

1007

**ANALISIS STABILITAS PADA
 AMBANG PERAMBATAN TERMAL KONVEKTIF**
 (Suatu Ilustrasi Perjalanan Menuju Rezim Chaos)



OLBB
ERFAN
 86 03 141



PERPUSTAKAAN PUSAT UNIV. HASANUDDIN	
Tgl. terima	24-05-93
Asal dari	-
Pembelinya	ilsatry des
Uraian	Horba
No. Inventaris	8407 1007
No. Rad	

JURUSAN FISIKA
 FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
 UNIVERSITAS HASANUDDIN

1992

ANALISIS STABILITAS PADA
AMBANG PERAMBATAN TERMAL KONVEKTIF
(SUATU ILUSTRASI PERJALANAN MENJAU REZIM CHAOS)

S K R I P S I

Untuk Melengkapi Tugas-Tugas dan
Memenuhi Syarat untuk Memperoleh
Gelar Sarjana Fisika

Oleh :

F R F A N
86 03 141

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
UJUNG PANDANG
1992

ANALISIS STABILITAS PADA
AMBANG PERAMBATAN TERMAL KONVEKTIF
(SUATU ILUSTRASI PERJALANAN MENUJU REZIM CHAOS)

Disetujui Oleh
Pembimbing Utama



Dr. Dadang Ahmad Suriamihardja
Nip. 130 878 550

Pada Tanggal, 14 Desember 1992

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis mendapat bimbingan secara genial dari Bapak Dr. Dadang Ahmad Suriamihardja, beliau sebagai pembimbing utama penulis. Olehnya itu, pada kesempatan ini penulis menghaturkan rasa terima kasih yang sedalam-dalamnya.

Kepada Bapak Dr. H. Abdullah Renreng ucapan terima kasih penulis haturkan atas saran-saran yang diberikan. Demikian pula kepada segenap staf pengajar di jurusan Fisika atas kerelaan memindahkan pengetahuannya kepada penulis selama kuliah di jurusan Fisika Universitas Hasanuddin.

Selain dari itu, penulis ingin menyampaikan salam hormat kepada segenap rekan-rekan penulis yang tidak sempat disebutkan satu persatu atas bantuan dan kerelaannya berbagi suka dan duka dalam berbagai aktifitas. Demikian pula kepada rekan-rekan yang tergabung dalam kelompok study Hydrosciences.

Buat Ayahanda Syamsuddin Genda dan Ibunda Andi Markisah, skripsi ini kupersembahkan kepadanya. Tak lupa penulis haturkan terima kasih yang setinggi-tingginya kepada adik-adik penulis ; Akmal, Fadly dan Wirda serta kekasihku Ir. Asmiaty Sahur atas pengertian dan bantuannya.

Ujung Pandang, Desember 1992

P e n u l i s

ABSTRACT

The critical point of Rayleigh-Benard convection system has been re-investigated using the governing equations which compare the equation of mass, momentum and thermal conduction by expanding velocity and temperature fields in Fourier series through linear version.

The other critical points have been obtained through nonlinear stability analysis by using adiabatic elimination method and solved numerically. The results have been obtained up to the so-called the onset of chaos regime that of course initialized by finding the critical point of convective regime.

Key words : *adiabatic elimination method, linear stability analysis, nonlinear stability analysis, convective regime, chaos regime.*

SARI BACAAN

Nilai-nilai kritis pada sistem dinamika konveksi Rayleigh-Benard telah ditelusuri ulang dari persamaan massa, momentum dan persamaan hantaran termal dengan mengekspansikan medan kecepatan dan medan temperatur dalam deret Fourier yang ditinjau melalui versi persamaan linear.

Nilai-nilai kritis lainnya diperoleh lewat analisis stabilitas non-linear dengan metode eliminasi adiabatik dan diselesaikan secara numerik. Perolehan nilai-nilai kritis tersebut dihampiri sampai mendekati ambang rezim chaos melalui titik kritis rezim konvektif.

Kata pustaka : metode eliminasi adiabatik, analisis stabilitas linear, analisis stabilitas non-linear, rezim konvektif, rezim chaos.

DAFTAR ISI

	halaman
Kata Pengantar	iii
Abstract	v
Sari Bacaan	vi
Daftar Isi	vii
Bab I PENDAHULUAN	1
I.1 Latar Belakang Masalah	1
I.2 Tujuan Penelitian	3
I.3 Ruang Lingkup Penelitian	4
Bab II TINJAUAN PUSTAKA	5
II.1 Konveksi Rayleigh, Benard	5
II.2 Persamaan Kontinuitas dan Persamaan Gerak Zahir	6
II.3 Pendekatan Boussinesq	12
II.4 Peroses Non-dimensionalisasi	14
BAB III METODE PENELITIAN	19
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	22
IV.1 Pendefinisian Suku-suku Pertubasi	22
IV.2 Analisis Stabilitas Linear	22
IV.3 Analisis Stabilitas Non-linear	30
IV.4 Solusi Analitik Analisis Stabilitas Non-linear	35

IV.5	Penyelesaian Persamaan Dinamika Sistem Dengan Metode Iterasi Titik Tetap	38
IV.6	Solusi Numerik Analisis Stabilitas Non-linear	41
BAB V	KESIMPULAN DAN SARAN	45
V.1	Kesimpulan	45
V.2	Saran	46
	DAFTAR PUSTAKA	47
	LAMPIRAN	48

BAB I

PENDAHULUAN



I.1 Latar Belakang Masalah

Mekanika dapat dikatakan merupakan bagian dari ilmu fisika yang paling tua umurnya. Selain dikarenakan manusia terkesan akan obyek yang bergerak, juga disebabkan oleh keingintahuan akan penyebab Bergeraknya obyek yang ditinjau. Cabang mekanika yang mempersoalkan penyebab dan kelakuan gerak obyek dikenal dengan istilah dinamika yang merupakan bagian dari mekanika.

Dinamika suatu sistem fisis merupakan obyek yang menarik untuk dikaji, agar pola dan perilaku sistem tersebut dapat diketahui. Untuk menuju ke arah itu, maka suatu sistem fisis terlebih dahulu harus dapat diperikan ke dalam model matematis, supaya ilustrasi tentang sistem itu dapat dijelaskan.

Interpretasi matematis yang kerap kali digunakan pada suatu dinamika sistem fisis memerlukan pengetahuan kalkulus, ia merupakan cabang matematika yang membahas tentang perubahan (*change*), atau yang biasa dikenal dengan kalkulus diferensial atau persamaan diferensial.

Sejalan dengan tinjauan tentang dinamika, maka sebagai salah satu sistem fisis yang akan ditinjau adalah

sistem konveksi Rayleigh-Benard yang merupakan kajian menarik, dan merupakan dinamika non-linear yang melibatkan masalah kestabilan.

Sistem ini dibatasi oleh pelat paralel sebagai dasar (*bottom*) dan tutup (*top*) yang di dalamnya diisi zalir tak-termampatkan (*incompressible fluid*). Apabila terhadapnya diberikan proses pemanasan, maka pada mulanya perambatan termal dalam zalir merupakan perambatan konduksi. Kemudian perubahan pada sistem ini pertama terjadi ketika zalir bertemperatur dingin menuju ke pelat dasar sistem yang merupakan sumber termal, yang dihambat oleh gaya kekentalan (*viscosity*), dan zalir bertemperatur panas menuju ke pelat atas sistem. Setelah beda suhu di antara kedua pelat tersebut melewati suatu ambang gradien temperatur, sistem pada keadaan ini berada dalam kondisi rezim konveksi.

Sebelum sistem menjadi berada pada rezim konveksi, sebagai parameter penunjuknya adalah nilai genting (kritis) di antara rezim konduksi dan konveksi berupa bilangan tak berdimensi, yang dikenal dengan bilangan Rayleigh kritis dan disimbolkan dengan $R_c = \frac{27}{4} \pi^4$.

Ketika $R_c > \frac{27}{4} \pi^4$, maka kestabilan-kestabilan baru akan tercipta. Untuk keperluan mendapatkan nilai-nilai stabil digunakan pemetaan iterasi titik tetap (*fixed point iteration*) dengan memanfaatkan fungsi iterasi dari

persamaan Landau (*Landau equation*) yang diperoleh dari analisis kestabilan non-linear pada metode eliminasi adiabatik (*adiabatic elimination method*).

Urutan pencabangan sebagai nilai titik-titik stabil selanjutnya diperoleh dengan pemetaan fungsi terhadap dirinya sendiri (*maps into itself*) yang mengakibatkan terjadinya pelipatduaan periode (*periode doubling*). Dengan bervariasi parameter tertentu, apabila urutan pencabangan (*bifurcation*) tidak lagi terhitung titik-titik stabilnya, maka ilustrasi demikian menggambarkan sistem berada pada rezim chaos.

I.2 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yang hendak dicapai adalah :

1. Mendapatkan nilai kritis dengan analisis stabilitas linear.
2. Mendapatkan nilai kritis dengan analisis stabilitas non-linear.

I.3 Ruang Lingkup Penelitian

Penelitian ini dilakukan untuk menghubungkan tiga hal yaitu sistem fisis konveksi Rayleigh-Benard, formulasi matematis dan analisis- analisis kestabilan. Persamaan Navier-Stokes yang melukiskan gerak zalir Newton tak-termampatkan digandengkan dengan persamaan hantaran termal. Dengan mengenakan syarat zalir tak-termampatkan dan syarat batas-syarat batas kotak terhadap dinamika konveksi melalui gandengan persamaan-persamaan kekekalan maka medan kecepatan dan medan temperatur dapat diformulasikan.

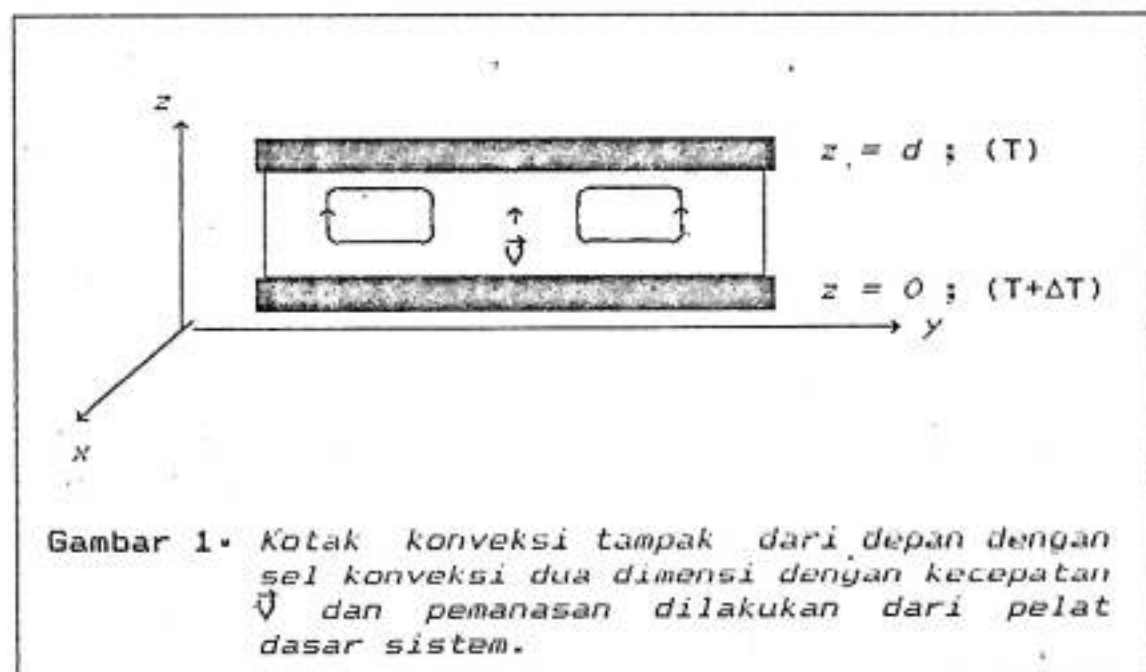
Selanjutnya perolehan ini ditelaah dengan analisis kestabilan pada keadaan sebelum dan setelah bilangan Rayleigh kritis R_c terlewati.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Konveksi Rayleigh-Benard

Konveksi Rayleigh-Benard merupakan sebuah sistem fisis yang menjadi contoh kajian dinamika non-linear. Pada sistem ini terdapat perlakuan konveksi bebas (*free convection*) di antara pelat dasar dan pelat tutup sistem. Sistem yang ditinjau berupa kotak konveksi (*convection box*) yang memiliki diagram secara skematik seperti terlihat pada Gambar 1 di bawah ini.



Pada mulanya, kestabilan rezim konduksi dapat dipertahankan sebelum harga ambang temperatur ΔT tertentu terlewati, yaitu selama harga parameter sistem di bawah bilangan Rayleigh kritis $R_c = \frac{27}{4} \pi^4$, yang berarti kecepatan molekul zalir $\vec{v} = 0$. Ketika harga

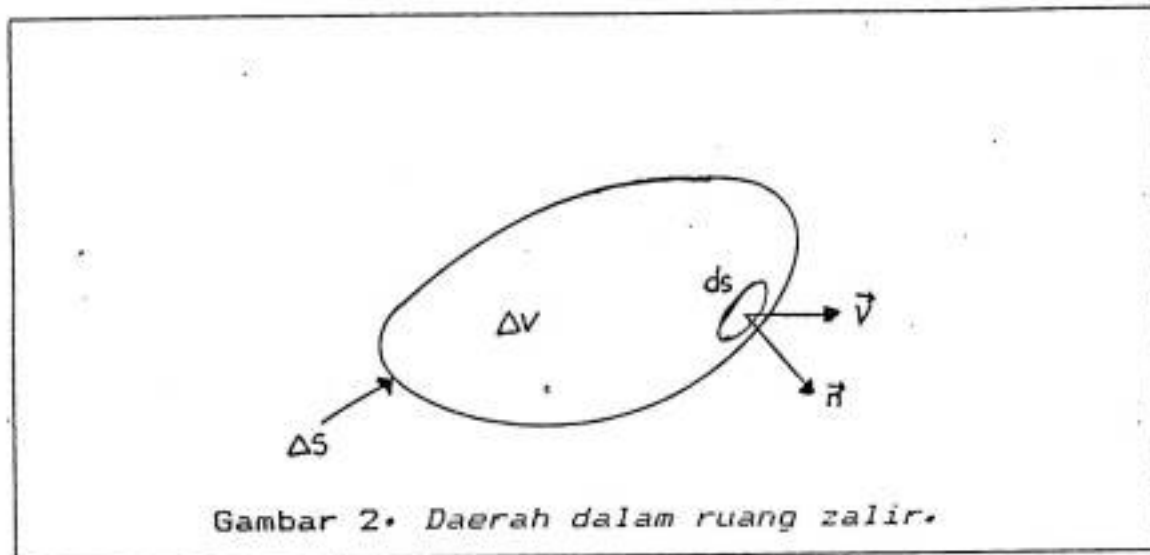
bilangan Rayleigh $R > R'_c$, yang berarti pula bahwa kecepatan molekul zalir mulai tampak $\vec{v} \neq 0$, maka zalir sistem kehilangan kestabilannya pada rezim konduksi, yang mengakibatkan zalir cenderung berdaur. Walaupun pada kenyataannya dauran ini dilawan oleh gaya kekentalan zalir, yang menghambat zalir untuk bergerak, namun tetap akan memperlihatkan dauran. Pada keadaan demikian sistem dikatakan dalam rezim konveksi.

Konsekuensi logisnya adalah zalir yang bertemperatur panas dengan kerapatan molekul relatif kecil bergerak meninggalkan pelat dasar sistem, sebaliknya zalir yang bertemperatur dingin dengan kerapatan molekul relatif besar bergerak ke pelat dasar sistem.

II.2 Persamaan Kontinuitas dan Persamaan Gerak Zalir

Dalam memahami gerak dan sifat kemalaran zalir maka diperlukan sebuah volume kontrol yang menggambarkan elemen volume dari sistem yang ditinjau.

Dengan mengandaikan bahwa elemen volume merupakan daerah dalam ruang zalir, maka pada daerah itu dianggap tidak ada sumber ataupun tempat bagi zalir untuk dapat bocor. Dengan demikian sesuai dengan hukum kekekalan massa, maka jumlah massa zalir dalam ruang tidak mengalami perubahan. Secara sederhana, Gambar 2 melengkapi uraian di atas.



Volume total yang dipandang sebagai Δv dibatasi oleh permukaan Δs . Elemen luas ds , gaya normal \vec{n} serta kecepatan zahir \vec{v} merupakan besaran yang diperlukan dalam mengarah ke penelaahan matematisnya.

Jumlah fluks massa yang keluar menembus permukaan Δs persatuan waktu adalah

$$\int \vec{n} \cdot (\rho \vec{v}) ds \quad (II.1)$$

dengan ρ adalah rapat massa zahir.

Perubahan massa dalam volume Δv per satuan waktu adalah

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dv \quad (II.2)$$

Kekekalan massa menghendaki bahwa kecepatan perubahan massa dalam volume v adalah sama dengan fluks massa yang melewati permukaan

$$\int_{\Delta s} \vec{n} \cdot (\rho \vec{V}) ds = - \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \int_{\Delta v} \rho dv \quad (II.3)$$

Dengan menggunakan analisa vektor, maka persamaan (II.3) menjadi

$$\int_{\Delta s} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) dv + \int_{\Delta v} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) dv = 0 \quad (II.4)$$

atau

$$\int_{\Delta v} \left[\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] dv = 0 \quad (II.5)$$

Kembali ke uraian semula, bahwa pada daerah ruang kontrol Δv zahir tidak ada sumber, sehingga persamaan (II.5) menjadi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (II.6)$$

Persamaan ini disebut sebagai persamaan kontinuitas (*continuity equation*).

Jika aliran mantap, maka rapat jenis zahir tidak mengalami perubahan terhadap waktu, sehingga $\partial \rho / \partial t = 0$, yang menghasilkan

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{II.7})$$

Sedangkan untuk zilir tak-termampatkan (*incompressible fluid*), rapat jenis zilir tidak mengalami perubahan terhadap ruang, sehingga merupakan tetapan terhadap posisi (x, y, z) , maka dari persamaan (II.7) diperoleh

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{II.8})$$

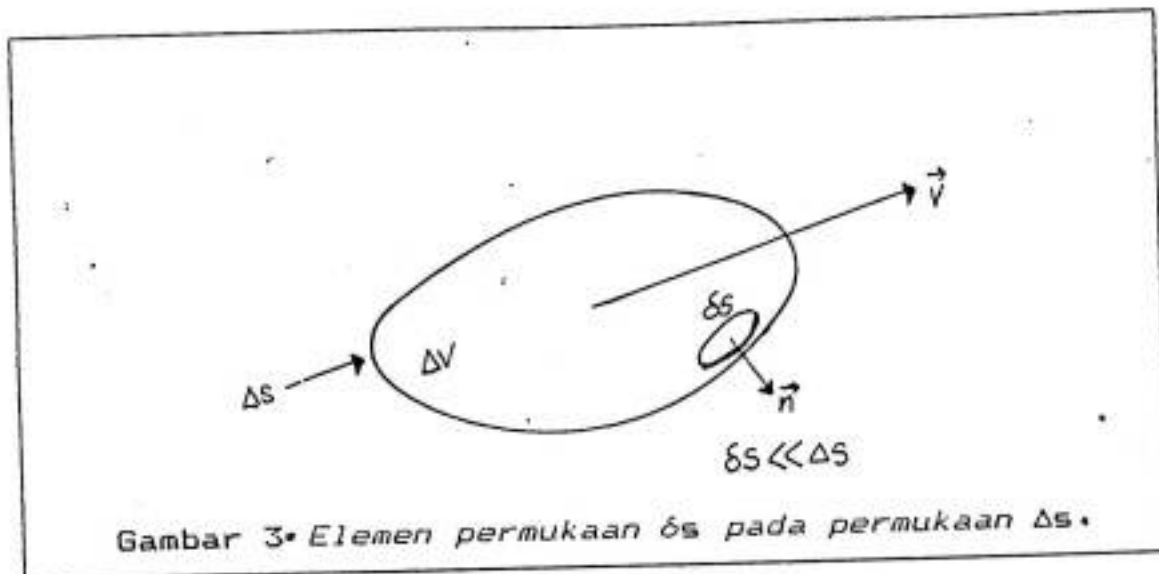
Bila molekul zilir memiliki massa tetap $(\rho \Delta v)$, dengan ρ menyatakan rapat massa zilir dan Δv merupakan volume yang dibatasi oleh permukaan Δs dan dianggap bahwa δs menyatakan suatu elemen pada permukaan serta \vec{n} dan p merupakan vektor normal dan tekanan di δs , maka besarnya gaya pada molekul zilir untuk luasan δs adalah

$$-P\vec{n}\delta s \quad (\text{II.9})$$

Sehingga gaya total pada molekul zilir dapat dituliskan dalam bentuk

$$- \int_{\Delta s} P\vec{n}\delta s \quad (\text{II.10})$$

Ungkapan ini dapat diperjelas dengan memandang Gambar 3.



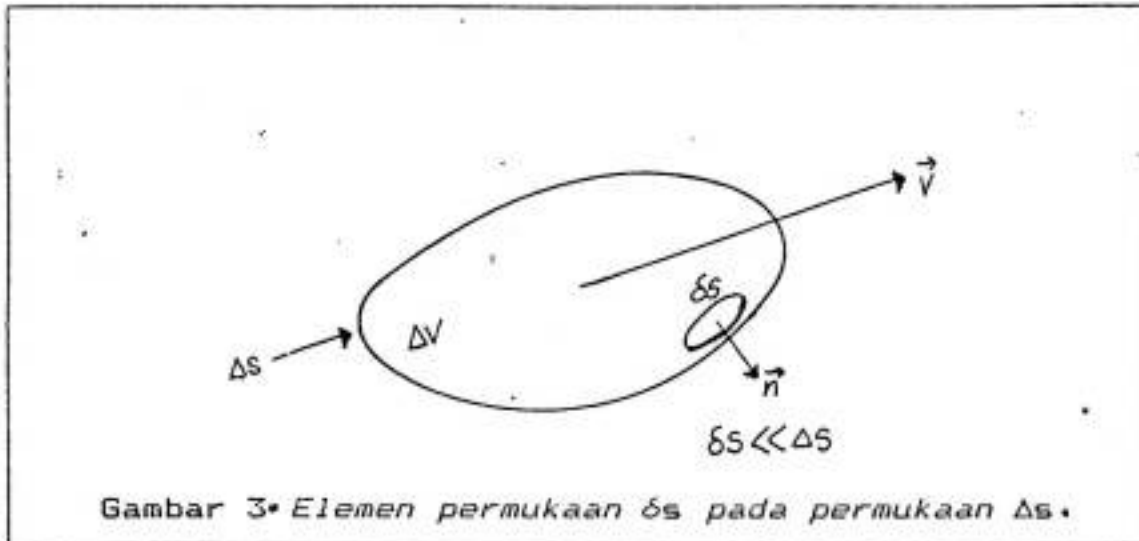
Menurut analisa vektor ungkapan di atas adalah sama dengan

$$-\int_{\Delta s} P \vec{n} \delta s = -\int_{\Delta V} \vec{\nabla} P \delta v \quad (\text{II.11})$$

Dengan mengandaikan bahwa besar gaya luar pada satuan massa untuk setiap elemen volume δv adalah \vec{F} , maka total gaya luar yang bekerja pada molekul zalir dapat dituliskan dalam bentuk

$$\int_{\Delta V} \rho \vec{F} \delta v \quad (\text{II.12})$$

Dari uraian-uraian di atas dapat disusun persamaan gerak untuk suatu molekul zalir



Menurut analisa vektor ungkapan di atas adalah sama dengan

$$-\int_{\Delta s} P \vec{n} \delta s = -\int_{\Delta V} \vec{\nabla} P \delta v \quad (\text{II.11})$$

Dengan mengandaikan bahwa besar gaya luar pada satuan massa untuk setiap elemen volume δv adalah \vec{F} , maka total gaya luar yang bekerja pada molekul zalir dapat dituliskan dalam bentuk

$$\int_{\Delta V} \rho \vec{F} \delta v \quad (\text{II.12})$$

Dari uraian-uraian di atas dapat disusun persamaan gerak untuk suatu molekul zalir



$$\int (\rho \vec{F} - \vec{\nabla} P) \delta v = + \frac{d\vec{V}}{dt} \int (\rho \delta v) \quad (II.13)$$

yang tidak lain persamaan ini merupakan hukum II Newton, yang juga dapat dituliskan seperti

$$(\rho \vec{F} - \vec{\nabla} P) \delta v = \frac{d\vec{V}}{dt} (\rho \delta v) \quad (II.14)$$

dengan mengambil δv mendekati nol, maka

$$(\rho \vec{F} - \vec{\nabla} P) = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (II.15)$$

atau

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{F} \quad (II.16)$$

persamaan terakhir ini adalah persamaan Euler untuk suatu molekul zahir.

Gaya gravitasi $\vec{g} = -g\hat{k}$, bila dihubungkan dengan sistem yang sedang ditinjau, maka persamaan (II.15) kembali dapat dituliskan dalam bentuk

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = - \vec{\nabla} P - \rho g \hat{k} \quad (II.17)$$

Sedangkan gaya gesekan karena kekentalan zahir yang juga mempengaruhi gerakan zahir pada sistem akan dibahas pada bagian II.3, pendekatan Boussinesq.

II.3 Pendekatan Boussinesq

Medan kecepatan, temperatur dan tekanan untuk mekanisme sistem ini dinotasikan dalam variabel ruang dan waktu yaitu $\vec{v} = (u(t,x,y,z), v(t,x,y,z), w(t,x,y,z))$, $p = p(t,x,y,z)$ dan $T = T(t,x,y,z)$, sedangkan medan gravitasi disimbolkan menurut sifat gravitasi bumi sebagai $\vec{g} = -g\hat{k}$. Demikian pula dengan kerapatan molekul zalir setelah mengalami perubahan dari harga kerapatan molekul zalir rata-rata ρ_0 (sebelum sistem berada pada rezim konveksi), $T = T_0$) menjadi $\rho = \rho(t,x,y,z)$.

Untuk sistem konveksi Rayleigh-Benard, perubahan kerapatan molekul zalir relatif kecil, sehingga diambil suatu pendekatan bahwa

$$\left| \frac{\rho(t,x,y,z) - \rho_0}{\rho_0} \right| \ll 1$$

Pendekatan ini dikenal sebagai pendekatan Boussinesq (*Boussinesq approximation*), yang hendak digunakan dalam persamaan gerak zalir (II.16).

Gaya gravitasi $\rho g\hat{k} = \vec{\nabla}(\rho g z)$ dapat diekspresikan sebagai gradien potensial, sehingga persamaan (II.17) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho + gz} \right) \quad (\text{II.18})$$

Kembali ke pendekatan (II.17), maka percepatan inersial pada persamaan (II.16) dapat didekati oleh

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} + (\rho - \rho_0) \frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Demikian pula pada setiap lapisan zalir, gaya gravitasi dapat dituliskan sebagai

$$-\rho_0 g \hat{k} - (\rho - \rho_0) g \hat{k}$$

sehingga suku $(\rho - \rho_0) d\vec{v}/dt$ diabaikan, karena jauh lebih kecil dari pada $\rho_0 d\vec{v}/dt$, demikian pula $(\rho - \rho_0) g \hat{k}$ diabaikan terhadap $\rho_0 g \hat{k}$. Ketika pendekatan ini diterapkan pada persamaan (II.16), akan diperoleh persamaan Boussinesq seperti

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P - \rho g \hat{k} \quad (\text{II.19})$$

Gaya gesekan kekentalan zalir akan melibatkan turunan kedua medan kecepatan $\nabla^2 \vec{v}$, sehingga persamaan (II.19) bertambah sukunya dan dituliskan menjadi

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \vec{v} - \frac{\rho g \hat{k}}{\rho_0} \quad (\text{II.20})$$

dengan besaran $\nu = \mu/\rho_0$ adalah kekentalan kinematik zalir, μ adalah kekentalan dinamik zalir, $\rho/\rho_0 = -\alpha\Delta T$ merupakan variasi kerapatan molekul zalir terhadap perubahan temperatur pertubasi dan α sebagai koefisien ekspansi termal.

Dengan ekspansi turunan Lagrangian, maka ruas kiri persamaan (II.20) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \quad (\text{II.21})$$

Hasil substitusi persamaan (II.21) ke dalam persamaan (II.20) akan menghasilkan persamaan momentum dalam bentuk

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}P + \nu\nabla^2\vec{v} + g\alpha\Delta T\hat{k} \quad (\text{II.22})$$

dua suku pada sisi kiri persamaan (II.22) masing-masing merupakan turunan kecepatan lokal dan suku konveksi.

II.4 Proses Non-dimensionalisasi

Proses non-dimensionalisasi bagi setiap persamaan fisis seperti persamaan (II.22) merupakan jalan menuju ke solusi numeriknya. Terutama untuk sistem konveksi Rayleigh-Benard, proses non-dimensionalisasi bagi persamaan momentum (II.22) diarahkan untuk mendapatkan bilangan tak-berdimensi Rayleigh.

Dari setiap besaran yang ditinjau pada sebuah persamaan fisis, terlebih dahulu didapatkan besaran yang jika dioperasikan terhadapnya besaran tersebut berubah menjadi besaran tak-berdimensi lagi. Bagi persamaan (II.22), hal ini dapat diperlihatkan pada Tabel 1.

Tabel 1. *Proses Non-dimensionalisasi*

Berdimensi	Tak-berdimensi
t	$\frac{d^2 t_x}{K_T}$
\vec{v}	$\frac{K_T \vec{v}_x}{d}$
P	$\frac{\rho_0 K_T^2 \Phi_x}{d^2}$
$\vec{\nabla}$	$\frac{\vec{\nabla}_x}{d}$
ΔT	$\frac{\beta d v_0}{K_T}$
∂_t atau $\partial/\partial t$	$\frac{K_T \partial_t x}{d^2}$
(x, y, z)	$d(x_x, y_x, z_x)$

Besaran-besaran dalam Tabel 1 masing-masing adalah :
 d merupakan jarak antara pelat atas dan pelat bawah sistem, K_T adalah difusivitas termal kinematik zat cair. Sedangkan besaran t_* , \vec{V}_* , $\bar{\Phi}_*$, θ_* dan $\vec{\nabla}_*$ masing-masing merupakan simbol besaran tak berdimensi untuk besaran waktu, kecepatan, tekanan, suhu dan operator gradien.

Proses non-dimensionalisasi bagi persamaan (II.22) akan didapatkan dengan terlebih dahulu membagi persamaan ini dengan besaran K_T , sehingga diperoleh persamaan seperti berikut

$$\frac{1}{K_T} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{K_T} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{K_T \rho_0} \nabla \bar{P} + \sigma \nabla^2 \vec{V} + \frac{g \alpha \Delta T \hat{k}}{K_T} \quad (\text{II.23})$$

dengan $\sigma = \nu / K_T$ merupakan bilangan Prandtl.

Terhadap persamaan (II.23), besaran-besaran berdimensi digantikan dengan besaran tak-berdimensi berdasarkan Tabel 1, sehingga persamaan tersebut terlihat seperti

$$\begin{aligned} \frac{K_T}{d^3} \frac{\partial \vec{V}_*}{\partial t_*} + \frac{K_T}{d^3} (\vec{V}_* \cdot \vec{\nabla}_*) \vec{V}_* &= -\frac{K_T}{d^3} \vec{\nabla}_* \bar{\Phi}_* + \\ &+ \frac{K_T}{d^3} \sigma \nabla_*^2 \vec{V}_* + \frac{g \alpha \Delta T}{\nu} \theta_* \hat{k} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

atau

$$\frac{\partial \vec{v}_*}{\partial t_*} + (\vec{v}_* \cdot \nabla_*) \vec{v}_* = -\nabla_* \Phi_* + \sigma \nabla_*^2 \vec{v}_* + \frac{g \alpha \Delta T d^3}{\nu K_T} \sigma \hat{k}_* \quad (II.25)$$

Terhadap persamaan terakhir ini, bilangan $\frac{g \alpha \Delta T d^3}{\nu K_T}$ diganti dengan bilangan R sebagai bilangan Rayleigh, kemudian tanda bintang (*star*) dihilangkan, sehingga persamaan momentum tak-berdimensi atau persamaan Navier-Stokes (*Navier-Stokes Equations*) didapatkan seperti

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \Phi + \sigma \nabla^2 \vec{v} + R \sigma \hat{k} \quad (II.26)$$

Persamaan (II.26) merupakan medan kecepatan untuk sistem yang sedang ditinjau dan medan temperaturnya diberikan oleh persamaan konduktivitas termal seperti

$$\frac{dT}{dt} = K_T \nabla^2 T \quad (II.27)$$

Karena fluida dianggap encer maka suku kekentalan pada persamaan (II.27) diabaikan, walaupun suku tersebut pada persamaan (II.26) juga akan diabaikan. Dengan ekspansi turunan Lagrangian seperti pada persamaan (II.21), maka persamaan (II.27) terbaca sebagai

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = K_T \nabla^2 T \quad (\text{II.28})$$

Terhadap persamaan (II.28) juga dikenai proses non-dimensionalisasi, dengan cara yang sama dalam mendapatkan persamaan Navier-Stokes tak-berdimensi, yang hasilnya dapat dilihat pada persamaan berikut

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\theta = \nabla^2 \theta \quad (\text{II.29})$$

Dengan demikian persamaan (II.26) dan persamaan (II.29) merupakan persamaan medan kecepatan dan medan temperatur yang sudah tak-berdimensi untuk sistem konveksi Rayleigh-Benard.

BAB III METODE PENELITIAN

Persamaan Navier-Stokes (II.26) dan persamaan konduktivitas termal (II.29) tak-berdimensi yang telah diturunkan, merupakan medan kecepatan dan temperatur bagi sistem konveksi Rayleigh-Benard.

Penelitian kestabilan rezim sistem diupayakan dengan memanfaatkan kedua persamaan di atas. Analisis dilakukan dengan tiga pendekatan, yaitu :

1. Pendekatan linear

Persamaan (II.26) dan (II.29) dilinearisasi, selanjutnya diekspansikan dalam deret Fourier yang sebelumnya diberlakukan beberapa syarat batas.

2. Pendekatan non-linear

Medan pertubasi sistem diberikan dalam sebuah persamaan diferensial yang melibatkan suku linear dan non-linear.

3. Pendekatan numerik

Persamaan diferensial non-linear yang diperoleh pada analisis kestabilan non-linear dikerjakan dengan metode iterasi titik tetap.

Dengan memanfaatkan ketiga pendekatan di atas, maka kestabilan rezim sistem dapat diselidiki. Langkah kerja yang dilakukan dalam menyelidiki kestabilan rezim sistem adalah sebagai berikut :

1. Mengandaikan medan kecepatan dan temperatur yang telah diekspansikan dalam deret Fourier memiliki solusi dalam bentuk eksponensial terhadap waktu.
2. Mendapatkan persamaan karakteristik, berikut analisisnya.
3. Diambil solusi persamaan karakteristik yang menentukan keadaan batas (*marginal*), guna memperoleh bilangan Rayleigh kritis.
4. Mengacu pada pendekatan linear, persamaan diferensial non-linear akan dikembangkan.
5. Diekspansikan solusi linear dalam bentuk fungsi pribadi dasar dari operator linear. Selanjutnya dipilah menjadi suku yang menggambarkan batas dan suku-suku non-linear. Dari hasil pemilahan dilakukan :
 - a. Pendiferensialan terhadap waktu pada masing-masing kelompok suku.
 - b. Kelompok suku non-linear dipotong sampai pada suku-suku kwadratik, menyusul diberlakukannya aturan seleksi atas penjumlahan suku-sukunya.

6. Hasil yang didapat pada langkah (5a) dan (5b) didekati dengan metode eliminasi adiabatik (*adiabatic elimination methods*), selanjutnya diperoleh persamaan diferensial non-linear yang baru.
7. Penggambaran dinamika sistem atas rujukan perolehan pada langkah (6) diupayakan dengan memanfaatkan metode pemetaan iterasi titik tetap.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

IV.1 Pendefinisian Suku-Suku Pertubasi

Keadaan dekat permulaan rezim konveksi, dinamikanya disebabkan oleh medan-medan pertubasi sebagai gangguan orde pertama pada sistem, yang diberikan sebagai

$$\theta = \theta_0 + \varphi \quad (\text{IV.1})$$

$$\Phi = \Phi_0 + \eta \quad (\text{IV.2})$$

dengan φ dan η masing-masing merupakan temperatur dan tekanan pertubasi, sedangkan kecepatan pertubasi disimbolkan dengan \vec{V} yang terdiri dari tiga komponen yaitu $(u(t,x,y,z), v(t,x,y,z), w(t,x,y,z))$.

IV.2 Analisis Stabilitas Linear

Pada kestabilan marginal rezim konduksi, telah diperkenalkan deviasi-deviasi φ dan η dari keadaan ini, seperti pada persamaan (IV.1) dan (IV.2). Dengan demikian maka persamaan (II.26), (II.29) dan (II.19) berturut dituliskan seperti

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \alpha \nabla^2 \vec{v} - \nabla \eta + R \alpha \hat{k} \quad (\text{IV.3})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \varphi = \hat{v}_k + \nabla^2 \varphi \quad (\text{IV.4})$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{v} \quad (\text{IV.5})$$

Untuk perturbasi-perturbasi kecil, persamaan (IV.3), (IV.4) dan (IV.5) ditinjau melalui versi liniernya, dan dituliskan seperti

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \vec{v} - \nabla \eta + R \alpha \hat{k} \quad (\text{IV.6})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \hat{v}_k + \nabla^2 \varphi \quad (\text{IV.7})$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{v} \quad (\text{IV.8})$$

Hubungan antara medan tekanan dan temperatur dapat diperoleh melalui divergensi terhadap persamaan (IV.6) seperti berikut

$$\nabla^2 \eta = R \alpha \nabla_z \varphi \quad (\text{IV.9})$$

Penggunaan hubungan ini menghilangkan suku medan tekanan pada persamaan (IV.6), sehingga medan kecepatan dan medan temperatur dapat ditulis seperti

$$\frac{\partial \vec{\nabla}^2 u}{\partial t} = \sigma \vec{\nabla}^4 u - R \sigma \partial_x \partial_z \rho$$

$$\frac{\partial \vec{\nabla}^2 v}{\partial t} = \sigma \vec{\nabla}^4 v - R \sigma \partial_x \partial_z \rho$$

(IV.10)

$$\frac{\partial \vec{\nabla}^2 w}{\partial t} = \sigma \vec{\nabla}^4 w + R \sigma \vec{\nabla}_{\parallel}^2 \rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = w + \vec{\nabla} \rho$$

dengan $\vec{\nabla}_{\parallel}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$.

Syarat batas vertikal dituliskan dengan menganggap bahwa temperatur sistem pada batas puncak dan dasar adalah

$$\theta(0) = \theta(1) = 0 \quad (IV.11)$$

Pemikiran terhadap batas puncak dan dasar adalah dengan menganggap bahwa zahir pada permukaan batas tidak mengalami deformasi (tidak terjadi regangan dan tegangan), maka berlaku syarat batas sebagai berikut :

$$w(0) = w(1), \partial_z u(0) = \partial_z u(1) = \partial_z v(1) = 0 \quad (IV.12)$$

sedangkan ∂_z merupakan simbol dari $\partial / \partial z$.

Syarat batas horisontal dapat dituliskan dengan menganggap bahwa kotak konveksi adalah periodik dalam arah x dan y



$$e(\vec{x} + \vec{\Gamma}, z) = e(\vec{x} + z) \quad (IV.13)$$

$$\vec{v}(\vec{x} + \vec{\Gamma}, z) = \vec{v}(\vec{x} + z) \quad (IV.14)$$

dengan $\vec{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y)$ dan $\vec{x} = (x, y)$. Γ_x dan Γ_y disebut sebagai keberkalaan dalam arah x dan z pada kotak konveksi.

Dengan mengacu pada kondisi-kondisi batas di atas, maka medan kecepatan dan medan temperatur diekspansikan dalam deret Fourier sebagai berikut

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\vec{k}} u_{n,\vec{k}} \cos(n\pi z) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ v &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\vec{k}} v_{n,\vec{k}} \cos(n\pi z) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ w &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\vec{k}} w_{n,\vec{k}} \sin(n\pi z) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ \theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\vec{k}} \theta_{n,\vec{k}} \sin(n\pi z) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \quad (IV.15)$$

dengan $\sum_{\vec{k}} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} + \sum_{y=-\infty}^{\infty}$

$$\text{dan } \vec{k} = 2\pi \left[\frac{n_x \hat{i}}{\Gamma_x} + \frac{n_y \hat{j}}{\Gamma_y} \right]$$

dengan \hat{i} dan \hat{j} merupakan vektor satuan dalam arah x dan y .

Dari persamaan (IV.10) dan (IV.15) didapatkan himpunan persamaan seperti

$$-\frac{a_{nk}^2 \rightarrow \partial u_{n,k} \rightarrow}{\partial t} = a_{n,k}^4 \rightarrow \partial u_{n,k} \rightarrow - iRn\pi k_x \Theta_{n,k} \rightarrow$$

$$-\frac{a_{nk}^2 \rightarrow \partial v_{n,k} \rightarrow}{\partial t} = a_{n,k}^4 \rightarrow \partial v_{n,k} \rightarrow - iRn\pi k_z \Theta_{n,k} \rightarrow$$

$$-\frac{a_{nk}^2 \rightarrow \partial w_{n,k} \rightarrow}{\partial t} = a_{n,k}^4 \rightarrow \partial w_{n,k} \rightarrow - Rn\pi k^2 \Theta_{n,k} \rightarrow \quad (\text{IV.18})$$

$$\frac{\partial \Theta_{n,k} \rightarrow}{\partial t} = -a_{n,k}^2 \rightarrow \Theta_{n,k} \rightarrow + w_{n,k} \rightarrow$$

$$\text{dengan } a_{n,k}^2 \rightarrow = \vec{k}^2 + n^2 \pi^2$$

Persamaan (IV.18) memiliki solusi dalam bentuk

$$u_{n,k} \rightarrow = u_{n,k} \rightarrow(0) \cdot e^{St}$$

$$v_{n,k} \rightarrow = v_{n,k} \rightarrow(0) \cdot e^{St}$$

(IV.19)

$$w_{n,k} \rightarrow = w_{n,k} \rightarrow(0) \cdot e^{St}$$

$$e_{n,k} \rightarrow = e_{n,k} \rightarrow(0) \cdot e^{St}$$

Dengan bantuan persamaan (IV.19), maka persamaan (IV.18) kembali dapat dituliskan dalam bentuk

$$\Lambda \begin{bmatrix} u_{n,k} \rightarrow(0) \\ v_{n,k} \rightarrow(0) \\ w_{n,k} \rightarrow(0) \\ e_{n,k} \rightarrow(0) \end{bmatrix} = 0 \quad (IV.20)$$

- dengan

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -a_{n,k}^2 \rightarrow (S + \sigma a_{n,k}^2 \rightarrow) & 0 & 0 & iRok_z \pi \\ 0 & -a_{n,k}^2 \rightarrow (S + \sigma a_{n,k}^2 \rightarrow) & 0 & iRok_y \pi \\ 0 & 0 & -a_{n,k}^2 \rightarrow (S + \sigma a_{n,k}^2 \rightarrow) & Rok^2 \\ 0 & 0 & -1 & (S + a_{n,k}^2 \rightarrow) \end{bmatrix}$$

(IV.21)

Persamaan (IV.18) memiliki solusi hanya jika

$$\det.A = 0 \quad (IV.22)$$

Sehingga persamaan karakteristik dari persamaan (IV.21) diperoleh dalam bentuk

$$a_{n,k}^4 \rightarrow (S + \sigma a_{n,k}^2 \rightarrow)^2 (a_{n,k}^2 \rightarrow S^2 + a_{n,k}^4 \rightarrow S (\sigma + 1) + \sigma (a_{n,k}^{\sigma} \rightarrow - Rk^2)) = 0 \quad (IV.23)$$

Persamaan (IV.23) memiliki 4 akar penyelesaian, yaitu :

$$S_x = -\sigma a_{n,k}^2 \rightarrow \quad (IV.24)$$

$$S_y = -\sigma a_{n,k}^2 \rightarrow \quad (IV.25)$$

$$S_{\pm} = \frac{1}{2a_{n,k}^2 \rightarrow} \left\{ -a_{n,k}^4 \rightarrow (\sigma + 1) \pm \left[a_{n,k}^8 \rightarrow (\sigma + 1)^2 + 4a_{n,k}^2 \rightarrow (Rk^2 - a_{n,k}^{\sigma} \rightarrow) \right] \right\}^{1/2} \quad (IV.26)$$

Keadaan yang menggambarkan batas (*marginal*), peralihan dari rezim konduktif ke konvektif, ditunjukkan oleh $S_{\pm} = 0$. Hal ini dipenuhi jika solusi pada persamaan (IV.26) yakni suku $Rk^2 - a_{n,k}^{\sigma} \rightarrow = 0$.

Demikian sehingga, bilangan Rayleigh kritis akan diperoleh dengan melihat hubungan di atas, yakni :

$$R = \frac{a_{n,k}^2}{k^2} \quad (\text{IV.27})$$

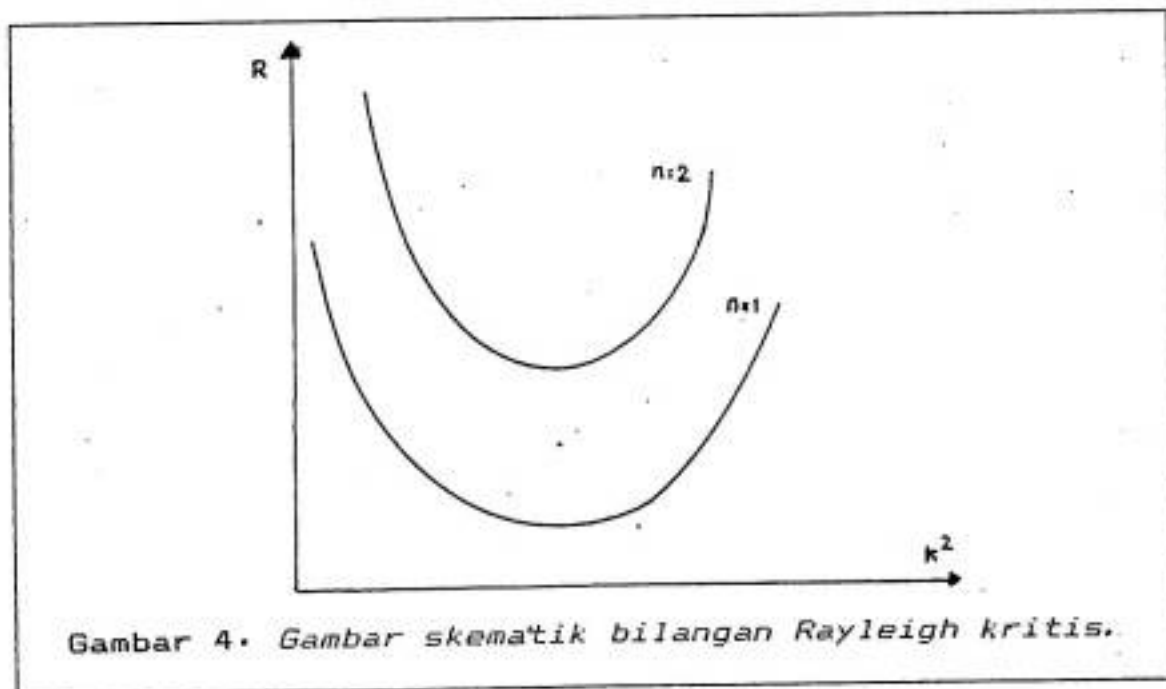
atau

$$R = \frac{(k^2 + n^2 \pi^2)^3}{k^2} \quad (\text{IV.28})$$

Harga minimum atau bilangan Rayleigh kritis terjadi pada $n = 1$, yakni

$$R_c = \frac{27}{4} \pi^4 ; k_c^2 = \frac{1}{2} \pi^2 \quad (\text{IV.29})$$

Hal ini dapat dilihat pada Gambar 4 di bawah ini





IV.3 Analisis Stabilitas Non-linear

Ketika bilangan Rayleigh R melewati harga kritisnya, maka sistem teramati dalam bentuk rol-rol konveksi. Untuk keadaan ini, suku-suku non-linear pada persamaan (II.26) dan persamaan (II.29) perlu dianalisis agar harga-harga kestabilan rezim konvektif diperoleh.

Untuk menganalisis suku non-linear tersebut, maka diberikan sebuah persamaan diferensial dalam bentuk sebuah persamaan diferensial yang melibatkan suku linear dan non-linear, yang dianggap dapat menggambarkan sistem konveksi Rayleigh-Benard

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L(\lambda, \vec{\nabla}) U + N(\vec{\nabla}, \lambda, U) \quad (IV.30)$$

dengan

$$U = U(u, v, w, \theta, p) = (U_1, \dots, U_n)$$

L = Operator diferensial linear

N = Operator diferensial non-linear

$\vec{\nabla}$ sebagai operator gradien

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sebagai himpunan parameter eksternal.

Seperangkat persamaan (IV.6) dan (IV.7) berdasarkan persamaan (IV.30) secara simbolis dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{\partial}{\partial t} U = (L - D \nabla^2) U + N(U) \quad (IV.31)$$

dengan D merupakan matriks difusi.

Selanjutnya solusi linear persamaan (IV.18) diekspansikan sebagai fungsi pribadi dasar dari operator linear

$$U = \sum_k B_k^+ \phi_k^+ + \sum_k B_k^- \phi_k^- + c.c \quad (IV.32)$$

dengan c.c sebagai konyugasi kompleks dan ϕ didefinisikan sebagai

$$(L - D \nabla^2) \phi_k^\pm = S_k^\pm \phi_k^\pm \quad (IV.33)$$

S_k^\pm merupakan akar-akar persamaan karakteristik (IV.24) yang diperoleh pada analisis kestabilan linear, sedang $\phi_k(x) = \phi_k e^{ikx}$.

Persamaan (IV.32) mengandung suku yang menggambarkan keadaan kritis, dan setelah dipisahkan penempatannya, maka akan berbentuk

$$U = A_{k_c} \phi_{k_c} + \sum_{k \neq k_c} B_k^+ \phi_k^+ + \sum B_k^- \phi_k^- + c.c \quad (IV.34)$$

suku $A_{k_c} \phi_{k_c}$ menggambarkan batas (*marginal*) antara rezim konduksi dan konveksi, yang diperoleh dari persamaan diferensial linear (IV.31)

$$(L - D\vec{\nabla}^2) k_c^+ = \mu \phi_{k_c} \quad (IV.35)$$

dengan $\mu = S^+(k_c)$.

Dengan demikian, persamaan (IV.31) dapat didekati dengan perangkat persamaan diferensial seperti

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_{k_c} &= \mu A_{k_c} + F_{k_c} \\ \frac{\partial}{\partial t} B_k^- &= S^- B_k^- + G_k^- \\ \frac{\partial}{\partial t} B_k^+ &= S^+ B_k^+ + G_k^+ \end{aligned} \quad (IV.36)$$

Dalam penelaahan ini suku-suku non-linear F_{k_c} , G_k^- dan G_k^+ dibatasi hanya pada suku-suku kwadratik, dan akan digunakan aturan seleksi untuk memilih suku-suku kwadratik yang amplitudo-amplitudonya ($c_{k_1} \cdot c_{k_2}$) memenuhi penjumlahan masing-masing bilangan gelombang seperti $k_1 + k_2 = k$.

Seleksi ini cukup untuk menganalisis kelakuan di ambang batas ketidakstabilan yang diberikan dalam persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B_0^+ &= S_0^+ B_0^+ + \beta^+ A_{k_c} \cdot A_{-k_c} \\ &= S_0^+ B_0^+ + \beta^+ |A_{k_c}|^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B_{2k_c}^+ &= S_{2k_c}^+ B_{2k_c}^+ + \gamma^+ A_{k_c} \cdot A_{-k_c} \\ &= S_{2k_c}^+ B_{2k_c}^+ + \gamma^+ |A_{k_c}|^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{k_c}}{\partial t} &= \mu A_{k_c} + \alpha_1 A_{k_c} B_0^- + \alpha_2 A_{k_c} B_0^+ + \alpha_3 A_{k_c} \bar{B}_0^- + \alpha_4 A_{k_c} \bar{B}_0^+ + \\ &\quad + \alpha_5 A_{k_c}^- B_{2k_c}^- + \alpha_6 A_{k_c}^- B_{2k_c}^+ \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

Dari perangkat tiga buah persamaan di atas dicoba untuk memilih dua di antaranya yang berbentuk :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \mu A + \alpha AB \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= SB + \beta A^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

dengan $S < 0$ dan $0 < \mu \ll \gamma$. Ketika A dan B masih cukup relatif kecil, solusi linear dibedakan oleh dua skala waktu $\tau_1 = \mu^{-1}$ dan $\tau_2 = (-S)^{-1}$, dengan $\tau_2 \leq \tau_1$. Pada skala waktu cepat τ_2 , amplitudo B teredam dengan cepat dan amplitudo A bertambah secara eksponensial. Maka pada skala waktu lambat τ_1 , pendekatan linear tidak berlaku lagi dan kehadiran suku A^2 pada persamaan (IV.40) tidak dapat dabaikan.

Sebuah bentuk integrasi dari persamaan (IV.40) diberikan seperti

$$B = B_0 e^{St} + \beta e^{St} \int_0^t e^{-S\tau} A^2(\tau) d\tau \quad (\text{IV.41})$$

Pada pendekatan pertama, $A(\tau)$ dapat diambil sebagai suatu konstanta dalam pengintegrasian di atas, sehingga dapat diperoleh

$$B(t) \simeq -\frac{\beta}{S} A^2(t) \quad (\text{IV.42})$$

Pendekatan ini disebut sebagai metode eliminasi adiabatik (*adiabatic elimination methods*) dari mode-mode stabil yang menggunakan μ dan A untuk berbagai harga. Dari metode ini dihasilkan persamaan amplitudo yang diberikan sebagai

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A - \frac{\alpha\beta}{S} A^3 \quad (\text{IV.43})$$

persamaan ini dikenal sebagai persamaan Landau yang menggambarkan pencabangan garfu (*pitchfork bifurcation*).

IV.4 Solusi Analitik Analisis Stabilitas Non-linear

Persamaan diferensial parsial non-linear, (IV.43) dikenal sebagai persamaan Landau (*Landau equation*) atau persamaan amplitudo. Persamaan ini diperoleh dari analisis stabilitas non-linear dengan metode eliminasi adiabatik.

Persamaan ini telah melengkapi sistem konveksi Rayleigh-Benard sebagai persamaan untuk sistem yang memiliki dinamika non-linear. Untuk keperluan mendapatkan nilai kritis, persamaan (IV.43) dicari solusinya dengan teknik pengintegrasian fungsi-fungsi rasional.

Untuk menuju ke arah itu, persamaan (IV.43) terlebih dahulu diubah dalam bentuk persamaan sebagai berikut

$$\frac{dA}{dt} = \lambda \left[\frac{\mu}{\lambda} - A^2 \right] A \quad (\text{IV.44})$$

dengan $\frac{\alpha\beta}{S} = \lambda$ dan kemudian μ/λ diganti dengan ρ^2 .

Persamaan (IV.43) kembali dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dA}{(\rho^2 - A^2)A} = \lambda dt \quad (IV.45)$$

atau

$$\frac{dA}{A(A^2 - \rho^2)} = -\lambda dt \quad (IV.46)$$

Pengintegrasian terhadap persamaan (IV.44) dilakukan dengan terlebih dahulu mengubahnya ke dalam bentuk

$$-\frac{1}{\rho^2} \frac{dA}{A} + \frac{1}{2\rho^2} \frac{dA}{(A+\rho)} + \frac{1}{2\rho^2} \frac{dA}{(A-\rho)} = -\lambda dt \quad (IV.47)$$

yang kemudian persamaan (IV.47) terbentuk seperti

$$-\frac{1}{\rho^2} \ln A + \frac{1}{2\rho^2} \left[\ln (A+\rho) + \ln (A-\rho) \right] = -\int \lambda dt \quad (IV.48)$$

atau

$$\ln \frac{[(A+\rho)+(A-\rho)]}{A} = -\lambda \rho^2 t \cdot \ln C \quad (IV.49)$$

Demikian sehingga persamaan (IV.49) dapat disederhanakan menjadi

$$A^2 - \rho^2 = C^2 A^2 \exp(-2\rho^2 \lambda t) \quad (\text{IV.50})$$

Sehingga solusi persamaan (IV.43) adalah

$$A = \frac{\rho}{\sqrt{1 - C^2 \exp(-2\rho^2 \lambda t)}} \quad (\text{IV.51})$$

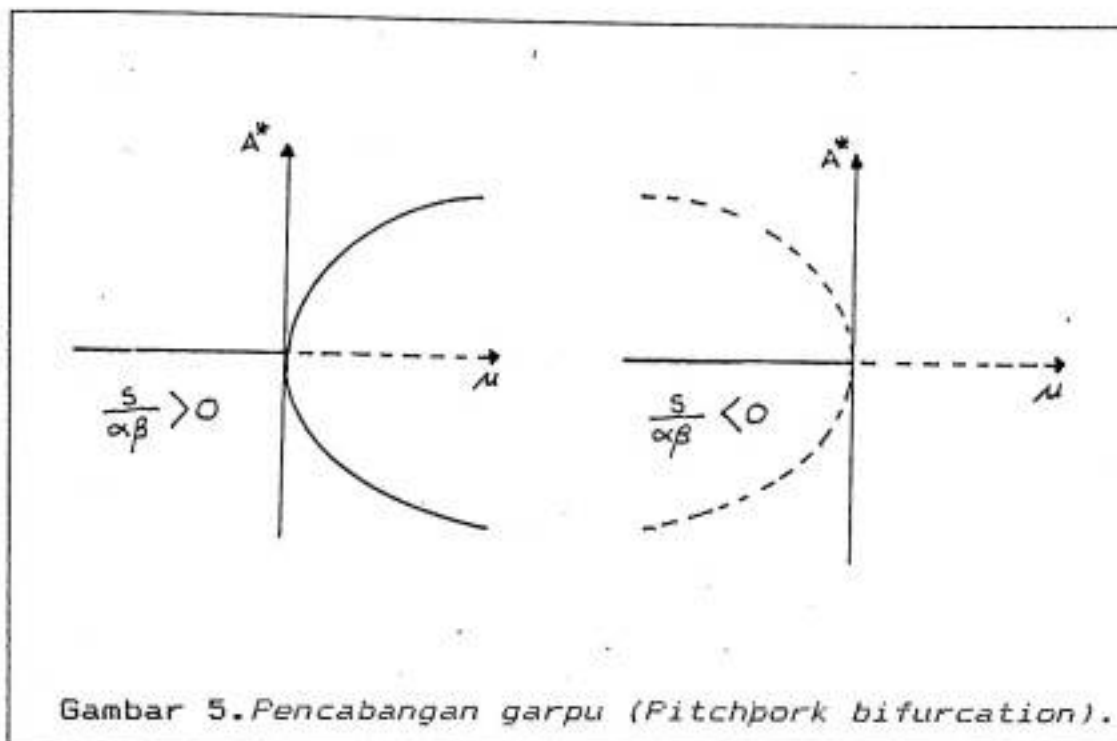
Mengingat bahwa $\rho^2 = \frac{\mu}{\lambda}$ dan $\frac{\alpha\beta}{S} = \lambda$, maka persamaan (IV.51) kembali dapat dituliskan seperti

$$A = \frac{\left[\frac{S}{\alpha\beta} \mu \right]^{1/2}}{\left[1 - C^2 \exp(-2\mu t) \right]^{1/2}} \quad (\text{IV.52})$$

Dengan C sebagai konstanta integrasi yang berbentuk

$$C = \frac{\left[\rho_0^2 - \frac{S}{\alpha\beta} \mu \right]^{1/2}}{\rho_0 \exp(-\mu t)} \quad (\text{IV.53})$$

Dihubungkan dengan simbol antara μ dan $\frac{\alpha\beta}{S}$, maka persamaan (IV.43) memiliki solusi stasioner $A^* = A$ dan $A^* = \pm \left[\frac{S\mu}{\alpha\beta} \right]^{1/2}$ yang ilustrasi pencabangannya dapat dilihat pada Gambar 5 di bawah ini.



IV.5 Penyelesaian Persamaan Dinamika Sistem dengan Metode Iterasi Titik Tetap

Persamaan dinamika sistem (IV.43) akan diterjemahkan ke dalam persamaan numerik beda hingga sebagai persamaan dinamika sistem yang diskrit. Metode iterasi titik tetap (*fixed point iteration*) merupakan metode yang hendak digunakan dalam menterjemahkan persamaan dinamika sistem tersebut, sehingga titik-titik tetap dan titik-titik stabil yang merupakan solusi persamaan akan diperoleh.

Suku pada ruas kiri persamaan (IV.43) dapat diinterpretasikan sebagai suku yang berdinamika diskrit, mengingat besaran A berubah terhadap waktu. Persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk persamaan yang dimaksud sebagai

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{\Delta t} = \mu A_n - \lambda A_n^3 \quad (\text{IV.54})$$

dengan $\lambda = \alpha\beta/S$

Persamaan (IV.43) kembali dapat dituliskan dalam bentuk

$$A_{n+1} = (\mu\Delta t + 1) A_n + \lambda\Delta t A_n^3 \quad (\text{IV.55})$$

Dengan menentukan harga Δt , maka harga μ yang baru akan diperoleh, sehingga persamaan (IV.55) kembali dapat dituliskan dalam bentuk

$$A_{n+1} = \mu' A_n - \lambda' A_n^3 \quad (\text{IV.56})$$

dengan $\mu' = \mu\Delta t + 1$, $\lambda' = \lambda\Delta t$.

Andaikan persamaan (IV.56) sebagai fungsi $f(A, \mu)$ dan pemetaan tak-berdimensi yang bergantung pada parameter μ , maka iterasinya dapat didefinisikan sebagai

$$A_{n+1} = f(A_n, \mu) \quad (\text{IV.57})$$

Penggandaan Periode

Jika $f(A, \mu)$ merupakan fungsi kontinu pada interval $[a, b]$ terhadap dirinya sendiri yaitu yang memenuhi $a \leq f(A_n, \mu) \leq b$ pada $a \leq A_n, \mu \leq b$, maka $a \leq f(A_n, \mu) \leq b$ paling tidak memenuhi satu titik tetap r pada interval $[a, b]$. Sebagai tambahan, $f(A, \mu)$ adalah terdiferensial dan memenuhi $f'(A, \mu) \leq \epsilon < 1$ untuk semua A dalam interval $[a, b]$, ϵ adalah konstanta yang bergantung pada parameter μ , maka titik tetapnya adalah khas dan algoritmanya adalah

$$A_{n+1} = f(A_n, \mu), \text{ dengan } A_1 \text{ pada } [a, b] \quad (\text{IV.58})$$

menghasilkan sebuah deret yang konvergen ke r seiring dengan n menuju ke tak-berhingga.

Dengan memetakan $f(A_n, \mu)$ terhadap dirinya sendiri, maka akan menghasilkan

$$f^2(A_n, \mu) = f(f(A_n, \mu)) \quad (\text{IV.59})$$

yang juga memiliki titik-titik stabil seperti pada $f(A_n, \mu)$.

Pemetaan selanjutnya akan menghasilkan

$$f^4(A_n, \mu) = f^2(f^2(A_n, \mu)) \quad (\text{IV.60})$$

Demikian sehingga pemetaan selanjutnya berturut disimbolkan dengan $f^0(A_n, \mu)$, $f^{10}(A_0, \mu)$ dan seterusnya, yang dikenal dengan gejala penggandaan periode (*periode doubling phenomenon*).

Dengan bervariasi harga parameter μ hingga membesar, maka $f(A_n, \mu)$ akan kehilangan kestabilannya yang diikuti dengan munculnya kestabilan baru dengan $f^2(A_n, \mu)$. Demikian seterusnya, dengan pemetaan terhadap dirinya sendiri (*maps into itself*) selanjutnya akan melahirkan titik-titik stabil baru yang diiringi hilangnya titik-titik stabil yang lama.

Oleh Li dan Yorke, pembesaran parameter μ pada suatu penggandaan periode tertentu didapatkan titik-titik stabil yang tak terhitung banyaknya, yang mereka namakan *chaos*.

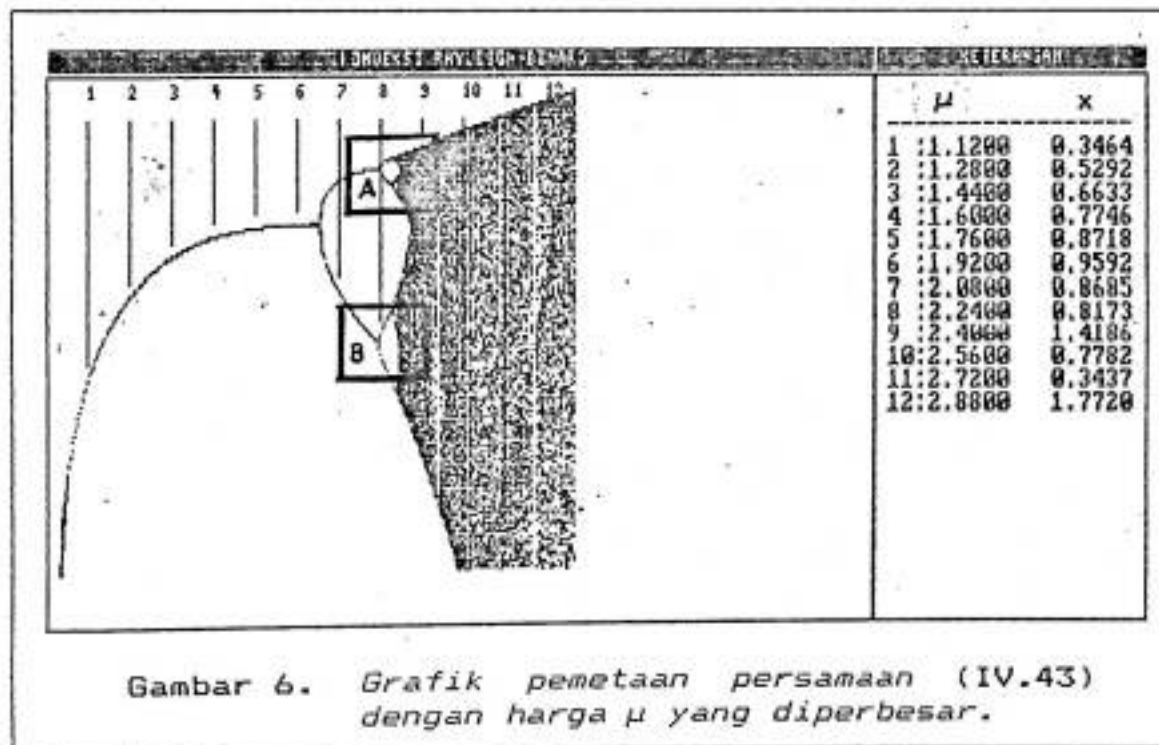
IV.6 Solusi Numerik Analisis Stabilitas Non-linear

Dengan menggunakan persamaan (IV.43), maka dapat dicari pola pencabangan, dalam hal ini menyelesaikan A_n sebagai fungsi dari μ . Metode substitusi langsung dimanfaatkan dengan mengambil nilai awal sembarang A_0 untuk mendapatkan nilai A_n yang konvergen. Sebagai contoh, proses pencarian solusi titik tetap untuk $\mu = 1,95$ dan $\alpha\beta/S = 0,5$ dapat dilihat pada Tabel 2.

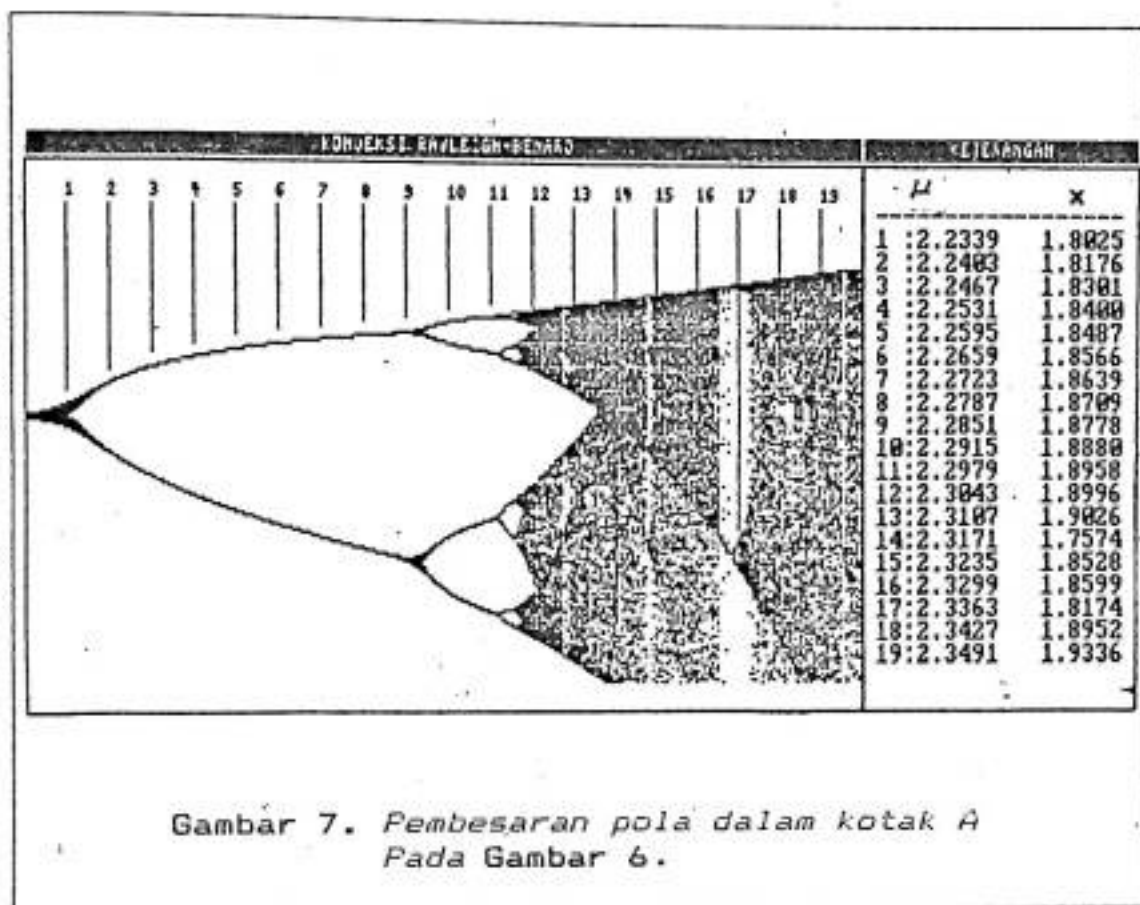
Tabel 2. Hasil perhitungan pemetaan persamaan (IV.43),

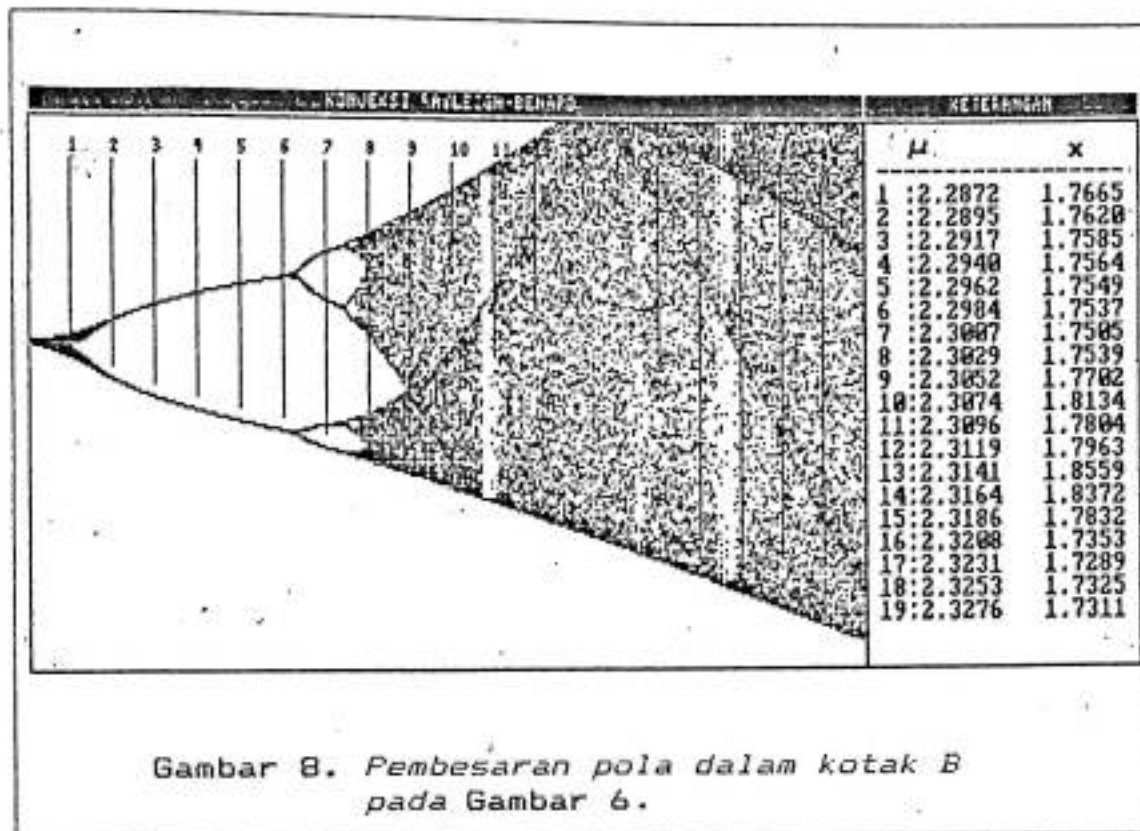
$A_0 = 1$	$\alpha\beta/S=0,5$	Metode substitusi $A = \pm \sqrt{\mu-S/\alpha\beta}$
n	A_n	
1	1	
110	1,3784035	
120	1,3784051	1,3784049
⋮	⋮	
123	1,3784047	

Seiring dengan pertambahan μ , maka solusi konvergen yang diperoleh masih tetap mengikuti solusi analitik $A = \pm \sqrt{\mu-1/\lambda}$ sampai pada harga μ sekitar 2,00. Di atas harga μ sekitar 2,00 terdapat pencabangan. Demikian juga di sekitar harga $\mu = 2,2310$. Gejala chaos mulai terjadi di sekitar harga $\mu = 2,3054$. Untuk memperjelas hal ini, maka diperlihatkan Gambar 6.



Jika pola dalam kotak A dan B pada Gambar 6 diperbesar, maka berturut hasilnya dapat dilihat pada Gambar 7 dan Gambar 8.





Gambar 7 dan Gambar 8 memperlihatkan pola yang berulang.

BAB V KESIMPULAN

V.1 Kesimpulan

Dari hasil perhitungan secara analitik dan numerik dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Solusi dalam bentuk eksponensial terhadap waktu dari pengekspansian medan kecepatan dan medan temperatur dalam deret Fourier pada analisis stabilitas linear memberikan informasi tentang keadaan batas yang diperoleh dari persamaan karakteristik sistem. Keadaan batas yang menunjukkan harga kritis dinyatakan oleh bilangan Rayleigh kritis $R_c = \frac{27}{4} \pi^4$.
2. Pendiferensialan terhadap waktu bagi suku yang menggambarkan batas dan suku-suku nonlinear yang dipotong sampai pada suku-suku kwadratik merupakan solusi persamaan yang telah dilinearisasi yang diekspansikan dalam bentuk fungsi pribadi dasar dari operator linear. Dengan pendekatan metode eliminasi adiabatik diperoleh persamaan diferensial nonlinear yang baru, solusi analitiknya menggambarkan pola pencabangan.

3. Pola pencabangan berulang dikembangkan dari persamaan diferensial nonlinear yang diperoleh dengan metode eliminasi adiabatik yang diterjemahkan ke dalam persamaan numerik beda hingga dan dikerjakan dengan metode iterasi titik tetap. Solusi titik tetap untuk $\mu = 1,95$ dan $\alpha\beta/S = 0,5$ adalah 1,3784047. Seiring dengan pertambahan μ , maka solusi konvergen yang diperoleh masih tetap mengikuti solusi analitik sampai pada harga μ sekitar 2,00, di atas harga $\mu = 2,00$ sudah mulai terdapat pencabangan. Gejala chaos mulai terjadi pada harga μ sekitar 2,3054.

V.2 Saran

Disadari sepenuhnya bahwa penelitian ini baru pada tahap awal dalam meneliti pola dan perilaku gerak sistem berdinamika. Oleh karena itu penelitian ini masih perlu dikembangkan agar hasil yang diperoleh benar-benar mencerminkan pola gerak sistem yang sesungguhnya.

Penelitian ini telah menyentuh ke bilangan kritis antara rezim konduktif dan konvektif dalam rangka menuju ke rezim chaos. Untuk pengembangan selanjutnya diharapkan dapat diketahui bilangan kritis antara rezim chaos dan keadaan dimana fluida dalam keadaan turbulen.

DAFTAR PUSTAKA

1. Battacharjee, J.K., "*Convection and Chaos in Fluid*", World Scientific Publishing Co, 1987.
2. Coullet, P., "*Nonlinear Phenomena in Dissipative Systems*", Observatoire de Nice, B.P. 139, F-06003 Nice Cedex, France, 1975.
3. Feigenbaum, M.J., "*Universal behavior in Nonlinear System*", *Physica* 70, 16, 1983.
4. Lanford, Oscar E.; "*A Computer-Assisted Proof of The Feigenbaum Conjectures*", *Bulletin of the American Mathematical Society* Vol.6, p.427-433, 1982.
5. Saenz, A.W., "*Methods and Applications of Non linear Dynamics*", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapura, 1986.
6. Sastry, S.S., "*Introductory Methods of Numerical Analysis*", Prentice-Hall of India Private Limited. New Delhi, 1979.
7. Schlichting, H., "*Boundary layer Theory*", Mc Graw-Hill Book Company, 1979.
8. Stern, M.E., "*Ocean Circulation Physics*", Academic Press New York, San Fransisco, 1975.

LAMPIRAN

PROGRAM PENGGAMBARAN POLA CHAOS PADA KONVEKSI RAYLEIGH-BENARD

```
program bifurc;
uses crt,common,gdriver,gkernel,gshell,gwindow;

const
  maxfloat = 1e37;
  minfloat = -maxfloat;
  index : array[1..20] of wrkstring =
    ('1','2','3','4','5','6','7','8','9','10',
     '11','12','13','14','15','16','17','18','19','20');
type
  string20 = string[20];
var
  ch,get_key : char;
  delta_t,alfa,mu,x,delta_mu,factor,old_x,new_x : float;
  i,k,k_th,corner_x,x_pos,y_pos : integer;
  row,col,old_col,new_col : float;
  disp_frame,is_new,is_draw,is_change : boolean;
  file_name : string20;
  file_name_picture : wrkstring;
procedure abort;
begin
  sound(700);
  delay(1000);
  nosound;
  sound(500);
  delay(500);
  nosound;
  readln;
  Clearscreen;
  Halt(1);
end;(procedure abort)

procedure select(x : integer;
                 world : boolean);
begin
  selectwindow(x);
  if world = true then
    selectworld(x);
  setheaderon;
  drawborder;
end;(procedure select)
```

```

procedure read_input(var is_new           : boolean;
                    var alfa             : float;
                    var mu               : float;
                    var delta_mu         : float;
                    var delta_t          : float;
                    var factor           : float;
                    var k_th             : integer);
var k_thfloat : float;
begin
  if is_new = true then
  begin
    alfa := 0.50;
    mu := 2.285000;
    delta_mu := 0.0001;
    delta_t := 0.5;
    factor := 4;
    k_thfloat := 20;
  end
  else
    k_thfloat := k_th;

  clrscr;
  writeln('PARAMETER SISTEM');
  writeln('-----');
  write('alfa           : '); readfloat(alfa); writeln;
  write('mu             : '); readfloat(mu); writeln;
  write('delta mu        : '); readfloat(delta_mu); writeln;
  write('delta t         : '); readfloat(delta_t); writeln;
  write('faktor pembagi  : '); readfloat(factor); writeln;
  write('k-th           : '); readfloat(k_thfloat); writeln;
  k_th := trunc(k_thfloat);
end; {procedure read_input}

procedure save_parameter(var alfa         : float;
                        var mu           : float;
                        var delta_mu     : float;
                        var delta_t      : float;
                        var factor       : float;
                        var k_th         : integer;
                        var file_name    : string20);

var
  out_file   : text;
  file_name_txt : string20;
  i         : integer;
  n         : byte;
begin
  file_name_txt := file_name + '.txt';
  writeln('saving parameter sistem');
  writeln('file name : ', file_name_txt);
  assign(out_file, file_name_txt);
  rewrite(out_file);
  IOCheck;

```



```

If IOerr then
begin
  writeln('PROGRAM DIHENTIKAN');
  write('TERJADI KESALAHAN PADA IO FILE');
  abort;
end;
writeln(out_file, alfa); IOCheck;
writeln(out_file, mu); IOCheck;
writeln(out_file, delta_mu); IOCheck;
writeln(out_file, delta_t); IOCheck;
writeln(out_file, factor); IOCheck;
writeln(out_file, k_th); IOCheck;
If IOerr then
begin
  writeln('PROGRAM DIHENTIKAN');
  write('TERJADI KESALAHAN PADA IO FILE');
  abort;
end;
Close(out_file);
clrscr;
end; {save_parameter}

procedure save_picture(file_name : wrkstring);
var file_name_pic : wrkstring;
begin
  file_name_pic := file_name + '.pic';
  savescreen(file_name_pic);
end; {save_picture}

procedure load_parameter(var alfa          : float;
                        var mu            : float;
                        var delta_mu      : float;
                        var delta_t       : float;
                        var factor        : float;
                        var k_th          : integer;
                        var file_name     : string20);

var
  in_file   : text;
  file_name_txt : string20;
  i         : integer;
  n         : byte;
begin
  file_name_txt := file_name + '.txt';
  assign(in_file, file_name_txt);
  reset(in_file);
  IOCheck;
  If IOerr then
  begin
    writeln('PROGRAM DIHENTIKAN');
    write('TERJADI KESALAHAN PADA IO FILE');
    abort;
  end;

```

```

repeat
  readln(in_file, alfa); IOCheck;
  readln(in_file, mu); IOCheck;
  readln(in_file, delta_mu); IOCheck;
  readln(in_file, delta_t); IOCheck;
  readln(in_file, factor); IOCheck;
  readln(in_file, k_th); IOCheck;
until not IOErr;
Close(in_file);
clrscr;
writeln('NAMA FILE : ', file_name_txt);
writeln;
writeln('PARAMETER SISTEM');
writeln('-----'); writeln;
writeln('alfa           : ', alfa);
writeln('mu             : ', mu);
writeln('delta mu       : ', delta_mu);
writeln('delta t        : ', delta_t);
writeln('faktor pembagi : ', factor);
writeln('k-th          : ', k_th);
writeln;
writeln('Pembacaan file text parameter berhasil');
end; {load_parameter}

procedure load_picture(file_name : wrkstring);
var file_name_pic : wrkstring;
    ch : char;
begin
  file_name_pic := file_name + '.pic';
  initgraphic;
  loadscreen(file_name_pic);
  ch := ReadKey;
  if ch = 'p' then
    hardcopy(false, 1);
  clrscr;
  leavegraphic;
end; {save_picture}

begin
  {----rutin window----}
  clrscr;
  write('APAKAH INGIN MEMULAI DENGAN PARAMETER BARU <y/t> : ');
  get_key := readkey;
  clrscr;
  if (get_key = 'y') or (get_key = 'Y') then
    is_new := true
  else
    is_new := false;

  if is_new=true then
    read_input(is_new, alfa, mu, delta_mu, delta_t, factor, k_th)
  else
    begin

```

```

write('NAMA FILE      : '); readln(file_name);
load_parameter(alfa,mu,delta_mu,delta_t,factor,k_th,file_name);
write('APAKAH PARAMETER AKAN DIRUBAH <y/t> : ');
get_key := readkey;
clrscr;
if (get_key = 'y') or (get_key = 'Y') then
  is_change := true
else
  is_change := false;
if is_change = true then
begin
  read_input(is_new,alfa,mu,delta_mu,delta_t,factor,k_th);
  is_new := true;
end
else
begin
  write('APAKAH PROSES PELUKISAN AKAN DIULANGI <y/t> : ');
  get_key := readkey;
  clrscr;
  if (get_key = 'y') or (get_key = 'Y') then
    is_draw := true
  else
    is_draw := false;
  if is_draw = false then
    begin
      write('nama file gambar : '); read(file_name_picture);
      writeln;
      load_picture(file_name_picture);
    end;
  end;
end;

if (is_new = true) or (is_draw = true) then
begin
  initgraphic;
  corner_x := 3*xmaxglb div 4;
  definewindow(1,corner_x+1,0,xmaxglb,ymaxglb);
  defineheader(1,'KETERANGAN');
  definewindow(2,0,0,corner_x,ymaxglb);
  defineheader(2,'KONVEKSI RAYLEIGH-BENARD');
  defineworld(2,0,0,640,200);
  select(1,false);
  select(2,true);
  {---atribut x dan delta_mu---}
  gotoxy(62,3); write('      mu      x ');
  gotoxy(62,4); write('-----');
  k := 1;
  col := 0;
  repeat
    col := col+1;
    x := 1.0;
    mu := mu + delta_mu;
    i:=0;
    disp_frame := true;

```

```

repeat
  x := x*(mu-alfa*sqr(x));
  row := (2250 -((x/mu)*2800));
  if (row<maxfloat) and (row>minfloat) then
  begin
    if i>64 then
      if row<190 then
        if row>=0 then
          if col>=0 then
            if col<640 then
              begin
                drawpoint(col,row);
                if (trunc(col) mod 32=0) and disp_frame=true then
                  begin
                    disp_frame := false;
                    drawtextw(col,10,1,index[k]);
                    drawline(col,row-5,col,15);
                    y_pos := k+4; x_pos := 62;
                    gotoxy(x_pos,y_pos);
                    if k<10 then
                      write(index[k], ' ',mu:1:4)
                    else
                      write(index[k], ' ',(mu):1:4);
                    gotoxy(x_pos+12,y_pos); write(x:1:4);
                    if k>k_th then delta_mu := delta_mu/factor;
                    inc(k);
                  end;
                end;
              end;
            end
          else
            abort;
          Inc (i);
          until (x>1000) or (x<-1000) or (i>255);
        until col>639;
        ch := ReadKey;
        case ch of
        'p': hardcopy(false,1);
        's': begin
          copyscreen;
          clearscreen;
          leavegraphic;
          clrscr;
          write('nama file parameter : ');readln(file_name);
          write('nama file gambar : ');readln(file_name_picture);
          clrscr;
          save_parameter(alfa,mu,delta_mu,delta_t,factor,k_th,file_name);
          entergraphic;
          swapscreen;
          save_picture(file_name_picture);
        end;
      end;
    leavegraphic;
  end;

```

