PENENTUAN DIMENSI PARTISI HASIL AMALGAMASI-SISI PADA GRAF SIKLUS

SKRIPSI

ANANDA DWI NABILA

H011171503

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JULI 2022

PENENTUAN DIMENSI PARTISI HASIL AMALGAMASI-SISI PADA GRAF SIKLUS

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ANANDA DWI NABILA

H011171503

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JULI 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Ananda Dwi Nabila
NIM	: H011171503
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Penentuan Dimensi Partisi Hasil Amalgamasi-Sisi pada Graf Siklus

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 24 Mei 2022

…ng menyatakan,

METERAI TEMPEL

10000

QFEDAAJX98256259

Ananda Dwi Nabila

NIM. H011171503

LEMBAR PENGESAHAN

PENENTUAN DIMENSI PARTISI HASIL AMALGAMASI-SISI PADA GRAF SIKLUS

Disusun dan diajukan oleh

ANANDA DWI NABILA

H011171503

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 13 Juli 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19850529 200812 1 002**

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sebagai Nabi yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan dengan judul **"Penentuan Dimensi Partisi Hasil Amalgamasi-Sisi pada Graf Siklus"** sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi serta nasihat dari berbagai pihak. Pada kesempatan kali ini, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah membantu dalam penyelesian skripsi ini terkhusus untuk Ayah saya **Jabal Nur**, kedua Ibu saya **Lisda Astuty** dan **Ummul Budiwati**, yang dengan sabar telah membesarkan dan mendidik penulis, serta senantiasa mendoakan dan mendukung atas setiap langkah perjalanan penulis. Terima kasih kepada kakak **Kemal**, adik **Balqis** dan **Sobri**, serta seluruh keluarga yang telah memberi doa dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Disamping itu, izinkan penulis untuk menyampaikan ucapan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan begitu banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta para **Staf Departemen Matematika** yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal mengenai persuratan.

3. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si** selaku Pembimbing Utama dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si** selaku Pembimbing Pertama yang dengan sabar, tulus dan ikhlas meluangkan banyak waktu ditengah berbagai kesibukan dalam membimbing penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si** selaku Pembimbing Akademik sekaligus Penguji yang telah banyak memberi nasihat, saran dan masukan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku Penguji yang telah banyak memberikan saran dan masukan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
6. Soulmate penulis 4ever **Farah Ramadhana** yang telah menjadi 911 terbaik serta selalu setia dalam mendengarkan semua cerita proses penyelesaian skripsi penulis.
7. Duo kombo booster **Ithul**, dan **Mica** yang selalu siap menampung segala drama Ananda tanpa membuat Ananda merasa seperti beban xixi <3.
8. Pacar penulis **Nurul Ridha** yang selalu siap menerima dan menemani Ananda di semua keadaan (walaupun dengan kritik dan saran).
9. Teman-teman **Matematika 2017** yang telah memberi warna-warni masa perkuliahan serta senantiasa membantu dan memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Madu penulis **Megi** yang senantiasa memberikan dukungan dan bantuan, setia menemani penulis dalam suka-duka (walaupun bikin takut kalau marah).
11. Sahabat penulis **Amma** dan **Uci** yang senantiasa memberikan dukungan dan bantuan, serta menjadi teman-teman terbaik penulis sejak sekolah dasar.
12. Mama penulis **Mama Hatchi (Salsabila Ammari)** yang telah menurunkan wibawanya agar dapat bermain riang gembira bersama anaknya.
13. Peneman malam sepi penulis **ANDI RAFIKA** yang telah menjadi psikolog sekaligus pelawak tengah malam via whatsapp.
14. Grup **"Calon Cumlaude"**, **Ikka**, **Fira**, **Eda**, **Ayu**, **Yuyun, Sarti,** dan **Khandy** yang senantiasa memberikan dukungan dan bantuan, serta menjadi teman-teman terbaik penulis sejak maba.

15. Grup **“4n1c”**, **Tuyul**, **Nufi**, **Cici**, **Tini**, yang senantiasa memberikan dukungan, menghibur, serta menjadi teman-teman terbaik penulis sejak SMP.
16. Mba kecintaanq **Mba Lina** dan **Mba yani**, yang selalu siap menerima chat random serta memberikan dukungan di setiap perjalanan hidup Ananda.
17. Sisterq **Elca Fwozen** yang senantiasa memberikan dukungan serta menjadi teman-teman terbaik penulis sejak sekolah dasar.
18. Seluruh teman-teman **SDN 104 WIWITAN** angkatan 2011 khususnya sobat lonto-lonto **Puput** dan **Lia**, sobat acara **bukber 2019**, yang telah memberi warna-warni masa sekolah dasar hingga saat ini serta senantiasa memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
19. Si sempat terlupakan **Alif jenggot** WKWK yang selalu siap menolong walaupun Alif sangat sotta guys tapi sudah jadi teman sejak SMA jadi gpp.
20. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang juga telah memberikan doa, dukungan dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapat balasan dari Allah *Subhanahu Wa Ta’ala*. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Lamasi, 13 Juli 2022

Ananda Dwi Nabila

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ananda Dwi Nabila
NIM	: H011171503
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Penentuan Dimensi Partisi Hasil Amalgamasi-Sisi pada Graf Siklus

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Lamasi pada tanggal 13 Juli 2022

Yang menyatakan,

Ananda Dwi Nabila

ABSTRAK

Graf G adalah pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga yang anggota-anggotanya disebut titik *(vertex)*, dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi *(edge)*. Misalkan G adalah graf sederhana dimana $u, v \in V(G)$. Jarak antara titik u dan v dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v. Diberikan $S \subseteq V(G)$ dan terdapat titik v pada graf terhubung G, maka jarak antara v dan S dinotasikan $d(v, S)$. Jika $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah k-partisi dari $V(G)$, maka representasi v terhadap $\prod$ adalah k-pasangan berurutan, $r(v|\prod) = \big(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)\big)$. Jika k-pasangan berurutan $r(v|\prod)$ untuk $v \in V(G)$ semuanya berbeda, maka partisi $\prod$ disebut sebagai partisi pembeda. Bilangan k −minimal yang merupakan k −partisi pembeda dari $V(G)$ disebut dimensi partisi dari G dan dinotasikan dengan $pd(G)$. Pada penelitian ini akan ditentukan dimensi partisi dari graf hasil amalgamasisi-sisi pada graf siklus orde genap. Dalam penentuan dimensi partisi tersebut digunakan karakterisasi dimensi partisi pada graf path, lemma tentang himpunan pembeda dan titik setara khususnya pada graf siklus orde genap. Hasil dari penelitian ini adalah $pd\big(Amal(C_n, e, k)\big) = 3$ untuk $n \geq 4$, $k = 2,3$, $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) = 4$ untuk $k = 4$, $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) = 3 + m$ untuk $k = 2m + 3$ dan $k = 2m + 4$ dengan $m = 1,2,3, \dots$

Kata Kunci: *teori graf, amalgamasi sisi, dimensi partisi, graf siklus orde genap, partisi pembeda, titik setara.*

ABSTRACT

The graph G *is a pair of sets* $(V(G), E(G))$, *where* $V(G)$ *is a finite set whose elements are called vertices, and* $E(G)$ *is the set of pairs of members of* $V(G)$. *which is called the edge. Let* G *be a simple graph where* $u, v \in V(G)$. *The distance between points* u *and* v *is denoted by* $d(u, v)$ *is the length of the shortest path between* u *and* v. *Given* $S \subseteq V(G)$ *and there is a vertex* v *on the connected graph* G, *then the distance between* v *and* S *is denoted* $d(v, S)$. If $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ *is* k*-partition of* $V(G)$, *then the representation of* v *with respect to is* k*-ordered pairs,* $r(v|\prod) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. *If the* k*-ordered pairs* $r(v|\prod)$ *for* $v \in V(G)$ *are all different, then the partition is called a dimension partition. The minimal* k*-number which is the* k*-differentiating partition of* $V(G)$ *is called the partition dimension of* G *and is denoted by* $pd(G)$. *In this study, the partition dimensions of the sided amalgamation result will be determined on an even-order cycle graph. In determining the dimensions of the partition, characterization of the partition dimensions is used in the path graph, the lemma about the distinguishing set and the equivalence point, especially in the even-order cycle graph. The results of this study are* $pd\big(Amal(C_n, e, k)\big) = 3$ *for* $n \geq 4$, $k = 2,3$, $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) = 4$ *for* $k = 4$, $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) = 3 + m$ *for* $k = 2m + 3$ *and* $k = 2m + 4$ *where* $m = 1,2,3, \dots$

Keywords: *graph theory, edge amalgamation, partition dimension, even order cycle graph, discrimination partition, equivalent point.*

DAFTAR ISI

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Seiring dengan perkembangan teknologi dan ilmu pengetahuan mengakibatkan sebagian besar permasalahan dapat dipecahkan. Para peneliti berlomba-lomba untuk memecahkan masalah dengan modal ilmu dan teknologi yang telah ada. Dapat dikatakan bahwa sains sangat berperan besar dalam kemajuan teknologi dan ilmu pengetahuan, khususnya matematika. Banyak sekali cabang ilmu matematika yang erat kaitannya dengan pemecahan persoalan kehidupan sehari-hari, salah satunya adalah teori graf.

Dalam kehidupan sehari-hari, teori graf membantu menyelesaikan permasalahan manusia dengan representasi objek diskrit sebagai *vertex* dan hubungan antar objek diskrit sebagai *edge*. Salah satu konsep teori graf yang menarik adalah dimensi partisi.

Dimensi partisi dari sebuah graf G pertama kali dikenalkan oleh Chartrand, Salehi dan Zhang (2000). Mereka mengelompokkan semua simpul di G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap simpul terhadap setiap kelas partisi tersebut.

Beragam masalah dapat diselesaikan dengan konsep dimensi partisi, salah satunya adalah untuk klasifikasi jenis senyawa kimia berdasarkan bentuk dari senyawa kimia itu sendiri. Ada banyak sekali kombinasi ikatan yang dapat dibentuk dari interaksi antar unsur kimia, oleh karenanya, tingkat kesukaran klasifikasinya pun semakin tinggi. Selain masalah klafisikasi senyawa kimia, masih banyak masalah kehidupan sehari-hari yang menggunakan konsep dimensi partisi dalam pemecahannya.

Penelitian mengenai dimensi partisi semakin mengalami perkembangan seiring berjalannya waktu. Beberapa studi terkait tentang konsep dimensi partisi diantaranya yaitu pada skripsi RA. Novita Indriyani (2013) yang berjudul “Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Amalgamasi-Sisi Siklus Gasal”. Pada penelitian tersebut objek penelitiannya adalah amalgamasi-sisi siklus. Pada tahun 2018, terdapat penelitian yang dilakukan oleh Gilang Arya Riza mengenai dimensi partisi dari graf persahabatan. Selanjutnya, pada 2019 juga terdapat penelitian yang dilakukan oleh Faisal, dkk., mengenai dimensi partisi graf hasil operasi comb graf lingkaran dan graf lintasan.

Pada tahun 2020 Hasmawati, dkk., meneliti mengenai dimensi partisi graf hasil amalgamasi siklus dimana objek penelitiannya adalah amalgamasi-titik pada graf siklus. Amalgamasi itu sendiri terbagi menjadi dua yaitu amalgamasi titik dan amalgamasi sisi.

Berdasarkan uraian penelitian sebelumnya, diperoleh suatu permasalahan baru yang dapat dikaji menjadi suatu bentuk penelitian mengenai dimensi partisi hasil amalgamasi-sisi pada graf siklus agar membantu menyelesaikan seluruh permasalahan yang menggunakan konsep dimensi partisi dengan model graf yang serupa.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan himpunan partisi minimum pada graf amalgamasi-sisi siklus-siklus.

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah dari penelitian ini yaitu hanya mencakup penentuan dimensi partisi graf amalgamasi-sisi pada siklus orde genap $Amal(C_n, e, k)$ dengan $n \geq 4, k = 2,3$ dan $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k \geq 4$.

1.4. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan masalah yang diangkat, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui dimensi partisi graf amalgamasi-sisi pada siklus orde genap $Amal(C_n, e, k)$ dengan $n \geq 4, k = 2,3$ dan $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k \geq 4$.

1.5. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Menambah wawasan penulis tentang dimensi partisi graf yang akan diteliti.
2. Memberikan kemudahan kepada khalayak luas yang berminat melakukan penelitian mengenai dimensi partisi dari hasil amalgamasi-sisi pada graf siklus sebagai konsep pemecahannya.

1.6 Sistematika Penulisan

Bab 1 Pendahuluan

Pendahuluan berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, Batasan masalah, tujuan penelian, manfaat penelitian, dan sistematika penelitian.

Bab 2 Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka berisi tentang teori dasar graf, jenis-jenis graf, amalgamasi sisi, dan dimensi partisi.

Bab 3 Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian berisi tentang jenis penelitian, tempat dan waktu penelitian, tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

Bab 4 Hasil dan Pembahasan

Pada bab 4 ini berisi tentang hasil dan pembahasan bentuk umum dari dimensi partisi hasil amalgamasi-sisi pada graf siklus genap $Amal(C_n, e, k)$ dengan $n \geq 4, k = 2{,}3$ dan $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k \geq 4$.yang telah diperoleh.

Bab 5 Kesimpulan

Penutup berisi tentang kesimpulan berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya dan saran.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian mengenai dimensi partisi telah banyak dilakukan. Salah satunya, penelitian oleh RA. Novita Indriyani (2013) yang berjudul "Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Amalgamasi-Sisi Siklus Gasal". Pada penelitian tersebut objek penelitiannya adalah amalgamasi-sisi siklus gasal. Amalgamasi sisi-siklus merupakan penggabungkan suatu sisi pada setiap graf siklus yang dimana sisi tersebut menjadi satu buah sisi pusat.

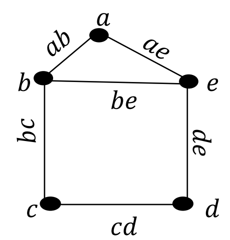
Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas mengenai penentuan dimensi partisi graf amalgamasi-sisi pada siklus orde genap. Adapun teori-teori mengenai teori dasar graf, derajat dan jarak, jenis-jenis graf, operasi amalgamasi graf, dan dimensi partisi akan dibahas pada bab dua.

2.1. Teori Dasar Graf

Teori dasar graf seperti definisi, notasi, dan istilah dalam graf banyak merujuk pada buku Hasmawati (2020) yang berjudul "Pengantar dan Jenis-Jenis Graf".

Definisi 2.1.1. Graf G adalah pasangan himpunan $\left(V(G), E(G)\right)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga yang anggota-anggotanya disebut titik *(vertex)*, dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi *(edge)*. Misalkan G adalah suatu graf. Titik $v_i, v_j \in V(G)$ dan sisi $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$ maka dikatakan bahwa titik v_i bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_j dan sisi x terkait (*incident*) dengan titik v_i begitu pula untuk titik v_j.

G:



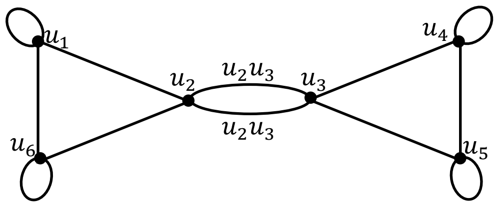
Gambar 2.1. Graf $\boldsymbol{G}$

Pada Gambar 2.1 dapat dilihat graf $G = \left(V(G), E(G)\right)$ dengan himpunan $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ adalah titik-titik dari graf yang saling terhubung oleh pasangan sisi $E(G) = \{ab, ae, bc, be, cd, de\}$.

Definisi 2.1.2. Sisi ganda merupakan beberapa sisi berbeda yang berasal dari sepasang titik yang sama. Misalkan $x_1 = uv$ dan $x_2 = uv$ dengan $u, v \in V(G)$, $x_1, x_2 \in E(G)$ adalah suatu sisi pada graf G. Apabila $x_1 \neq x_2$, maka sisi x_1 dan x_2 disebut sisi ganda.

Definisi 2.1.3. Lup (*loop*) merupakan sisi yang berasal dari dua titik ujung yang sama. Pasangan $uv = x \in E(G)$, apabila $u = v$ maka x disebut lup.

Definisi 2.1.4. Graf G adalah pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$, Misalkan $e = uv \in E(G)$ adalah pasangan tak terurut dari $V(G)$ yaitu $uv = vu$ dan $u, v \in V(G)$ merupakan titik-titik yang berbeda yakni $u \neq v$, maka graf G disebut graf sederhana. Sehingga dapat dikatakan bahwa graf sederhana (*simple graph*) merupakan graf yang tidak mempunyai sisi ganda dan lup.



Gambar 2.2. Graf ***H***

Pada Gambar 2.2 dapat dilihat bahwa graf H bukan merupakan graf sederhana karena graf H mempunyai lup pada titik $u_1, u_4, u_5,$ dan u_6, serta sisi ganda yaitu u_2u_3.

Definisi 2.1.5. Multigraf (*multigraph*) merupakan struktur graf yang membolehkan adanya sisi parallel sedangkan graf palsu merupakan struktur graf yang membolehkan adanya sisi ganda atau lup.

Definisi 2.1.6. Orde (*order*) dari graf G dinyatakan dengan simbol p merupakan banyaknya anggota dari $V(G)$.

Definisi 2.1.7. Ukuran (*size*) dari G dinyatakan dengan simbol q merupakan banyaknya anggota dari $E(G)$.

Pada Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa $p(G) = 5$ dan $q(G) = 6$.

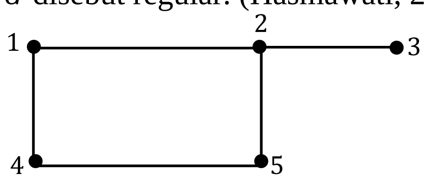
Definisi 2.1.8. Kardinalitas pada suatu himpunan merupakan banyaknya anggota pada himpunan tersebut. Misalkan S adalah suatu himpunan. Banyaknya anggota S dinotasikan dengan $|S|$ disebut kardinalitas S.

Apabila $p(G)$ adalah orde graf G dan $q(G)$ adalah ukurannya, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$. (Hasmawati,2020)

2.2. Derajat dan Jarak

Definisi 2.2.1. Derajat suatu graf $(d(v_i))$ adalah banyaknya titik $V(G)$ yang bertetangga dengan titik $v_i \in V(G)$.

Derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = max\{d(v): v \in V(G)\}$, sedangkan derajat minimum dari graf G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \Delta(G)$ maka graf G disebut regular. (Hasmawati, 2015)



Gambar 2.3. Graf ***I***

Pada Gambar 2.3 menunjukkan bahwa graf I memiliki derajat maksimum $\Delta(I) = 3$ dan derajat minimum $\delta(I) = 1$.

Teorema 2.2.1. Misalkan G adalah graf sederhana berorde p dan berukuran q. Jumlah derajat titik dalam graf G adalah dua kali banyaknya sisi pada graf tersebut, atau

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q.$$

Definisi 2.2.2. Misalkan G adalah graf sederhana dimana $u, v \in V(G)$. Jarak antara titik u dan v dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah

$$d(u,v) = \begin{cases} k, & k \; adalah \; panjang \; lintasan \; terpendek \; antara \; u \; dan \; v \\ 0, & u = v \\ \infty, & jika \; tidak \; ada \; lintasan \; antara \; u \; dan \; v \end{cases}$$

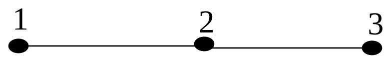
(Hasmawati,2020)

2.3. Jenis-Jenis Graf

Beberapa jenis-jenis graf seperti graf lintasan, graf siklus, dan graf lengkap akan dibahas pada subbab ini.

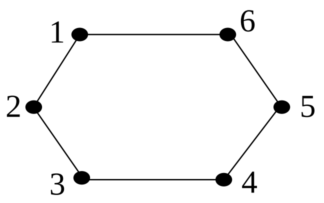
Definisi 2.3.1. Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$. Graf lintasan dinotasikan P_n dengan orde n dan jumlah sisi $n-1$. Graf lintasan terdiri atas satu lintasan maksimal.

Jika untuk setiap dua titik di u dan v selalu terdapat lintasan yang memuat titik u dan v maka graf G dikatakan terhubung (*connected*). (Hasmawati,2020)



Gambar 2.4. Graf lintasan $\boldsymbol{P_3}$

Definisi 2.3.2. Graf siklus dinotasikan dengan C_n adalah graf dengan Panjang $n, n \geq 3$ dan mempunyai himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$, himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n, v_1\}$. (Hasmawati,2020)

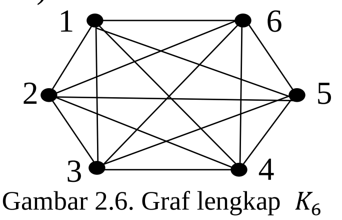


Gambar 2.5. Graf Siklus C_6

Definisi 2.3.3. Graf lengkap adalah salah satu graf khusus yang setiap dua titiknya bertetangga. Akibatnya, setiap titik pada graf lengkap mempunyai derajat yang sama.

Definisi 2.3.4. Graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama disebut graf reguler. Graf reguler r dinotasikan $r - reguler$.

Berdasarkan Definisi 2.3.4, graf lengkap K_n dapat ditulis $K_n = (n-1) - reguler$. (Hasmawati,2020)



Gambar 2.6. Graf lengkap K_6

2.4. Operasi Amalgamasi pada Graf

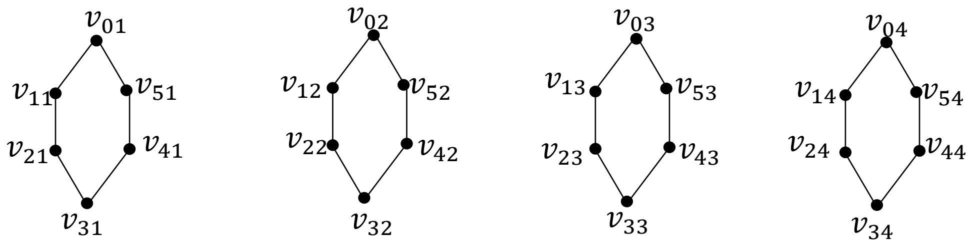
Operasi amalgamasi pada graf terbagi menjadi dua yaitu amalgamasi titik dan amalgamasi sisi.

2.4.1. Amalgamasi Titik

Definisi 2.4.1.1. Misalkan $\{G_i | i \in \{1,2,3, \dots, m\}\}$ untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2$, merupakan kumpulan graf berhingga dan masing-masing G_i memiliki titik tetap v_{0i} yang disebut terminal. Amalgamasi $Amal(G_i, v_{0i})$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil semua G_i dan menyatukan terminalnya. (Daming dkk,2020)

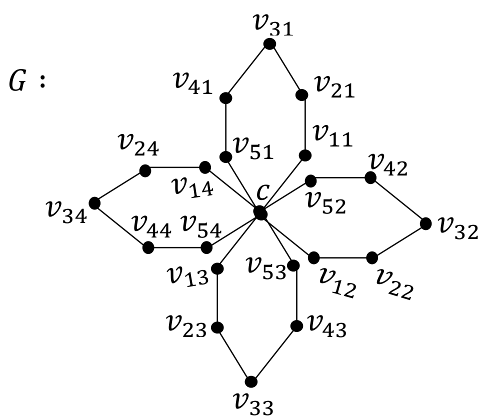
Graf $Amal(G_i, v_{0i})$ dapat ditulis $Amal(G_1; G_2; \dots; G_k, v_{01}; v_{02}; \dots; v_{0k})$. Jika $G_i = G_j$ untuk setiap i, j, maka $Amal(G_1; G_2; \dots; G_k, v_{01}; v_{02}; \dots; v_{0k})$ dapat ditulis $Amal(kG_i, v_{0i})$ untuk suatu $i \in \{1,2, \dots, k\}$. (Hasmawati,2020)

Contoh 2.4.1.1. Diberikan graf siklus C_6 sebagai berikut.



Gambar 2.7. Graf $G_1 = C_6^1$; $G_2 = C_6^2$; $G_3 = C_6^3$; $G_4 = C_6^4$

Pada gambar 2.5, $v_{01} = v_{02} = v_{03} = v_{04} = c$ dijadikan sebagai terminal. Sehingga berdasarkan operasi amalgamasi titik diperoleh graf $Amal(4C_6, c)$ berikut

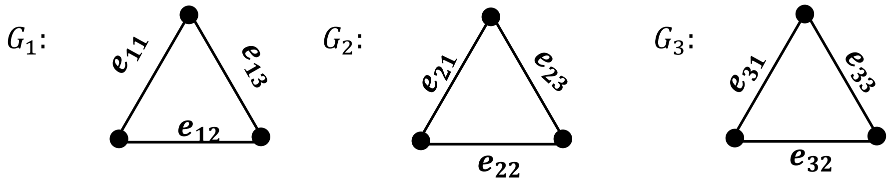


Gambar 2.8. Graf $Amal(4C_6, c)$

2.4.2. Amalgamasi Sisi

Definisi 2.4.2.1. Misalkan terdapat graf sembarang $G_i, i = 1,2, \dots, n$ dengan $E(G_i) = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ij}\}$. Amalgamasi sisi G_i merupakan penggabungan suatu sisi G_i dengan $e_{1j} = e_{2j} = \cdots = e_{nj}$ untuk suatu $j \in N$ menjadi sisi pusat. Amalgamasi sisi tersebut dinotasikan dengan $Amal(G, e, n)$. (Hasmawati, 2013)

Contoh 2.4.1.1. Diberikan graf siklus C_3 sebagai berikut.



Gambar 2.9. Graf G_1= C_3^1; G_2= C_3^2; G_3= C_3^3

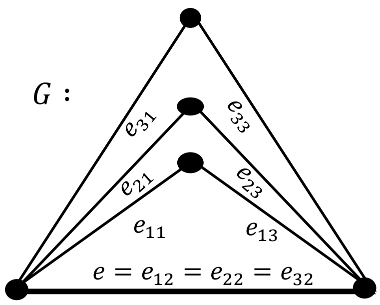
Sisi-sisi graf C_3 pada Gambar 2.9 adalah sebagai berikut:

$$E(C_3^1) = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\},$$

$$E(C_3^2) = \{e_{21}, e_{22}, e_{23}\}, \text{ dan}$$

$$E(C_3^3) = \{e_{31}, e_{32}, e_{33}\}.$$

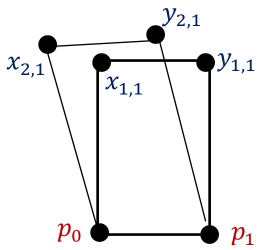
Apabila dilakukan operasi amalgamasi sisi pada G_1, G_2, dan G_3, maka diperoleh graf $Amal(C_3, e, 3)$ dengan $E\big(Amal(C_3, e, 3)\big) = \{e, e_{11}, e_{13}, e_{21}, e_{23}, e_{31}, e_{33}\}$ dan $e = e_{12} = e_{22} = e_{32}$ sebagai sisi pusat.



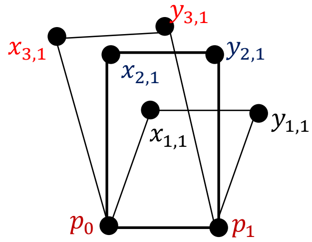
Gambar 2.10. Graf hasil amalgamasi sisi $Amal(C_3$,e,3)

Pada penelitian ini operasi yang akan digunakan adalah operasi amalgamasi sisi. Operasi Amalgamasi sisi tersebut akan diterapkan pada graf siklus orde genap $Amal(C_n, e, k)$ dengan $n \geq 4$, $k = 2,3$ dan $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k \geq 4$.

Ambil $n = 4$, maka $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k = 2,3$ adalah sebagai berikut

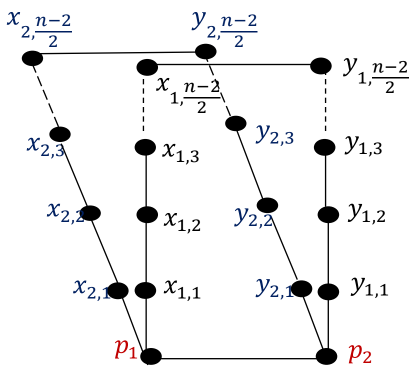


Gambar 2.11. $Amal(C_4, e, 2)$

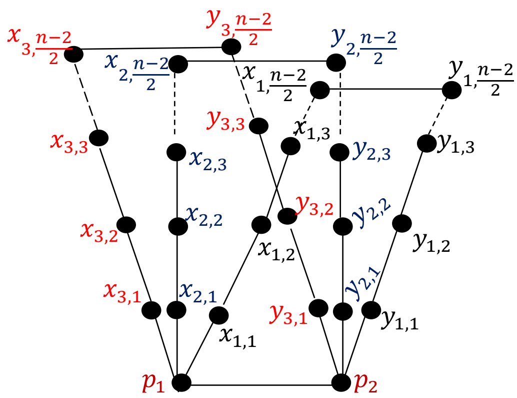


Gambar 2.12. $Amal(C_4, e, 3)$

Apabila $n \geq 4$ dan $k = 2,3$, maka graf $Amal(C_n, e, k)$ adalah sebagai berikut

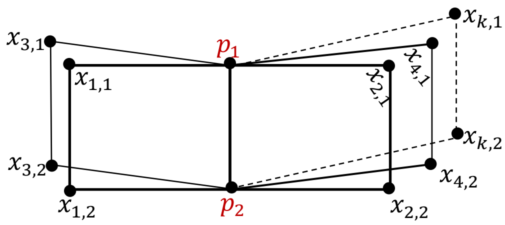


Gambar 2.13. $Amal(C_n, e, 2)$



Gambar 2.14. $Amal(C_n, e, 3)$

Selanjutnya untuk $k \geq 4$ maka graf $Amal(C_4, e, k)$ adalah sebagai berikut



Gambar 2.15. $Amal(C_4, e, k)$

2.5. Dimensi Partisi

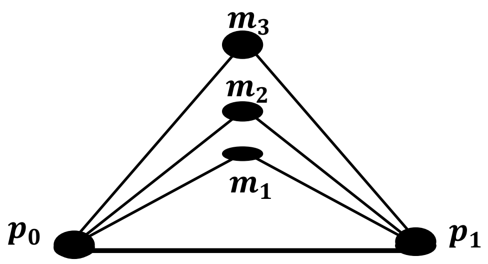
Dimensi partisi pertama kali ditemukan oleh Gary Chartrand dkk (2000) dimana dimensi partisi ini merupakan pengembangan dari dimensi metrik.

Definisi 2.5.1. Diberikan $S \subseteq V(G)$ dan terdapat titik v pada graf terhubung G, maka jarak antara v dan S dinotasikan $d(v, S)$, didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) : x \in S\}$. Jika $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah k-partisi dari $V(G)$, maka representasi v terhadap $\prod$ adalah k-pasangan berurutan, $r(v|\prod) =$

$\left(d(v,S_1), d(v,S_2), \ldots, d(v,S_k)\right)$. Jika k-pasangan berurutan $r(v|\prod)$ untuk $v \in V(G)$ semuanya berbeda, maka partisi $\prod$ disebut sebagai partisi pembeda. Bilangan k −minimal yang merupakan k −partisi pembeda dari $V(G)$ disebut dimensi partisi dari G dan dinotasikan dengan $pd(G)$. (Chartrand et al,2000)

Teorema 2.5.1. Diberikan graf terhubung dengan order $n \geq 2$, maka $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$. (Daming dkk,2020)

Contoh 2.5.1. Akan ditentukan dimensi partisi dari graf hasil amalgamasi sisi $Amal(C_3; e, 3)$



Gambar 2.16. Graf hasil amalgamasi sisi $\boldsymbol{Amal(C_3}$**,e,3)**

Misalkan $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ adalah partisi dari himpunan titik pada graf hasil $Amal(C_3, e, 3)$ dengan $S_1 = \{p_0, m_1\}$, $S_2 = \{p_1, m_2\}$, dan $S_3 = \{m_3\}$.

Representasi dari setiap titik terhadap $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ adalah :

$r(p_0|\prod) = \left(d(p_0,S_1), d(p_0,S_2), d(p_0,S_3)\right) = (0,1,1)$,

$r(p_1|\prod) = \left(d(p_1,S_1), d(p_1,S_2), d(p_1,S_3)\right) = (1,0,1)$,

$r(m_1|\prod) = \left(d(m_1,S_1), d(m_1,S_2), d(m_1,S_3)\right) = (0,1,2)$,

$r(m_2|\prod) = \left(d(m_2,S_1), d(m_2,S_2), d(m_2,S_3)\right) = (1,0,2)$, dan

$r(m_3|\prod) = \left(d(m_3,S_1), d(m_3,S_2), d(m_3,S_3)\right) = (1,1,0)$.

Dapat dilihat bahwa setiap titik yang berada pada kelas partisi yang sama memiliki representasi berbeda terhadap $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ maka $\prod$ merupakan partisi penyelesaian dari graf $\left(Amal(C_3, e, 3)\right)$. Sehingga, batas atas $pd\left(Amal(C_3, e, 3)\right) \leq 3$.

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa batas bawah $pd\big(Amal(C_3, e, 3)\big) \geq 3$. Terlihat bahwa $Amal(C_3, e, 3)$ bukan merupakan graf lintasan (*path*) sehingga berdasarkan Teorema 2.5.1 $pd\big(Amal(C_3, e, 3)\big) \neq 2$. Oleh karena itu, batas bawah $pd\big(Amal(C_3, e, 3)\big) \geq 3$ dan diperoleh $pd\big(Amal(C_3, e, 3)\big) = 3$.

Definisi 2.5.2. Diberikan graf G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik-titik yang setara dalam graf G apabila memenuhi salah satu sifat berikut (Hasmawati,2021) :

1. $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G)/\{u, v\}$.
2. Terdapat titik $c \in V(G)$ sedemikian sehingga $d(u, c) + d(c, s) = d(v, c) + d(c, s), \forall s \in V(G)/\{\text{u,v}\}$.

Teorema 2.5.2. Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi $\prod$ dari $V(G)$. Jika $\prod$ merupakan partisi pembeda graf G dan titik u dan v merupakan titik-titik yang setara dalam G, maka u dan v atau tetangga u dan tetangga v berada pada kelas partisi yang berbeda di $\prod$. (Hasmawati, 2021)

Lemma 2.5.2. Diberikan graf $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k \geq 4$ memiliki himpunan titik $V\left(Amal\big(C_4^i, e, k\big)\right) = \{p_1, p_2\} \cup \{x_{i,1},\ x_{i,2} \mid 1 \leq i \leq k\}$, maka :

a. Titik $x_{i,1}$ dengan $1 \leq i \leq k$ merupakan titik-titik yang setara.
b. Titik $x_{i,2}$ dengan $1 \leq i \leq k$ merupakan titik-titik yang setara.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 2.5.2, diperoleh titik-titik yang setara adalah sebagai berikut :

1. $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}$ adalah titik-titik yang setara karena terdapat titik p_1 sedemikian sehingga $d\big(x_{1,1}, p_1\big) + d(p_1, s) = d\big(x_{2,1}, p_1\big) + d(p_1, s) = \cdots = d\big(x_{k,1}, p_1\big) + d(p_1, s), \forall s \in V\big(Amal(C_4, e, k)\big)/\{x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}\}$.
2. $x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{k,2}$ adalah titik-titik yang setara karena terdapat titik p_2 sedemikian sehingga $d\big(x_{1,2}, p_2\big) + d(p_2, s) = d\big(x_{2,2}, p_2\big) + d(p_2, s) = \cdots = d\big(x_{k,2}, p_2\big) + d(p_2, s), \forall s \in V\big(Amal(C_4, e, k)\big)/\{x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{k,2}\}$.

Definisi 2.5.3. Diberikan G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik-titik yang setingkat dalam graf G apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\deg(u) = \deg(v)$

2. Jika $d(u,x) = k$, terdapat $y \in V(G)$ sehingga $d(u,x) = d(v,y)$ dan $|\{\, d(u,x)|x \in V(G)\}| = |\{\, d(v,y)|y \in V(G)\}|$

Teorema 2.5.3. Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi $\prod$ dari $V(G)$. Misalkan pula titik u dan v adalah titik-titik yang setingkat dalam G dan terdapat $x, y \in V(G)$ sedemikian sehingga $d(u,x) = d(v,y) = k$. Jika $\prod$ merupakan partisi pembeda graf G maka u dan v atau x dan y berada pada kelas partisi yang berbeda.

Lemma 2.5.3. Diberikan graf $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k \geq 4$ memiliki himpunan titik $V\left(Amal\left(C_4^i, e, k\right)\right) = \{p_1, p_2\} \cup \left\{x_{i,1},\ x_{i,2} \mid 1 \leq i \leq k\right\}$, maka :

a. titik $x_{i,1}, x_{i,2}$ dengan 1$\leq$ $i \leq k$ merupakan titik-titik yang setingkat.

b. titik p_1 dan p_2 merupakan titik-titik yang setingkat.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 2.5.3, diperoleh titik-titik yang setingkat adalah sebagai berikut :

1. $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}, x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{k,2}$ adalah titik-titik yang setingkat karena $\deg(x_{1,1}) = \deg(x_{2,1}) = \cdots = \deg(x_{k,1}) = \deg(x_{1,2}) = \cdots = \deg\,(x_{k,2}) = 2$ dan banyaknya titik yang berjarak satu dengan $x_{1,1},, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{k,2}$ adalah 2 , banyaknya titik yang berjarak dua dengan $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{k,2}$ adalah k, banyaknya titik yang berjarak tiga dengan $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{k,2}$ adalah k.
2. p_1, p_2 adalah titik-titik yang setingkat karena $\deg(p_1) = \deg(p_2) = k + 1$ dan banyaknya titik yang berjarak satu dengan p_1, p_2 adalah $k + 1$, banyaknya titik yang berjarak dua dengan p_1, p_2 adalah k.

BAB 3
METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Jenis penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka, yakni dengan menghimpun informasi yang relevan dengan dimensi partisi hasil amalgamasi-sisi pada graf siklus genap. Informasi tersebut dapat diperoleh dari buku, karya ilmiah, tesis, disertasi, dan sumber-sumber lainnya.

3.2. Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Perpustakaan dan Laboratorium Analisis jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin pada bulan november 2021.

3.3. Tahapan Penelitian

Prosedur kerja yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

1. Melakukan studi pustaka tentang operasi amalgamasi pada graf, studi pustaka tentang dimensi partisi graf, studi pustaka khusus untuk dimensi partisi graf yang memuat siklus termasuk graf amalgamasi-sisi siklus.
2. Menentukan dimensi partisi graf amalgamasi-sisi siklus genap $Amal(C_n, e, k)$ dengan $n \geq 4, k = 2{,}3$.
3. Menentukan dimensi partisi graf amalgamasi-sisi siklus $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k \geq 4$.
4. Merumuskan bentuk umum berdasarkan hasil yang diperoleh pada No.3 dan No.4.
5. Menulis hasil-hasil yang telah diperoleh dalam bentuk draf skripsi.