



Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Waktu Tunda dan Mangsa yang Dipanen



Oleh :
MAHARANI
H111 99 001

PERPUSTAKAAN FISIK UNIVERSITAS HASANUDDIN	
Tgl. Terima	27-6-05
Asal Dari	Fak-MIPA
Banyaknya	1 (satu) ek
Marga	H
No. Inventaris	300/27-6-05
no. klas	

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar
2004



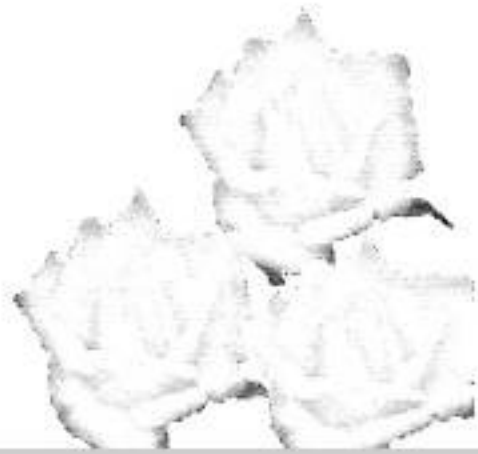
“ Dan berjihadlah kamu pada jalan Allah dengan jihad yang sebenar-benarnya. Dia telah memilih kamu dan Dia sekali-kali tidak menjadikan untuk kamu dalam agama suatu kesempitan. ”

Q. S Al-Hajj: 78

“ Dan seandainya pohon-pohon di bumi menjadi pena dan laut menjadi (tinta) ditambahkan tujuh laut (lagi) sesudah kering, niscaya tidak akan habis-habisnya (dituliskan) kalimat Allah Subhanahu Wa Ta’ala, Sesungguhnya Allah Maha Perkasa

lagi Maha Bijaksana ”

Q.S Luqman: 27



Kepada

Rabbku

Dinku

Orang Tuaku ...

Murabbiahku yang membantuku untuk
menenal dakwah ini

Saudara-saudaraku yang berusaha tegak
diatas jalan ini dalam barisan yang teratur

Orang-orang yang kucintai dan
mencintaiku karena Allah

*Untuk yang meminta lembaran khusus :
ANA UHIBBUKI (meski sulit untuk terbahasakan)
Jazakillah khaeran untuk semua nasihat, "kecaman",
semangat, yang ukhti hadirkan
Bersabarlah dalam kebersamaan itu
Semoga semuanya bisa menjadi hujjah
Untuk berkumpul lagi kelak ...
di JannahNya*



Lembar Keotentikan

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguhnya-bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Waktu Tunda dan Mangsa yang Dipanen

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

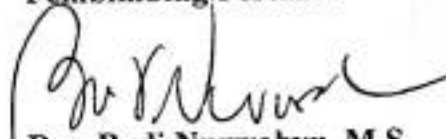
Makassar, Desember 2004

Maharani
H11199001

Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Waktu Tunda dan Mangsa yang Dipanen

Disetujui Oleh :

Pembimbing Pertama



Drs. Budi Nurwahyu, M.S
NIP : 131 414 010

Pembimbing Kedua



Drs. Syamsudin Toaha, M.Sc
NIP : 132 126 028

Pada Tanggal : Desember 2004

Pada hari ini tanggal 21 Desember, panitia ujian skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Waktu Tunda dan Mangsa yang Dipanen

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, Desember 2004

Panitia Ujian Skripsi

1. **Drs. Daeng Idris, Msi**
(Ketua)
2. **Jusmawati M., S. Si, Msi**
(Sekretaris)
3. **Drs. Budi Nurwahyu, MS**
(Anggota)
4. **Drs. Syamsuddin Toaba, MSc**
(Anggota)
5. **Amran, S. Si., Msi**
(Anggota)

Tanda Tangan



Kata Pengantar

Alhamdulillah, puji syukur kita panjatkan ke hadirat Allah سبحانه وتعالى karena berkat rahmat dan hidayah-Nya lah sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul “Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Waktu Tunda dan Mangsa yang Dipanen “. Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Shalawat dan salam untuk Rasulullah صلى الله عليه وسلم, suri tauladan kita, keluarga beliau serta para sahabat-sahabat beliau yang selalu menjadi panutan dalam hidup ini

Penulis menyadari bahwa skripsi ini dapat diselesaikan dengan bantuan banyak pihak. Baik bantuan moril, materil, ilmu pengetahuan selama mengikuti pendidikan maupun berupa petunjuk, bimbingan dan pembinaan dalam rangka penyusunan skripsi ini.

Penulis menghaturkan terima kasih, jazakumullahu khaeran kepada :

1. **Bapak Drs. Budi Nurwahyu M.S** yang telah membimbing dengan segala keikhlasan, mengarahkan dan memberikan dorongan selama pelaksanaan penelitian sampai penyelesaian skripsi ini. Semoga Allah سبحانه وتعالى menilainya sebagai ibadah.
2. **Bapak Drs. Muhammad Zakir, M.Sc**, selaku Ketua Jurusan Matematika beserta seluruh staf dosen pengajar dan staf pegawai, yang banyak memberikan kemudahan dalam pengurusan skripsi ini.
3. **Bapak Drs. Daeng Idris, MSi; Jusmawati M, SSi, MSi; Drs. Syamsuddin Toaha, MSc; Amran, SSi, MSi** selaku penguji, atas semua arahan-arahan demi perbaikan skripsi ini.

3. **Bapak Drs. Daeng Idris, MSi; Jusmawati M, SSi, MSi; Drs. Syamsuddin Toaha, MSc; Amran, SSi, MSi** selaku penguji, atas semua arahan-arahan demi perbaikan skripsi ini.
4. Terima kasih kepada kedua orang tuaku, **Madarai Maro dan Haramiah**, semua saudaraku dengan semua, dorongan dan do'a restu, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi. Semoga Allah سبحانه وتعالى memberikan kesempatan kepada penulis untuk membalas jasa-jasanya kelak dikemudian hari.
5. **All Akhawat FSUA, Akhwat Istiqomah, Akhwat Haafidzhat, Anak-anak Mutarabbiyahku**, ukhti.... Uhibbukunna fillah
6. **Ummu Syahid, Bunda Ria, Kholat Titi, Kak Hamnah, Kak Hanin, Kak Syukriyyah, Kak Amirah, Kak Salma, Kak Aisyah, Kak Asiyah, Kak Salwa , Emy Sweet** ukhti ... kalian begitu berarti.
7. Buat **Me-luck dan Ama , Masni, Nur , Nina-OC** juga ,senang bisa mengenal kalian dan terima kasih atas segala bantuannya. De'... taken care yourself .
8. **All Matematika '99, specially for Yanti, Asma Az-Zahro, Nana Pe-el, Ai', I Hope God Bless You Wherever you are**
9. Semua pihak yang tidak disebutkan namanya satu – persatu yang selama ini telah memberikan segala bentuk bantuannya kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan, baik dari segi penulisan maupun dari cara penyajiannya. Oleh karena itu penulis mengharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun dari berbagai pihak untuk perbaikan dan kesempurnaan skripsi ini. Akhir kata hanya Allah سبحانه وتعالى Yang Maha Sempurna dan Maha Mengetahui.

Makassar, Desember 2004

Penyusun

Abstrak

Sebagaimana diketahui bahwa system mangsa-pemangsa dengan angka pemanenan konstan menunjukkan dinamika yang sangat kaya. Pada sisi lain, pemasukan waktu tunda kedalam model mangsa-pemangsa dapat mempengaruhi kestabilan dan bifurkasi. Dalam tulisan ini penulis tertarik untuk mengkaji efek ganda dari tingkat pemanenan dan waktu tunda pada kondisi dinamis, dari generalisasi model mangsa-pemangsa tipe Gause dan model Wangersky-Cunningham. Hal tersebut menunjukkan bahwa model waktu tunda dapat menyebabkan equilibrium stabil menjadi tidak stabil dan bahkan menentukan kestabilan, jika waktu tunda berada dibawah level kritis pemanenan maka tingkat pemanenan berakibat pada equilibrium. Pada kondisi tertentu, satu dari beberapa model kehilangan kestabilan ketika waktu tunda berganti dan kemudian memperoleh kembali kestabilannya ketika tingkat pemanenan bertambah.

Kata Kunci : Mangsa-Pemangsa, Waktu Tunda, Pemanenan, Kestabilan, Bifurkasi

Abstract

It is known that predator-prey systems with constant rate harvesting exhibit very rich dynamics. On the other hand, incorporating time delays into predator-prey models could induce instability and bifurcation. In this paper the writer is interested in reviewing the combined effects of the harvesting rate and the time delay on the dynamics of the generalized Gause-type predator-prey models and the Wangersky-Cunningham model. It is shown that in these models the time delay can cause a stable equilibrium to become unstable and even a switching of stabilities, if the harvesting rate is under the critical harvesting level so the harvesting rate has an unstable and even switching of stabilizing effect on the equilibrium. In particular, one of these models loses stability when the delay varies and then regains its stability when the harvesting rate is increased. Computer simulations are carried to explain the mathematical conclusions.

Key word : Predator-Prey, Time Delay, Harvesting, Stability, Bifurcation.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
LEMBAR KEOTENTIKAN	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
LEMBAR PENERIMAAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI	viii
BAB I. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan Penulisan	3
1.3 Batasan masalah	3
1.4 Rumusan Masalah	3
1.5 Sistematika Penulisan	3
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	5
BAB III. TEORI PENDUKUNG	9
3.1 Jenis-jenis titik kesetimbangan.....	9
3.2 Defenisi Kestabilan	16
3.3 Kestabilan Sistem Linier.....	17
3.4 Kestabilan Sistem Non-linier	21
3.5 Bifurkasi	25

BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN	30
4.1 Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Waktu Tunda dan Mangsa yang Dipanen Pada Pertumbuhan Mangsa yang Spesifik.....	30
4.2 Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Waktu Tunda dan Mangsa yang Dipanen Pada Fungsi Respon Pemangsa.....	37
4.3 Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa Wangersky- Cunningham dengan Pemanenan Mangsa.....	44
V. KESIMPULAN DAN SARAN	53
5.1 Kesimpulan	53
5.2 Saran	53

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Model-model mangsa-pemangsa memainkan peran yang sangat penting dalam bioekonomi yang merupakan manajemen dari sumberdaya yang dapat diperbaharui. Dalam prakteknya, untuk memajemen sumber daya yang dapat diperbaharui tersebut didasarkan pada MSY, singkatan dari Maximum Sustainable Yields (memaksimumkan hasil).Masalah utama dari MSY adalah ia hanya mempertimbangkan tentang keuntungan eksploitasi sumberdaya namun mengabaikan biaya operasi dari eksploitasi tersebut. Juga mengabaikan fakta bahwa apabila suatu spesies terus-menerus diambil/dipanen populasinya akan menurun pada tingkatan tertentu, jika ini terjadi biaya pemanenan akan semakin banyak yang mungkin akan membawa pada situasi biaya panen lebih besar daripada keuntungan.

Dihadapkan pada kekurangan MSY, manusia berusaha menggantikannya dengan OSY singkatan dari Optimum Sustainable Yields (Mengoptimumkan hasil). Berbeda dengan MSY, OSY mempertimbangkan biaya-keuntungan (cost benefit) untuk memaksimalkan hasil. Pada kenyataannya, memang beberapa kasus telah menggunakan OSY, tetapi demi meningkatkan hasil MSY masih sering dipakai yang menjadi salah satu penyebab ketidakstabilan populasi suatu spesies yang ada di alam.

Untuk mengatur penggunaan sumberdaya yang dapat diperbaharui bukanlah hal yang gampang, apalagi membuat model matematika yang akurat tentang pengaruh panen terhadap populasi suatu spesies-spesies yang ada lebih rumit lagi. Suatu model yang sempurna tidak dapat dicapai, karena meskipun kita dapat menempatkan seluruh faktor-faktor seperti ukuran, rata-rata pertumbuhan, kapasitas pengangkutan, dan sebagainya dalam sebuah model, model tidak pernah dapat memprediksi bencana-bencana alam ekologi, atau perubahan suasana alam secara tiba-tiba (Mother Natural Caprice).

Disisi lain, ternyata penundaan waktu juga memberikan pengaruh pada suatu model. Secara umum persamaan diferensial dengan penundaan dapat menyebabkan titik keseimbangan stabil menjadi tidak stabil dan menyebabkan populasi berfluktuasi Yang dapat dilakukan adalah senantiasa mencari model-model yang dapat dianalisa yang menggambarkan sebaik mungkin suatu kenyataan atau pengaruh panen dan penundaan waktu pada populasi-populasi..

Untuk mengetahui sejauh mana pengaruh dari proses pemanenan dan penundaan waktu terhadap kestabilan model mangsa-pemangsa, maka penulis merasa tertarik untuk menuangkannya dalam bentuk tulisan dengan judul

'ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN WAKTU TUNDA DAN MANGSA YANG DIPANEN'

1.2 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan skripsi ini adalah menganalisis kestabilan model mangsa-pemangsa dengan waktu tunda dan mangsa yang dipanen.

1.3 Batasan Masalah

Dalam tulisan ini, penulis hanya akan menganalisis Generalisasi model mangsa-pemangsa tipe Gause yang selanjutnya juga akan mempertimbangkan keberadaan faktor pemanenan mangsa dan waktu tunda dalam model tersebut.

1.4 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas adalah bagaimana menentukan dan menganalisis kestabilan model mangsa-pemangsa dengan waktu tunda dan mangsa yang dipanen.

1.5 Sistematika Penulisan

Dalam penyusunan skripsi ini, sistematika penulisan dijabarkan sebagai berikut :

BAB I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

1.2 Tujuan Penulisan

1.3 Batasan Masalah

1.4 Rumusan Masalah

1.5 Sistematika Penulisan

BAB II. TINJAUAN PUSTAKA

BAB III. TEORI PENDUKUNG

3.1 Jenis-Jenis Titik Keseimbangan

3.2 Definisi Kestabilan

3.3 Kestabilan Sistem Linier

3.4 Kestabilan Sistem Non Linier

3.5 Definisi dan Jenis-jenis Bifurkasi

BAB IV ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA
DENGAN WAKTU TUNDA DAN MANGSAYANG DIPANEN

4.1 Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa Dengan Waktu
Tunda Dan Mangsa Yang Dipanen Pada Pertumbuhan Mangsa
Yang spesifik

4.2 Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa Dengan Waktu
Tunda Dan Mangsa Yang Dipanen Pada fungsi respon Pemangsa

4.3 Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa Wangersky –
Cunningham Dengan Mangsa Yang Dipanen

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

5.2 Saran

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Banyak penulis telah meneliti pengaruh dari kecepatan kosten terhadap dinamika-dinamika sistem-sistem mangsa-pemangsa. Tingkah laku dinamik yang sangat kaya dan menarik telah diamati, seperti stabilitas kesimbangan, keberadaan dari hop of bifurcation, bahkan juga pengaruh alam. Diamati juga bahwa jika tidak ada bencana alam yang terjadi, pemanenan bisa mempengaruhi keseimbangan sistem populasi.

Di sisi lain, penundaan waktu terhadap suatu pada suatu tipe atau pada beberapa tipe yang digabungkan dalam satu model secara biologi oleh para peneliti. Seperti May (1973), Brauer F dan Soudack (1979), dan yang lain. Ada banyak model mangsa-pemangsa yang tertunda (delayed predator prey) yang terdapat dalam literatur. Seperti yang dikemukakan oleh Gaus, yaitu :

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)g(x(t)) - y(t)p(x(t)) \\ y'(t) &= y(t)[-d + p(x(t))]\end{aligned}$$

Pada dasarnya, pemasukan waktu tunda (τ) dalam model tersebut ada 3 cara, yaitu :

1. Penundaan waktu (τ) dalam pertumbuhan mangsa

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)g(x(t-\tau)) - y(t)p(x(t)) \\ y'(t) &= y(t)[-d + p(x(t))]\end{aligned} \tag{2.1}$$

Dengan $x(t)$ kepadatan populasi mangsa pada waktu t

$y(t)$ kepadatan populasi pemangsa pada waktu t

$g(x(t))$ laju pertumbuhan mangsa

$p(x(t))$ fungsi respon pemangsa terhadap mangsa

d tingkat kematian pemangsa

τ waktu tunda

2. Penundaan waktu (τ) dalam fungsi respon pemangsa

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)g(x(t)) - y(t)p(x(t)) \\ y'(t) &= y(t)[-d + p(x(t-\tau))]\end{aligned}\quad (2.2)$$

Dengan $x(t)$ kepadatan populasi mangsa pada waktu t

$y(t)$ kepadatan populasi pemangsa pada waktu t

$g(x(t))$ laju pertumbuhan mangsa

$p(x(t))$ fungsi respon pemangsa terhadap mangsa

d tingkat kematian pemangsa

τ waktu tunda

3. Penundaan waktu (τ) dalam fungsi pemangsa dengan memasukkan interaksi

$y(t)p(x(t))$ dengan asumsi bahwa perubahan kecepatan para pemangsa

bergantung pada jumlah mangsa dan jumlah pemangsa yang ada sebelumnya

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)g(x(t)) - y(t)p(x(t)) \\ y'(t) &= -d_1 y(t) + y(t-\tau)p(x(t-\tau))\end{aligned}\quad (2.3)$$

Dengan $x(t)$ kepadatan populasi mangsa pada waktu t

$y(t)$ kepadatan populasi pemangsa pada waktu t

$g(x(t))$ laju pertumbuhan mangsa

$p(x(t))$ fungsi respon pemangsa terhadap mangsa

d tingkat kematian pemangsa

τ waktu tunda

Bila kedalam sistem tersebut dimasukkan koefisien pemanenan yang selanjutnya dilambangkan dengan ' H ', maka persamaan 2.1 menjadi

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)g(x(t-\tau)) - y(t)p(x(t)) - H \\y'(t) &= y(t)[-d + p(x(t))]\end{aligned}$$

Persamaan 2.2 menjadi

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)g(x(t)) - y(t)p(x(t)) - H \\y'(t) &= y(t)[-d + p(x(t-\tau))]\end{aligned}$$

Persamaan 2.3 menjadi

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)g(x(t)) - y(t)p(x(t)) - H \\y'(t) &= -d y(t) + y(t-\tau)p(x(t-\tau))\end{aligned}$$

Jika model mangsa-pemangsa tipe Gause ini di generalisasi , beberapa model mangsa-pemangsa baru akan ditemukan, salahsatunya adalah model mangsa-pemangsa Wangersky-Cunningham yaitu :

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)[r_1 - ax(t) - by(t)] - H \\y'(t) &= -r_2 y(t) + cx(t-\tau)y(t-\tau) \\a &= r_1 / K_x\end{aligned}$$

Dengan

$x(t)$ populasi mangsa pada waktu t

$y(t)$ populasi pemangsa pada waktu t

r_1 angka peningkatan populasi mangsa

r_2 angka kematian populasi pemangsa

- b koefisien dari efek pemangsaan x
 - c koefisien dari efek pemangsaan y
 - H tingkat pemanenan mangsa
 - K_x pendekatan untuk tingkat ketergantungan pertumbuhan mangsa selain oleh pemangsa
 - $\tau \geq 0$ waktu tunda
-

BAB III

TEORI PENDUKUNG

3.1. Jenis-Jenis Titik Keseimbangan

Definisi 3.1.1 :

Titik (titik-titik) $\bar{x}_* \in R^n$ disebut titik keseimbangan (equilibrium point) dari:

$$\dot{x} = f(x) \text{ dimana } f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \text{ jika } f(\bar{x}) = 0.$$

dengan kata lain $\bar{x}_* = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ titik setimbang

dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ dimana $i = 1, 2, \dots, n$.

Misalkan diberikan suatu sistem dengan dua persamaan differensial linear ordo pertama :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

dimana a, b, c, d adalah koefisien konstan dan $ad - bc \neq 0$ dan $t \in (-\infty, \infty)$.

Titik $\bar{x} = (0,0)$ adalah titik keseimbangan persamaan (3.1.1) karena pada titik $\bar{x} = (0,0)$, $\dot{x}(0,0) = \dot{x}(\bar{x}) = 0$. Misalkan $(x_1(t), x_2(t))$ merupakan solusi persamaan (3.1.1) dalam bidang (x_1, x_2) . Bidang ini disebut bidang fase.

Karena t berubah-ubah, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ menggambarkan suatu kurva dalam bidang (x_1, x_2) . Kurva inilah yang dinamakan trajektori.

Definisi 3.1.2 :

Misalkan $T : V \rightarrow V$ operator linear pada suatu ruang vektor V atas lapangan K . Suatu skalar $\lambda \in K$ disebut *nilai eigen* dari T jika terdapat suatu vektor tidak nol $v \in V$ sehingga $T(v) = \lambda v$.

Setiap vektor yang memenuhi persamaan ini disebut *vektor eigen* yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Definisi 3.1.3 :

Jika A suatu matriks $n \times n$ maka sebuah vektor tidak nol x di dalam R^n dinamakan *vektor eigen* dari A jika $Ax = \lambda x$.

Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Tinjau sistem persamaan diferensial linear :

$$\dot{x} = Ax \tag{3.1.2}$$

dimana A adalah matriks konstan 2×2 dan x adalah vektor kolom 2×1 .

Untuk menganalisis sistem (3.1.2) di titik kesetimbangannya $(0,0)$, ada beberapa jenis kesetimbangan yang perlu dipertimbangkan. Jenis kesetimbangan ini berbeda satu dengan yang lain, tergantung nilai eigen A .

3.1.1 Node

Jenis kesetimbangan ini merupakan kasus dengan akar-akar karakteristik polinomial (nilai eigen) yang real positif atau real negatif. Solusi umum dari persamaan (3.1.2) yaitu

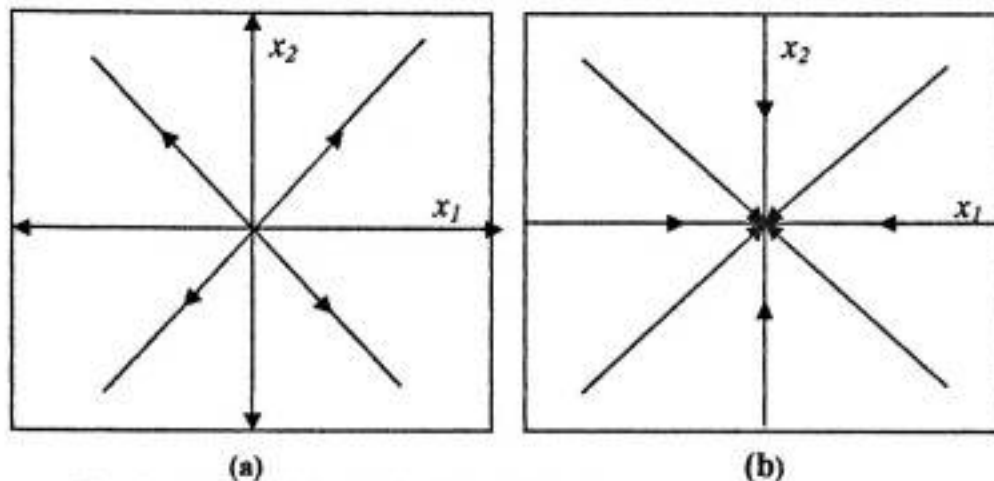
$$x(t) = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.1.3)$$

dimana λ_i adalah nilai eigen dan ξ_i adalah vektor eigen dari matriks A dengan $i = 1, 2$.

Kasus pertama jika $\lambda_i < 0$. Solusi (3.1.3) akan menunjukkan bahwa $x \rightarrow 0$ pada saat $t \rightarrow \infty$. Dengan kata lain semua solusi akan mendekati titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow \infty$. Jika solusi bergerak melalui garis ξ_1 maka $c_2 = 0$ dan solusi tersebut mendekati titik kesetimbangan pada saat $t \rightarrow \infty$. Sama halnya jika solusi bergerak melalui garis ξ_2 maka solusi tersebut akan mendekati titik kesetimbangan sepanjang garis tersebut.

Kasus kedua jika $\lambda_i > 0$. Solusi (3.1.3) menunjukkan bahwa $x \rightarrow \infty$ dengan $x(0) > 0$ pada saat $t \rightarrow \infty$, dengan kata lain arah gerakan solusinya menjauh dari titik kesetimbangan.

Berikut diperlihatkan trajektori disekitar titik kesetimbangan (0,0) yang merupakan node pada bidang R^2 yang stabil ditandai dengan arah anak panah yang menuju ke titik kesetimbangan dan tidak stabil jika arah anak panah menjauh dari titik kesetimbangan.



(a) (b)
 Gambar 1 : Trajektori di sekitar TK (0,0) yang merupakan node
 (a) Tidak stabil ($\lambda_1 > 0$) (b) Stabil ($\lambda_1 < 0$)

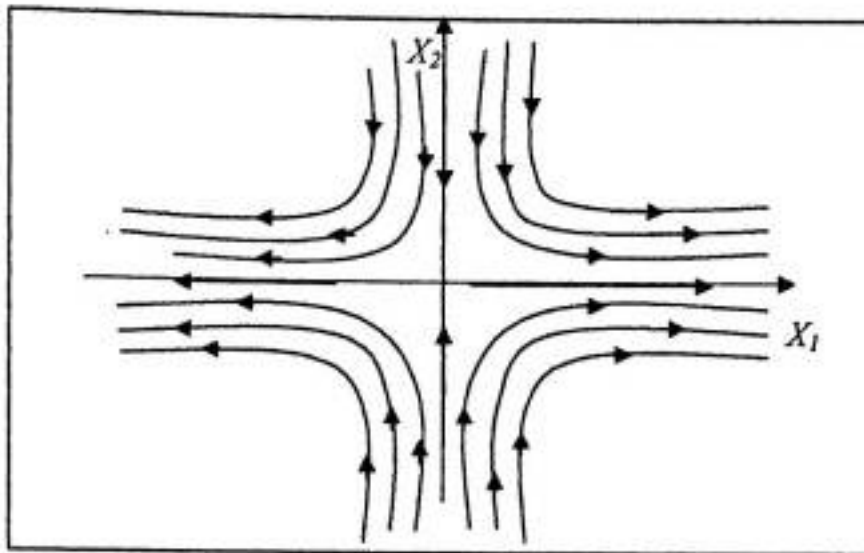
3.1.2 Pelana (Saddle)

Jenis kesetimbangan ini terjadi jika nilai eigennya real dan berbeda tanda (λ_1 positif dan λ_2 negatif atau sebaliknya). Solusi umum dari persamaan (3.1.2) :

$$x(t) = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.1.4)$$

Jika $\lambda_1 > 0$ maka $x \rightarrow \infty$ pada saat $t \rightarrow \infty$. Artinya solusi bergerak menjauhi titik kesetimbangan. Jika solusi bergerak untuk setiap t dengan $\lambda_2 < 0$ maka $x \rightarrow 0$ pada saat $t \rightarrow \infty$. Karena arah gerakan solusinya ada yang menjauh dan ada yang mendekati titik kesetimbangan, maka jenis kesetimbangan ini tidak pernah stabil.

Berikut diperlihatkan model trajektori yang berbentuk pelana (saddle) dengan titik kesetimbangan (0,0) pada bidang R^2 ditandai dengan arah panah trajektori yang masuk dan keluar.



Gambar 2 : Trajektori di sekitar TK (0,0) yang merupakan Pelana (saddle)

3.1.3 Spiral

Jenis titik kesetimbangan ini terjadi jika nilai eigennya kompleks. Misalkan nilai eigen tersebut adalah $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\mu$ dimana α dan μ adalah real, $\alpha \neq 0$ dan $\mu > 0$. Sistem ini dapat ditulis dalam bentuk :

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ -\mu & \alpha \end{pmatrix} x \quad (3.1.5)$$

atau dalam bentuk skalar :

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha x_1 + \mu x_2 \\ x_2' &= -\mu x_1 + \alpha x_2 \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Dari koordinat polar r dan θ diberikan :

$$\begin{aligned} r^2 &= x_1^2 + x_2^2 \\ \tan \theta &= \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Jika kedua persamaan terakhir diturunkan, diperoleh :

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2' \quad (3.1.7.a)$$

$$(\text{Sec}^2\theta)\theta' = \frac{(x_1x_2' - x_2x_1')}{x_1^2} \quad (3.1.7.b)$$

Substitusi persamaan (3.1.6) ke (3.1.7 a) diperoleh :

$$r = ce^{\lambda t} \quad (3.1.8)$$

dimana c adalah konstan.

Selanjutnya substitusi persamaan (3.1.6) ke persamaan (3.1.7.b) sehingga diperoleh :

$$\theta = -\mu t + \theta_0 \quad (3.1.9)$$

dimana θ_0 adalah nilai dari θ pada saat $t = 0$.

Jika $\mu > 0$ maka persamaan (3.1.9) menunjukkan bahwa $\theta \rightarrow 0$ pada saat $t \rightarrow \infty$ dengan arah gerakan yang searah jarum jam dan jika $\mu < 0$ maka $\theta \rightarrow \infty$ pada saat $t \rightarrow \infty$ dengan arah gerakan yang berlawanan dengan jarum jam. Dari persamaan (3.1.8), jika $\lambda < 0$ maka $r \rightarrow 0$ pada saat $t \rightarrow \infty$ dan jika $\lambda > 0$ maka $r \rightarrow \infty$ pada saat $t \rightarrow \infty$. Sehingga trajektorinya akan berbentuk spiral dengan arah gerakan yang mendekati atau menjauhi titik kesetimbangan (stabil atau tidak stabil) tergantung dari nilai eigen $\lambda_{1,2}$ dengan bagian real yang negatif atau positif.

3.1.4 Pusat (Center)

Jenis ini terjadi jika nilai eigennya adalah imajiner murni. Untuk kasus ini tidak jauh berbeda dengan kasus kesetimbangan bertipe spiral, dengan bagian real dari nilai eigennya yang kompleks bernilai nol. Sistem ini dapat digambarkan sebagai berikut :

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} x \quad (3.1.10)$$

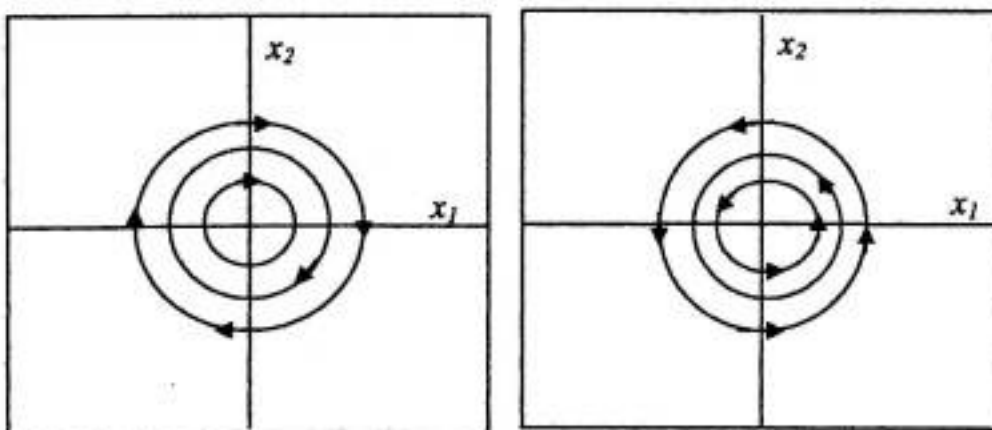
dengan nilai eigen $\pm i\mu$. Seperti halnya spiral maka akan diperoleh :

$$r' = 0, \theta' = -\mu$$

mengakibatkan, $r = c, \theta = -\mu t + \theta_0$ dimana c dan θ_0 adalah konstan.

Maka trajektorinya akan bergerak membentuk *Cycle* yang melintang searah jarum jam jika $\mu > 0$ dan berlawanan jarum jam jika $\mu < 0$.

Berikut diberikan model trajektori yang berbentuk center dengan titik kesetimbangan $(0,0)$ pada bidang R^2 dengan arah gerakan yang berbeda.



Gambar 3 : Trajektori di sekitar TK $(0,0)$ yang merupakan center,
(a) Searah jarum jam jika $\mu > 0$,
(b) Berlawanan jarum jam jika $\mu < 0$

3.2. Definisi Kestabilan

Pandang suatu sistem persamaan differensial berikut :

$$\dot{x} = f(t, x), t \geq t_0 \geq 0 \quad (3.2.1)$$

dimana x dan f adalah vektor.

$$I = [t_0, \infty) \text{ untuk } \rho > 0, S_\rho = \{x \in R^n : |x| < \rho\}$$

Misalkan fungsi f pada (3.2.1) terdefinisi dan kontinu pada $I \times S_\rho$. Misalkan

(3.2.1) mempunyai solusi $x(t)$ dalam S_ρ melalui titik (t_0, x_0) pada I .

Definisi 3.2.1:

Solusi $x(t)$ dikatakan stabil jika $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < \rho) \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall y(t)$ dari

(3.2.1) pada I memenuhi

$$|y(t) - x(t)| < \varepsilon, t \geq t_0 \text{ untuk } |y(t_0) - x(t_0)| < \delta$$

Definisi 3.2.2:

Solusi $x(t)$ dikatakan stabil asimptotik jika solusi tersebut stabil dan jika

$\exists \delta_0 > 0 \ni y(t)$ pada I memenuhi

$$|y(t) - x(t)| \rightarrow 0 \text{ untuk } t \rightarrow \infty \text{ dengan } |y(t_0) - x(t_0)| < \delta_0.$$

Suatu populasi yang berada dalam keadaan setimbang stabil jika mengalami gangguan maka cenderung akan kembali ke keadaan setimbang yang semula.

Sedangkan pada keadaan setimbang yang tidak stabil, sistem yang sedikit

bergeser dari keadaan itu cenderung akan menjauhi titik setimbang tidak stabil tersebut.

3.3. Kestabilan Sistem Linear

Misalkan diberikan suatu sistem dengan dua persamaan differensial linear ordo pertama :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

dimana a, b, c dan d konstan.

Dalam notasi vektor persamaan (3.3.1) dapat dituliskan sebagai :

$$\dot{x} = Ax\tag{3.3.2}$$

dimana A adalah matriks konstan dengan ordo 2 x 2.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ dan } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Diasumsikan A adalah matriks yang non singular dan nilai eigen λ_1 dan λ_2 berbeda. Karena itu titik kesetimbangan persamaan (3.3.1) hanya pada titik asal (0,0). Solusi persamaan (3.3.1) adalah :

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} c_2\tag{3.3.3}$$

dimana c_1 dan c_2 adalah vektor eigen bebas linear yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2 dari matriks A.

Kasus I : Misalkan λ_i real

Dari persamaan (3.3.3)

- Jika λ_1 negatif maka $x(t) \rightarrow 0$ pada $t \rightarrow \infty$ tanpa bergantung pada keadaan awal $x(0)$. Jadi titik $(0,0)$ dikatakan stabil asimptotik.
- Jika λ_1 positif maka $x(t) \rightarrow \infty$ pada $t \rightarrow \infty$. Dalam hal ini titik $(0,0)$ dikatakan tidak stabil.
- Untuk kasus dimana hanya terdapat satu nilai eigen yang bernilai real negatif, misalkan $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Dari persamaan (3.3.3) dapat dilihat bahwa bila $x(0)$ kelipatan c_1 maka $x(t) \rightarrow 0$ pada $t \rightarrow \infty$ dan sebaliknya $x(t) \rightarrow \infty$ bila $x(0)$ kelipatan c_2 . Jadi titik kesetimbangan $(0,0)$ disebut tidak stabil. Suatu kombinasi linear dari dua gerak yang demikian akan menghasilkan suatu orbit berbentuk sadel. Keadaan kesetimbangan ini disebut titik sadel.

Kasus II : Bila nilai eigennya (λ_i) kompleks.

Misal $\lambda_i = u + iv$, maka persamaan (3.3.3) menjadi :

$$x(t) = e^{ut}(\beta_1 \cos vt + \beta_2 \sin vt) \quad (3.3.4)$$

dengan β_1 dan β_2 adalah vektor yang sesuai.

- Jika $u = \text{Re}(\lambda_i) < 0$, maka $x(t)$ akan menuju nol dalam lintasan yang berbentuk spiral. Jadi titik kesetimbangan $(0,0)$ dikatakan stabil asimptotik.
- Jika $u = \text{Re}(\lambda_i) > 0$, maka titik kesetimbangan $(0,0)$ tidak stabil.

- Jika $u = \operatorname{Re}(i) = 0$, maka solusinya menjadi terbatas. Hal ini disebut stabil netral.

Lemma 3.3.1

- Titik kesetimbangan $(0,0)$ dari persamaan (3.3.2) stabil jika dan hanya jika nilai eigen dari matriks A adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real tak positif.
- Titik kesetimbangan $(0,0)$ dari persamaan (3.3.2) stabil asimptotik jika dan hanya jika kedua nilai eigen dari matriks A adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real yang negatif.
- Titik kesetimbangan $(0,0)$ dari persamaan (3.3.2) tak stabil jika salah satu (atau kedua) nilai eigen dari matriks A real dan positif atau jika paling sedikit satu nilai eigen mempunyai bagian real yang negatif.

Contoh 1

Perhatikan kembali 3.1.12

$$\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2$$

Diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 2$

Sehingga menurut *Lemma 3.3.1* titik setimbang $(0,0)$ tak stabil.

Lemma 3.3.2

Nilai eigen λ_i dari matriks A yang berordo 2×2 memenuhi $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ jika dan hanya jika $\lambda_1 \lambda_2 = \operatorname{Det}(A) > 0$ dan $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Trace}(A) < 0$. Nilai eigen λ_i

bilangan imajiner murni jika dan hanya jika $\text{Trace}(A) = 0$. dan $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ atau $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ jika dan hanya jika $\text{Det}(A) < 0$.

Contoh 2

Tinjaulah kestabilan dari persamaan sistem pegas teredam :

$$\ddot{z} + r\dot{z} + w^2z = 0 \quad (3.3.5)$$

Solusi :

Persamaan (3.3.5) dibentuk ke persamaan orde satu dengan memisalkan:

$$\begin{aligned} x_1 &= z \\ x_2 &= \dot{z} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

maka persamaan (3.3.5) menjadi :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -w^2x_1 - rx_2 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

yang dapat ditulis dalam bentuk matriks :

$$\dot{x} = Ax \quad (3.3.8)$$

dimana $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -r \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristiknya :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -w^2 & -r-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 + r\lambda + w^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - w^2} \quad (3.3.9)$$

Diperoleh : $\text{Det}(A) = w^2 > 0$

$$\text{Tr}(A) = -r < 0$$

Sehingga menurut *Lemma (3.3.2)* titik kesetimbangan $(0,0)$ stabil asimptotik.

3.4. Kestabilan Sistem Non Linear

Perhatikan sistem persamaan diferensial berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

dimana f_1 dan f_2 merupakan fungsi yang terdiferensial.

Misalkan $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ merupakan keadaan kesetimbangan dari persamaan (3.4.1)

dan misalkan $u_i = x_i - \bar{x}$, maka menurut Teorema Taylor untuk fungsi dua peubah :

$$f_i(x_1, x_2) = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + g_i(u_1, u_2)$$

untuk $i = 1, 2$

atau dapat juga ditulis dalam bentuk :

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + g_1(u_1, u_2)$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + g_2(u_1, u_2)$$

dengan asumsi bahwa $g_1(u_1, u_2)$ mempunyai turunan parsial pertama dan memenuhi $\frac{g_1(u_1, u_2)}{\|u\|} \rightarrow 0$ bila $\|u\| \rightarrow 0$, dimana $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Karena $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ adalah keadaan kesetimbangan, maka :

$$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$$

dan untuk

$$\dot{x}_1 = \frac{d}{dt} x_1 = \frac{d}{dt} (x_1 - \bar{x}_1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d}{dt} x_2 = \frac{d}{dt} (x_2 - \bar{x}_2)$$

maka persamaan (3.4.1) dapat ditulis :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(u_1, u_2) \\ g_2(u_1, u_2) \end{bmatrix}$$

yang dalam notasi vektor dituliskan sebagai :

$$\dot{u} = Au + g(u) \quad (3.4.2)$$

dimana :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

adalah matriks Jacobian dari f pada \bar{x} .

Untuk $x(t)$ yang sangat dekat \bar{x} , maka $g(u)$ menjadi kecil dan dapat diabaikan. Sehingga persamaan (3.4.2) dapat didekati oleh persamaan sistem linear

$$\dot{u} = Au \quad (3.4.3)$$

Situasi yang mungkin dapat terjadi adalah bergesernya keadaan kesetimbangan. Bila keadaan kesetimbangan \bar{x} bergeser ke $x(0)$ maka kestabilannya akan berubah. Dengan kata lain jika $x(t) \rightarrow \bar{x}$ untuk $t \rightarrow \infty$ atau $u(t) = x(t) - \bar{x}$ maka $u(t) \rightarrow 0$. Hal ini telah menjadi persoalan linear. Yang perlu diperhatikan adalah pendekatan yang dilakukan, x harus dekat ke \bar{x} . Jadi yang sebenarnya adalah kestabilan lokal saja.

Contoh 3

Tinjau persamaan bandul

$$\ddot{\theta} + r\dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (3.4.4)$$

Solusi :

Misalkan

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

Maka persamaan (3.4.4) menjadi :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - rx_2$$

jadi diperoleh :

$$f_1(x_1, x_2) = x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = -\frac{g}{l} \sin x_1 - rx_2$$

titik-titik kesetimbangan yang diperoleh adalah $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

➤ Untuk $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Maka Matriks A adalah :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -r \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh :

$$\text{Det}(A) = \frac{g}{l} > 0$$

$$\text{Tr}(A) = -r < 0$$

Maka menurut lemma 3.3.2 maka $\text{Re}(\lambda_i)$ negatif.

Sehingga dari lemma 3.3.1, $\bar{x} = (0,0)$ stabil asimptotik secara lokal.

➤ Untuk $\bar{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Maka } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\pi, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\pi, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\pi, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\pi, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -r \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh :

$$\text{Det}(A) = \frac{g}{l} > 0$$

$$\text{Tr}(A) = -r < 0$$

Maka menurut Lemma 3.3.2 salah satu nilai eigen dari matriks A bernilai positif.

Sehingga dari lemma 3.3.1 disimpulkan bahwa sistem yang dilinearkan disini mempunyai kesetimbangan yang tidak stabil.

3.5 Bifurkasi

Defenisi 3.5.1 :

Misalkan f medan vektor berdimensi satu, maka titiksetimbang (x_0, μ_0) disebut titik bifurkasi jika terdapat lebih dari satu kurva melewati (x_0, μ_0) dibidang $x - \mu$ atau jika hanya satu kurva melewati (x_0, μ_0) maka seluruhnya terletak pada satu sisi di $x_0 = \mu_0$ dibidang $\mu - x$.

Jenis-jenis bifurkasi :

1. Bifurkasi Sadel (Saddle-node bifurcation)

$$\text{Tinjau medan vektor } x = f(x, \mu), \quad x \in \mathcal{R}, \mu \in \mathcal{R} \quad \dots\dots(3.5.1)$$

Misalkan $(0,0)$ titik setimbang nonhyperbolik dari persamaan (3.5.1)

$$f(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = 0$$

Jika $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} \neq 0$, maka menurut teorema fungsi implisit terdapat

$\mu = \mu_x, \mu(0) = 0 \Rightarrow f(x, \mu(x)) = 0$ untuk x cukup kecil. Agar sistem (3.5.1) mengalami bifurkasi sadel harus memenuhi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x}(0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}(0) &\neq 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.5.2)$$

Contoh :

Diberikan sistem berdimensi satu $f(x, \mu) = \mu - x^2$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{(0,0)} = 1 \neq 0 \text{ pilih } \mu = x^2 \Rightarrow \mu(0) = 0, f(x, x^2) = x^2 - x^2 = 0$$

$$f(x, \mu(x)) = 0$$

$$\frac{\partial f(x, \mu(x))}{\partial x} = \frac{\partial f(x, \mu(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, \mu(x))}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(3.5.3)$$

Untuk $f(0,0)$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \quad \text{terbukti}$$

Untuk syarat kedua persamaan (3.5.3) dideferensialkan terhadap x , sehingga

$$\begin{aligned} \text{menjadi} \quad \frac{\partial^2 f(x, \mu(x))}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f(x, \mu(x))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, \mu(x))}{\partial x \partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(x, \mu(x))}{\partial x} = \frac{\partial f(x, \mu(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, \mu(x))}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \end{aligned}$$

2. Transcritical Bifurcation (Bifurkasi Transcritical)

Tinjau medan vektor $x' = f(x, \mu) = xF(x, \mu)$, $x \in \mathfrak{R}$, $\mu \in \mathfrak{R}$ dengan

$$1. F(x, \mu) = \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x}, x \neq 0; \frac{\partial f(0, \mu)}{\partial x}, x = 0$$

$$2. f(0,0) = 0$$

$$3. \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0$$

$$4. \frac{\partial}{\partial \mu} f(0,0) = 0$$

$$5. \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f(0,0) = 0; \frac{\partial^3}{\partial x \partial x \partial x} f(0,0) = 0$$

Contoh :

Diberikan sistem berdimensi satu $x' = \mu x + x^2$; $x \in \mathfrak{R}$, $\mu \in \mathfrak{R}$

Titik setimbang diperoleh jika $x' = \mu x + x^2 = 0$, $\mu x + x^2 = x(\mu + x) = 0$

$X=0$ atau $\mu + x = 0 \Rightarrow \mu = -x$, karena $f(0,0)=0$ dan

$$\frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = \mu + 2x \Big|_{(0,0)} = 0$$

Maka $(0,0)$ adalah titik setimbang non-hyperbolik.

3. Bifurkasi pitchfork

Tinjau medan vektor $x' = f(x, \mu) = xF(x, \mu)$, $x \in \mathfrak{R}$, $\mu \in \mathfrak{R}$ dengan

$$1. f(0,0) = 0$$

$$2. \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0$$

$$3. \frac{\partial}{\partial \mu} f(0,0) = 0$$

$$5. \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f(0,0) = 0; \frac{\partial^3}{\partial x \partial x \partial x} f(0,0) = 0$$

Maka terdapat satu cabang titik kritis (selain cabang $x=0$) yang menyinggung sumbu x di $(0,0)$ dan berada di pihak yang sama terhadap sumbu x (secara lokal). Kestabilan cabang kedua ini tidak berubah dengan berubahnya λ , sedangkan pada cabang 0 terjadi perubahan kestabilan di sekitar $(0,0)$.

4. Hopf Bifurcation

Diberikan sistem $x' = f(x, p)$ dengan $x \in \mathbb{R}^n, n \geq 2, p \in \mathbb{R}$ dengan titik tetap $x^*(p)$. $A(p)$ adalah matriks Jacobi yang dihasilkan dari pelinearan $f(x, p)$ pada $x^* p$. Jika matriks $A(p)$ memiliki nilai eigen kompleks konjugate $\mu(p) \pm i\omega(p)$, ketika nilai $p=p^*$ maka akan memenuhi kondisi berikut :

$$1. \mu(p^*) = 0$$

$$2. \omega(p^*) = \omega^* > 0$$

$$3. \left. \frac{d\mu(p)}{dp} \right|_{p=p^*} = \nu \neq 0$$

4. $A(p^*)$ tidak memiliki nilai eigen yang lain dengan bagian real nol selain $\pm i\omega^*$

Maka sistem memiliki batasan edar untuk masing-masing nilai p dalam satu sisi persekitaran dari p^* , yaitu untuk $|p - p^*|$ kecil, dengan $p > p^*$ atau $p < p^*$. Jika $\nu > 0$ dan batas edar ada untuk $p > p^*$, atau jika $\nu < 0$ dan batas edar ada untuk $p < p^*$, maka limit cycle stabil/setimbang disebut supercritical Hopf Bifurcation; jika tidak memenuhi kondisi tersebut artinya sistem tidak stabil disebut subcritical Hopf Bifurcation.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Waktu Tunda dan Mangsa yang Dipanen pada Pertumbuhan Mangsa yang Spesifik

Anggaplah sistem yang dimaksud adalah

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)[f(x(t-\tau)) - y(t)h(x(t))] - H \\y'(t) &= \mu y(t)[x(t)h(x(t)) - Jh(J)],\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

dengan

$x(t)$ populasi mangsa pada waktu t

$y(t)$ populasi pemangsa pada waktu t

$f(x)$ Tingkat pertumbuhan spesifik mangsa tanpa adanya pemangsa

$h(x)$ fungsi respon pemangsa terhadap mangsa

J populasi mangsa minimum

H Besarnya pemanenan mangsa

$\tau \geq 0$ waktu tunda

$\mu > 0$ konstan

Dalam hal ini $h(x)$ memenuhi kondisi-kondisi

$$h(x) > 0 \quad h'(x) \leq 0 \quad g'(x) = xh'(x) + h(x) > 0\tag{4.1.2}$$

dengan $g(x) = xh(x)$

Titik kestabilan (equilibrium) diperoleh dari

$$x'(t) = x(t)[f(x(t-\tau)) - y(t)h(x(t))] - H = 0 \dots\dots\dots (4.1.3)$$

$$y'(t) = \mu y(t)[x(t)h(x(t)) - Jh(J)] = 0 \dots\dots\dots (4.1.4)$$

Misalkan equilibriumnya (x^*, y^*) , dari persamaan (4.1.4) diperoleh $x^* = J$,

bila disubstitusikan ke persamaan (4.1.3) maka

$$x^* [f(x^*) - y^* h(x^*)] - H = 0$$

$$x^* f(x^*) - x^* y^* h(x^*) = H; y^* = \frac{x^* f(x^*) - H}{x^* h(x^*)} \quad (4.1.5)$$

Jika $H = x^* f(x^*) = Jf(J) \Rightarrow y^* = 0$

Untuk melinearkan sistem (4.1.1) disekitar titik equilibrium

(x^*, y^*) , misalkan $X = x - x^*; Y = y - y^*$, maka menurut teorema Taylor

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + (y - y^*) \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)$$

$$\text{Diperoleh } X'(t) = x'(t)(x^*, y^*) + \frac{\partial x'(t)(x^*, y^*)}{\partial x^*} X + \frac{\partial x'(t)(x^*, y^*)}{\partial y^*} Y$$

$$Y'(t) = y'(t)(x^*, y^*) + \frac{\partial y'(t)(x^*, y^*)}{\partial x^*} X + \frac{\partial y'(t)(x^*, y^*)}{\partial y^*} Y$$

Karena (x^*, y^*) adalah titik equilibrium maka $x'(t)(x^*, y^*) = y'(t)(x^*, y^*) = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} X'(t) &= x^* f'(x^*) X(t - \tau) + (f(x^*) - y^* g'(x^*)) X(t) - g(x^*) Y(t) \\ Y'(t) &= \mu y^* g'(x^*) X(t) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Persamaan (4.1.3) dapat ditransformasikan menjadi

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = x^* f'(x^*) \frac{dX(t - \tau)}{dt} + (f(x^*) - y^* g'(x^*)) \frac{dX}{dt} - g(x^*) \frac{dY}{dt}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} - x^* f'(x^*) \frac{dX(t - \tau)}{dt} - (f(x^*) + y^* g'(x^*)) \frac{dX}{dt} + g(x^*) \mu y^* g'(x^*) X(t) = 0$$

Misalkan solusi $x = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - x^* f'(x^*) \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} - (f(x^*) + y^* g'(x^*)) \lambda e^{\lambda t} + \mu y^* g(x^*) g'(x^*) e^{\lambda t} = 0 \quad (4.1.7)$$

$$\lambda^2 + q \lambda e^{-\lambda \tau} + p \lambda + \alpha = 0$$

Dengan

$$p = -[f(x^*) - y^* g'(x^*)]$$

$$q = -x^* f'(x^*)$$

$$\alpha = \mu y^* g(x^*) g'(x^*)$$

Untuk $\tau = 0$ persamaan (4.1.7) menjadi

$$\lambda^2 + (p+q)\lambda + \alpha = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{-(p+q) \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4\alpha}}{2} \quad (4.1.8)$$

Persamaan (4.1.8) memiliki akar real negatif jika dan hanya jika $p+q > 0$ dan $\alpha > 0$ atau ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} -f(x^*) + y^* g'(x^*) - x^* f'(x^*) > 0 \text{ dan} \\ \mu y^* g(x^*) g'(x^*) > 0 \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Jika $\mu > 0, g'(x^*) > 0, g(x^*) > 0, y^* > 0$, persamaan (4.1.7) akan selalu bernilai benar.

Untuk $\tau \neq 0$

Misalkan $\lambda = i\omega$, persamaan (4.1.7) menjadi

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 + p(i\omega) + q(i\omega)e^{-\tau i\omega} + \alpha &= 0 \\ -\omega^2 + p(i\omega) + q(i\omega)(e^{-i\omega\tau}) + \alpha &= 0 \\ -\omega^2 + p(i\omega) + q(i\omega)(\sin \omega\tau + i \cos \omega\tau) + \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Bila bagian real dan imajiner dipisahkan maka

$$\begin{aligned} \alpha - \omega^2 + q\omega \sin \omega\tau = 0 &\Rightarrow \alpha - \omega^2 = -q\omega \sin \omega\tau \\ p\omega + q\omega \cos \omega\tau = 0 &\Rightarrow p\omega = -q\omega \cos \omega\tau \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Dengan mengkuadratkan kedua sisi diperoleh

$$\begin{aligned} (\alpha - \omega^2)^2 &= (-q\omega \sin \omega\tau)^2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha\omega^2 + \omega^4 = q^2\omega^2 \sin^2 \omega\tau \\ (p\omega)^2 &= (-q\omega \cos \omega\tau)^2 \Rightarrow p^2\omega^2 = q^2\omega^2 \cos^2 \omega\tau \end{aligned}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\omega^2 + \omega^4 + p^2\omega^2 = q^2\omega^2(\sin^2 \omega\tau + \cos^2 \omega\tau)$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\omega^2 + \omega^4 + p^2\omega^2 - q^2\omega^2 = 0$$

$$(\omega^2)^2 + (p^2 - q^2 - 2\alpha)\omega^2 + \alpha^2 = 0 \dots \dots \dots (4.1.11)$$

Akar-akarnya adalah

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{q^2 - p^2 + 2\alpha \pm \sqrt{(q^2 - p^2 + 2\alpha)^2 - 4\alpha^2}}{2} \quad (4.1.12)$$

Agar akar-akar persamaan (4.12) bagian realnya negatif maka

$$p^2 - q^2 - 2\alpha > 0 \quad (4.1.13)$$

Lemma 4.1.1 :

Jika $p + q > 0, \alpha > 0$ dan $p^2 - q^2 - 2\alpha > 0$, maka semua akar persamaan (4.1.7) memiliki bagian real negatif $\forall \tau \geq 0$; maka equilibrium (x^, y^*) adalah stabil asimptotik $\forall \tau \geq 0$.*

Dari persamaan (4.1.12) dapat dilihat bahwa terdapat solusi tunggal positif ω_+^2 jika

$$q^2 - p^2 + 2\alpha > 0 \text{ dan } (q^2 - p^2 + 2\alpha)^2 = 4\alpha^2 \quad (4.1.14)$$

$$\text{Jika } q^2 - p^2 + 2\alpha > 0 \text{ dan } (q^2 - p^2 + 2\alpha)^2 > 4\alpha^2 \quad (4.1.15)$$

maka terdapat dua solusi positif ω_{\pm}^2 . Dengan mensubstitusi nilai ω_{\pm}^2 ke persamaan

(4.1.10) akan diperoleh nilai τ_j^{\pm} , yaitu

$$\alpha - \omega^2 - q\omega \sin \omega\tau = 0$$

$$p\omega + q\omega \cos \omega\tau = 0$$

$$\frac{q\omega \sin \omega\tau}{q\omega \cos \omega\tau} = \frac{\alpha - \omega^2}{-p\omega}$$

$$\tan \omega\tau = \frac{\omega^2 - \alpha}{p\omega}$$

$$\omega\tau = \arctan \frac{\omega^2 - \alpha}{p\omega} + 2j\pi$$

$$\tau_j^{\pm} = \frac{1}{\omega_{\pm}} \arctan \frac{\omega_{\pm}^2 - \alpha}{p\omega_{\pm}} + \frac{2j\pi}{\omega_{\pm}} \dots \dots \dots (4.1.16)$$

Lemma 4.1.2 :

Jika $p+q > 0, \alpha > 0$. jika $q^2 - p^2 + 2\alpha > 0$ dan $(q^2 - p^2 + 2\alpha)^2 = 4\alpha^2$ terpenuhi maka persamaan (4.1.7) dengan $\tau = \tau_j^+$ memiliki sepasang akar imajiner murni $\pm i\omega_+$. Jika

$q^2 - p^2 + 2\alpha > 0$ dan $(q^2 - p^2 + 2\alpha)^2 > 4\alpha^2$ terpenuhi dan $\tau = \tau_j^+ (\tau = \tau_j^-)$, maka persamaan (4.1.7) memiliki sepasang akar imajiner murni $\pm i\omega_+ (\pm i\omega_-)$

Bifurkasi terjadi jika memenuhi kondisi transversal yaitu

$$\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re} \lambda_j^+(\tau_j^+) > 0, \quad \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re} \lambda_j^-(\tau_j^-) < 0$$

Dengan mendiferensialkan persamaan diperoleh

$$\{2\lambda + p - \tau e^{-\lambda\tau}\} \frac{d\lambda}{d\tau} = -\lambda \tau e^{-\lambda\tau} \quad (4.1.17)$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{(2\lambda + p)e^{\lambda\tau} + q}{\lambda^2 q} \frac{\tau}{\lambda} e^{\lambda\tau} = \frac{-q\lambda}{\lambda^2 + p\lambda + \alpha} \quad (4.1.18)$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}\left\{\frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau}\right\}_{\lambda=i\omega} &= \operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right\}_{\lambda=i\omega} \\ &= \operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{-(2\lambda + p)}{\lambda(\lambda^2 + p\lambda + \alpha)}\right]_{\lambda=i\omega} + \operatorname{Re}\left[\frac{q}{\lambda^2 q}\right]_{\lambda=i\omega}\right\} \\ &= \operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{-(2i\omega + p)}{i\omega(i^2\omega^2 + pi\omega + \alpha)}\right] + \operatorname{Re}\frac{q}{i^2\omega^2 q}\right\} \\ &= \operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{-(2i\omega + p)}{(i^3\omega^3 - p^2\omega^2 + i\omega\alpha)}\right] - \operatorname{Re}\frac{q}{\omega^2 q}\right\} \\ &= \operatorname{sign}\left\{\frac{p^2 - 2(\alpha - \omega^2)}{p^2\omega^2 + (\omega^2 - \alpha)^2} - \frac{q^2}{q^2\omega^2}\right\} \\ &= \operatorname{sign}\{p^2 - q^2 - 2\alpha + 2\omega^2\} \end{aligned}$$

Dari (4.1.12),(4.1.15), dan hasil akhir, dapat dilihat bahwa kondisi transversal terpenuhi. Oleh karena itu, τ_j^\pm adalah nilai bifurkasi. Penyusunan kembali kesimpulan, diperoleh teorema

Theorema 4.1.3

Didefenisikan τ_j^\pm dengan persamaan

- (i) Jika $p+q > 0, \alpha > 0, p^2 - q^2 - 2\alpha > 0$, maka equilibrium (x^*, y^*) dari sistem (4.1) adalah stabil asimtotik $\forall \tau \geq 0$
- (ii) Jika $p+q > 0, \alpha > 0, q^2 - p^2 - 2\alpha > 0, (q^2 - p^2 + 2\alpha)^2 = 4\alpha^2$ maka equilibrium (x^*, y^*) dari sistem (4.1) adalah stabil asimtotik untuk $\tau \in [0, \tau_0)$ dan tidak stabil untuk $\tau > \tau_0$. Hopf bifurcation diperoleh ketika $\tau = \tau_0$; yaitu keluarga dari solusi periodic membagi dalam dua cabang dari (x^*, y^*) yaitu τ melewati nilai kritis τ^* .
- (iii) Jika $p+q > 0, \alpha > 0, q^2 - p^2 + 2\alpha > 0$ dan $(q^2 - p^2 + 2\alpha)^2 > 4\alpha^2$, maka terdapat k integer positif yang merubah keadaan stabil menjadi tidakstabil dan stabil kembali. Dengan kata lain ketika $\tau \in [0, \tau_0^+), (\tau_0^-, \tau_1^+), \dots, (\tau_{k-1}^-, \tau_k^+)$, titik kestabilan (x^*, y^*) dari sistem (4.1.1) adalah stabil, dan ketika $\tau \in [\tau_0^+, \tau_0^-), (\tau_1^+, \tau_1^-), \dots, (\tau_{k-1}^+, \tau_k^-)$, (x^*, y^*) tidak stabil. oleh karena itu bifurkasi pada (x^*, y^*) untuk $\tau = \tau_j^\pm, j = 0, 1, 2, \dots$

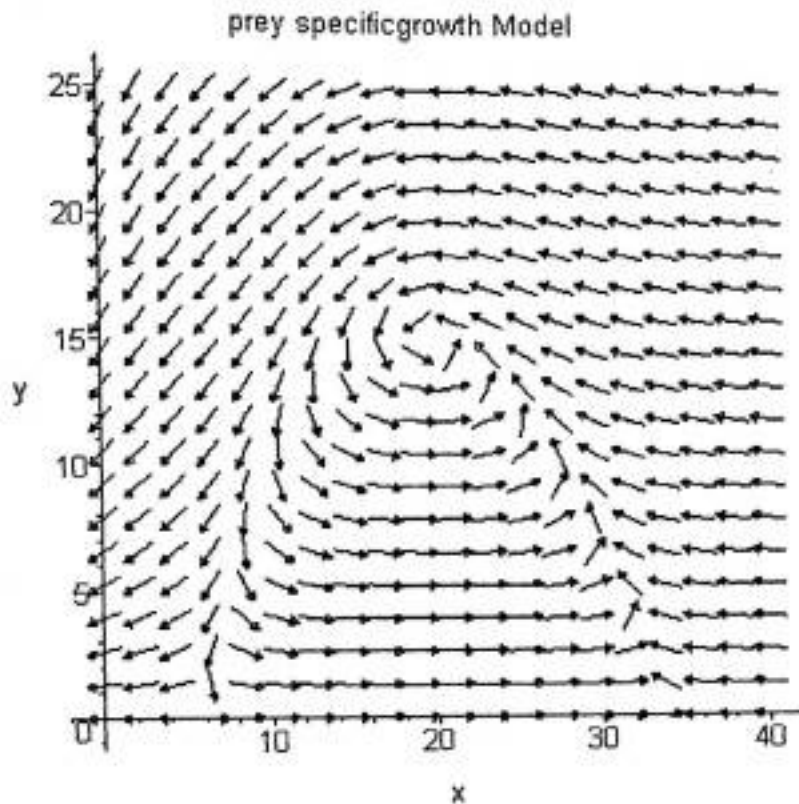
Contoh:

Diberikan suatu sistem:

$$\frac{dx}{dt} = x(t) \left\{ 2 \left[1 - \frac{x(t-\tau)}{40} \right] - \frac{y(t)}{x(t)+10} \right\} - 10$$

$$\frac{dy}{dt} = y(t) \left[\frac{x(t)}{x(t)+10} - \frac{2}{3} \right]$$

Equilibriumnya diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ sehingga equilibriumnya adalah $(x^*, y^*) = (20, 15)$. Sebagaimana ditunjukkan oleh gambar dibawah ini



Equilibrium y^* bergantung pada H , ketika banyak mangsa yang dipanen jumlah pemangsa menurun pada equilibrium, dan ketika sedikit mangsa yang dipanen jumlah y^* meningkat. Dengan mengingat bahwa $H = Jf(J) = 20$ merupakan angka pemanenan kirtis, maka untuk $H < 20$ equilibriumnya positif dan stabil, tetapi untuk $H \geq 20$ menyebabkan kepunahan predator dan system akan rusak.

Untuk efek ganda dari adanya waktu tunda τ dan angka pemanenan H , nilai kritisnya $\tau_0 = 0,8526$, equilibrium (x^*, y^*) stabil ketika $\tau < 0,8526$; Hopf bifurkasi diperoleh ketika $\tau = 0,8526$; dan equilibrium menjadi tidak stabil ketika $\tau > 0,8526$.

**4.2 ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA
DENGAN WAKTU TUNDA DAN MANGSA YANG DIPANEN
PADA FUNGSI RESPON PEMANGSA**

Anggaplah sistem yang dimaksud adalah

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)[f(x(t-\tau)) - y(t)h(x(t))] - H \\ y'(t) &= y(t)[-d + cx(t-\tau)h(x(t-\tau))], \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Dengan

$x(t)$ populasi mangsa pada waktu t

$y(t)$ populasi pemangsa pada waktu t

$f(x)$ Tingkat pertumbuhan spesifik mangsa tanpa adanya pemangsa

$h(x)$ fungsi respon pemangsa terhadap mangsa

H Besarnya pemanenan mangsa

$\tau \geq 0$ waktu tunda

$c > 0$ Angka perubahan dimakannya mangsa oleh predator

$d > 0$ Tingkat kematian pemangsa tanpa adanya mangsa

Dalam hal ini $h(x)$ memenuhi kondisi-kondisi

$$h(x) > 0 \quad h'(x) \leq 0$$

Dengan syarat

$$\begin{aligned} g(x) &= xh(x) \\ g'(x) &= xh'(x) + h(x) > 0 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Titik kestabilan (equilibrium) diperoleh dari

$$x'(t) = x(t)[f(x(t)) - y(t)h(x(t))] - H = 0 \dots\dots\dots(4.2.3)$$

$$y'(t) = y(t)[-d + cx(t - \tau)h(x(t - \tau))] = 0 \dots\dots\dots(4.2.4)$$

Misalkan equilibriumnya x^*, y^* , dari persamaan (4.2.3) diperoleh

$$y^* = \frac{x^* f(x^*) - H}{x^* h(x^*)}, \quad -d + cx^* h(x^*) = 0 \quad (4.2.5)$$

Dengan x^* adalah real non negatif. Nilai y^* menunjukkan bahwa $x^* f(x^*) > H$.

Untuk melinearkan sistem (4.2.1) disekitar titik equilibrium (x^*, y^*) , misalkan $X = x - x^*; Y = y - y^*$, maka menurut teorema Taylor

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + (y - y^*) \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)$$

$$\text{Diperoleh } X'(t) = x'(t)(x^*, y^*) + \frac{\partial x'(t)(x^*, y^*)}{\partial x^*} X + \frac{\partial x'(t)(x^*, y^*)}{\partial y^*} Y$$

$$Y'(t) = y'(t)(x^*, y^*) + \frac{\partial y'(t)(x^*, y^*)}{\partial x^*} X + \frac{\partial y'(t)(x^*, y^*)}{\partial y^*} Y$$

Karena (x^*, y^*) adalah titik equilibrium maka $x'(t)(x^*, y^*) = y'(t)(x^*, y^*) = 0$, sehingga diperoleh

$$X'(t) = (f(x^*) - y^* g'(x^*) + x^* f'(x^*))X(t) - g(x^*)Y(t) \quad (4.2.6)$$

$$Y'(t) = cy^* g'(x^*)X(t - \tau)$$

Persamaan (4.2.6) dapat ditransformasikan menjadi

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = (f(x^*) - y^* g'(x^*) + x^* f'(x^*)) \frac{dX}{dt} - g(x^*) \frac{dY}{dt}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} - (f(x^*) - y^* g'(x^*) + x^* f'(x^*)) \frac{dX}{dt} + g(x^*)cy^* g'(x^*)X(t - \tau) = 0$$

Misalkan solusi $x = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - (f(x^*) - y^* g'(x^*) + x^* f'(x^*)) \lambda e^{\lambda t} + (c y^* g(x^*) g'(x^*)) e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (4.2.7)$$

$$\lambda^2 + p\lambda + r e^{-\lambda \tau} = 0$$

4.2.7)

Dengan

$$p = -[f(x^*) + x^* f'(x^*) - y^* g'(x^*)]$$

$$r = c y^* g(x^*) g'(x^*)$$

Untuk $\tau = 0$ persamaan (4.2.7) menjadi

$$\lambda^2 + (p)\lambda + r = 0 \quad (4.2.8)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{-(p) \pm \sqrt{(p)^2 - 4r}}{2}$$

Persamaan (4.2.8) memiliki akar real negatif jika dan hanya jika $p > 0$ dan $r > 0$ atau ekuivalen dengan

$$-[f(x^*) + x^* f'(x^*) - y^* g'(x^*)] > 0 \text{ dan} \quad (4.2.9)$$

$$c x^* y^* g(x^*) g'(x^*) > 0$$

Dalam hal ini r selalu positif, jadi yang dipersyaratkan hanyalah $p > 0$ Untuk $\tau \neq 0$

Misalkan $\lambda = i\omega$, persamaan (4.2.7) menjadi

$$(i\omega)^2 + p(i\omega) + r e^{-i\omega \tau} = 0$$

$$-\omega^2 + p(i\omega) + r(\cos \omega \tau - i \sin \omega \tau) = 0$$

Bila bagian real dan imajiner dipisahkan maka

$$-\omega^2 + r \cos \omega \tau = 0 \Rightarrow \omega^2 = r \cos \omega \tau$$

$$p\omega - r \sin \omega \tau = 0 \Rightarrow p\omega = r \sin \omega \tau$$

(4.2.10)

Dengan mengkuadratkan kedua sisi diperoleh

$$\begin{aligned}\omega^4 &= r^2 \cos^2 \omega\tau \\ (p\omega)^2 &= r^2 \sin^2 \omega\tau \\ \hline \omega^4 + p^2\omega^2 - r^2 &= 0\end{aligned}$$

(4.2.11)

Akar-akarnya adalah

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{-p^2 \pm \sqrt{p^4 + 4r^2}}{2}$$

(4.2.12)

Jika $p^4 + 4r^2 > p^2$, maka terdapat hanya satu solusi positif dari ω_{\pm}^2 . Maka persamaan (4.2.12) memiliki sepasang akar yang imajiner $\pm i\omega_+$. Dengan mensubstitusi nilai ω_{\pm}^2 ke persamaan (4.2.10) akan diperoleh nilai τ_j^{\pm} , yaitu

$$\begin{aligned}-\omega^2 + r \cos \omega\tau &= 0 \\ p\omega - r \sin \omega\tau &= 0 \\ \frac{r \sin \omega\tau}{r \cos \omega\tau} &= \frac{p\omega}{\omega^2} \\ \tan \omega\tau &= \frac{p}{\omega} \\ \omega\tau &= \arctan \frac{p}{\omega} + 2j\pi \\ \tau_j^+ &= \frac{1}{\omega_+} \arctan \frac{p}{\omega_+} + \frac{2j\pi}{\omega_+} \dots\dots\dots(4.2.13)\end{aligned}$$

Dari analisis tersebut diperoleh

Lemma 4.2.1

Jika $p > 0$, $r > 0$ dan $\tau = \tau_0^+$ maka persamaan 4.2.7 memiliki sepasang akar

imajiner $\pm i\omega_+$.

$$\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re} \lambda_j^*(\tau_j^+) > 0,$$

(4.2.14)

Dengan mendiferensialkan persamaan diperoleh

$$\{2\lambda + p - r\tau e^{-\lambda\tau}\} \frac{d\lambda}{d\tau} = -\lambda r e^{-\lambda\tau}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda + p - r\tau e^{-\lambda\tau}}{-\lambda r e^{-\lambda\tau}}, e^{\lambda\tau} = \frac{r}{\lambda^2 + p\lambda}$$

(4.2.15)

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}\left\{\frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau}\right\}_{\lambda=i\omega} &= \operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right\}_{\lambda=i\omega} \\ &= \operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{(2\lambda + p)e^{\lambda\tau} - r}{-\lambda r}\right]\right\}_{\lambda=i\omega} \\ &= \operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{(2\lambda + p)\frac{r}{\lambda^2 + p\lambda}}{-\lambda r}\right]\right\}_{\lambda=i\omega} \\ &= \operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{2i\omega + p}{i\omega^3 + p\omega^2}\right]\right\} \\ &= \operatorname{sign}\left\{\frac{2\omega^2 + p^2}{r^2}\right\} \end{aligned}$$

Kondisi transversal terpenuhi, τ_j^\pm adalah nilai bifurkasi.

Theorema 4.2.2

Diberikan τ_0^* didefinisikan dengan persamaan. Jika $p > 0$ dan $r > 0$, maka equilibrium (x^*, y^*) dari sistem adalah stabil untuk $\tau < \tau_0^*$ dan tidak stabil untuk $\tau > \tau_0^*$. Sistem mengalami bifurkasi pada τ_0^*

Contoh:

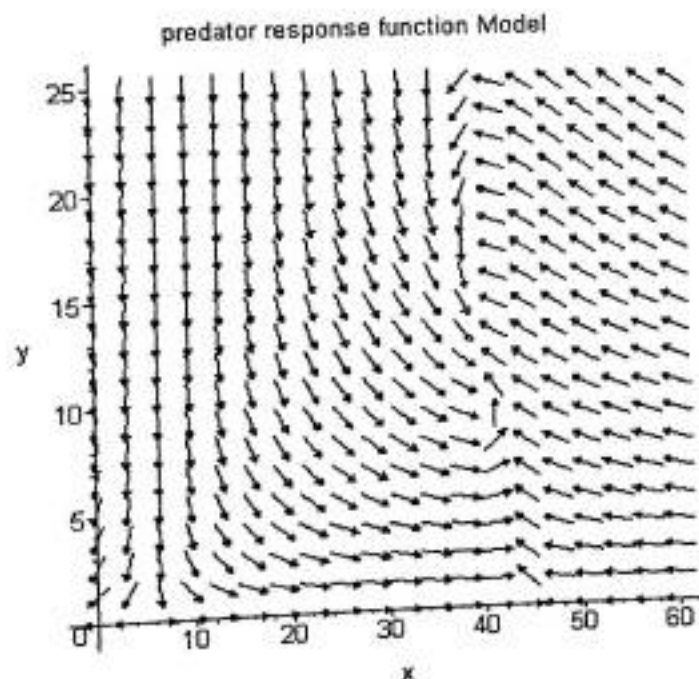
Diberikan suatu sistem :

$$\frac{dx}{dt} = x(t) \left\{ 2 \left[1 - \frac{x(t)}{50} \right] - \frac{y(t)}{x(t) + 40} \right\} - 10$$

$$\frac{dy}{dt} = y(t) \left[-3 + \frac{6x(t-\tau)}{x(t-\tau) + 40} \right]$$

Equilibriumnya diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ sehingga

equilibriumnya adalah $(x^*, y^*) = (40, 12)$. Sebagaimana ditunjukkan oleh gambar dibawah ini



Dengan melihat teorema (4.2.2) diperoleh nilai kritis $\tau_0 = 8,205$. Equilibrium (x^*, y^*) stabil asimtot untuk $\tau < 8,205$, dan tidak stabil untuk $\tau > 8,205$.

Equilibrium y^* bergantung pada H , ketika banyak mangsa yang dipanen jumlah pemangsa menurun pada equilibrium, dan ketika sedikit mangsa yang dipanen jumlah y^* meningkat. Dengan mengingat bahwa $H = xf(x) = 16$ merupakan angka pemanenan kritis, maka untuk $H < 16$ equilibriumnya positif dan stabil, tetapi untuk $H \geq 16$ menyebabkan kepunahan predator dan system akan rusak.

Sistem kembali stabil ketika pemanenan mangsa bertambah tetapi lebih kecil dari angka pemanenan kritis. Ini menunjukkan bahwa pemanenan memberikan pengaruh kepada kestabilan equilibrium dari model ini.

4.3 ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA WANGERSKY-CUNNINGHAM DENGAN PEMANENAN MANGSA

Anggaplah sistem yang dimaksud adalah

$$x'(t) = x(t)[r_1 - ax(t) - by(t)] - H \dots\dots\dots (4.3.1)$$

$$y'(t) = -r_2 y(t) + cx(t - \tau)y(t - \tau) \dots\dots\dots (4.3.2)$$

$$a = r_1 / K_x$$

Dengan

$x(t)$ populasi mangsa pada waktu t

$y(t)$ populasi pemangsa pada waktu t

r_1 angka peningkatan populasi mangsa

r_2 angka kematian populasi pemangsa

b koefisien dari efek pemangsaan x

c koefisien dari efek pemangsaan y

H tingkat pemanenan mangsa

K_x Istilah kepadatan bergantung ,mengemukakan pendekatan faktor yang mempengaruhi pertumbuhan dari mangsa selain oleh pemangsa

$\tau \geq 0$ waktu tunda

Titik kestabilan (equilibrium) diperoleh dari

$$x'(t) = x(t)[r_1 - ax(t) - by(t)] - H$$

$$y'(t) = -r_2 y(t) + cx(t - \tau)y(t - \tau),$$

$$a = r_1 / K_x$$

Misalkan equilibriumnya (x^*, y^*) , dari persamaan (4.3.1) diperoleh $x^* = \frac{r_2}{c}$, bila

disubstitusikan ke persamaan (4.3.2) maka

$$x^* [r_1 - ax^* - by^*] - H = 0$$

$$x^* r_1 - ax^* x^* - bx^* y^* = H; y^* = \frac{H - \frac{r_1 r_2}{c} + a \frac{r_2^2}{c^2}}{\frac{-br_2}{c}}$$

$$y^* = \frac{cr_1 r_2 - ar_2^2 - Hc^2}{bcr_2}$$

Dengan $cr_1 r_2 - ar_2^2 - Hc^2 \geq 0$

Jika $H = x^* (x^* r_1 - ax^*) \Rightarrow y^* = 0$

Untuk melinearkan sistem (4.3.1) dan (4.3.2) disekitar titik equilibrium (x^*, y^*) , misalkan $X = x - x^*; Y = y - y^*$, maka menurut teorema Taylor

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + (y - y^*) \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)$$

$$\text{Diperoleh } X'(t) = x'(t)(x^*, y^*) + \frac{\partial x'(t)(x^*, y^*)}{\partial x^*} X + \frac{\partial x'(t)(x^*, y^*)}{\partial y^*} Y$$

$$Y'(t) = y'(t)(x^*, y^*) + \frac{\partial y'(t)(x^*, y^*)}{\partial x^*} X + \frac{\partial y'(t)(x^*, y^*)}{\partial y^*} Y$$

Karena (x^*, y^*) adalah titik equilibrium maka $x'(t)(x^*, y^*) = y'(t)(x^*, y^*) = 0$,

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} X'(t) &= (r_1 - 2ax^* - by^*)X(t) - bx^* Y(t) \\ Y'(t) &= cy^* X(t - \tau) - r_2 Y(t) + cx^* Y(t - \tau) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Persamaan 4 dapat ditransformasikan menjadi

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = (r_1 - 2ax^* - by^*) \frac{dX(t)}{dt} - bx^* \frac{dY}{dt}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} - (r_1 - 2ax^* - by^*) \frac{dX(t)}{dt} - bx^* [cy^* X(t - \tau) - rY(t) + cx^* Y(t - \tau)] = 0$$

Misalkan solusi $x = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - (r_1 - 2ax^* - by^*) \lambda e^{\lambda t} - bx^* [cy^* X(t - \tau) - r_2 Y(t) + cx^* Y(t - \tau)] = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - (r_1 - 2ax^* - by^*) \lambda e^{\lambda t} - bx^* \left[cy^* X(t - \tau) - r_2 \frac{X'(t) - (r_1 - 2ax^* - by^*) X(t)}{bx^*} + cx^* \frac{X'(t - \tau) - (r_1 - 2ax^* - by^*) X(t - \tau)}{bx^*} \right] = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - (r_1 - 2ax^* - by^*) \lambda e^{\lambda t} - bx^* cy^* e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} - r_2 \lambda e^{\lambda t} - r_2 (r_1 - 2ax^* - by^*) e^{\lambda t} + cx^* e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} - cx^* (r_1 - 2ax^* - by^*) e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} = 0$$

$$\lambda + p\lambda + r + (s\lambda + q)e^{-\lambda \tau} = 0 \tag{4.3.4}$$

Dengan

$$p = r_2 - r_1 + 2ax^* + by^* - [f(x^*) - y^* g'(x^*)]$$

$$q = cx^* (r_1 - 2ax^* - by^*) + bcx^* y^*$$

$$r = -r_2 (r_1 - 2ax^* - by^*)$$

$$s = -cx^*$$

Untuk $\tau = 0$ persamaan 6 menjadi

$$\lambda^2 + (p + s)\lambda + q + r = 0 \dots \dots \dots (4.3.5)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{-(p + s) \pm \sqrt{(p + s)^2 - 4(q + r)}}{2} \dots \dots \dots (4.3.6)$$

Persamaan 7 memiliki akar real negatif jika dan hanya jika

$$p + s > 0 \text{ dan } q + r > 0 \tag{4.3.7}$$

Untuk $\tau \neq 0$

Misalkan $\lambda = i\omega$, persamaan 6 menjadi

$$\begin{aligned}(i\omega)^2 + p(i\omega) + r + (s i\omega + q)e^{-i\omega\tau} &= 0 \\ -\omega^2 + p(i\omega) + qe^{-i\omega\tau} + r + s\omega e^{-i\omega\tau} &= 0\end{aligned}$$

Bila bagian real dan imajiner dipisahkan maka

$$\begin{aligned}r - \omega^2 - s\omega \sin \omega\tau + q \cos \omega\tau = 0 &\Rightarrow r - \omega^2 = s\omega \sin \omega\tau - q \cos \omega\tau \\ p\omega + s\omega \cos \omega\tau + q \sin \omega\tau = 0 &\Rightarrow p\omega = -s\omega \cos \omega\tau - q \sin \omega\tau\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

Dengan mengkuadratkan kedua sisi diperoleh

$$\begin{aligned}(r - \omega^2)^2 &= (s\omega \sin \omega\tau - q \cos \omega\tau)^2 \\ \Rightarrow r^2 - 2r\omega^2 + \omega^4 &= s^2\omega^2 \sin^2 \omega\tau - 2s\omega \sin \omega\tau \cos \omega\tau + q^2 \cos^2 \omega\tau \\ (p\omega)^2 &= (-s\omega \cos \omega\tau - q \sin \omega\tau)^2 \\ \Rightarrow p^2\omega^2 &= s^2\omega^2 \cos^2 \omega\tau + 2s\omega \cos \omega\tau \sin \omega\tau + q^2 \sin^2 \omega\tau \\ r^2 - 2r\omega^2 + \omega^4 + p^2\omega^2 &= s^2\omega^2 (\sin^2 \omega\tau + \cos^2 \omega\tau) + q^2 (\sin^2 \omega\tau + \cos^2 \omega\tau) \\ \omega^4 + p^2\omega^2 - s^2\omega^2 - 2r\omega^2 + r^2 - q^2 &= 0 \\ (\omega^2)^2 + (p^2 - s^2 - 2r)\omega^2 + r^2 - q^2 &= 0 \dots\dots\dots(4.3.9)\end{aligned}$$

Akar-akarnya adalah

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{s^2 - p^2 + 2r \pm \sqrt{(s^2 - p^2 + 2r)^2 - 4(r^2 - q^2)}}{2}\tag{4.3.10}$$

Agar akar-akar persamaan 10 bagian realnya negatif maka

$$p^2 - s^2 - 2r > 0 \text{ dan } r^2 - q^2 > 0\tag{4.3.11}$$

Lemma 4.3.1 :

Jika $p+s>0, q+r>0$ dan $p^2-s^2-2r>0$, maka semua akar persamaan memiliki bagian real negatif $\forall \tau \geq 0$; maka equilibrium (x^*, y^*) adalah stabil asimptotik $\forall \tau \geq 0$.

Dari dapat dilihat bahwa terdapat solusi tunggal positif ω_{\pm}^2 jika

$$r^2 - q^2 < 0 \quad (4.3.12)$$

$$\text{Jika } r^2 - q^2 > 0, s^2 - p^2 + 2r > 0 \text{ dan } (s^2 - p^2 + 2r)^2 > 4(r^2 - q^2) \quad (4.3.13)$$

maka terdapat dua solusi positif ω_{\pm}^2 . Dengan mensubstitusi nilai ω_{\pm}^2 ke persamaan akan diperoleh nilai τ_{\pm}^2 , yaitu

$$r - \omega^2 - s\omega \sin \omega\tau + q \cos \omega\tau = 0 \Rightarrow r - \omega^2 = s\omega \sin \omega\tau - q \cos \omega\tau$$

$$p\omega + s\omega \cos \omega\tau + q \sin \omega\tau = 0 \Rightarrow p\omega = -s\omega \cos \omega\tau - q \sin \omega\tau$$

$$p\omega(r - \omega^2) = ps\omega^2 \sin \omega\tau - p\omega q \cos \omega\tau$$

$$p\omega(r - \omega^2) = -(r - \omega^2)s\omega \cos \omega\tau - (r - \omega^2)q \sin \omega\tau$$

$$ps\omega^2 \sin \omega\tau - p\omega q \cos \omega\tau + (r - \omega^2)s\omega \cos \omega\tau + (r - \omega^2)q \sin \omega\tau = 0$$

$$(ps\omega^2 + (r - \omega^2)q) \sin \omega\tau - (p\omega q - (r - \omega^2)s\omega) \cos \omega\tau = 0$$

$$(ps\omega^2 + (r - \omega^2)q) \sin \omega\tau = (p\omega q - (r - \omega^2)s\omega) \cos \omega\tau$$

$$\frac{\sin \omega\tau}{\cos \omega\tau} = \frac{\omega_{\pm} (pq - rs + s\omega_{\pm}^2)}{ps\omega_{\pm}^2 + (r - \omega_{\pm}^2)q}$$

$$\tan \omega\tau = \frac{\omega_{\pm} (pq - rs + s\omega_{\pm}^2)}{ps\omega_{\pm}^2 + (r - \omega_{\pm}^2)q}$$

$$\omega\tau = \arctan \frac{\omega_{\pm} (pq - rs + s\omega_{\pm}^2)}{ps\omega_{\pm}^2 + (r - \omega_{\pm}^2)q}$$

$$\tau_j^\pm = \frac{1}{\omega_\pm} \arctan \left(\frac{\omega_\pm (pq - rs + s\omega_\pm^2)}{ps\omega_\pm^2 + (r - \omega_\pm^2)q} \right) + \frac{2j\pi}{\omega_\pm} \quad (4.3.14)$$

Lemma 4.3.2

Jika kondisi 4.7 dan 4.12 terpenuhi, maka persamaan 4.4 dengan $\tau = \tau_j^*$ memiliki pasangan akar imajiner murni $\pm i\omega_+$. Jika kondisi 4.7 dan 4.13 terpenuhi dan $\tau = \tau_j^*$ ($\tau = \tau_j^-$, respectively), maka persamaan 4.4 memiliki pasangan akar imajiner $\pm i\omega_+$ ($\pm i\omega_-$, respectively).

Bifurkasi terjadi jika memenuhi kondisi transversal yaitu

$$\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re} \lambda_j^+(\tau_j^+) > 0, \quad \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re} \lambda_j^-(\tau_j^-) < 0$$

Dengan mendiferensialkan persamaan diperoleh

$$\{2\lambda + p + s\ell^{-\lambda\tau} - s\lambda\tau\ell^{-\lambda\tau} - \eta\ell^{-\lambda\tau}\} \frac{d\lambda}{d\tau} = -\lambda(s\lambda + q)\ell^{-\lambda\tau} \quad (4.1.15)$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda + p + s\ell^{-\lambda\tau}(1-\lambda) - \eta\ell^{-\lambda\tau}}{-\lambda(s\lambda + q)\ell^{-\lambda\tau}} \cdot \ell^{\lambda\tau} = \frac{s\lambda + q}{\lambda^2 + p\lambda + r} \quad (4.1.16)$$

Selanjutnya
$$\operatorname{sign} \left\{ \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right\}_{\lambda=i\omega} = \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right\}_{\lambda=i\omega}$$

$$= \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{(2\lambda + p)\ell^{\lambda\tau} + s(1 - \lambda\tau) - \eta}{-\lambda(s\lambda + q)} \right]_{\lambda=i\omega} \right\}$$

$$= \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{(2\lambda + p)}{-\lambda(\lambda^2 + p\lambda + r)} \right] + \operatorname{Re} \left[\frac{s(1 - \lambda\tau)}{-\lambda(s\lambda + q)} \right] + \operatorname{Re} \left[\frac{\eta}{-\lambda(s\lambda + q)} \right] \right\}_{\lambda=i\omega}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{sign} \left\{ \frac{p^2 + 2\omega^2 - 2r}{p^2\omega^2 + (\omega^2 - r)^2} + \frac{s^2}{s^2\omega^2 + q^2} \right\} \\
&= \text{sign} \left\{ \frac{p^2 + s^2 + 2\omega^2 - 2r}{s^2\omega^2 + q^2} \right\}
\end{aligned}$$

Theorema 4.3.3

Didefenisikan τ_j^\pm dengan persamaan

- (i) Jika $p + s > 0, q + r > 0, p^2 - s^2 - 2r > 0, r^2 - q^2 > 0$ maka equilibrium (x^*, y^*) dari sistem (4.1) adalah stabil asimtotik $\forall \tau \geq 0$
- (ii) Jika $p + s > 0, q + r > 0, r^2 - q^2 > 0, (q^2 - p^2 + 2r)^2 = 4\alpha^2$ maka equilibrium (x^*, y^*) dari sistem (4.3.1) adalah stabil asimtotik untuk $\tau < \tau_0$ dan tidak stabil untuk $\tau > \tau_0$. Hopf bifurcation diperoleh ketika $\tau = \tau_0$
- (iii) Jika $p + s > 0, q + r > 0, r^2 - q^2 > 0, s^2 - p^2 + 2r > 0$, dan $(s^2 - p^2 + 2r)^2 > 4(r^2 - q^2)$ maka terdapat k integer positif yang merubah keadaan stabil menjadi tidakstabil dan stabi kembalil. Dengan kata lain ketika $\tau \in [0, \tau_0^+), (\tau_0^-, \tau_1^+), \dots, (\tau_{k-1}^-, \tau_k^+)$, titik kestabilan (x^*, y^*) dari sistem 4.3.1 adalah stabil, dan ketika $\tau \in [\tau_0^+, \tau_0^-), (\tau_1^+, \tau_1^-), \dots, (\tau_{k-1}^+, \tau_k^-)$, (x^*, y^*) tidak stabil. oleh karena itu bifurkasi pada (x^*, y^*) untuk $\tau = \tau_j^\pm, j = 0, 1, 2, \dots$

Contoh:

Diberikan sistem ;

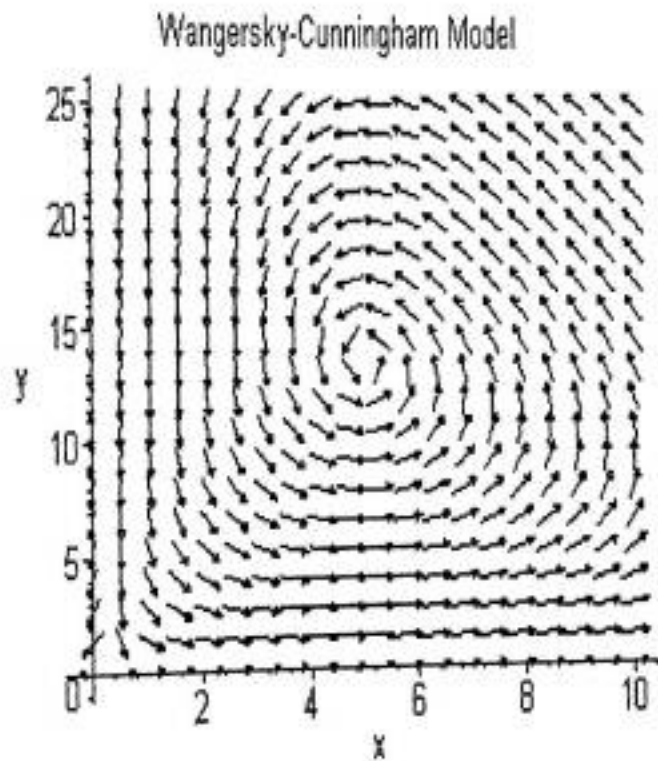
$$\frac{dx}{dt} = x(t)[20 - x(t) - y(t)] - 7$$

$$\frac{dy}{dt} = -15y(t) + 3x(t - \tau)y(t - \tau)$$

Equilibriumnya diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ sehingga

equilibriumnya adalah $(x^*, y^*) = (5, 68/5)$. Sebagaimana

ditunjukkan oleh gambar dibawah ini



Ketika $\tau = 0$, dari gambar diatas dapat dilihat populasi mangsa dan pemangsa bergerak kearah equilibrium $(5, 68/5)$. Untuk efek ganda dari adanya waktu tunda τ dan angka pemanenan H, nilai kritisnya $\tau_0 = 0,0385$, equilibrium (x^*, y^*) stabil asymptot ketika $\tau < 0,0385$; ketika $\tau = 0,0385$;

equilibrium kehilangan kestabilan; ketika $\tau > 0,0385$ equilibrium menjadi tidak stabil dan terjadi percabangan dua (bifurkasi).

Untuk mengetahui apakah nilai H yang bermacam-macam memberikan pengaruh kepada model, nilai H dimasukkan sama dengan 1 diperoleh $y^* = 74/5$, berbeda dengan $y^* = 68/5$ untuk $H=7$. Maka perubahan nilai H mengakibatkan perubahan pada y^* : bertambahnya H menyebabkan berkurangnya y^* , berkurangnya H menyebabkan bertambahnya y^* .

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Dari tiga model mangsa-pemangsa yang dianalisis terlihat bahwa waktu tunda dapat mempengaruhi kestabilan suatu sistem. Disisi yang lain, selama tingkat pemanenan H berada dibawah tingkat pemanenan kritis H_c , memberikan efek kepada kestabilan equilibrium, pada model kedua kestabilan diperoleh ketika tingkat pemanenan bertambah.

B. Saran

Mungkin baik jika dalam analisis selanjutnya, pemanenan bukan cuma pada mangsa- tetapi baik mangsa maupun pemangsa kedua-duanya mengalami pemanenan.

DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, William E and Richard C. DiPrima. 1992. **Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems**. John Wiley & Sons, Inc, Canada.
- Churchill, Ruel Vance and James Ward. 1984. **Complex Variables And Application**. McGraw-Hill Book company, New York.
- Kartono, M.Si,Drs. 2001. **Maple Untuk Persamaan Differensial J & J Learning** Yogyakarta, Indonesia.
- May, R.M. 1973. **Time Delay Versus Stability In Population Models With Two And Three Trophic Levels**, Ecology, 4, 931-5-325)
- Mazumdar, J. 1989. **An Introduction To Mathematical Physiology And Biology**. Cambridge University Press, New York.
- Verhulst Ferdinand. 1996. **Nonlinear Differential Equations And Dynamical System**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Perko, Lawrence. **Differential Equations and Dynamical System**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Ruan, S. 2001. **Absolute Stability, Conditional Stability And Bifurcation In Olmogorov Type Predator-Prey System With Discrete Delay Quarts**. Appl.Math., 59, 159-173.

WILLIAM RAY

Lampiran 1:

```
> with(DEtools):p(x):=2*(1-x/40);  
  
r(x):=1/(x+10);dfieldplot([diff(x(t),t)=x(t)*(p(x)-  
y(t)*r(x))-10, diff(y(t),t)=y(t)*(x(t)*r(x)-2/3)],  
[x(t),y(t)],t=0..1, x=0..40, y=0..25, arrows=MEDIUM,  
title=`prey specificgrowth Model`);
```

Lampiran 2 :

```
> with(DEtools):p(x):=2*(1-x/50);  
r(x):=1/(x+40);dfieldplot([diff(x(t),t)=x(t)*(p(x)-  
y(t)*r(x))-10, diff(y(t),t)=y(t)*(-3+6*x(t)*r(x))],  
[x(t),y(t)],t=0..1, x=0..60, y=0..25, arrows=MEDIUM,  
title=`predator response function Model`);
```

Lampiran 3 :

```
>with(DEtools):
```

```
dfieldplot([diff(x(t),t)=x(t)*(20-x(t)-y(t))-7,  
diff(y(t),t)=-15*y(t)+3*x(t)*y(t)],  
[x(t),y(t)],t=0..1, x=0..10, y=0..25, arrows=MEDIUM,  
title=`Wangersky-Cunningham Model` );
```