

METODOLOGI.....	16
3.1 Jenis Penelitian.....	16
3.2 Prosedur Penelitian.....	16
BAB IV	17
HASIL DAN PEMBAHASAN.....	17
4.1 Graf Matahari SU_n	17
4.2 Pelabelan harmonis pada graf SU_3, SU_5, SU_7	18
4.3 Pelabelan harmonis pada graf SU_n , dengan n bilangan ganjil.....	20
BAB V	25
KESIMPULAN DAN SARAN.....	25
5.1 Kesimpulan.....	25
5.2 Saran.....	25
DAFTAR PUSTAKA	26

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Graf yang merepresentasikan Jembatan Konigsberg. 4

Gambar 2. 2 Graf G dan graf H 6

Gambar 2. 3 Graf siklus C_3 , C_4 , dan C_5 7

Gambar 2. 4 Graf siklus C_5 , penggandaan 5 kali K_1 , dan graf matahari SU_5 8

Gambar 2. 5 Graf matahari SU_3 dan SU_7 8

Gambar 2. 6 Contoh graf timbangan..... 9

Gambar 2. 7 Graf Kincir W_3^6 atau graf persahabatan dan graf kincir W_4^4 9

Gambar 2. 8 Graf Kincir Tiga C_5^3 9

Gambar 2. 9 Graf n-ubur-ubur 10

Gambar 2. 10 Graf tangga L_5 10

Gambar 2. 11 Graf tangga segitiga variasi X_5 11

Gambar 2. 12 Graf tangga segitiga 11

Gambar 2. 13 Graf TLP_5 12

Gambar 2. 14 Graf TF_5 12

Gambar 2. 15 Graf tangga segitiga pita 13

Gambar 2. 16 Graf caterpillar 13

Gambar 2. 17 Graf firecracker 14

Gambar 2. 18 Graf prisma..... 14

Gambar 2. 19 Graf kipas F_6 14

Gambar 2. 20 Pelabelan harmonis pada graf matahari SU_3 15

Gambar 4. 1 Graf matahari SU_7 17

Gambar 4. 2 Pelabelan harmonis pada Graf SU_3 18

Gambar 4. 3 Pelabelan harmonis pada Graf SU_5 19

Gambar 4. 4 Pelabelan harmonis pada Graf SU_7 20

Gambar 4. 5 Pelabelan harmonis pada graf matahari SU_N 24

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika, yang pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler. Euler merupakan seorang ahli matematika berkebangsaan Swiss.

Pada tahun 1736, Leonhard Euler dalam karya tulisnya yang berjudul “*Solutio Problematis ad Geometrian Situs Pertinentis*”, menjawab teka-teki jembatan Königsberg dengan memperlihatkan bahwa perjalanan di kota Königsberg yang mempunyai 7 buah jembatan, dengan syarat melalui setiap jembatan tepat satu kali yang bertolak dan berakhir pada suatu daratan yang sama, tidak dapat dilakukan. Berkat pekerjaan Euler yang diilhami melalui masalah jembatan Königsberg memunculkan suatu cabang Matematika yang cukup penting yang dikenal dengan nama Teori Graf (*Graph Theory*) (Hasmawati, 2020).

Graf G merupakan suatu pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong berhingga dari elemen yang disebut simpul dan E adalah himpunan berhingga (boleh kosong) dari pasangan simpul dalam $V \times V$ yang disebut busur. V disebut himpunan simpul dan E disebut himpunan busur dari graf G . setiap busur di E menghubungkan dua simpul dari V (Marsudi, 2016).

Banyaknya anggota pada himpunan simpul dinyatakan sebagai $|V|$, dan banyaknya anggota himpunan busur pada graf G dinyatakan sebagai $|E|$. Suatu pelabelan pada graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan, biasanya berupa bilangan bulat positif. Suatu pemetaan λ dari V ke $Z_{|E|}$ disebut pelabelan harmonis jika λ merupakan pemetaan sedemikian sehingga ketika setiap busur xy diberi label dengan $w(xy) = (\lambda(x) + \lambda(y)) \pmod{|E|}$ menghasilkan label yang berbeda. Karena label-label busur merupakan elemen $Z_{|E|}$ dan berbeda maka $\{w(xy) : xy \in E\} = Z_{|E|} = \{0, 1, 2, \dots, |E| - 1\}$. Graf yang memiliki pelabelan harmonis disebut graf harmonis (Grahams & Sloane, 1980).

Pada tahun 1980 Graham dan Sloane memperkenalkan pelabelan harmonis yang berawal dari masalah pada error-correcting code. Pelabelan harmonis memiliki beberapa aplikasi, salah satunya untuk pembagian saluran radio. Misalkan

tersedia sebanyak $|E|$ saluran frekuensi, simpul-simpul pada graf merepresentasikan stasiun komunikasi dan busur pada graf tersebut merepresentasikan jalur komunikasi dari satu stasiun ke stasiun yang lain. Dengan memberikan label berbeda pada setiap stasiun, setiap jalur komunikasi dapat memperoleh saluran frekuensi dengan menjumlahkan label dua stasiun yang berkomunikasi yang menghasilkan label berbeda (Grahams & Sloane, 1980).

Banyak peneliti yang telah melakukan penelitian mengenai pelabelan harmonis, seperti pelabelan harmonis pada graf timbangan (Sari, dkk., 2013), pelabelan harmonis pada graf kincir tiga dan graf n -ubur-ubur (Azka, dkk., 2017), pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga variasi X_n (Atmadja & Sugeng, 2017), pelabelan harmonis gabungan graf tangga segitiga LS_n , dengan graf tangga segitiga variasi X_n (Kurniawan, 2019), pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga jembatan XJ_n (Atmadja & Marhaeni, 2020), pelabelan harmonis pada beberapa kelas graf yang berhubungan dengan graf *ladder* (Rahim & Susanti, 2017), pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga pita (Atmadja, 2021), *harmonious labeling for the corona graphs of small complete graph* (Pradana, dll., 2019), *on harmonious labeling of corona graph* (Bača & Youssef, 2014), *harmonious labeling of certain graph* (Tanna, 2013), *harmonious labeling on prisms graph* (Hinding, dkk., 2019), *harmonious labeling of windmill graphs and relate graphs* (Frank, 1982), pelabelan harmonis pada kombinasi gabungan graf caterpillar dan graf firecracker teratur (Wirnadian, 2010), dan lain-lain. Sehingga dalam penelitian ini penulis memberikan pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n , dengan n bilangan ganjil.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana memberikan pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n , dengan n bilangan ganjil.

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan pada penelitian ini akan dibatasi pada pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n , dengan n bilangan ganjil.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan apakah graf matahari SU_n , dengan n bilangan ganjil merupakan graf harmonis.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah mendapatkan informasi mengenai pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n , dengan n bilangan ganjil.

BAB II

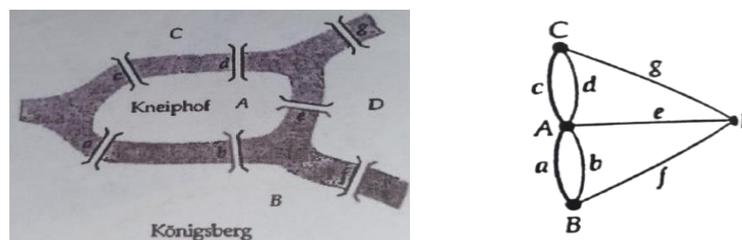
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk mempermudah suatu penyelesaian masalah. Dengan merepresentasikan persoalan ke dalam bentuk graf, maka persoalan dapat dijelaskan secara lebih sederhana.

Pada tahun 1736, Leonhard Euler dalam karya tulisnya yang berjudul “*Solutio Problematis ad Geometrian Situs Pertinentis*”, menjawab teka-teki jembatan Königsberg dengan memperlihatkan bahwa perjalanan di kota Königsberg yang mempunyai 7 buah jembatan, dengan syarat melalui setiap jembatan tepat satu kali yang bertolak dan berakhir pada suatu daratan yang sama, tidak dapat dilakukan. Berkat pekerjaan Euler yang diilhami melalui masalah jembatan Königsberg memunculkan suatu cabang Matematika yang cukup penting yang dikenal dengan nama Teori Graf (*Graph Theory*) (Hasmawati, 2020).

Leonhard Euler dalam karya tulisnya, walaupun tidak ditulis dalam bahasa Graf, namun ide di dalamnya bersifat graf teoritis. Itulah sebabnya, karya Euler tersebut dapat dianggap sebagai karya pertama tentang teori graf. Dalam karya tulisnya, Euler menyederhanakan jembatan Königsberg dengan merepresentasikan daratan sebagai simpul dan jembatan sebagai busur, sehingga bentuk graf dari jembatan Königsberg seperti pada Gambar 2. 1



Gambar 2. 1 Graf yang merepresentasikan Jembatan Königsberg.

Sumber gambar: Buku Pengantar dan Jenis-Jenis Graf, 2020

Hingga saat ini teori graf banyak digunakan untuk memecahkan berbagai masalah misalnya masalah di bidang fisika, kimia, ilmu komunikasi, rekayasa listrik, genetika, dan lain-lain. teori graf juga erat kaitannya dengan beberapa cabang matematika lainnya diantaranya: teori matriks, analisis numerik, teori peluang dan lain-lain (Hasmawati, 2020).

Secara umum, graf adalah suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat. Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Beberapa contoh graf yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari antara lain: struktur organisasi, bagan alir pengambilan mata kuliah, peta, rangkaian listrik, dan lain-lain (Siang, 2006).

Graf G merupakan suatu pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong berhingga dari elemen yang disebut simpul dan E adalah himpunan berhingga (boleh kosong) dari pasangan simpul dalam $V \times V$ yang disebut busur. V disebut himpunan simpul dan E disebut himpunan busur dari graf G . setiap busur di E menghubungkan dua simpul dari V (Marsudi, 2016).

Definisi 2.1 *Graf adalah pasangan himpunan (V, E) , dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut simpul, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut busur.*

Secara matematika, dapat ditulis sebagai berikut : graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{u: u \text{ disebut simpul}\}$ dan $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$ (Hasmawati, 2020).

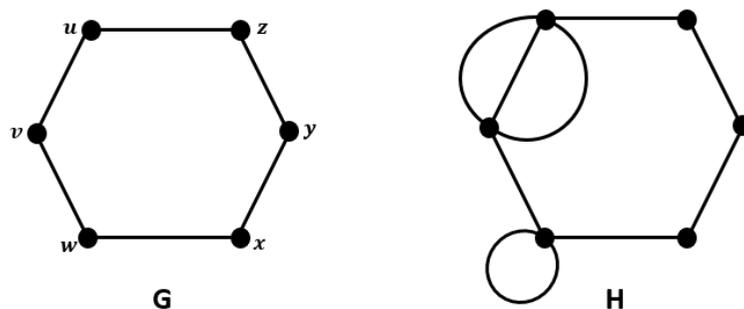
Suatu graf G terdiri dari dua himpunan yang berhingga, yaitu himpunan simpul-simpul (*vertices*) tidak kosong V dan himpunan busur-busur (*edge*) E yang menghubungkan simpul-simpul pada G . Banyaknya anggota pada himpunan simpul dinyatakan dengan $|V|$, dan banyaknya anggota himpunan busur pada graf G dinyatakan sebagai $|E|$. Setiap busur berhubungan dengan satu atau dua simpul. Simpul-simpul tersebut dinamakan titik ujung (*endpoint*).

Dua simpul dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika terdapat satu atau lebih busur yang menghubungkan kedua simpul tersebut atau dengan kata lain, dua simpul dikatakan bertetangga jika keduanya hadir pada busur yang sama. Simpul dan busur yang terhubung dengannya dikatakan saling hadir (*incident*). Derajat (*degree*) dari suatu simpul menyatakan banyaknya busur yang hadir pada simpul tersebut, dinotasikan sebagai $\deg(v)$. Simpul terisolasi (*isolated vertex*) adalah simpul yang memiliki derajat 0. Simpul akhir atau daun (*leaf*) adalah simpul yang memiliki derajat 1. Jika pada graf G semua simpul memiliki derajat yang sama maka graf G disebut graf teratur berderajat r (*r-regular graph*). Suatu graf G disebut graf lengkap (*complete graph*) dengan n simpul jika semua simpul saling bertetangga, sehingga graf lengkap juga merupakan graf teratur dengan $r = n - 1$ (Wirnadian, 2010).

Dua busur atau lebih yang menghubungkan satu pasang simpul disebut busur berganda (*multiple edges*). Suatu busur yang simpul ujungnya sama disebut loop. Graph tanpa busur berganda dan tanpa loop disebut graph sederhana (*simple graph*). Jika u dan v simpul-simpul di G dan $e = uv$ suatu busur di G , maka dikatakan:

- e menghubungkan u dan v ,
- u dan v terhubung langsung (*adjacent*),
- u terkait (*incident*) dengan e ,
- e terkait (*incident*) dengan u ,
- u dan v disebut simpul ujung dari e . (Rahayuningsih, 2018)

Contoh 2.1



Gambar 2. 2 Graf G dan graf H

Pada Gambar 2.2, graf G adalah graf sederhana, dengan

$$V(G) = \{u, v, w, x, y, z\} \quad E(G) = \{uv, vw, wx, xy, yz, zu\}$$

$$|V(G)| = 6 \quad |E(G)| = 6$$

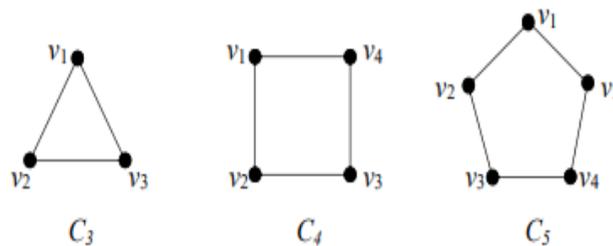
Dan graf H tidak sederhana karena memuat loop dan busur berganda.

2.2 Jenis-Jenis Graf

Berikut adalah beberapa jenis-jenis graf, diantaranya graf siklus, graf corona, graf matahari, serta beberapa contoh-contoh graf harmonis.

Definisi 2.2 Graf siklus adalah graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf siklus dengan n simpul dinotasikan dengan C_n , $n \geq 3$, adalah graf dengan n simpul yaitu v_1, v_2, \dots, v_n dan busur-busurnya $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$. (Alyani, 2019)

Contoh 2.2



Gambar 2. 3 Graf siklus C_3 , C_4 , dan C_5

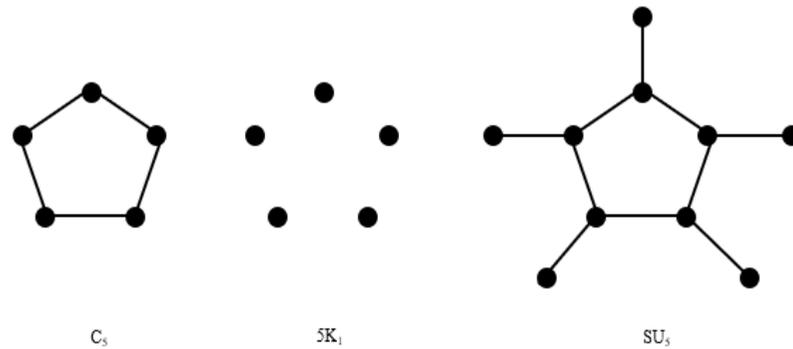
Definisi 2.3 Misalkan G graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m . Graf corona G dan H dinotasikan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dari menggandakan graf H sebanyak n kali namakan H_1, H_2, \dots, H_n , dan mengaitkan setiap simpul v_i di G dengan setiap simpul di graf $H_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Definisi 2.4 Misalkan $C_n, n \geq 3$ dan graf trivial K_1 . Graf matahari adalah graf corona antara siklus C_n dan graf trivial K_1 ($C_n \odot K_1$). Graf matahari $C_n \odot K_1$ dinotasikan $SU_n, n \geq 3$. Graf matahari $SU_n, n \geq 3$, adalah graf berorde $2n$ yang

diperoleh melalui penggandaan K_1 sebanyak n kali kemudian mengaitkan masing-masing satu simpul di C_n ke graf K_1 .

Contoh 2.3

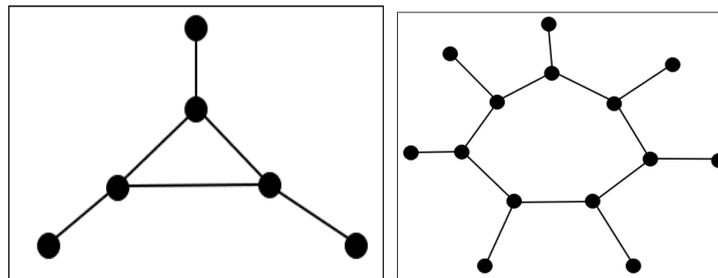
Graf SU_5 diperoleh dengan cara menggandakan K_1 sebanyak 5 kali, kemudian masing-masing satu simpul di C_5 dikaitkan dengan satu simpul (K_1). Bentuk graf SU_5 dapat dilihat pada Gambar 2.4 berikut. (Hasmawati, 2020)



Gambar 2. 4 Graf siklus C_5 , penggandaan 5 kali K_1 , dan graf matahari SU_5
 Sumber gambar: Buku Pengantar dan Jenis-Jenis Graf, 2020

Contoh 2.4

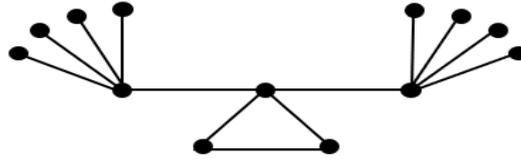
Graf matahari SU_3 dan SU_7



Gambar 2. 5 Graf matahari SU_3 dan SU_7

Definisi 2.5 Graf timbangan merupakan gabungan antara graf siklus C_3 dengan 2 graf bintang S_r (graf bintang dengan r buah simpul), dimana antara pusat S_r , C_3 , dan S_r yang lain dihubungkan dengan sebuah lintasan. Banyaknya simpul pada graf timbangan selalu ganjil. (Sari, dkk., 2013)

Contoh 2.5

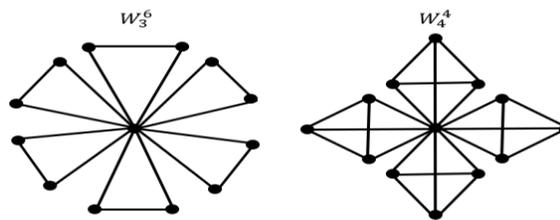


Gambar 2. 6 Contoh graf timbangan

Definisi 2.6 Graf kincir (windmill graph) dinotasikan W_n^m adalah graf yang diperoleh dari m kopi graf lengkap K_n dengan mengambil satu simpul sebagai simpul Bersama.

Khusus untuk $n = 3$ yakni graf kincir W_3^m disebut **graf persahabatan** dan dinotasikan f_m . (Hasmawati, 2020)

Contoh 2.6

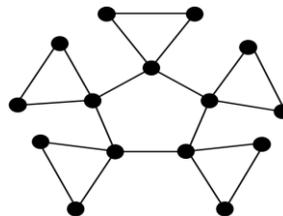


Gambar 2. 7 Graf Kincir W_3^6 atau graf persahabatan dan graf kincir W_4^4

Sumber gambar: Buku Pengantar dan Jenis-Jenis Graf, 2020

Definisi 2.7 Diberikan C_n adalah graf siklus yang memiliki simpul sebanyak n . graf yang diperoleh dengan menempelkan C_3 di setiap simpul pada C_n dinamakan Graf kincir Tiga yang dinotasikan dengan C_n^3 .

Contoh 2.7

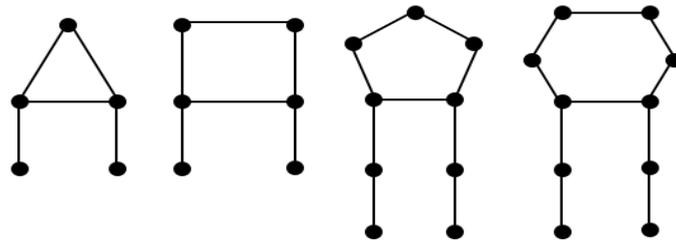


Gambar 2. 8 Graf Kincir Tiga C_5^3

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Graf Kincir Tiga dan Graf n-Ubur-ubur, 2017

Definisi 2.8 Graf n -Ubur-ubur ($n \geq 3$) adalah graf yang diperoleh dari suatu graf C_n dan dua graf $P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ dengan melekatkan salah satu ujung simpul masing-masing $P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ pada sebarang dua simpul di C_n yang berdekatan. (Azka, dkk., 2017)

Contoh 2.8



Gambar 2. 9 Graf n-ubur-ubur

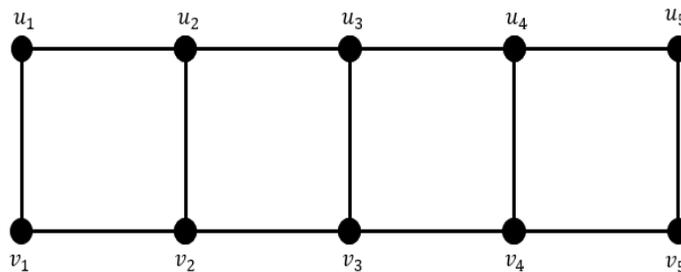
Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Graf Kincir Tiga dan Graf n-Ubur-ubur, 2017

Definisi 2.9 Graf tangga L_n adalah graf tangga sederhana dengan himpunan simpul dan himpunan busur yaitu:

$$V(L_n) = \{u_i, v_i | 1 \leq i \leq n\}$$

$$E(L_n) = \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\}$$

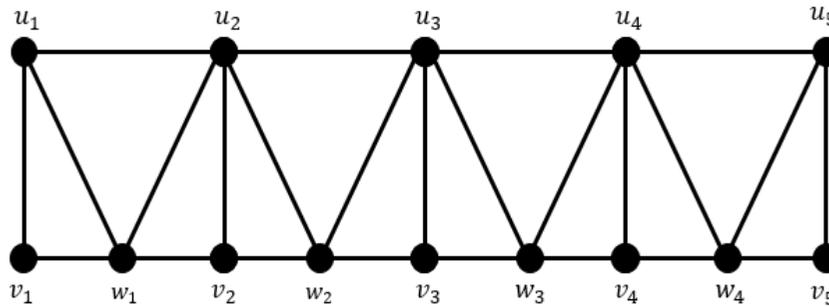
Contoh 2.9



Gambar 2. 10 Graf tangga L_5

Definisi 2.10 Graf tangga X_n adalah graf tangga segitiga variasi, dengan himpunan simpul $V(X_n) = \{u_i, v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i | 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan himpunan busur $E(X_n) = \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i w_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i w_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{i+1} w_i | 1 \leq i \leq n - 1\}$. (Atmadja & Sugeng, 2017)

Contoh 2.10

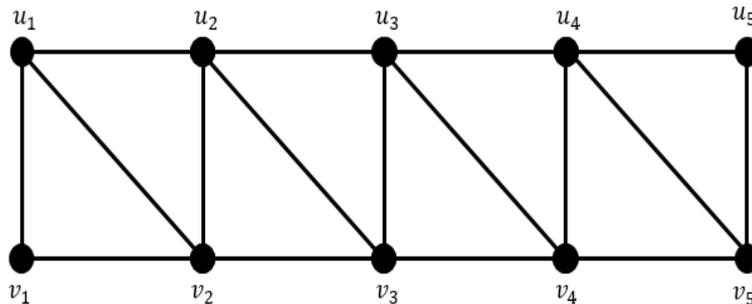


Gambar 2. 11 Graf tangga segitiga variasi X_5

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga segitiga variasi X_n , 2017

Definisi 2.11 *Graf tangga segitiga (graf triangular ladder) adalah graf yang diperoleh dari graf L_n dengan menambahkan busur $u_i v_{i+1}$ untuk setiap $1 \leq i \leq n - 1$ pada graf L_n dengan $\{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $\{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ adalah himpunan simpul pada kedua graf P_n pada graf L_n .*

Contoh 2.11

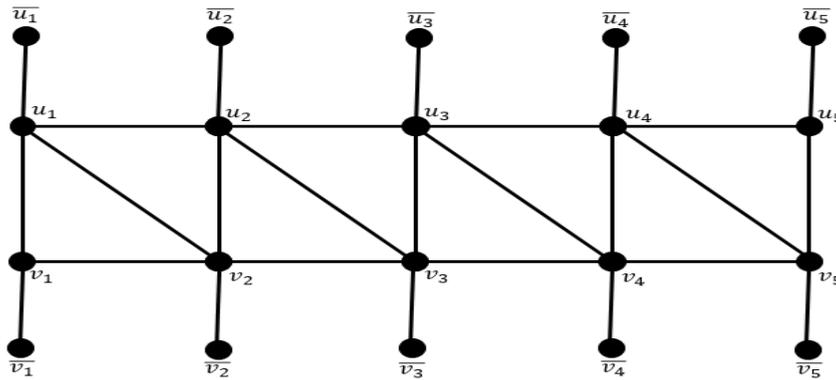


Gambar 2. 12 Graf tangga segitiga

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Beberapa Kelas Graf yang Berhubungan dengan Graf Ladder, 2017

Definisi 2.12 *Graf triangular ladder pendant dinotasikan dengan TLP_n adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan satu busur pada setiap simpul dari graf tangga segitiga dimana busur tersebut terhubung dengan satu simpul baru yang masing-masing berbeda untuk setiap simpul pada graf tangga segitiga.*

Contoh 2.12

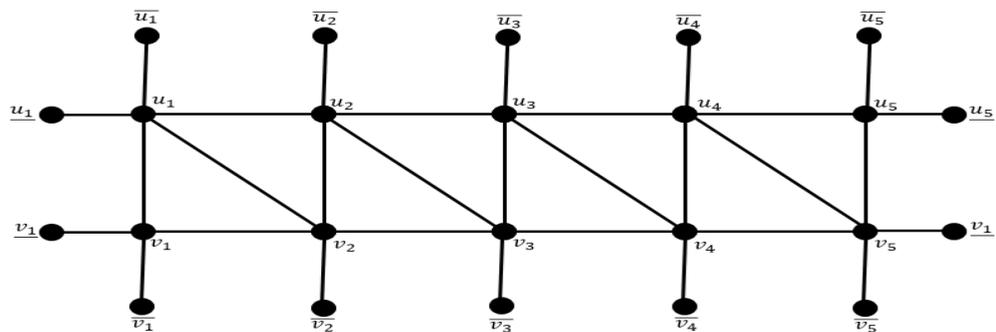


Gambar 2. 13 Graf TLP_5

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Beberapa Kelas Graf yang Berhubungan dengan Graf Ladder, 2017

Definisi 2.13 Graf triangular fence dinotasikan dengan TF_n adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan satu busur pada simpul $u_1, u_n, v_1,$ dan v_n dari TLP_n di mana busur tersebut terhubung dengan satu simpul baru yang masing-masing berbeda untuk $u_1, u_n, v_1,$ dan v_n . (Rahim & Susanti, 2017)

Contoh 2.13



Gambar 2. 14 Graf TF_5

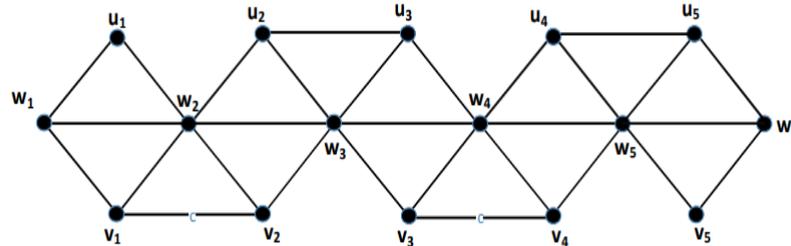
Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Beberapa Kelas Graf yang Berhubungan dengan Graf Ladder, 2017

Definisi 2.14 Graf tangga segitiga pita adalah graf dengan himpunan simpul yaitu $V(G) = \{u_i, v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i, w_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan himpunan busur yaitu

$$E(G) = \{w_i u_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i w_{i+1}, u_i w_{i+1}, v_i w_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_{2i-1} v_{2i}, u_{2i} u_{2i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\}.$$

(Atmadja, 2021)

Contoh 2.14

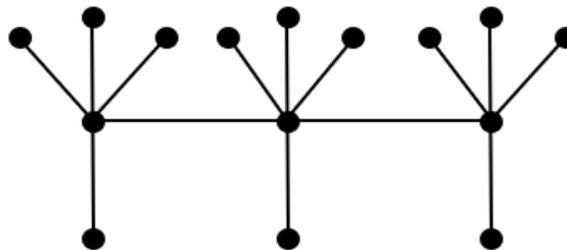


Gambar 2. 15 Graf tangga segitiga pita

Sumber gambar: Jurnal Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga Pita, 2021

Definisi 2.15 *Graf ulat atau pohon ulat (caterpillar tree) adalah graf yang setiap daunnya berjarak 1 dari simpul internal lintasan. Graf caterpillar pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Schwenk pada tahun 1973. Mereka mengatakan bahwa graf caterpillar adalah graf yang apabila simpul-simpul ujungnya dilenyapkan akan diperoleh graf lintasan. (Hasmawati, 2020)*

Contoh 2.15

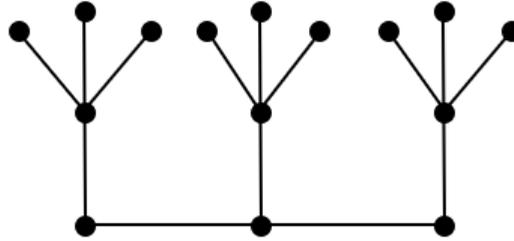


Gambar 2. 16 Graf caterpillar

Definisi 2.16 *Graf firecracker adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu simpul luar dari barisan graf bintang oleh suatu lintasan. Lintasan yang menghubungkan simpul-simpul luar dari barisan graf bintang disebut backbone dari graf firecracker. Graf firecracker juga bisa diperoleh dengan memindahkan busur-*

busur yang menghubungkan simpul-simpul pusat pada graf caterpillar ke salah satu simpul luar pada setiap simpul pusat dari graf caterpillar. (Alyani, 2019)

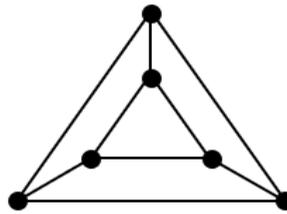
Contoh 2.16



Gambar 2. 17 Graf firecracker

Definisi 2.17 Graf prisma adalah graf kali antara siklus C_m , $m \geq 3$ dengan lintasan P_n , $n \geq 2$, ditulis $C_m \times P_n$. Graf prisma dinotasikan $P_{m,n}$.

Contoh 2.17

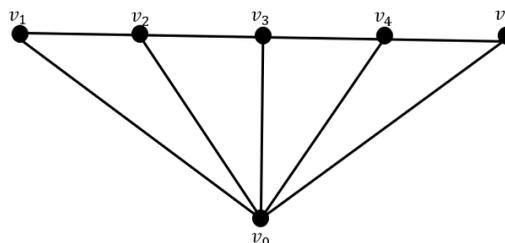


Gambar 2. 18 Graf prisma

Sumber gambar: Buku Pengantar dan Jenis-Jenis Graf, 2020

Definisi 2.18 Graf kipas dengan n simpul, $n \geq 3$ dinotasikan sebagai F_n , dengan $F_n = P_{n-1} + K_1$. Jika $v_0 \in K_1$ dan $v \in P_{n-1}$ maka busur $v_0v_i \in E(F_n)$ disebut jari-jari dari F_n . (Hasmawati, 2020)

Contoh 2.18



Gambar 2. 19 Graf kipas F_6

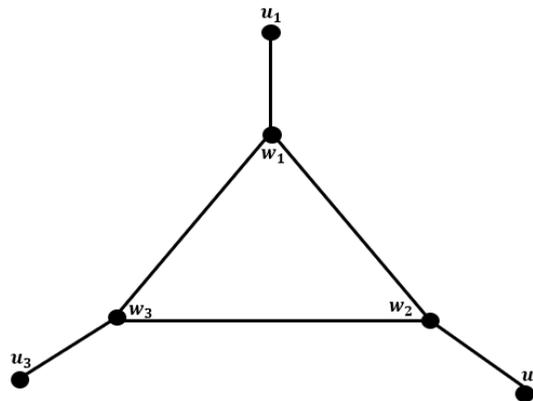
2.3 Pelabelan Harmonis

Pelabelan harmonis diperkenalkan pertama kali oleh Graham dan Sloane pada tahun 1980. Pelabelan harmonis didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.19 Misal $G = (V, E)$ suatu graf maka pemetaan $\lambda : V \rightarrow Z_{|E|}$ disebut suatu pelabelan harmonis pada G jika bobot setiap busur berbeda, dimana bobot bobot busur xy adalah $w(xy) = (\lambda(x) + \lambda(y)) \pmod{|E|}$.

Definisi 2.20 Misal $G = (V, E)$ suatu graf dan $\lambda : V \rightarrow Z_{|E|}$ suatu pemetaan harmonis pada G , maka disebut G graf harmonis.

Contoh 2.19



Gambar 2. 20 Pelabelan harmonis pada graf matahari SU_3

Pada Gambar 2.20, terdapat suatu pemetaan $\lambda : V \rightarrow Z_6$ yaitu

$$\lambda(u_1) = 0, \lambda(u_2) = 2, \lambda(u_3) = 4, \lambda(w_1) = 1, \lambda(w_2) = 3, \lambda(w_3) = 5.$$

Berdasarkan definisi pemetaan tersebut diperoleh bobot setiap busur dari graf matahari SU_3 adalah

$$\begin{aligned} w(w_1u_1) &= 1, & w(w_2u_2) &= 5, & w(w_3u_3) &= 3, \\ w(w_1w_2) &= 4, & w(w_2w_3) &= 2, & w(w_3w_1) &= 0. \end{aligned}$$

Karena setiap bobot busur berbeda, maka $\lambda : V \rightarrow Z_6$ mendefinisikan suatu pelabelan harmonis. Oleh karena itu graf matahari SU_3 merupakan suatu graf harmonis.

BAB III

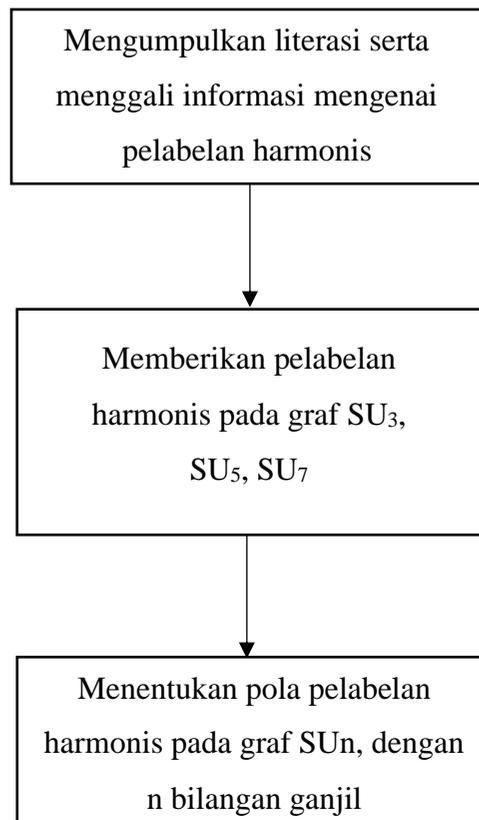
METODOLOGI

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka (*library research*), yaitu penelitian yang dilakukan oleh peneliti dengan mengumpulkan sejumlah buku-buku atau jurnal-jurnal yang berkaitan dengan masalah dan tujuan penelitian. Yang dilakukan dengan cara menelaah, mencermati, dan membandingkan sumber kepustakaan untuk memperoleh data.

3.2 Prosedur Penelitian

- Mengumpulkan literasi serta menggali informasi mengenai pelabelan harmonis,
- Memberikan pelabelan harmonis pada graf SU_3 , SU_5 , SU_7 ,
- Menentukan pola pelabelan harmonis pada graf SU_n , dengan n bilangan ganjil.



BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Graf Matahari SU_n

Graf matahari SU_n , $n \geq 3$, adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan K_1 sebanyak n kali kemudian mengaitkan masing-masing satu simpul di C_n ke graf K_1 . Pada graf matahari SU_n berlaku $|V(SU_n)| = |E(SU_n)| = 2n$.

Graf matahari pada skripsi ini mempunyai himpunan simpul dan himpunan busur sebagai berikut.

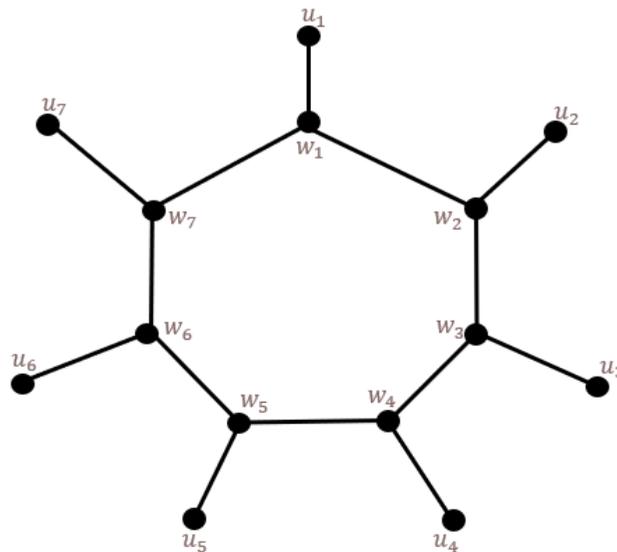
$$V(SU_n) = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\} \cup \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$$

$$E(SU_n) = \{w_1u_1, w_2u_2, w_3u_3, \dots, w_nu_n\} \cup \{w_1w_2, w_2w_3, \dots, w_{n-1}w_n\} \cup \{w_nw_1\}$$

dimana w_i disebut simpul dalam dan u_i disebut simpul luar. Gambar 4.1 mengilustrasikan graf matahari SU_7 , dengan himpunan simpul

$$V(SU_7) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$$

dan himpunan busur $E(SU_7) = \{w_1u_1, w_2u_2, w_3u_3, w_4u_4, w_5u_5, w_6u_6, w_7u_7\} \cup \{w_1w_2, w_2w_3, w_3w_4, w_4w_5, w_5w_6, w_6w_7\} \cup \{w_7w_1\}$.

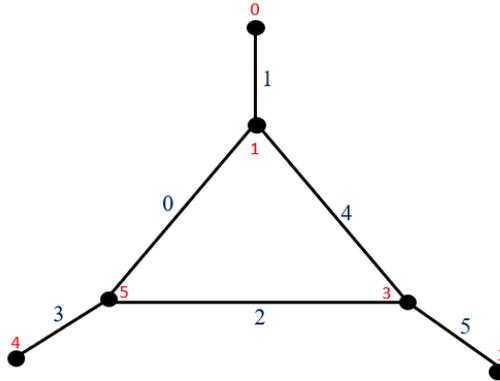


Gambar 4. 1 Graf matahari SU_7

4.2 Pelabelan harmonis pada graf SU_3, SU_5, SU_7

Pada bagian ini, akan diberikan pelabelan harmonis pada graf matahari SU_3, SU_5 , dan SU_7 .

a. Pelabelan harmonis pada graf SU_3



Gambar 4. 2 Pelabelan harmonis pada Graf SU_3

Diberikan suatu pemetaan $\lambda : V \rightarrow Z_6$ yaitu

$$\begin{aligned} \lambda(u_1) &= 0, & \lambda(u_2) &= 2, & \lambda(u_3) &= 4, \\ \lambda(w_1) &= 1, & \lambda(w_2) &= 3, & \lambda(w_3) &= 5. \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi pemetaan tersebut diperoleh bobot setiap busur dari graf SU_3 adalah

$$\begin{aligned} w(w_1u_1) &= 1, & w(w_2u_2) &= 5, & w(w_3u_3) &= 3, \\ w(w_1w_2) &= 4, & w(w_2w_3) &= 2, & w(w_3w_1) &= 0. \end{aligned}$$

Karena setiap bobot busur berbeda, maka $\lambda : V \rightarrow Z_6$ mendefinisikan suatu pelabelan harmonis. Oleh karena itu graf SU_3 merupakan suatu graf harmonis.

b. Pelabelan harmonis pada graf SU_5

Graf matahari SU_5 merupakan graf harmonis, karena terdapat suatu pemetaan $\lambda : V \rightarrow Z_{10}$ yaitu

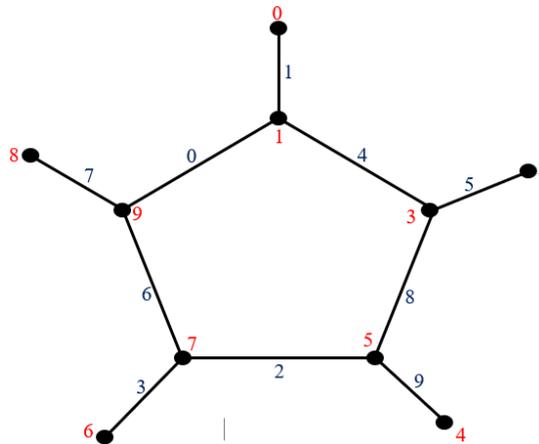
$$\begin{aligned} \lambda(u_1) &= 0, & \lambda(u_2) &= 2, & \lambda(u_3) &= 4, & \lambda(u_4) &= 6, & \lambda(u_5) &= 8, \\ \lambda(w_1) &= 1, & \lambda(w_2) &= 3, & \lambda(w_3) &= 5, & \lambda(w_4) &= 7, & \lambda(w_5) &= 9. \end{aligned}$$

Serta diperoleh bobot setiap busur dari graf SU_5 adalah

$$\begin{aligned} w(w_1u_1) &= 1, & w(w_2u_2) &= 5, & w(w_3u_3) &= 9, \\ w(w_4u_4) &= 3, & w(w_5u_5) &= 7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(w_1w_2) &= 4, & w(w_2w_3) &= 8, & w(w_3w_4) &= 2, \\
 w(w_4w_5) &= 6, & w(w_5w_1) &= 0.
 \end{aligned}$$

Karena setiap bobot busur berbeda, maka $\lambda : V \rightarrow Z_{10}$ mendefinisikan suatu pelabelan harmonis. Oleh karena itu graf SU_5 merupakan suatu graf harmonis.



Gambar 4. 3 Pelabelan harmonis pada Graf SU_5

c. Pelabelan harmonis pada graf SU_7

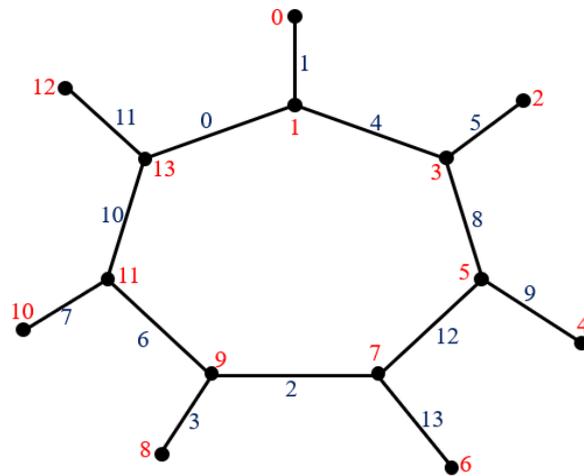
Graf matahari SU_7 merupakan graf harmonis, karena terdapat suatu pemetaan $\lambda : V \rightarrow Z_{14}$ yaitu

$$\begin{aligned}
 \lambda(u_1) &= 0, & \lambda(u_2) &= 2, & \lambda(u_3) &= 4, & \lambda(u_4) &= 6, \\
 \lambda(u_5) &= 8, & \lambda(u_6) &= 10, & \lambda(u_7) &= 12, \\
 \lambda(w_1) &= 1, & \lambda(w_2) &= 3, & \lambda(w_3) &= 5, & \lambda(w_4) &= 7, \\
 \lambda(w_5) &= 9, & \lambda(w_6) &= 11, & \lambda(w_7) &= 13.
 \end{aligned}$$

Serta diperoleh bobot setiap busur dari graf SU_7 adalah

$$\begin{aligned}
 w(w_1u_1) &= 1, & w(w_2u_2) &= 5, & w(w_3u_3) &= 9, & w(w_4u_4) &= 13, \\
 w(w_5u_5) &= 3, & w(w_6u_6) &= 7, & w(w_7u_7) &= 11, \\
 w(w_1w_2) &= 4, & w(w_2w_3) &= 8, & w(w_3w_4) &= 12, & w(w_4w_5) &= 2, \\
 w(w_5w_6) &= 6, & w(w_6w_7) &= 10, & w(w_7w_1) &= 0.
 \end{aligned}$$

Karena setiap bobot busur berbeda, maka $\lambda : V \rightarrow Z_{14}$ mendefinisikan suatu pelabelan harmonis. Oleh karena itu graf SU_7 merupakan suatu graf harmonis.



Gambar 4. 4 Pelabelan harmonis pada Graf SU_7

4.3 Pelabelan harmonis pada graf SU_n , dengan n bilangan ganjil

Pada bagian ini, akan diberikan teorema pelabelan harmonis pada graf SU_n , dengan n bilangan ganjil.

Teorema 1: *Graf matahari SU_n merupakan suatu graf harmonis untuk sebarang n bilangan ganjil.*

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa graf matahari SU_n merupakan suatu graf harmonis, maka akan dikonstruksi suatu pelabelan

$$f: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 2n - 1\}.$$

Dalam mengkonstruksi fungsi f dilakukan dengan konstruksi pada kasus sederhana yaitu untuk $n = 3, n = 5, n = 7$ seperti pada Gambar 4.2, Gambar 4.3, dan Gambar 4.4. Berdasarkan pelabelan pada kasus-kasus sederhana tersebut, dikonstruksi pelabelan pada graf SU_n untuk sebarang n ganjil sebagai berikut.

Definisikan pelabelan simpul $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 2n - 1\}$ sebagai berikut:

$$f(u_i) = 2i - 2 ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$f(w_i) = 2i - 1 ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Untuk menunjukkan bahwa fungsi f yang dikonstruksi merupakan fungsi harmonis untuk setiap n bilangan ganjil. Maka dibuktikan bahwa setiap bobot busur pada graf

SU_n berbeda. Untuk menentukan bobot busur pada graf matahari akan dibagi menjadi 3 kasus, yaitu

Kasus 1. $w(u_i w_i)$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

$$\begin{aligned} w(u_i w_i) &\equiv (f(u_i) + f(w_i)) \pmod{2n} \\ &\equiv (2i - 2 + 2i - 1) \pmod{2n} \\ &\equiv 4i - 3 \pmod{2n} \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa $w(u_i w_i) \equiv 4i - 3 \pmod{2n}$ untuk setiap i berbeda-beda. $w(u_i w_i)$ akan dibagi menjadi dua bagian, dimana $(4i - 3) < 2n$ dan $(4i - 3) > 2n$.

1. $w(u_i w_i)$, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2}$.

Jika $i = \frac{n+1}{2}$, maka

$$\begin{aligned} w(u_i w_i) &\equiv 4i - 3 \pmod{2n} \\ &\equiv 4\left(\frac{n+1}{2}\right) - 3 \pmod{2n} \\ &\equiv 2n - 1 \pmod{2n}. \end{aligned}$$

Karena $2n - 1 < 2n$.

Maka $(4i - 3) < 2n$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2}$.

Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned} w(u_i w_i) &\equiv (4i - 3) \pmod{2n} \\ &= 4i - 3. \end{aligned}$$

2. $w(u_i w_i)$, dengan $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \frac{n+1}{2} + 3 \dots, n$.

Jika $i = \frac{n+1}{2} + 1$, maka

$$\begin{aligned} w(u_i w_i) &\equiv 4i - 3 \pmod{2n} \\ &\equiv 4\left(\frac{n+1}{2} + 1\right) - 3 \pmod{2n} \\ &\equiv 2n + 3 \pmod{2n}. \end{aligned}$$

Karena $2n + 3 > 2n$.

Maka $(4i - 3) > 2n$, untuk setiap $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \frac{n+1}{2} + 3 \dots, n$.

Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned} w(u_i w_i) &\equiv (4i - 3) \pmod{(2n)} \\ &= 4i - 3 - 2nk \end{aligned}$$

untuk suatu k bilangan bulat positif.

- $w(u_i w_i) = 4i - 3$, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2}$.

$$w(u_1 w_1) < w(u_2 w_2) < w(u_3 w_3) < \dots < w\left(u_{\frac{n+1}{2}-2} w_{\frac{n+1}{2}-2}\right) <$$

$$w\left(u_{\frac{n+1}{2}-1} w_{\frac{n+1}{2}-1}\right) < w\left(u_{\frac{n+1}{2}} w_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$\text{atau } 1 < 5 < 9 < \dots < (2n - 9) < (2n - 5) < (2n - 1) \quad (1)$$

- $w(u_j w_j) = 4j - 3 - 2nk$, dengan $j = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \frac{n+1}{2} + 3, \dots, n$.

$$w\left(u_{\frac{n+1}{2}+1} w_{\frac{n+1}{2}+1}\right) < w\left(u_{\frac{n+1}{2}+2} w_{\frac{n+1}{2}+2}\right) < w\left(u_{\frac{n+1}{2}+3} w_{\frac{n+1}{2}+3}\right) < \dots <$$

$$w(u_{n-2} w_{n-2}) < w(u_{n-1} w_{n-1}) < w(u_n w_n)$$

$$\text{atau } 3 < 7 < 11 < \dots < (2n - 11) < (2n - 7) < (2n - 3) \quad (2)$$

Berdasarkan Persamaan (1) dan (2) maka, $w(u_i w_i) \neq w(u_j w_j)$ untuk $i =$

$1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2}$. dan $j = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \frac{n+1}{2} + 3, \dots, n$.

Kasus 2. $w(w_i w_{i+1})$ Untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} w(w_i w_{i+1}) &\equiv (f(w_i) + f(w_{i+1})) \pmod{(2n)} \\ &\equiv (2i - 1 + 2(i + 1) - 1) \pmod{(2n)} \\ &\equiv 4i \pmod{(2n)} \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa $w(w_i w_{i+1}) \equiv 4i \pmod{(2n)}$ untuk setiap i berbeda-beda.

$w(w_i w_{i+1})$ akan dibagi menjadi dua bagian, dimana $(4i) < 2n$ dan $(4i) > 2n$.

1. $w(w_i w_{i+1})$, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2} - 1$.

Jika $i = \frac{n+1}{2} - 1$, maka

$$\begin{aligned} w(w_i w_{i+1}) &\equiv 4i \pmod{(2n)} \\ &\equiv 4\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) \pmod{(2n)} \end{aligned}$$

$$\equiv 2n - 2 \pmod{(2n)}.$$

Karena $2n - 2 < 2n$.

Maka $(4i) < 2n$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2} - 1$.

Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned} w(w_i w_{i+1}) &\equiv (4i) \pmod{(2n)} \\ &= 4i. \end{aligned}$$

2. $w(w_i w_{i+1})$, dengan $i = \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n - 1$.

Jika $i = \frac{n+1}{2}$, maka

$$\begin{aligned} w(w_i w_{i+1}) &\equiv 4i \pmod{(2n)} \\ &\equiv 4 \left(\frac{n+1}{2} \right) \pmod{(2n)} \\ &\equiv 2n + 2 \pmod{(2n)}. \end{aligned}$$

Karena $2n + 2 > 2n$.

Maka $(4i) > 2n$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2} - 1$.

Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned} w(w_i w_{i+1}) &\equiv (4i) \pmod{(2n)} \\ &= 4i - 2nk \end{aligned}$$

untuk suatu k bilangan bulat positif.

- $w(w_i w_{i+1}) = 4i$, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2} - 1$.

$$\begin{aligned} w(w_1 w_2) &< w(w_2 w_3) < w(w_3 w_4) < \dots < w \left(w_{\frac{n+1}{2}-3} w_{\frac{n+1}{2}-2} \right) < \\ w \left(w_{\frac{n+1}{2}-2} w_{\frac{n+1}{2}-1} \right) &< w \left(w_{\frac{n+1}{2}-1} w_{\frac{n+1}{2}} \right) \text{ atau } 4 < 8 < 12 < \dots < (2n - 10) < \\ (2n - 6) &< (2n - 2) \end{aligned} \tag{3}$$

- $w(w_j w_{j+1}) = 4j - 2nk$, dengan $j = \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n - 1$.

$$\begin{aligned} w \left(w_{\frac{n+1}{2}} w_{\frac{n+1}{2}+1} \right) &< w \left(w_{\frac{n+1}{2}+1} w_{\frac{n+1}{2}+2} \right) < w \left(w_{\frac{n+1}{2}+2} w_{\frac{n+1}{2}+3} \right) < \dots < \\ w(w_{n-3} w_{n-2}) &< w(w_{n-2} w_{n-1}) < w(w_{n-1} w_n) \\ \text{atau } 2 &< 6 < 10 < \dots < (2n - 12) < (2n - 8) < (2n - 4) \end{aligned} \tag{4}$$

Berdasarkan Persamaan (3) dan (4) maka, $w(w_i w_{i+1}) \neq w(w_j w_{j+1})$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2} - 1$. dan $j = \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n - 1$.

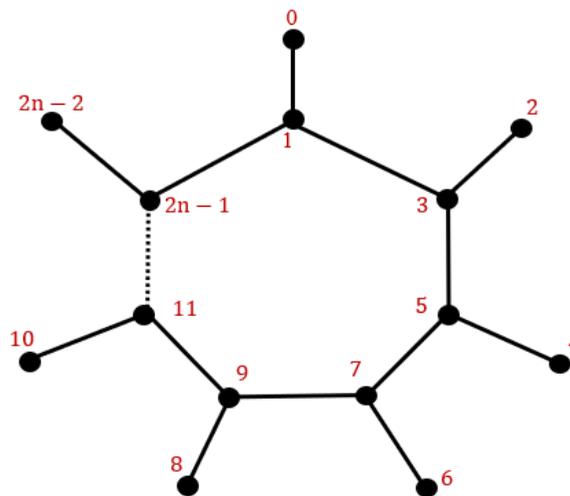
Kasus 3. $w(w_n w_1)$

$$\begin{aligned} w(w_n w_1) &\equiv (f(w_n) + f(w_1)) \pmod{2n} \\ &\equiv (2n - 1 + 1) \pmod{2n} \\ &\equiv 2n \pmod{2n} \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa bobot busur $w(u_i w_i)$ berbeda-beda, begitu juga dengan $w(w_i w_{i+1})$ menghasilkan bobot busur yang berbeda-beda, serta $w(u_i w_i), w(w_i w_{i+1}),$ dengan $w(w_n w_1)$ memiliki bobot busur yang berbeda-beda.

Dengan demikian diperoleh $f: V \rightarrow Z_{|E|}$ mendefinisikan suatu pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n . Sehingga graf matahari SU_n merupakan suatu graf harmonis untuk sebarang n bilangan ganjil.

Gambar 4.5 merupakan label simpul pada graf matahari SU_n



Gambar 4. 5 Pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan mengenai pelabelan harmonis pada graf matahari, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Graf matahari SU_n , dengan n bilangan ganjil merupakan graf harmonis.
2. Pola untuk pelabelan harmonis pada graf matahari SU_n , dengan n bilangan ganjil yaitu:
 - a. $f(u_i) = 2i - 2 ; i = 1, 2, 3, \dots, n$
 - b. $f(w_i) = 2i - 1 ; i = 1, 2, 3, \dots, n$

Dimana w_i disebut simpul dalam dan u_i disebut simpul luar

5.2 Saran

Saran yang dapat disampaikan untuk penelitian lebih lanjut yang berkaitan dengan penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Melakukan penelitian mengenai pelabelan harmonis pada graf matahari yang diperumum $(C_n \odot K_m)$;
- b. Mengembangkan lebih lanjut lagi mengenai pelabelan harmonis pada jenis-jenis graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Alyani, F. (2019). *Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Diamond dan Graf Bunga Sepatu*. Laporan Penelitian Dasar Keilmuan (PDK). Universitas Muhammadiyah Prof. DR. Hamka.
- Atmadja, K. (2021). Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga Pita. *Jurnal Sains Dan Matematika Unpam*, 4(1), 1–6.
- Atmadja, K., & Marhaeni. (2020). Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Jembatan XJn. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 3, 25–28.
- Atmadja, K., & Sugeng, K. A. (2017). Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga segitiga variasi Xn. *Prosiding SNM 2017*, 642–647.
- Azka, D. A., Lisaida, R., & Susanti, Y. (2017). Pelabelan Harmonis pada Graf Kincir Tiga dan Graf n-Ubur-ubur. *Seminar Matematika Dan Pendidikan Matematika UNY*, 15–20.
- Bača, M., & Youssef, M. Z. (2014). On harmonious labeling of corona graphs. *Journal of Applied Mathematics*, 2014.
- Frank, D. (1982). Harmonious Labelings of Windmill Graphs and Related Graphs. *Journal of Graph Theory*, 6, 85–87.
- Grahams, R. L., & Sloane, N. J. A. (1980). On Additive Bases and Harmonious Graphs. *SIAM J. ALG. DISC. METH*, 1(4), 382–404.
- Hasmawati. (2020). *Pengantar dan Jenis-Jenis Graf*. UPT Unhas Press.
- Hinding, N., Husain, W., & Massalesse, J. (2019). Harmonious labeling on prisms graph. *Journal of Physics: Conference Series*, 1341(6).
- Kurniawan. (2019). Pelabelan Harmonis Gabungan Graf Tangga Segitiga LSn, dengan Graf Tangga Segitiga Variasi Xn. *Jurnal Rekayasa Informasi*, 8(1), 46–51.
- Marsudi. (2016). *Teori Graf*. Universitas Brawijaya Press.

- Pradana, A. G., Utami, B., Silaban, D. R., & Sugeng, K. A. (2019). Harmonious labeling for the corona graphs of small complete graph. *AIP Conference Proceedings*, 2168.
- Rahayuningsih, S. (2018). *Teori Graf dan Penerapannya*. Universitas Wisnuwardhana Press Malang (Unidha Press).
- Rahim, A., & Susanti, Y. (2017). Pelabelan Harmonis pada Beberapa Kelas Graf yang Berhubungan dengan Graf Ladder. *Seminar Matematika Dan Pendidikan Matematika UNY*.
- Sari, I., Nugraha, N., & Kosasi, R. (2013). Pelabelan Harmonis pada Graf Timbangan. *UG Jurnal*, 7(5), 21–22.
- Siang, J. J. (2006). *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. ANDI Yogyakarta.
- Tanna, D. (2013). Harmonious Labeling of Certain Graphs. *International Journal of Advanced Engineering Research and Studies*, II(IV), 46–48.
- Wirnadian, P. (2010). *Pelabelan Harmonis pada Kombinasi Gabungan Graf Caterpillar dan Graf Firecracker Teratur*. Tesis. Universitas Indonesia.