam skripsi ini adalah menunjukkan keberadaan dan ketunggalan solusi lemah dari suatu persamaan diferensial menggunakan metode Galerkin.

**1.5 Manfaat Penelitian**

Manfaat dari penelitian ini adalah menambah pengetahuan mengenai pendekatan kualitatif dan mengasah kemampuan dalam menunjukkan keberadaan dan ketunggalan solusi lemah dari suatu sistem persamaan diferensial serta menambah pengalaman bagi penulis menyusun karya tulis ilmiah dalam bentuk skripsi.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari lima bagian. Masing-masing bagian dibagi ke dalam subbab dengan rincian sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan yang memberikan gambaran singkat mengenai penelitian ini.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini berisikan pemaparan secara singkat mengenai konsep dasar yang mendukung pembahasan masalah, yaitu teori-teori dasar dalam analisis fungsional, aljabar, persamaan diferensial, serta definisi dan teorema yang digunakan untuk menentukan keberadaan dan ketunggalan suatu solusi lemah dengan metode Galerkin.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini berisikan metode dan tahapan-tahapan yang digunakan dalam menunjukkan keberadaan dan ketunggalan solusi lemah suatu persamaan diferensial parsial menggunakan metode Galerkin.

BAB IV PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan disajikan pembahasan dari tugas akhir ini yaitu menunjukkan keberadaan dan ketunggalan solusi lemah suatu persamaan diferensial menggunakan metode Galerkin.

BAB V PENUTUP

Dalam bab ini berisi tentang kesimpulan hasil penelitian dan saran yang ditunjukan bagi para peneliti agar bisa mengembangkan penelitian ini.

# BAB II
# TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 State of The Art

Metode Galerkin pertama kali muncul pada akhir tahun 1915 oleh Boris G. Galerkin yang memberikan pendekatan solusi secara lebih umum dari persamaan diferensial dari rangkaian keseimbangan elastis balok dan pelat, dengan esensi bahwa pendekatan ditentukan oleh sifat ortogonalitas dari basis fungsi yang bebas linear dan sifat ortogonalitas tersebut dipahami dalam bentuk integral.

Selain itu, para ahli dan ilmuwan telah banyak mengkaji penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan beberapa pendekatan untuk mentransformasikan formulasi fisik dari masalah menjadi analogi diskrit elemen hingga dengan metode Galerkin. Metode Galerkin sebagai salah satu metode elemen hingga juga digunakan oleh Setiawan (2000) yang menentukan solusi persamaan diferensial pada model keratan permukaan suatu pelat baja dua dimensi dengan metode Galerkin tersebut. Pada penelitian tersebut, akurasi keseluruhan perhitungan yang dicapai lebih baik dari yang diperoleh dengan metode perhitungan secara manual.

Dalam buku Baccouch (2021) dibahas beberapa metode Elemen Hingga untuk mendekati solusi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial yang umumnya solusinya sulit ditentukan secara analitik. Dalam buku ini juga dibahas metode Galerkin dalam menentukan solusi lemah dari persamaan diferensial yang diberikan.

Berdasarkan paper dan buku diatas, maka penulis akan melakukan pengkajian ulang dalam menentukan keberadaan solusi lemah persamaan diferensial linear tak homogen orde dua dengan pendekatan metode Galerkin, selain itu akan dibuktikan pula ketunggalan solusi lemah dari persamaan diferensial yang diberikan.

## 2.2 Ruang Vektor

**Definisi 2.1** *Ruang vektor* $X$ $atas$ *lapangan* $F$ *adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian vektor dengan skalar elemen dari* $F$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$; $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in F$ *terhadap kedua operasi tersebut berlaku :*

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ (*tertutup terhadap penjumlahan skalar*).
2. $\alpha\boldsymbol{x} \in V$ (*tertutup terhadap perkalian skalar*).
3. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}.$
4. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$.
5. *Terdapat vektor* $\mathbf{0} \in X$, *sedemikian sehingga* $\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$.
6. *Terdapat* $-\boldsymbol{x} \in X$, *sedemikian sehingga* $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$
7. $\alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.
8. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$.
9. $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$
10. *Untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in X, 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

(Kreyszig, 1989).

**Contoh 2.1** Misal diberikan ruang vektor $V$ *atas lapangan* $\mathbb{R}^2$ yang dilengkapi dengan dua operasi berikut

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \text{ dan } \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1),$$

dengan $k \in \mathbb{R}$.

Akan dibuktikan bahwa $V$ merupakan ruang vektor.

**Bukti**

Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dengan

$$\boldsymbol{u} = (x_1, y_1), \qquad \boldsymbol{v} = (x_2, y_2), \qquad \boldsymbol{w} = (x_3, y_3).$$

1. Akan ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ (*tertutup terhadap penjumlahan skalar*)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, \ \ y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Karena $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (x_1 + x_2, \ \ y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\alpha\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ (*tertutup terhadap perkalian skalar*)

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{u} &= \alpha(x_1, y_1) \\ &= (\alpha x_1, \alpha y_1). \end{aligned}$$

Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, sehingga diperoleh

$$\alpha\boldsymbol{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Jadi, terbukti bahwa $\alpha\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ (*tertutup terhadap perkalian skalar*).

3. Akan ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \\ &= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

4. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= (x_1, y_1) + \big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) \\ &= (x_1, y_1) + \big((x_2 + x_3), (y_2 + y_3)\big) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= \big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) + (x_3, y_3) \\ &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{v}$.

5. Anggap bahwa $\binom{0}{0}$ merupakan identitas di $V$, maka

$$\binom{x_1}{y_1} + \binom{0}{0} = \binom{x_1}{y_1} = \binom{0}{0} + \binom{x_1}{y_1}.$$

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$$

Jadi, $\binom{0}{0}$ merupakan identitas di $V$.

6. Akan ditunjukkan terdapat $(-\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$, sedemikian sehingga

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}.$$

Dengan memilih $\alpha = -1$ pada sifat pertama diperoleh

$$(-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Dengan menggunakan sifat penjumlahan pada bilangan real diperoleh

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) &= (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) \\
&= (x_1 + (-x_1),\ y_1 + (-y_1)) \\
&= (0, 0) \\
&= \boldsymbol{0}. \\
(-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} &= (-x_1, -y_1) + (x_1, y_1) \\
&= ((-x_1) + x_1, (-y_1) + y_1) \\
&= (0, 0) \\
&= \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Jadi, terdapat $(-\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^n$ untuk setiap $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, sedemikian diperoleh

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}.$$

7. Akan ditunjukkan bahwa $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$.

$$\begin{aligned}
\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= \alpha\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) \\
&= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (\alpha(x_1 + x_1) + \alpha(y_1 + y_2) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) \\
&= \big((\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)\big) \\
&= \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) \\
&= \alpha\boldsymbol{u} + \alpha v.
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$.

8. Akan ditunjukkan bahwa $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} &= (\alpha + \beta)(x_1, y_1) \\
&= \big((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)y_1\big) \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)
\end{aligned}$$

$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1)$

$= \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1)$

$= \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}.$

Jadi, terbukti bahwa $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}.$

9. Akan ditunjukkan bahwa $\alpha(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$.

$$
\begin{aligned}
\alpha(\beta\boldsymbol{x}) &= \alpha\big(\beta(x_1, y_1)\big) \\
&= \alpha(\beta x_1, \beta y_1) \\
&= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta y_1) \\
&= (\alpha\beta)(x_1, y_1) \\
&= (\alpha\beta)\boldsymbol{u}.
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $\alpha(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$.

10. Akan ditunjukkan $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Dengan menggunakan sifat perkalian skalar dengan $\alpha = 1$ diperoleh

Misalkan $\alpha = 1$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
1\boldsymbol{u} &= (1x_1, 1y_1) \\
&= (x_1, y_1) \\
&= \boldsymbol{u}.
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Karena semua sifat ruang vektor terpenuhi, maka terbukti bahwa $V$ adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}^2$.

**Definisi 2.2 (Subruang)** *Misalkan $X$ adalah ruang vektor atas lapangan $F$, himpunan tak kosong $Y \subset X$ dikatakan subruang dari $X$ jika $Y$ merupakan ruang vektor atas lapangan $F$ dan untuk setiap skalar $\alpha, \beta \in F$ dan $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in Y$ berlaku*

$$\alpha\boldsymbol{y_1} + \beta\boldsymbol{y_2} \in Y.$$

*Jadi,* $Y$ *adalah ruang vektor dimana dua operasi aljabarnya diinduksi dari ruang vektor* $X$*. Jelas bahwa untuk sebarang ruang vektor* $X$, $Y = \{0\}$ *keduanya juga merupakan subruang dari* $X$ (Kreyszig, 1989).

**Contoh 2.2**

Misalkan $V$ adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}^2$, himpunan tak kosong $H \subset V$, dengan $H = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ adalah subruang dari $V$.

Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *dan* $\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2} \in H$, maka

$$\boldsymbol{h_1} = (x_1, 2x_1) \in H \text{ dan } \boldsymbol{h_2} = (x_2, 2x_2) \in H.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
\alpha\boldsymbol{h_1} + \beta\boldsymbol{h_2} &= \alpha(x_1, 2x_1) + \beta(x_2, 2x_2) \\
&= (\alpha x_1, 2\alpha x_1) + (\beta x_2, 2\beta x_2) \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_2, 2\alpha x_1 + 2\beta x_2) \\
&= \big(\alpha x_1 + \beta x_2, 2(\alpha x_1 + \beta x_2)\big) \in H.
\end{aligned}$$

Jadi, $H$ merupakan subruang dari $V$.

**Definisi 2.3 (Kombinasi Linear)**

*Misalkan* $V$ *adalah ruang vektor, suatu vektor* $\boldsymbol{w}$ *dikatakan kombinasi linear dari vektor-vektor* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$ *dengan koefisien skalar* $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \dots, \boldsymbol{k_n}$ *didefinisikan dengan*

$$w = \sum_{r=1}^{n} k_r\, v_r.$$

(Berberian, 1961).

**Contoh 2.3** Diberikan $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{5}) \in \mathbb{R}^2$. Akan ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{w}$ merupakan kombinasi linear dari $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1})$ dan $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2})$.

**Bukti.**

Terlebih dahulu akan diperiksa apakah terdapat skalar-skalar $k_1$ dan $k_2$ yang memenuhi $w = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$, yaitu

$$(3,5) = k_1(1,1) + k_2(1,2) = (k_1 + k_2, k_1 + 2k_2).$$

Berdasarkan kesamaan dua vektor, maka diperoleh sistem persamaan linear berikut

$$k_1 + k_2 = 3$$

$$k_1 + 2k_2 = 5,$$

sehingga solusi dari sistem persamaan linear tersebut adalah $k_1 = 1$ dan $k_2 = 2$.

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{u} + 5\boldsymbol{v}$ merupakan kombinasi linear dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$**.**

**Definisi 2.4 (Bebas Linear)**

*Misalkan $V$ adalah ruang vektor dan $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$ dikatakan bebas linear jika*

$$\alpha_1\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v_n} = 0$$

*yang mengakibatkan bahwa semua skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ harus sama dengan 0.*

(Leon, 2015).

**Contoh 2.4** Misalkan vektor-vektor $\boldsymbol{u} = (1,2,3)$, $\boldsymbol{v} = (-2,3\ 5)$, dan $\boldsymbol{w} = (2,-1,1)$ pada $\mathbb{R}^3$. Akan ditunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut saling bebas linear.

Vektor-vektor tersebut saling bebas linear, karena jika

$$k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v} + k_3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

maka dapat dituliskan

$$\begin{aligned} k_1 - 2k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 3k_2 - k_3 &= 0. \\ 3k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dari persamaan linear 3 variabel tersebut, maka diperoleh hasil

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \text{ dan } k_3 = 0.$$

Karena $\boldsymbol{k_1} = 0, \boldsymbol{k_2} = 0, \boldsymbol{k_3} = 0$. Sehingga vektor-vektor tersebut bebas linear.

**Definisi 2.5 (Bergantung Linear)**

*Misalkan* $V$ *adalah ruang vektor, dengan* $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$ *dikatakan bergantung linear jika terdapat skalar* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *yang tidak semua nol, sedemikan sehingga*

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}.$$

(Leon, 2015).

**Contoh 2.5**

Misalkan $V = \mathbb{R}^3$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

Diberikan $E = \{(0,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\}$ di $V$. Maka $V$ bergantung linear, karena terdapat skalar yang tidak sama dengan nol, sedemikian sehingga

$$1(0,1,0) + 1(0,0,1) + (-1)(0,1,1) = (0,0,0).$$

**Definisi 2.6 (Merentang)**

*Misalkan* $S = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ *adalah himpunan tak kosong dari ruang vektor* $V$ *atas lapangan* $F$ *dan jika setiap vektor dalam* $V$ *dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari* $S = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$*, maka* $S$ *merentang* $V$.

(Anton & Rorres, 2019).

**Contoh 2.6**

Misalkan $S = \{(1,1,2), (1,0,1), (-3,5,4)\} \subseteq V$ dengan $V$ ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}^3$. Periksa apakah himpunan $S$ merentang ruang vektor $\mathbb{R}^3$

**Bukti.**

Ambil sebarang $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, untuk suatu skalar $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

Terlebih dahulu diperiksa apakah dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor yang ada di himpunan $S$.

Perhatikan bahwa

$$\boldsymbol{u} = k_1(1,1,2) + k_2(1,0,1) + k_3(-3,5,4)$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (k_1 k_1, 2k_1) + (k_2, 0, k_2) + (-3k_3, 5k_3, 4k_3)$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (k_1 + k_2 - 3k_3, k_1 + 5k_3, 2k_1 + k_2 + 4k_3).$$

Diperoleh sebuah sistem persamaan linear

$$
\begin{aligned}
k_1 + k_2 - 3k_3 &= u_1 \\
k_1 + 5k_3 &= u_2 \\
2k_1 + 1k_2 + 4k_3 &= u_3.
\end{aligned}
$$

Jika persaamaan ini konsisten untuk semua nilai $a, b,$ dan $c$, maka setiap vektor yang ada di $\mathbb{R}^3$ dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor yang ada di himpunan $S$. Dalam hal ini, akan dicari determinan dari matriks koefisiennya sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Karena determinan $A \neq 0$, maka vektor di $\mathbb{R}^3$ merupakan kombinasi linear dari $S$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa himpunan $S$ merentang $\mathbb{R}^3$.

**Definisi 2.7 (Basis)**

*Misalkan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah himpunan vektor yang berdimensi hingga pada ruang vektor $V$,* himpunan *$S$ dikatakan basis untuk $V$ jika memenuhi kondisi berikut.*

*(a) $S$ merentang $V$.*

*(b) $S$ bebas linear.*

(Anton & Rorres, 2019).

**Contoh 2.6**

Diberikan $\boldsymbol{v_1} = (1{,}0{,}0)$, $\boldsymbol{v_2} = (0{,}1{,}0)$, $\boldsymbol{v_3} = (0{,}0{,}1)$, maka vektor tersebut merupakan basis untuk $\mathbb{R}^3$.

Sebab vektor-vektor $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ adalah himpunan yang bebas linear. Untuk setiap $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ pada $\mathbb{R}^3$ dapat ditulis

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{k_1 v_1} + \boldsymbol{k_2 v_2} + \boldsymbol{k_3 v_3},$$

maka $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ merentang $\mathbb{R}^3$ karena dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$, sehingga $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ merupakan basis.

Dapat dituliskan $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ disebut basis baku (standar) untuk $\mathbb{R}^3$.

Salah satu basis yang lain untuk $\mathbb{R}^3$ adalah $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Hal ini dikarenakan $C$ merentang $\mathbb{R}^3$ karena dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari himpunan vektor $C$. Dalam hal ini $C$ juga bebas liniar.

Bukti.

Ambil untuk sebarang $a, b, c \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-c \\ b-c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b-a \\ b-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+a-b \\ c+a-b \\ c+a-b \end{bmatrix}$$

$$= (b-c)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (b-a)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c+a-b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Terbukti bahwa himpunan $C$ membangun $\mathbb{R}^3$ yang berarti bahwa himpunan $C$ merupakan kombinasi linear vektor-vektor di $\mathbb{R}^3$.

Selanjutnya, untuk sebarang bilangan real $x, y, z \in \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

diperoleh

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan SPL homogen tersebut, maka diperoleh $x = y = z = 0$. Jadi terbukti bahwa himpunan $C$ merupakan himpunan bebas linear.

### 2.3 Ruang Bernorma

Ruang bernorma merupakan bentuk umum dari konsep panjang suatu vektor pada sistem bilangan real. Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai definisi dan contoh ruang bernorma.

**Definisi 2.7** *Misalkan V adalah ruang vektor (Real dan Kompleks). Norm pada V didefinisikan sebagai suatu fungsi bernilai real* $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ *untuk setiap* $\boldsymbol{v} \in V$ *memenuhi aksioma berikut*

(1) $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$, *untuk setiap* $\boldsymbol{v} \in V$.

(2) $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

(3) $\|\alpha\boldsymbol{v}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{v}\|$, *untuk setiap* $\boldsymbol{v} \in V$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$, *untuk setiap* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$.

*Pasangan* $(V, \|\cdot\|)$ *disebut ruang bernorma* (Kreyszig, 1989).

**Contoh 2.7** Diberikan ruang $L^2(\mathbb{R})$, akan ditunjukkan $L^2(\mathbb{R})$ merupakan ruang bernorma dengan norma yang definisikan sebagai berikut

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Bukti.**

Akan ditunjukkan bahwa norm dalam $L^2(\mathbb{R})$ memenuhi sifat ruang bernorma.

(1) Akan ditunjukkan bahwa $\|f\| \geq 0$.

Berdasarkan sifat nilai mutlak maka diketahui $|f| \geq 0$,

dan

$$|f|^2 \geq 0.$$

Selanjutnya karena fungsinya bernilai non-negatif, maka hasil integralnya bernilai non-negatif

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dx \geq 0$$

diperoleh

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\| \ \geq 0.$$

(2) Akan ditunjukkan $\|f\| = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$.

Jika $\|f\| = 0$, akan ditunjukkan $f = 0$.

Karena $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$, maka $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \ dx = 0$.

Diperoleh $|f|^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Jika $f = 0$ akan ditunjukkan $\|f\| = 0$.

Karena $f = 0$, diperoleh

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |0|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Jadi, $\|f\| = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$.

(3) Akan ditunjukkan $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$.

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} |\alpha f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\alpha|^2 |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|\alpha|^2 \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\alpha| \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\alpha|\|f\|.
\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$.

(4) Akan ditunjukkan $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Untuk menunjukkan pertidaksamaan tersebut maka digunakan ketaksamaan Minkowski berikut.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f+g|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pilih $p = 2$, dituliskan sebagai berikut

$$\|f+g\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f+g|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Jadi, diperoleh $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Karena ruang Lebesgue $L^2$ memenuhi sifat ruang bernorma, sehingga terbukti bahwa $(L^2, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

## 2.4 Ruang Hasil Kali Dalam

**Definisi 2.8** *Misalkan $X$ adalah ruang vektor dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$, maka sebuah hasil kali dalam pada ruang vektor riil $X$ adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ dengan masing-masing pasangan vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ pada $X$, sedemikian sehingga aksioma berikut terpenuhi.*

(1) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$

(2) $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$

(3) $\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, *untuk setiap* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, *untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in X$ dan

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(Kreyszig, 1989).

**Contoh 2.8**

Misalkan $W \subseteq R^3$ yang dilengkapi dengan operasi hasil kali $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3$ dimana $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$. Tunjukkan $W$ adalah ruang hasil kali dalam.

(1) Simetris

Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ maka

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3 = 2v_1u_1 + v_2u_2 + 3v_3u_3 = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$$

(2) Aditivitas

Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$ maka

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle &= 2(u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + 3(u_3+v_3)w_3 \\ &= 2(u_1w_1+v_1w_1) + (u_2w_2+v_2w_2) \\ &\quad + 3(u_3w_3+v_3w_3) \\ &= 2u_1w_1 + 2v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + 3u_3w_3 + 3v_3w_3 \\ &= (2u_1w_1 + u_2w_2 + 3u_3w_3) \\ &\quad + (2v_1w_1 + v_2w_2 + 3v_3w_3) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle\end{aligned}$$

(3) Homogenitas

Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ dan $\alpha \in R$ maka

$$\begin{aligned}\langle \alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle &= 2\alpha u_1v_1 + \alpha u_2v_2 + 3\alpha u_3v_3 = \alpha(2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3) \\ &= \alpha\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\end{aligned}$$

(4) Positifitas

Ambil $\boldsymbol{u} \in W$ maka

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = 2u_1u_1 + u_2u_2 + 3u_3u_3 = 2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2$$

Karena $u_1^2, u_2^2, u_3^2 \geq 0$ maka jelas $2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2 \geq 0$,

dan $2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2 = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

**Definisi 2.9** *Dua vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ dalam ruang hasil kali dalam disebut ortogonal jika $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$, dan dinotasikan dengan $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.*

**Contoh 2.9** Dua buah vektor $\boldsymbol{u} = (3,4)$ dan $\boldsymbol{v} = (4,-3)$ ortogonal.

Karena $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$ maka berdasarkan definisi hasil kali dalam pada ruang $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ diperoleh :

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 = 3(4) + 4(-3) = 0.$$

Jadi, $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ orthogonal atau dapat dituliskan $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

**Definisi 2.10 (**Ortonormal) *Misalkan $V$ merupakan ruang hasil kali dalam dengan $W = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \in V$. Himpunan $W$ disebut himpunan ortonormal jika $W$ himpunan orthogonal dan panjang setiap anggota $W$ adalah satu. Dapat ditulis sebagai berikut:*

*(a) $\langle \boldsymbol{u_i}, \boldsymbol{u_j}\rangle = 0$, untuk $i, j = 1,2, \dots, n$ dan $i \neq j$,*

*(b) $\|\boldsymbol{u_i}\| = 1$, untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$.*

(Resmawan, 2019).

**Contoh 2.10** Himpunan vektor $V = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ pada $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ ortonormal.

Akan ditunjukkan bahwa vektor $\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ dan $\boldsymbol{y} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ memiliki norm 1.

Berdasarkan definisi norm pada ruang $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ diperoleh :

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle} = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1.$$

Karena semua vektor dari $V$ bernorma 1 maka himpunan $V$ ortonormal.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ atau $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \mathbf{0}.$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

**Definisi 2.11** *Suatu ruang Hilbert adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap (setiap barisan Cauchy-nya konvergen).*

**Contoh 2.11**

Misalkan

$$L^2(a, b) = \left\{ f \mid f: (a, b) \to \mathbb{C}: \int_a^b |f^2| \, dx \right\}.$$

Menurut (Herry, 2011: 4), $L^2(a, b)$ merupakan ruang hasil kali dalam yang lengkap.

Jadi, $L^2(a, b)$ merupakan ruang Hilbert.

## 2.5 Matriks

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan riil atau bilangan kompleks yang membentuk segi empat siku-siku yang disusun menurut baris dan kolom (Anton, 2004).

Selanjutnya bilangan-bilangan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Entri dari sebuah matriks $A$ yang berada pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ dinotasikan $a_{ij}$.

Secara umum bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Susunan persamaan tersebut disebut matriks $m$ kali $n$ (ditulis $m \times n$) karena memiliki $m$ barisan dan $n$ kolom. Sebagai aturan, kurung siku [ ], kurung biasa ( ) atau bentuk $||\ \ ||$ digunakan untuk mengurungi susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan tersebut.

Simbol matriks dapat ditulis sebagai $[aij]_{m\times n}$ atau $[aij]$.

Jenis-jenis matriks :

**a. Matriks Segitiga**

Matriks Segitiga adalah matriks persegi yang memiliki elemen bernilai nol dengan pola segitiga di salah satu bagian kiri atau kanan, dengan diagonalnya tidak termasuk pola tersebut.

**Contoh 2.11**

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \text{ atau } M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

**b. Matriks Diagonal**

Matriks diagonal adalah matriks yang semua elemennya bernilai nol, kecuali elemen pada diagonal matriks.

**Contoh 2.12**

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

**c. Matriks Identitas**

Matriks identitas adalah matris diagonal yang memiliki elemen diagonalnya bernilai 1.

**Contoh 2.13**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**d. Matriks Tridiagonal**

Matriks tridiagonal adalah matriks bujursangkar yang seluruh elemen bukan 0 nol berada di sekitar elemen diagonal, sementara elemen lainnya bernilai 0 nol.

**Contoh 2.14**

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & 0 \\ 0 & a_{32} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

$T$ adalah sebuah matriks tridiagonal berukuran $a_{(n \times n)}$.

**e. Matriks Eselon**

Matriks eselon adalah matriks yang memenuhi sifat berikut.

1. Setiap baris yang hanya terdiri dari bilangan nol terletak sesudah baris yang memuat elemen tak nol.
2. Pada setiap baris matriks yang mempunyai elemen tak nol, elemen tak nol dari baris sebelumnya (Riyan,2021).

**Contoh 2.15**

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**f. Determinan Matriks**

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinan $A = \det(A) = |A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$

$$-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

(Anton dan Rorres, 2010).

**Contoh 2.16**

Diberikan matriks eselon sebagai berikut

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks $M = |M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1(5)(4) = 20.$

**Teorema 2.1**

Jika $A$ adalah matriks yang berukuran $n \times n$, dan jika $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dikalikan dengan $A$, maka persamaan berikut ekuivalen.

(a) $A$ memiliki invers.
(b) $Ax = 0$ hanya memiliki solusi trivial.
(c) Bentuk eselon baris yang direduksi oleh $A$ adalah $I_n$.
(d) $A$ dapat dinyatakan sebagai hasil dari matriks elementer.
(e) $Ax = b$ konsisten untuk setiap $n \times 1$ matriks $\boldsymbol{b}$.
(f) $Ax = b$ memiliki tepat satu solusi untuk setiap $n \times 1$ matriks $\boldsymbol{b}$.
(g) $\det(A) \neq 0$.
(h) Range dari $T_A$ adalah $\mathbb{R}^n$.
(i) $T_A$ satu-satu.
(j) Vektor kolom dari $A$ bebas linear.
(k) Vektor baris dari $A$ bebas linear.
(l) Vektor kolom dari $A$ merentang $\mathbb{R}^n$ (Anton dan Rorres, 2010).

## 2.6 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variable tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984).

Persamaan diferensial dinotasikan dengan notasi Leibniz $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ atau notasi prima $y', y'', y''', \dots, y^n$ atau biasa juga dinotasikan dengan $D_x y, D_x^2 y, D_x^3 y, \dots, D_x^n y$. Selain itu, persamaan diferensial memiliki orde/order dan derajat. Orde suatu persamaan diferensial adalah orde tertinggi dari semua turunan yang terdapat pada persamaan diferensial tersebut. Sedangkan derajat persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari orde tertinggi semua turunan pada persamaan diferensial yang diberikan (Ross, 1984).

**Contoh 2.17** Berikut ini contoh persamaan diferensial.

1) $\frac{dy}{dx} + 2xy = \sin x$, merupakan persamaan diferensial berorde 1 dan berderajat 1.
2) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, merupakan persamaan diferensial berorde 2 dan berderajat 1.

Adapun bentuk persamaan diferensial orde 2 sebagai berikut.

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x),$$

dengan memisalkan $f(x) = 0$, dengan $a, b,$ dan $c$ konstan, maka persamaan diatas menjadi

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

Persamaan tersebut adalah bentuk umum Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde 2, dimana ruas kanannya sama dengan 0.

Apabila ruas kanan tidak sama dengan 0, persamaan itu dikatakan Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Orde 2 (Nuryadi, 2018).

## 2.7 Solusi Lemah

Solusi lemah pada suatu persamaan diferensial adalah fungsi yang tidak semua turunannya ada, tetapi tetap dianggap memenuhi persamaan dengan beberapa pendefinisian yang tepat. Sederhananya, konsep dari solusi lemah muncul akibat dalam beberapa kasus persamaan diferensial tidak dapat ditemukan solusi klasiknya. Solusi klasik yang dimaksud adalah solusi yang *smooth* dimana solusinya punya turunan dan memenuhi persamaan tersebut. Dari keterbatasan tersebut, maka untuk mengatasi persamaan diferensial yang tidak dapat ditemukan solusi kuatnya, maka penentuan solusi dilakukan dengan memperluas ruang solusi. Maksudnya, solusi yang dicari tidak hanya dibatasi sebagai suatu solusi yang *smooth*, tapi juga solusi *nonsmooth* dari persamaan, sehingga memungkinkan menemukan solusi lain selain solusi klasiknya. Solusi lemah memiliki pengertian yang berbeda-beda jika ditinjau dari kelas-kelas persamaannya (Kinnunen, 2018).

Solusi lemah diperoleh dari persamaan diferensial yang kemudian dilakukan perluasan ruang solusi dengan membentuk sebuah persamaan baru yang ekuivalen dengan persamaan awalnya, persamaan baru tersebut dinamakan formulasi lemah. Kemudian solusi dari formulasi lemah inilah yang dikatakan sebagai solusi lemah.

**Contoh 2.18**

Diberikan sebuah persamaan diferensial

$$-u'' + q(x)u = f(x), \tag{2.1}$$

dengan syarat awal

$$u(0) = u_0, x \in \Omega = (a, b)$$

dan syarat batas

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Selanjutnya, akan dibentuk persamaan baru yang ekuivalen dengan Persamaan (2.1) tersebut yang dinamakan formulasi lemah.

Misalkan diambil $v$ sebagai basis fungsi yang dikalikan dengan Persamaan (2.1) berikut

$$-u''v + quv = fv.$$

Kemudian diintegral kedua ruas menggunakan dengan integral parsial pada suku pertama dengan memasukkan batas-batasnya,

$$\int_a^b (-u''v + quv)dx = \int_a^b fv\,dx$$

$$-vu' \Big|_a^b + \int_a^b u'v'dx + \int_a^b quv\,dx = \int_a^b fv\,dx$$

dengan memasukkan batas $[a, b]$ pada suku pertama maka diperoleh

$$0 + \int_a^b u'v'dx + \int_a^b quv\,dx = \int_a^b fv\,dx\,,$$

diperoleh formulasi lemahnya sebagai berikut

$$\int_a^b u'v'dx + \int_a^b quv\,dx = \int_a^b fv\,dx,$$

dengan $v(a) = v(b) = 0$.

Jadi, solusi $u$ dalam formulasi lemah tersebut merupakan solusi lemah dari Persamaan (2.1).

## 2.8 Metode Galerkin

Metode Galerkin adalah metode yang digunakan untuk mengubah masalah operator kontinu (seperti persamaan diferensial) ke masalah diskrit. Dalam prinsipnya, metode ini mirip penerapannya dengan metode variasi ke ruang fungsi dengan persamaannya ke formulasi lemah, secara khusus menerapkan beberapa batasan pada ruang fungsi untuk menggolongkan ruang pada suatu himpunan terbatas dari basis fungsi (Dahlan, et al., 2014).

Konsep awal dari metode Galerkin adalah membentuk sistem persamaan linear, maka akan dibangun bentuk matriksnya, sehingga dapat digunakan untuk menghitung solusinya.

Adapun langkah-langkah metode Galerkin sebagai berikut.

1) Mengalikan formulasi lemah dari persamaan diferensial yang berbentuk integral dengan basis fungsi $\phi(x)$ atas domain yang diberikan.
2) Ditentukan sebuah basis fungsi $\{\phi_j\}_{j=1}^{N-1}$ yang bebas linear dan berdimensi hingga.

3) Membentuk matriks tridiagonal yang akan digunakan untuk membentuk hasil akhir berupa sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{b}$.