

4.7. Analisis Bifurkasi	52
4.8. Simulasi Model	56
BAB V PENUTUP.....	63
5.1. Kesimpulan.....	63
5.2. Saran	64
DAFTAR PUSTAKA.....	65
LAMPIRAN	68

DAFTAR TABEL

Tabel		Halaman
Tabel 2.1	Kestabilan sistem linear $\dot{x} = f(x)$	25
Tabel 4.1	Variabel pada model pengangguran	39
Tabel 4.2	Parameter pada model pengangguran	39
Tabel 4.3	Nilai parameter pada model pengangguran	41
Tabel 4.4	Simulasi kurva bifurkasi untuk parameter α terhadap u^*	55
Tabel 4.5	Pengaruh kebijakan pemerintah menyediakan lowongan kerja/prakerja terhadap R_0	57

DAFTAR GAMBAR

Gambar		Halaman
Gambar 2.1	Kurva Bifurkasi <i>Saddle-Node</i>	29
Gambar 2.2	Kurva Bifurkasi <i>Transcritical</i>	29
Gambar 2.3	Kurva Bifurkasi <i>Pitchfork</i>	30
Gambar 2.4	Kurva Bifurkasi <i>Hopf</i>	31
Gambar 2.5	Kurva Bifurkasi Maju	32
Gambar 2.6	Kurva Bifurkasi Mundur	33
Gambar 4.1	Diagram kompartemen model matematika pengangguran	38
Gambar 4.2	Kurva bifurkasi yang menunjukkan daerah kestabilan titik ekuilibrium	54
Gambar 4.3	Grafik perubahan R_0 terhadap parameter α	56
Gambar 4.4	Grafik perubahan populasi individu terhadap parameter φ	59
Gambar 4.5	Grafik perubahan populasi individu terhadap parameter φ	60
Gambar 4.6	Grafik perubahan populasi individu terhadap parameter φ	61
Gambar 4.7	Grafik perubahan populasi individu terhadap parameter φ	62

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Definisi
π	Laju pertambahan individu yang telah menyelesaikan pendidikan tertinggi dan sedang mencari pekerjaan
θ	Rata-rata laju individu yang langsung mendapatkan pekerjaan
ρ	Rata-rata laju individu yang dirumahkan untuk sementara waktu
β	Rata-rata laju individu yang menganggur karena di PHK.
α	Rata-rata laju individu yang belum mendapat pekerjaan atau yang masih mencari pekerjaan dalam kurung waktu satu bulan
δ	Rata-rata laju individu yang mendapatkan pengurangan jam kerja
ε	Rata-rata laju individu yang telah mendapatkan pekerjaan setelah menganggur
γ	Rata-rata laju individu yang mendapatkan pengurangan jam kerja tetapi mereka memilih <i>resign</i> dan mencari pekerjaan lain.
k	Rata-rata laju individu yang pensiun
μ	Rata-rata laju individu yang mengalami kematian
φ	Rata-rata laju kebijakan pemerintah menyediakan lowongan kerja /Prakerja

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Deskripsi	Halaman
Lampiran 1	Titik Ek. Bebas pengangguran dan Titik Ek. Adanya pengangguran	68
Lampiran 2	Analisis Sensitivitas	72
Lampiran 3	Penentuan persamaan bifurkasi	74
Lampiran 4	Sintax simulasi bifurkasi dengan nilai parameter α	75
Lampiran 5	Sintax simulasi untuk Grafik	80

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan secara terus – menerus dari masa kemasa. Semakin berkembangnya ilmu pengetahuan maka akan mempermudah dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Dalam perkembangan dan kemajuannya, matematika dapat memberikan sumbangan yang besar dalam memecahkan masalah – masalah pada bidang teknik, perekonomian, sains, kesehatan dan permasalahan – permasalahan lainnya yang terjadi di muka bumi ini, khususnya masalah sosial. Perkembangan ilmu pengetahuan matematika memberikan peranan penting dalam menganalisa masalah sosial ke dalam bentuk model matematika (Rasyidah, 2021).

Pemodelan matematika merupakan salah satu alat untuk mempresentasikan masalah dalam dunia nyata ke bentuk persamaan matematika. Proses pemodelan matematika dapat diperoleh dengan menyatakan permasalahan nyata ke dalam pengertian matematika yang meliputi identifikasi variabel-variabel dalam masalah tersebut, membuat asumsi-asumsi sehingga mencerminkan proses berfikir, memformulasikan persamaan atau pertidaksamaan, menyelidiki sifat dari solusi, dan melakukan interpretasi hasil (Ansar, 2018).

Menurut Side, dkk (2015) pemodelan matematika merupakan salah satu tahap dari pemecahan masalah matematika yang merupakan pengembangan dari aljabar, analisis dan persamaan diferensial karena pemodelan matematika berisikan penerapan aplikasi dari bidang tersebut. Salah satu model matematika dalam permasalahan sosial yaitu pengangguran yang disebabkan oleh pandemi Covid-19.

Covid-19 merupakan sejenis virus dari *Coronaviridae* yang berimplikasi terhadap penyakit menular dan mematikan yang menyerang mamalia seperti manusia pada saluran pernafasan hingga ke paru-paru. Pada umumnya pengidap Covid-19 akan mengalami gejala awal berupa demam, sakit tenggorokan, pilek dan juga batuk-batuk bahkan sampai parah dapat menyebabkan pneumonia. Virus ini dapat menular melalui kontak langsung dalam jarak dekat dengan pengidap Covid-19 melalui cairan pernafasan yang keluar dari tubuh penderita saat batuk atau mengeluarkan ludah (Yuliana, 2020)

WHO (2020) menyatakan bahwa covid-19 menular melalui orang yang terinfeksi virus corona. Virus tersebut menyebar melalui droplet yang keluar saat batuk atau bersin. Selanjutnya, droplet yang mengandung virus corona dapat mendarat dipermukaan benda yang mungkin di sentuh oleh orang yang sehat. Jika ditangan orang yang sehat terdapat virus corona dan kemudian menyentuh hidung, mulut atau mata, maka orang tersebut akan terpapar virus corona. Virus corona itu sifatnya zoonotik yaitu penyakit pada hewan yang bisa menyebar ke manusia, namun pada SARS COV-2 bisa menular dari satu orang ke orang yang lainnya. Diketahui asal mula virus ini berasal dari Wuhan, Tiongkok. Diketahui pada akhir desember 2019 sampai saat ini sudah dipastikan 65 lebih negara yang terjangkit virus ini termasuk di Indonesia.

Dalam kondisi mewabahnya pandemi Covid-19 ini ternyata banyak sekali dampak yang ditimbulkan utamanya di sektor perekonomian Indonesia. Contohnya pengangguran, dengan semakin meluasnya virus Covid-19 di Indonesia sampai saat ini tidak menutup kemungkinan tingkat pengangguran di Indonesia akan semakin meningkat bahkan sangat berpotensi besar terjadi, dilihat dari banyaknya para pekerja yang di PHK, mendapatkan pengurangan jam kerja dan dihimbau untuk dirumah saja atau *social distancing*. Sehingga hal ini sangat membatasi masyarakat untuk bekerja (Fahri, dkk 2020).

Kegiatan membatasi masyarakat untuk bekerja ini dapat memicu bertambahnya angka pengangguran. Pengangguran adalah orang yang belum melakukan sesuatu kegiatan yang menghasilkan uang. Pengangguran tidak terbatas hanya pada orang yang belum bekerja tetapi orang yang sedang mencari pekerjaan dan orang yang sedang bekerja namun pekerjaannya tidak produktif pun dapat dikategorikan sebagai pengangguran. Termasuklah orang – orang *stay at home*, semuanya untuk memutus penyebaran Covid-19 ini (Fahri, dkk 2020).

Menurut Proyeksi Core Indonesia penambahan jumlah pengangguran terbuka yang signifikan bukan hanya disebabkan laju pertumbuhan ekonomi, melainkan disebabkan oleh perubahan perilaku masyarakat terkait pandemi Covid-19 dan kebijakan pembatasan sosial, baik dalam skala kecil maupun skala besar. Negara-negara di dunia banyak menghentikan kegiatan produksinya, orang-orang dilarang bepergian sehingga ikut menganjlokkan sektor pariwisata, pendapatan individu, bahkan perusahaan pun menurun. Karena tidak hanya masyarakat secara pribadi

yang merasakan imbasnya tetapi seluruh sendi kehidupan terutama karyawan perusahaan banyak dirumahkan (Fahri, dkk 2020).

Berdasarkan data yang dikeluarkan oleh Badan Pusat Statistika (2021) Provinsi Sulawesi Selatan mengenai kondisi tenaga kerja, penduduk usia kerja yang terdampak Covid-19 sebesar 7,62 % terdiri dari pengangguran karena Covid-19, bukan angkatan kerja karena Covid-19, sementara tidak bekerja karena Covid-19, dan penduduk yang mengalami pengurangan jam kerja karena Covid-19 (BPS, 2021).

Beberapa penelitian mengenai pengangguran, seperti penelitian yang dilakukan oleh Al-Maalwi, dkk (2018) tentang model pengangguran membagi kasus menjadi 3 kelas, yaitu kelas *Unemployed* (U), *Employed* (E), dan *Vacancies* (V) yang menyatakan kasus pengangguran yang terjadi di negara-negara miskin, karena negara-negara miskin memiliki ketersediaan pekerjaan yang terbatas dan kekurangan sumber daya keuangan. Cara efektif yang dilakukan oleh pemerintah untuk mengatasi pengangguran yaitu dengan menciptakan dan memberikan peluang kerja yang lebih besar.

Adapun penelitian yang dilakukan oleh Fahri, dkk (2019) tentang meningkatnya angka pengangguran di tengah Pandemi Covid-19. Penelitian ini menjelaskan bahwa hadirnya pandemi Covid-19 menyebabkan angka pengangguran meningkat, hal utama yang menyebabkan pengangguran meningkat di masa pandemi Covid-19 ialah PHK karena banyaknya perusahaan yang menghentikan operasionalnya, *social distancing*, dan PSBB sehingga membuat perekonomian Indonesia semakin terpuruk, karena seperti yang kita ketahui bahwa masalah ekonomi yang sulit terselesaikan ialah pengangguran.

Selanjutnya penelitian tersebut dikembangkan dengan membuat model matematika dan menambahkan tiga kompartemen yaitu individu yang termasuk angkatan kerja, individu yang mendapatkan pengurangan jam kerja dan individu yang dirumahkan untuk sementara waktu pada masa pandemi Covid-19. Kemudian menganalisis terjadinya bifurkasi, sehingga atas pertimbangan tersebut akan dilakukan penelitian yang dituang dalam tesis yang berjudul:

“Analisis Kestabilan dan Bifurkasi pada Model Matematika Tingkat Pengangguran Pada Masa Pandemi Covid-19”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana pengembangan model matematika tingkat pengangguran pada masa pandemi Covid-19?
2. Bagaimana menentukan titik ekuilibrium bebas pengangguran dan titik ekuilibrium adanya pengangguran serta analisis kestabilan titik ekuilibriumnya?
3. Bagaimana menganalisis terjadinya bifurkasi pada model tingkat pengangguran pada masa Covid-19?
4. Bagaimana hasil prediksi jumlah tingkat pengangguran pada masa pandemi Covid-19 menggunakan simulasi model matematika?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengembangkan model matematika tingkat pengangguran pada masa pandemi Covid-19.
2. Menentukan titik ekuilibrium bebas pengangguran dan titik ekuilibrium adanya pengangguran serta menganalisa kestabilan titik ekuilibriumnya.
3. Menganalisis terjadinya bifurkasi pada model tingkat pengangguran pada masa pandemi Covid-19.
4. Mengetahui prediksi tingkat pengangguran pada masa pandemi Covid-19 menggunakan simulasi dari model matematika.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Penelitian ini diharapkan dapat memberi gambaran tingkat pengangguran pada masa pandemi Covid-19 dengan model matematika.
2. Hasil dari penelitian ini dapat membantu instansi terkait dalam menangani masalah pengangguran pada masa pandemi Covid-19.

1.5 Batasan Masalah

1. Penelitian ini memerlukan asumsi-asumsi agar tidak menimbulkan penafsiran yang lebih luas, batasan masalah berdasarkan asumsi yaitu kompartemen pada penelitian ini dibagi menjadi lima kelas yaitu:

Susceptible (S) adalah Kelompok individu Angkatan Kerja

Unemployed (U) adalah kelompok Individu yang Menganggur

Employed (E) adalah Kelompok individu yang Bekerja

Reduction (R) adalah Kelompok individu yang mendapatkan Pengurangan Jam Kerja

Laid (L) adalah Kelompok Individu yang dirumahkan untuk sementara waktu

2. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder dari laman Badan Pusat Statistika Provinsi Sulawesi Selatan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Study Review terhadap Model Pengangguran

Beberapa peneliti telah mengkaji permasalahan mengenai pengangguran. Dalam penelitian ini kemudian disertakan beberapa jurnal yang berkaitan dengan pengangguran. Sebuah penelitian yang dilakukan Al-Maalwi, dkk (2018), tentang model pengangguran membagi kasus menjadi 3 kelas yaitu (*Unemployed*) atau populasi individu yang mengangur, (*Employed*) atau populasi individu yang bekerja dan (*Vacancies*) atau lowongan kerja yang tersedia. Dari hasil penelitian menyatakan bahwa simulasi mendukung stabilitas asimtotik lokal dan global dari kesetimbangan positif. Dan menganalisis secara numerik dengan memvariasikan beberapa faktor seperti tingkat pekerjaan, tingkat pengurangan dan bilangan reproduksi dasar dalam mengurangi masalah pengangguran. Meningkatkan angka reproduksi dasar dengan meningkatkan tingkat pekerjaan dan mengurangi tingkat penyusutan. Hal ini berdampak pada bertambahnya jumlah tenaga kerja, berkurangnya jumlah pengangguran sehingga menurunkan tingkat pengangguran.

Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Fahri dkk. (2019) tentang meningkatnya angka pengangguran di tengah pandemi Covid-19, penelitian ini menjelaskan bahwa di Indonesia khususnya sektor ekonomi sangat berdampak dengan hadirnya pandemi Covid-19 ini, dapat dikatakan bahwa Indonesia mengalami krisis pada masa pandemi ini. Banyak perusahaan – perusahaan yang tidak beroperasi pada masa pandemi Covid-19 ini. Hasil survey menyatakan bahwa di masa pandemi ini angka pengangguran sangat meningkat. Hal utama yang menyebabkan pengangguran meningkat di masa pandemi ini ialah PHK karena banyaknya perusahaan yang menghentikan operasionalnya, *social distancing*, dan PSBB. Meningkatnya pengangguran di Indonesia membuat perekonomian Indonesia sangat mengkhawatirkan karena seperti yang kita ketahui bahwa masalah ekonomi yang sulit terselesaikan yaitu pengangguran.

Adapun penelitian yang dilakukan oleh A. Ashi dkk. (2021), tentang model pengangguran dalam penelitian tersebut membagi kasus menjadi 3 kelas yaitu (*Unemployed*) atau populasi individu yang mengangur, (*Employed*) atau populasi

individu yang bekerja dan (*Vacancies*) atau lowongan kerja yang tersedia. Pada penelitian ini peneliti menambahkan kontrol atau proporsi. Hasil dari penelitian ini yaitu untuk mengatasi masalah pengangguran secara efektif, pemerintah perlu meningkatkan output pendidikan (lulusan terbaik) sesuai dengan kebutuhan tenaga kerja. Menciptakan lapangan kerja untuk semua lapisan masyarakat.

Selanjutnya penelitian yang dilakukan Krisnandika dkk. (2021) tentang dampak pandemi Covid-19 terhadap pengangguran di Indonesia, pada penelitian ini menunjukkan bahwa jumlah pengangguran yang terjadi di Indonesia terus meningkat seiring adanya pandemi Covid-19, jumlah pekerja yang di-PHK dan dirumahkan bertambah secara tidak normal dan hal itu dapat menyebabkan banyak pekerja yang menganggur. Pekerja yang dirumahkan mungkin ada yang tidak mengerti dengan teknologi atau misalnya suatu sistem aplikasi atau perangkat pendukung khusus untuk kegiatan pekerjaan di perusahaan tidak ada di dalam laptop atau komputer di rumah sehingga pekerja kesulitan untuk bekerja, oleh karena masalah tersebut tidak akan bisa membantu menjaga kestabilan perusahaan.

2.2 Pandemi COVID-19

Covid-19 merupakan sejenis virus dari family *coronaviridae* yang berimplikasi terhadap penyakit menular dan mematikan yang menyerang mamalia seperti manusia pada saluran pernafasan hingga ke paru-paru. Pengidap Covid-19 akan mengalami gejala awal berupa demam, sakit tenggorokan, pilek, batuk-batuk bahkan sampai menyebabkan pneumonia. Virus ini menular melalui kontak langsung dengan pengidap Covid-19 melalui cairan pernafasan yang keluar dari tubuh penderita saat batuk atau mengeluarkan ludah (Yuliana, 2020).

Virus corona merupakan virus yang menyerang sistem pernapasan. Virus corona membuat sistem pernapasan terganggu hingga pneumonia akut. Virus ini adalah jenis virus baru yang dapat menular ke manusia. Virus ini juga dapat menyerang bayi, anak-anak, orang dewasa, maupun lansia. Di berbagai wilayah di china virus ini menular dengan cepat bahkan ke beberapa negara termasuk Indonesia (Susilawati dkk., 2020).

Virus corona mulai muncul di pasar hewan dan makanan laut di Kota Wuhan. Di pasar tersebut dijual hewan liar seperti ular, kelelawar, dan ayam sehingga diduga pasien yang menderita virus ini yaitu mereka yang telah berbelanja di pasar hewan

tersebut. Mereka menduga bahwa virus ini berasal dari kelelawar. Virus ini menyebar dari hewan ke manusia, kemudian dari manusia ke manusia.

Kemenkes RI (2020) tentang Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Coronavirus Disease 2019 (COVID-19), virus ini dapat hilang dalam rentang waktu 5-7 hari, masa inkubasi virus corona berlangsung paling lambat selama 2-3 hari. Sedangkan paling lama dapat mencapai 10 -12 hari. Dalam masa tersebut virus corona sulit ditemukan. Virus corona sangat sensitif terhadap cuaca panas dengan suhu $56^{\circ}C$ selama 30 menit. Virus corona belum dapat diobati dengan penanganan medis. Virus corona yang masuk ke dalam tubuh manusia dapat mati dalam rentang waktu 5-7 hari. Virus corona tidak mudah menyebar ke seluruh anggota tubuh manusia yang memiliki imun tubuh yang baik.

Menurut WHO virus corona menyebar dari orang ke orang melalui tetesan kecil dari hidung atau mulut yang menyebar pada saat seseorang batuk atau menghembuskan nafas. Kemudian tetesan tersebut jatuh ke benda yang disentuh oleh orang lain.

Menurut ahli virus atau virologis Richard Sutejo (2020), virus corona merupakan tipe virus yang menyerang saluran pernafasan. Tetapi strain covid-19 memiliki morbiditas dan mortalitas yang lebih tinggi akibat adanya mutasi genetik dan kemungkinan transmisi inter-spesies.

Ada beberapa dampak ekonomi yang diakibatkan dengan adanya pandemi Covid-19 di antaranya yaitu (Siti Maimunah, 2020):

1. Kelangkaan Barang

Semua masyarakat harus tetap *stay* di rumah saat pemerintah mengeluarkan kebijakan untuk tetap dirumah saja dan semua toko akan tutup kecuali toko bahan pangan dan pasar. Namun toko bahan pangan dan pasar harus mematuhi kebijakan pemerintah dan hanya buka di jam tertentu saja. Hal ini mengakibatkan barang berkurang namun permintaan pasar yang banyak dan mengakibatkan harga akan naik sehingga masyarakat menengah kebawah sulit untuk mendapatkan barang tersebut

2. Sektor Wisata

Untuk mencegah penyebaran virus corona banyak juga tempat wisata yang tidak beroperasi. Wisata yang kita kenal ini adalah salah satu penyumbang devisa terbesar kini menyebabkan ekonomi mengalami penurunan yang besar sejak adanya Covid-19.

3. Angka Kemiskinan dan Pengangguran Meningkat

Pada tahun 2020 kemiskinan dan pengangguran semakin meningkat disebabkan oleh pemerintah mengeluarkan kebijakan untuk tetap *stay* di rumah yang membuat aktifitas ekonomi mengalami penurunan yang signifikan.

Sejak pandemi banyak pengusaha UMKM merumahkan sebagian karyawannya. Padahal bagi negara Indonesia Usaha Mikro, Kecil dan Menengah (UMKM) memiliki peranan penting bagi perekonomiannya. Bahkan para pedagang asongan, ojek *online*, pedagang kaki lima dan banyak pekerja harian lainnya juga sangat dirugikan karena mereka sulit mendapatkan penghasilan dan susah untuk memenuhi kebutuhan hidupnya. Contohnya seperti pedagang keliling yang dulunya berjualan setiap harinya, karena adanya kebijakan lockdown mereka tidak bisa berjualan.

2.3 Pengangguran

Setiap negara selalu menghadapi masalah pengangguran. Pengangguran menyebabkan masalah sosial, juga memberi pengaruh besar terhadap pertumbuhan ekonomi suatu negara terutama negara berkembang seperti Indonesia.

Pengangguran adalah masalah ekonomi yang sangat berpengaruh terhadap tingkat pertumbuhan ekonomi. Pengangguran dapat membuat orang tidak memiliki pendapatan dan menjerumus orang-orang dalam kemiskinan. Pemerintah mengatasi pengangguran dengan memperluas lapangan kerja, baik di sektor pemerintahan maupun sektor swasta.

Masalah pengangguran selalu menjadi permasalahan yang sulit terpecahkan di setiap negara. Karena jumlah penduduk yang bertambah tiap tahunnya, maka jumlah pencari kerja meningkat dan tenaga kerja juga akan terus bertambah. Jika tenaga kerja tidak mendapatkan lapangan pekerjaan maka mereka akan tergolong ke dalam orang yang menganggur.

Angka pengangguran di Provinsi Sulawesi Selatan pada masa pandemi Covid-19 meningkat utamanya pada bulan Agustus 2020 sebesar 6,31 %. Namun Februari 2021 turun 0,59 %. Pemerintah Sulawesi Selatan terus berupaya dalam menekan angka pengangguran. Salah satunya dalam upaya pemberian pelatihan dan pendampingan.

2.4 Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial adalah Persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih variabel-variabel bebas, (Rochmad, 2014).

Definisi 2.1 Misalkan f mendefinisikan sebuah fungsi x pada suatu interval $I : a \leq x \leq b$. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivative dari $f(x)$ (Darmawijoyo, 2019).

Menurut peubah bebas, persamaan diferensial (PD) dapat dibedakan menjadi dua macam yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Sedangkan persamaan diferensial ditinjau dari bentuk fungsi atau pangkatnya juga dibedakan menjadi dua macam yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan non linear.

Definisi 2.2 Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial biasa jika dalam persamaan tersebut terdapat satu atau lebih variable tak bebas beserta turunannya terhadap satu variable bebas. (Indriati, 2019).

2.5 Titik Keseimbangan

Titik Keseimbangan atau biasa disebut solusi keseimbangan merupakan suatu keadaan dari sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Suatu titik $x^* \in R^n$ dikatakan titik keseimbangan dari $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$ sedemikian sehingga $f(x^*) = 0$, dengan (Wiggins, 1990)

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

Atau dengan kata lain, jika $x^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$ merupakan titik keseimbangan dari $\dot{x} = f(x)$, maka

$$f_i(x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n) = 0, \forall i = 1, 2 \dots n.$$

2.6 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan

Linearisasi sistem di sekitar titik keseimbangan dilakukan untuk menganalisis kestabilan sistem persamaan diferensial nonlinear. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik keseimbangan.

Definisi 2.3 (Hale & Kocak, 1991). Jika x^* merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{x} = f(x)$, maka persamaan diferensial linear

$$\dot{x} = J(x^*)x, \quad (2.1)$$

disebut persamaan linearisasi pada titik kesetimbangan x^* dimana $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dan

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Yang disebut sebagai matriks Jacobi dari f di titik x^* .

Kestabilan titik kesetimbangan x^* dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen yaitu λ yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik

$$\det(J - \lambda I) = 0, \quad (2.2)$$

dengan I adalah matriks identitas. Dalam Tabel 2.1 diberikan beberapa jenis sifat kestabilan yang dikategorikan berdasarkan jenis nilai eigen yang diperoleh dari Persamaan (2.2)

Tabel 2.1 Kestabilan dari sistem linear $\dot{x} = f(x)$ dengan $\det(J - \lambda I) = 0$

No.	Nilai Eigen Matriks $J(x^*)$	Jenis Kestabilan
1.	$\lambda_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$	Tidak Stabil
2.	$\lambda_i < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$	Stabil Asimtotik
3.	$\lambda_i < 0 < \lambda_j, \forall i = 1, 2, \dots, n$ dan $\forall j = 1, 2, \dots, n$	Tidak Stabil
4.	$\lambda_i = \lambda_j > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ dan $\forall j = 1, 2, \dots, n$	Tidak Stabil
5.	$\lambda_i = \lambda_j < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ dan $\forall j = 1, 2, \dots, n$	Stabil Asimtotik
6.	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic, \forall i = 1, 2, \dots, n; \forall j = 1, 2, \dots, n; r > 0$	Tidak Stabil
7.	$\lambda_i, \lambda_j = -r \pm ic, \forall i = 1, 2, \dots, n; \forall j = 1, 2, \dots, n; r > 0$	Stabil Asimtotik
8.	$\lambda_i = ic, \lambda_j = -ic, \forall i = 1, 2, \dots, n$ dan $\forall j = 1, 2, \dots, n$	Stabil

Sumber : Boyce dan DiPrima (2012)

2.7 Bilangan Reproduksi Dasar

Salah satu parameter yang dapat digunakan untuk melihat tingkat pengangguran adalah bilangan reproduksi dasar. Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlah angkatan kerja yang menganggur. Bilangan reproduksi dasar dilambangkan dengan R_0 . Bilangan tersebut diperlukan sebagai parameter untuk mengetahui tingkat pengangguran.

Ada beberapa kondisi yang akan timbul dalam penentuan R_0 , yaitu:

1. Jika $R_0 < 1$, maka pengangguran tidak meningkat
2. Jika $R_0 > 1$, maka pengangguran meningkat
3. Jika $R_0 = 1$, maka kestabilan dari kedua titik kesetimbangan tidak dapat ditentukan.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar merupakan hasil linearisasi system persamaan diferensial yang berdasarkan titik ekuilibrium bebas pengangguran, Persamaan kompartemen pengangguran yang telah dilinearisasi, yaitu:

$$\dot{x} = (F - V)x \quad (2.3)$$

dengan F dan V merupakan matriks berukuran $n \times n$ dan $F = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j} = (0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j} = (0, y_0)$. Selanjutnya akan didefinisikan matriks K sebagai berikut:

$$K = FV^{-1} \quad (2.4)$$

Dengan K merupakan matriks *next generation*. maka nilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) dinyatakan sebagai berikut:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \quad (2.5)$$

Dengan $\rho(FV^{-1})$ merupakan spektral radius dari matriks K (Driessche dan Watmough, 2002).

2.8 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas dilakukan untuk mengetahui pengaruh perubahan nilai parameter terhadap bilangan reproduksi dasar (R_0).

Definisi 2.3 *Normalisasi indeks sensitivitas diperoleh dengan normalisasi dari variabel v yang terdiferensial oleh parameter p , yang didefinisikan sebagai berikut;*

$$C_p^v = \frac{\partial v}{\partial p} \times \frac{p}{v} \quad (2.6)$$

dimana v adalah variabel yang akan dianalisis dan p sebagai parameter (Alemneh & Alemu, 2021).

Definisi 2.3 menunjukkan bahwa indeks dari sensitivitas dapat ditentukan berdasarkan konsep laju perubahan yang kemudian diukur besar kecilnya perubahan tersebut. Semakin besar nilai indeks parameter maka semakin besar pula pengaruh parameter terhadap nilai variabel yang diukur.

2.9 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* digunakan untuk menentukan jenis nilai eigen dari suatu persamaan karakteristik. Analisis dilakukan melalui koefisien-koefisien persamaan karakteristik tersebut (Murray, 2002).

Teorema 2.1. *Misalkan diberikan suatu polinomial*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (2.7)$$

dengan $a_i, i = 1, \dots, n$ adalah konstanta real. Persamaan tersebut mempunyai n buah akar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Masing-masing akar dapat bernilai real atau kompleks yang memenuhi $P(\lambda_i) = 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Misalkan diberikan sistem linear dengan koefisien konstan, yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2.8)$$

dengan x adalah vector yang berukuran $n \times 1$ dan A adalah matriks yang berukuran $n \times n$. Misalkan polinom pada persamaan (2.7) adalah persamaan karakteristik dari sistem persamaan (2.8), maka nilai eigen dari matriks A merupakan akar-akar dari polinomial $P(\lambda)$ tersebut (Murray, 2002).

Uji kestabilan Hurwitz digunakan untuk menentukan jenis nilai eigen dari matriks A , yaitu melalui determinan dari matriks H_n yang disebut dengan matriks Hurwitz. Dalam bentuk umum, matriks H_n merupakan matriks dengan entri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_1 &= a_1 > 0, \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ H_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0 \quad \text{untuk } k = 1, 2, \dots, n$$

Teorema 2.2. Uji kestabilan Hurwitz (Willems, 1970). Setiap matriks Hurwitz mempunyai determinan positif jika dan hanya jika setiap bagian real dari nilai eigen matriks A bernilai negatif, dan nol merupakan suatu trajektori atraktor yaitu kesetimbangan yang stabil asimtotik.

2.10 Analisis Bifurkasi

Bifurkasi merupakan perubahan kualitatif yang meliputi perubahan stabilitas dan perubahan banyaknya titik kesetimbangan yang disebabkan oleh adanya perubahan nilai-nilai parameter. Bifurkasi mengacu pada perubahan keadaan dinamik suatu persamaan atau sistem yang memiliki parameter.

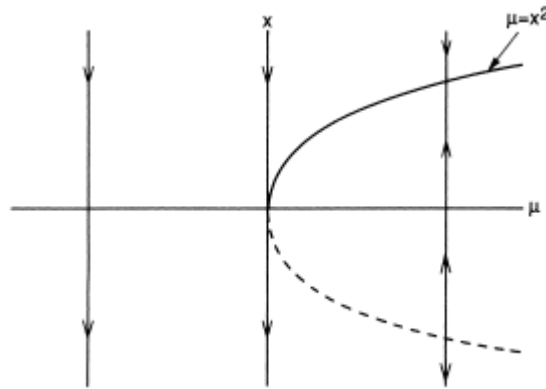
Ada beberapa jenis bifurkasi yang berdimensi satu, yaitu bifurkasi *saddle-node*, bifurkasi *transcritical*, dan bifurkasi *pitchfork* (Martin, Vickerman & Hickman, 2011) dan terdapat pula bifurkasi dua dimensi, yaitu bifurkasi hopf.

2.10.1 Bifurkasi Saddle-Node

Bifurkasi saddle-node atau yang dikenal juga dengan nama bifurkasi *fold* memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$x = f(x, \mu) = \mu - y^2, x \in \mathbb{R} \quad \mathbf{2.10}$$

Jika $\mu < 0$ tidak memiliki solusi titik ekuilibrium dan pada saat $\mu = 0$ Terdapat dua solusi ekuilibrium, yaitu stabil dan tidak stabil. Hal tersebut dapat ditunjukkan pada Gambar 2.2 berikut



Gambar 2.1 Kurva Bifurkasi *Saddle-Node*

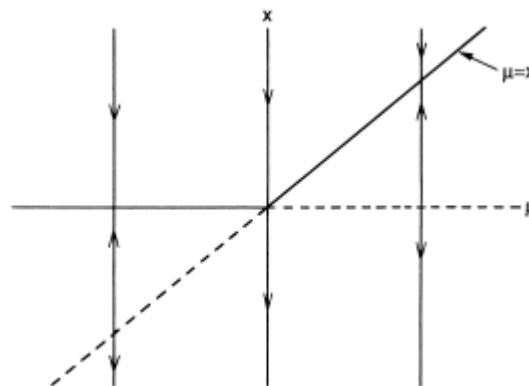
Pada analisis stabilitas sederhana menunjukkan bahwa salah satu solusi ekuilibrium bersifat stabil (ditunjukkan oleh kurva yang bergaris tebal) dan solusi ekuilibrium lainnya bersifat tidak stabil (ditunjukkan oleh kurva yang bergaris putus-putus). Jenis bifurkasi dimana pada satu sisi nilai parameter bifurkasi tidak terdapat solusi ekuilibrium dan di sisi lainnya memiliki dua solusi ekuilibrium disebut bifurkasi *saddle-node* (Wiggins, 2003).

2.10.2 Bifurkasi *Transcritical*

Bifurkasi *Transcritical* merupakan bifurkasi yang terjadi apabila pada saat perubahan μ pada sistem, terjadi pertukaran kestabilan, yaitu dari titik ekuilibrium yang stabil menjadi tidak stabil. Bifurkasi ini memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}. \quad 2.11$$

Persamaan 2.10 ditunjukkan pada Gambar 2.3 berikut



Gambar 2.2 Kurva Bifurkasi *Transcritical*

Berdasarkan Gambar 2.3, untuk $\mu < 0$ terdapat dua solusi ekuilibrium, yaitu $x = 0$ yang merupakan solusi ekuilibrium stabil dan $x = \mu$ merupakan solusi ekuilibrium yang tidak stabil. Keduanya mengalami perubahan kestabilan di titik $\mu = 0$, pada saat $\mu > 0$, $x = 0$ merupakan solusi yang tidak stabil dan $x = \mu$ merupakan solusi yang stabil (Wiggins, 2003).

2.10.3 Bifurkasi *Pitchfork*

Bifurkasi *pitchfork* merupakan suatu kondisi dimana sistem mengalami perubahan dari suatu titik ekuilibrium menjadi tiga titik ekuilibrium. Pada umumnya bifurkasi ini terbagi menjadi dua, yaitu bifurkasi *pitchfork supercritical* dan *subcritical*. Pada kasus bifurkasi *pitchfork supercritical* memiliki bentuk umum sebagai berikut:

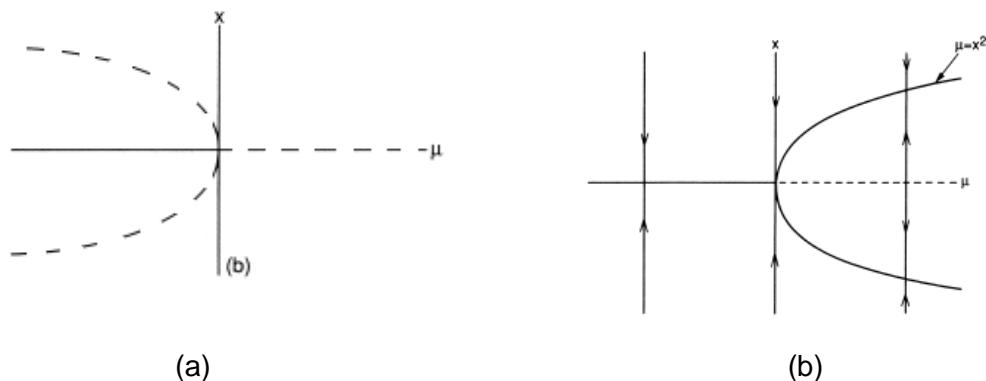
$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}. \quad 2.12$$

Selanjutnya untuk kasus bifurkasi *pitchfork supercritical* memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x + x^3, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}. \quad 2.13$$

Untuk nilai $\mu < 0$ diperoleh hanya satu solusi titik ekuilibrium pada saat $x = 0$.

Sedangkan untuk $\mu > 0$, $x = 0$ masih merupakan solusi ekuilibrium, tetapi dua solusi baru terbentuk ketika $\mu = 0$ yang berasal dari $\mu = x^2$. Selanjutnya, $x = 0$ menjadi stabil untuk $\mu > 0$ dengan dua solusi lainnya yang bersifat stabil (Wiggins, 2003).



Gambar 2.3 (a) Kurva Bifurkasi Pitchfork *Subcritical*
(b) Kurva Bifurkasi Pitchfork *Supercritical*

2.10.4 Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf merupakan bifurkasi yang terjadi ketika matriks jacobii dari sistem memiliki sepasang bilangan kompleks dengan nilai eigen bagian real bernilai nol dan nilai bagian imajiner tidak sama dengan nol. Bifurkasi hopf digunakan untuk menentukan eksistensi lintasan tertutup yang mengelilingi orbit periodik dari suatu sistem.

Definisi 2.4 (Wiggins, 2003) *Bifurkasi hopf terjadi disekitar titik ekuilibrium dan parameter μ tertentu dan $\mu = \bar{\mu}$, dengan dua kondisi berikut ini dipenuhi pada titik setimbang yang terjadi, yaitu:*

- a. *Matriks jacobii dari sistem autonomus non linear mempunyai dua nilai eigen kompleks*

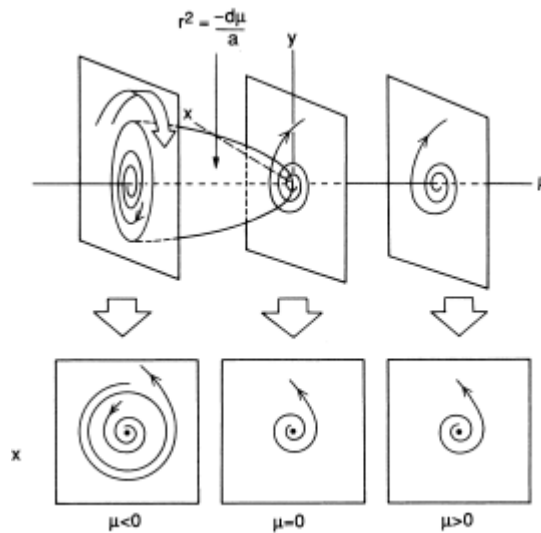
$$\lambda_{1,2}(\mu) = \theta(\mu) \pm i\omega(\mu)$$

Dalam persikataran dari μ dan untuk $\mu = \bar{\mu}$ nilai eigen ini adalah imajiner murni yaitu $\theta(\bar{\mu}) = 0$ dan $\theta(\bar{\mu}) \neq 0$

- b. *Nilai eigen-nilai eigen kompleks berlaku syarat transversal*

$$\left. \frac{d\theta(\bar{\mu})}{d\mu} \right|_{\mu=\bar{\mu}} \neq 0$$

Sepasang dai nilai eigen-nilai eigen kompleks konjugat melintasi sumbu imajiner dan muncul sebuah atau lebih limit cycle.



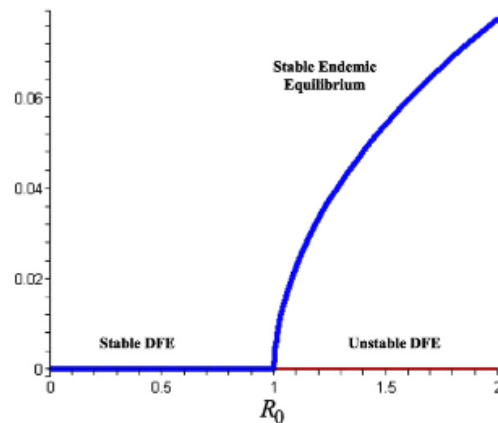
Gambar 2.4 Kurva Bifurkasi Hopf

Gambar 2.4 mempresentasikan diagram bifurkasi untuk sistem dua dimensi. Dimana titik ekuilibrium sistem berbentuk spiral stabil untuk $\mu < 0$, spiral tidak stabil untuk $\mu > 0$, dan titik ekuilibrium akan stabil dan spiral pada $\mu = 0$.

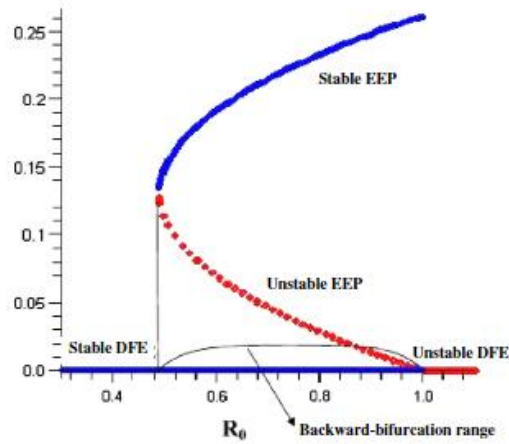
Pada beberapa model matematika dikenal juga beberapa jenis bifurkasi, yaitu bifurkasi maju dan bifurkasi mundur. Jenis bifurkasi ini memiliki nilai ambang batas berdasarkan R_0 , seperti pada model matematika pengangguran ketika $R_0 < 1$ maka pengangguran tidak meningkat (dalam kasus ini titik ekuilibrium bebas pengangguran memiliki kestabilan yang asimtotik). Sedangkan ketika $R_0 > 1$ dimana terdapat titik ekuilibrium adanya pengangguran yang stabil. Pada kejadian ini, titik ekuilibrium bebas pengangguran kehilangan kestabilannya, dan terdapat titik ekuilibrium adanya pengangguran yang stabil. Skema dari bifurkasi maju dapat dilihat pada Gambar 2.5

Untuk model matematika pengangguran yang menunjukkan bifurkasi maju, syarat $R_0 < 1$ merupakan hal yang diperlukan dan cukup untuk menekan pengangguran tidak meningkat. Hal tersebut dinamakan bifurkasi maju yang memiliki karakteristik sebagai berikut:

- a. Tidak terdapat titik ekuilibrium yang bernilai positif disekitar titik ekuilibrium bebas pengangguran.
- b. Tingkat adanya pengangguran yang rendah ketika $R_0 < 1$.



Gambar 2.5 Kurva Bifurkasi Maju



Gambar 2.6 Kurva Bifurkasi Mundur

Jenis bifurkasi yang juga dapat ditemukan pada model matematika pengangguran adalah bifurkasi mundur. Dimana terdapat stabilitas titik ekuilibrium adanya pengangguran dan bebas pengangguran ketika $R_0 < 1$ pengangguran meningkat dan tidak dapat dikontrol. Sehingga untuk pengurangan nilai R_0 hanya dapat mengurangi sedikit pengangguran. (Gumel, 2012).

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai lokasi, waktu, langkah-langkah dalam melakukan penelitian untuk mencapai tujuan penelitian. Lokasi penelitian dilakukan di Kota Makassar, Provinsi Sulawesi Selatan, yakni di Departemen Matematika Universitas Hasanuddin. Penelitian berlangsung dari bulan Februari 2022 dengan langkah penelitian sebagai berikut:

3.1 Identifikasi Masalah

Identifikasi masalah dilakukan untuk menentukan fokus permasalahan penelitian yang berkaitan dengan analisis ekuilibrium dan penentuan Bifurkasi pada model matematika tingkat pengangguran pada masa pandemi Covid-19.

3.2 Studi Literatur

Studi literatur yang digunakan adalah jurnal dan sumber pendukung lainnya untuk mengetahui hal yang berkaitan dengan model matematika tingkat pengangguran pada masa pandemi Covid-19 serta analisis bifurkasi

3.3 Formulasi Model Matematika Tingkat Pengangguran

Berdasarkan studi literatur yang diperoleh, selanjutnya akan dilakukan penyusunan dan mengkontruksi model matematika terhadap dinamika tingkat pengangguran pada masa pandemi Covid-19 dengan menggunakan lima kompartemen, yaitu:

- *Susceptible* (S) adalah Kelompok individu Angkatan Kerja
- *Unemployed* (U) adalah kelompok Individu yang Menganggur
- *Employed* (E) adalah Kelompok individu yang Bekerja
- *Reduction* (R) adalah Kelompok individu yang mendapatkan Pengurangan Jam Kerja
- *Laid* (L) adalah Kelompok Individu yang dirumahkan untuk sementara waktu