

MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN MANGSA YANG  
TERINFEKSI

SKRIPSI



OLEH :  
CITRA AKBAR B  
H11102030

2 - 3 - 10  
MIPA  
1 kelas  
MIPA  
3  
SICR-MP09  
AKB  
m

JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR

2009

## **LEMBAR KEOTENTIKAN**

*Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan  
sesungguh-sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :*

### **MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN MANGSA YANG TERINFEKSI**

*Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan  
belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.*

Makassar, Desember 2009

**CITRA AKBAR B**  
**NIM: H 111 02 030**

**MODEL MANGSA PEMANGSA  
DENGAN MANGSA YANG TERINFEKSI**

*Disetujui Oleh :*

**Pembimbing Utama**



**Drs. Budi Nurwahyu, M.S**  
**NIP. 131 414 010**

**Pembimbing Pertama**



**Drs. Muh. Zakir, M.Si**  
**NIP. 131 959 064**

**Pada tanggal: Desember 2009**

Pada hari ini, Desember 2009, Panitia Ujian Sidang Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

## MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN MANGSA YANG TERINFEKSI

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Statistika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Makassar, Desember 2009

### Panitia Ujian Skripsi

- |               |                           |
|---------------|---------------------------|
| 1. Ketua      | : Drs. Raupong, M.Si      |
| 2. Sekretaris | : Drs. Khaeruddin, M.Sc   |
| 3. Anggota    | : Drs. Budi Nurwahyu, M.S |
| 4. Anggota    | : Drs. Muh. Zakir, M.Si   |
| 5. Anggota    | : Firman, S.Si, M. Si     |

### Tanda Tangan

(..........)

(..........)

(..........)

(..........)

(..........)

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Rabbil Alamin, rasa syukur yang dalam penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT Yang Maha Pemurah, Pengasih, dan Penyayang, karena berkat kemurahan-Nya sehingga penulis diberikan kemampuan, kesempatan, dan kekuatan untuk menyelesaikan skripsi ini dengan judul, "**Model Mangsa Pemangsa dengan Mangsa yang Terinfeksi**".

Salam dan salawat semoga tetap tercurahkan kepada Nabiullah Muhammad SAW. Beliau adalah teladan terbaik bagi kita semua.

Doa, dukungan, cinta dan kasih sayang yang tak pernah habisnya dari Ibunda dan Ayahanda tercinta, karena itu sujud sembah dan terima kasih yang tak ternilai Ananda hanturkan kepada Ibunda **Hj. Maryam** dan Ayahanda **H. Bachtiar**. Yang selalu memberikan tempat teraman seperti Ananda masih dalam kandungan hingga menikmati dunia dengan ilmu.

Terima kasih juga untuk pandawa-pandawaku tercinta : **Satria, SH, Dermawan, Tawakkal, Brama, Cakra, dan Sran** yang selama ini selalu memberikan dukungan, kasih sayang dan semangat dengan celoteh-celoteh sederhana yang menggelikan yang memberiku kekuatan untuk menyelesaikan setiap permasalahan hidup. Memiliki kalian adalah anugrah dan kesyukuran terbesar dalam hidup ini.

Pada kesempatan ini pula penulis dengan tulus dan penuh kerendahan hati menghanturkan ucapan terima kasih kepada :

1. **Bapak Drs. Budi Nurwahyu, MS** selaku pembimbing utama yang telah meluangkan waktunya ditenga kesibukan untuk memberikan bimbingan, motivasi, dan dengan penuh kesabaran membantu penulis hingga tugas akhir ini bias selesai.
2. **Bapak Drs. Muh Zakir, M.Si** selaku pembimbing pertama dan selaku penasehat akademik yang telah meluangkan waku, tenaga, dan pikiran untuk memberikan nasehat-nasehat, memperhatikan keadaan akademik dan memberikan kebijakan-kebijakan untuk penulis.
3. **Bapak Drs. Khaeruddin, M.Sc** selaku ketua jurusan Matematika yang selalu membantu setiap mahasiswa menghadapi masalah akademik, seorang dengan pribadi yang luar biasa yang sederhana dan sangat dekat dengan semua mahasiswa.
4. **Bapak Drs. Raopong, M.Si, Bapak Firman, S.Si, M.Si, dan Bapak Amran, S.Si, M.Si** selaku penguji yang telah meluangkan waktu dan juga banyak memberikan masukan yang membawa pada kebaikan penulisan ini.
5. Para dosen jurusan Matematika FMIPA Unhas yang telah memberikan ilmu selama proses perkuliahan, semoga ilmu tersebut baik secara langsung maupun tidak langsung akan bermanfaat bagi orang banyak.
6. Terima kasih juga untuk para pegawai FMIPA Unhas dan pegawai Jurusan Matematika : **Pak Sutamin, Pak Nasir, dan Pak Akbar.**

7. Teman-teman angkatan '02 khususnya Ayu dan Juki . Buat anak-anak MP 'Math Perpus cholic' Fajar, Cece, Eki, Hikmah, Ija, Eka, Ucay, Jani, titin, ina, nurul, imin, yang memberikan semangat-semangat kecil yang begitu berharga saat penulis menyelesaikan skripsi ini. Buat warga HIMATIKA Unhas. Dan tentunya buat sahabatku pado', dondonk (acha FH'03) dan udu. atas semua cerita manis.

Terima kasih untuk semua, semoga ALLAH SWT membalas dengan sebaik-baiknya balasan dari-Nya.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini terdapat banyak kekurangan dan sangat jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu penulis harapkan saran dan kritik yang membangun dan bias membawa pada kebaikan untuk penulisan selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua, Amin.

Makassar, Desember 2009

**Penulis**

## ABSTRAK

Model mangsa pemangsa dengan pertumbuhan logistic mangsa, dengan modifikasi adanya penularan bersifat parasit SIS pada mangsa, sehingga mangsa lebih rentan untuk dimangsa. Mengidentifikasi ambang batas dengan menentukan kapan populasi mangsa bertahan dan kapan terdapat sisa wabah penyakit. Untuk beberapa nilai parameter kerentanan pada mangsa yang terinfeksi menyebabkan populasi pemangsa bertahan, ketika yang lainnya punah. Demikian juga memangsa mangsa yang rentan membuat sakit sehingga menyebabkan kematian, ketika terdapat sisa wabah tanpa pemangsa.



## ABSTRACT

A predator-prey model with logistic growth in the prey is modified to include an SIS parasitic infection in the prey with infected prey being more vulnerable to predation. Thresholds are identified which determine when the predator population survives and when the disease remains endemic. For some parameter values the greater vulnerability of the infected prey allows the predator population to persist, when it would otherwise become extinct. Also the predation on the more vulnerable prey can cause the disease to die out, when it would remain endemic without the predators.

Keywords : Predator, Prey, SIS, Disease, Equilibrium, Stability

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL.....</b>	<b>i</b>
<b>LEMBAR KEOTENTIKAN.....</b>	<b>ii</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN.....</b>	<b>iii</b>
<b>LEMBAR PENGUJI.....</b>	<b>iv</b>
<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRAK.....</b>	<b>viii</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR ISI .....</b>	<b>x</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan Penulisan.....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Sistem Model Mangsa Pemangsa Lotka-Volterra.....	4
2.2 Model SIS (Susceptible Infected Susceptible).....	7
2.3 Sistem Model Mangsa Pemangsa dengan Mangsa yang Terinfeksi.....	8
2.4 Basic Reproduction Ratio Number ( $R_0$ ) .....	10
2.5 Titik Kesetimbangan.....	10
2.6 Linearisasi Sistem Nonlinear.....	11

2.7	Analisis Kestabilan Sistem dengan Metode Nilai Eigen	13
-----	--	----

### **BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN**

3.1	Model Mangsa Pemangsa dan Model SIS pada Mangsa..	17
3.1.1	Model Mangsa Pemangsa.....	17
3.1.2	Model SIS.....	21
3.2	Model Mangsa Pemangsa SIS dengan Mangsa yang Rentan Terinfeksi.....	29
3.3	Simulasi Numerik.....	38

### **BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN**

4.1	Kesimpulan.....	46
4.2	Saran.....	47

### **DAFTAR PUSTAKA**

### **LAMPIRAN**

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Secara umum model matematika adalah suatu usaha untuk menciptakan suatu replika atau tiruan dari suatu fenomena atau peristiwa alam ke dalam bahasa matematika. Proses seperti ini disebut pemodelan secara matematika.

Model populasi mangsa-pemangsa adalah salah satu model yang telah dianalisis secara meluas oleh banyak peneliti. Ini disebabkan karena banyaknya fenomena dalam interaksi populasi yang bersifat predasi (mangsa-pemangsa).

Salah satu faktor yang banyak dipertimbangkan dalam pembentukan model mangsa-pemangsa adalah adanya interaksi antara mangsa dan pemangsa. Sehingga dengan adanya interaksi ini, populasi mangsa dan pemangsa terpengaruhi. Dan juga faktor adanya mangsa yang terinfeksi penyakit sangat mempengaruhi populasi mangsa dan pemangsa. Dimana efek penyakit tersebut menyebabkan berkurangnya reproduksi sehingga dapat mengurangi populasi alami, mengurangi jumlah populasi, mengurangi fluktuasi alami disebabkan oleh keseimbangan populasi menjadi goyang.

Pada tulisan ini, mangsa yang terinfeksi tidak menyebabkan kematian. Setelah sembuh, mangsa tersebut akan kembali ke populasi rentan yang berarti bahwa masih dapat terinfeksi penyakit. Jadi, mangsa tersebut tidak mempunyai imunitas. Oleh karena itu, model penyakit pada mangsa bertipe SIS.

Tulisan ini didasarkan pada dua model yaitu model mangsa pemangsa dan model SIS. Model ini difokuskan pada bagaimana keadaan pemangsa dan endemisitas penyakit pada mangsa.

Atas dasar ini penulis mencoba membahas tentang model mangsa pemangsa dan model SIS matematika yang berjudul :

**” Model Mangsa Pemangsa dengan Mangsa yang Terinfeksi“**

**1.2. Rumusan Masalah**

Adapun rumusan masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah bagaimana menentukan titik keseimbangan pada model mangsa-pemangsa dengan mangsa yang terinfeksi, bagaimana menganalisis kestabilan titik keseimbangan dari model tersebut serta bagaimana cara mengontrol nilai parameter model sehingga populasi mangsa-pemangsa tetap ada (tidak punah).

**1.3. Batasan Masalah**

Dalam skripsi ini, penulis membatasi pada beberapa hal:

1. Model mangsa-pemangsa yang akan dikembangkan adalah model mangsa-pemangsa tipe Lotka-Volterra dan model SIS, yang melibatkan dua spesies berbeda yaitu spesies mangsa dan spesies pemangsa.
2. Spesies mangsa dibagi dalam dua kelompok, yaitu mangsa yang rentan dan mangsa yang terinfeksi.
3. Diasumsikan bahwa pemangsa lebih mudah menyerang mangsa yang terinfeksi.

4. Dalam keadaan ketiadaan pemangsa, pertumbuhan mangsa mengikuti hukum logistik.
5. Pertumbuhan pemangsa dipengaruhi oleh ketersediaan makanannya yaitu mangsa.
6. Diasumsikan bahwa pertumbuhan populasi pemangsa tidak dipengaruhi oleh infeksi penyakit.

#### **1.4 Tujuan**

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk menentukan dan menganalisis titik kesetimbangan dari model mangsa pemangsa dengan mangsa yang terinfeksi, yaitu menganalisis syarat cukup kestabilan dari solusi setimbangnya serta memvisualisasi solusi stabil dari model.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Sistem Model Mangsa Pemangsa Lotka – Volterra

Ada beberapa jenis interaksi mangsa-pemangsa. Herbivora yang memakan jenis tumbuhan, karnivora yang memakan spesies hewan, parasit yang hidup pada spesies lain (inang), dan kanibal yang memakan spesies mereka sendiri. Kita telah melihat berbagai model untuk pertumbuhan suatu spesies tertentu yang hidup sendirian dalam suatu lingkungan, untuk itu kita akan meninjau model yang lebih realistis yang memperhitungkan interaksi dua spesies dalam habitat yang sama. Kita akan melihat bahwa model ini akan membentuk sepasang persamaan diferensial yang berantai.

Pertama kita tinjau situasi di mana satu spesies, disebut *mangsa*, yang mempunyai persediaan makanan yang cukup dan spesies kedua, disebut *pemangsa*, yang memakan mangsa tersebut. hubungan mangsa dengan pemangsa, dapat kita lihat pada diagram di bawah ini:



Gambar 1

Diagram di atas merupakan input-output pada model mangsa-pemangsa dua spesies, yang menggambarkan kematian mangsa dapat meningkatkan kelahiran pemangsa. (Barnes dan Fulford, 2002)

Contoh mangsa dan pemangsa adalah kelinci dan serigala dalam sebuah hutan terisolir, ikan kecil dan ikan hiu, bakteri dan amoeba. Model ini akan mempunyai dua variabel tak bebas dan keduanya merupakan fungsi dari waktu. Kita misalkan  $x(t)$  adalah banyaknya mangsa dan  $y(t)$  adalah banyaknya pemangsa pada saat  $t$ . Bila tidak ada pemangsa, persediaan makanan yang cukup akan mendukung pertumbuhan eksponensial mangsa, yakni,

$$\frac{dx}{dt} = rx \text{ dengan } r \text{ adalah konstanta positif}$$

Bila tidak ada mangsa, kita asumsikan bahwa populasi pemangsa akan berkurang dengan laju sebanding dengan populasinya, yakni,

$$\frac{dy}{dt} = -cy \text{ dengan } c \text{ adalah konstanta positif}$$

Namun, dengan keberadaan kedua spesies, kita asumsikan bahwa penyebab utama kematian di antara mangsa adalah dimakan oleh pemangsa, dan laju kelahiran dan kehidupan pemangsa bergantung pada ketersediaan makanan mereka, yakni mangsanya. Kita juga mengsumsikan bahwa kedua spesies bertemu satu sama lain dengan laju sebanding dengan kedua populasi dan karena itu sebanding dengan hasil kali  $xy$  (semakin banyak masing-masing populasi, semakin banyak pertemuan yang dapat terjadi).

Sistem persamaan diferensial yang mengakomodasi asumsi-asumsi ini sebagai berikut:



$$\frac{dx}{dt} = rx - \alpha xy \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

Dimana:

$\frac{dx}{dt}$  : dengan laju ukuran populasi mangsa

$\frac{dy}{dt}$  : laju perubahan ukuran populasi pemangsa

$x$  : ukuran populasi mangsa

$y$  : ukuran populasi pemangsa

Dengan  $r$ ,  $c$ ,  $\alpha$  dan  $\beta$  merupakan konstanta positif. Perhatikan bahwa suku menurunkan laju pertumbuhan alami mangsa dan suku  $\beta xy$  menaikkan laju pertumbuhan alami pemangsa.

Kedua persamaan (2.1) dikenal sebagai **persamaan mangsa-pemangsa** atau **persamaan lotka-volterra**. Solusi sistem persamaan ini adalah sepasang fungsi  $x(t)$  dan  $y(t)$  yang menggambarkan populasi mangsa dan pemangsa sebagai fungsi dari waktu. Pada dasarnya persamaan lotka-volterra diketengahkan sebagai model untuk menjelaskan perubahan populasi ikan hiu dan ikan kecil di laut adriatik oleh matematikawan Italia Vito Volterra (1860-1940), yang kemudian dikembangkan dalam berbagai penelitian.

Sejumlah percobaan telah dilakukan untuk menguatkan persamaan Lotka-volterra. Ini meliputi percobaan mikrobiologis Rusia, Gause. Dengan dua jenis protozoa yang berbeda, *Pamecium Caudatum* dan *Didium Nasutum*. Gause menemukan bahwa mangsa protozoa mati hanya dengan sedikit gangguan. Pada

Renshow (1991) sebuah versi model yang dimodifikasi dari persamaan lotka-Volterra, dengan menggabungkan kematian dan kelahiran secara acak dalam suatu penelitian, di mana penelitian tersebut menunjukkan perilaku yang sama dengan percobaan Gause. Pada umumnya, walaupun persamaan Lotka-Volterra tidak digunakan secara Umum dalam penelitian, tetapi merupakan salah satu dasar acuan dalam menyusun suatu model populasi.

Walaupun model lotka-volterra yang cukup sederhana telah berhasil menjelaskan dan meramalkan populasi berpasangan, model yang lebih canggih juga banyak diusulkan. Satu cara memodifikasi persamaan lotka-volterra adalah dengan mengasumsikan bahwa dalam ketiadaan pemangsa, mangsa tumbuh menurut model logistic dengan  $K$  sebagai kapasitas tampung populasi mangsa. maka persamaan lotka-volterra (2.1) digantikan oleh sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \quad (2.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

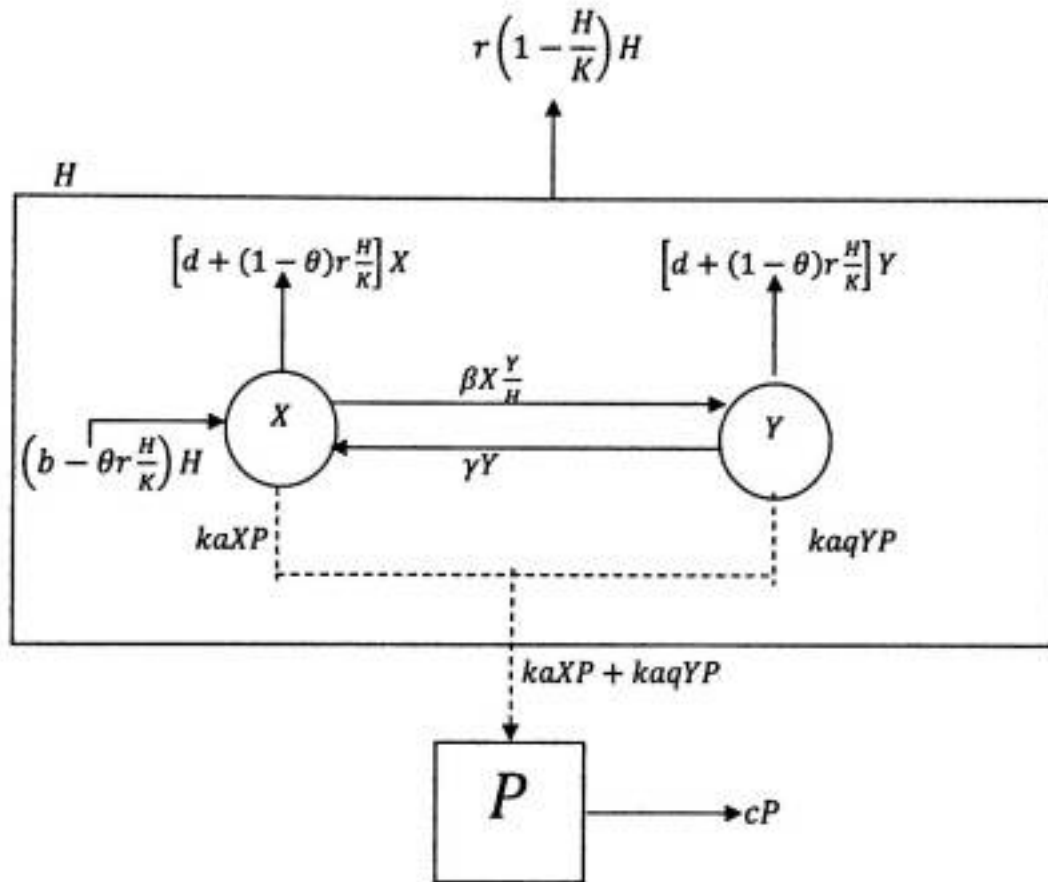
## 2.2 Model SIS (Susceptible Infected Susceptible)

Model SIS merupakan model penyakit yang paling sederhana. Pada model ini kesembuhan tidak memberikan imunitas karena individu akan kembali ke kelas *susceptible* ketika mereka sembuh dari infeksi. Model SIS dapat digambarkan melalui diagram kompartemen sebagai berikut:



Gambar 2

### 2.3 Sistem Model Mangsa Pemangsa dengan Mangsa yang Terinfeksi



Gambar 3

$$\frac{dH}{dt} = r \left(1 - \frac{H}{K}\right) - a(X + qY)P$$

$$\frac{dX}{dt} = \left(b - \theta r \frac{H}{K}\right) H - \left[d + (1 - \theta) r \frac{H}{K}\right] X - \frac{\beta XY}{H} + \gamma Y - aXP \quad (2.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta X \frac{Y}{H} - \gamma Y - \left[d + (1 - \theta) r \frac{H}{K}\right] Y - aqYP$$

$$\frac{dP}{dt} = ka(X + qY)P - cP$$

Dengan asumsi  $q \geq 1$  yang berarti bahwa pemangsa lebih mudah menyerang mangsa yang terinfeksi dibandingkan mangsa yang rentan.

Keterangan :

$H$	: jumlah populasi mangsa pada waktu $t$
$X$	: jumlah populasi mangsa yang rentan pada waktu $t$
$Y$	: jumlah populasi mangsa yang terinfeksi pada waktu $t$
$K$	: kapasitas tampung populasi mangsa atau titik maksimum laju pertumbuhan populasi
$r$	: laju pertumbuhan alami populasi mangsa
$a$	: laju interaksi mangsa pemangsa
$q$	: tingkat pemangsaan pemangsa terhadap mangsa yang terinfeksi
$P$	: Jumlah populasi pemangsa
$b$	: Laju Kelahiran alami populasi mangsa
$d$	: laju kematian alami populasi mangsa
$\theta$	: Proporsi Kelahiran dan Kematian
$\beta$	: laju interaksi antar mangsa yang rentan dengan mangsa yang terinfeksi
$\gamma$	: laju tingkat kesembuhan
$c$	: laju Kematian Pemangsa
$b - \theta r \frac{H}{K}$	: Koefisien laju kelahiran yang dipengaruhi oleh pemangsaan
$d + (1 - \theta)r \frac{H}{K}$	: Koefisien laju kematian yang dipengaruhi oleh pemangsaan

## 2.4 Basic Reproduction Ratio Number ( $R_0$ )

*Basic Reproduction Ratio Number* ( $R_0$ ) merupakan salah satu parameter batas (threshold parameter) yang sering digunakan untuk mengontrol infeksi pada model penyakit. ( $R_0$ ) digunakan untuk menentukan apakah infeksi penyakit menyebar dalam suatu populasi. Batasan dari *Basic Reproduction Ratio Number* yaitu:

1. Jika  $R_0 < 1$ , dipastikan suatu populasi terbebas dari infeksi penyakit.
2. Jika  $R_0 > 1$ , dipastikan infeksi penyakit tetap berada dalam suatu populasi.

*Basic Reproduction Ratio Number* dirumuskan setelah diperoleh titik kesetimbangan dari suatu model matematika.

## 2.5 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan adalah sebuah keadaan dari sebuah sistem yang tidak berubah. Jika sistem dinamik diuraikan dalam persamaan differensial atau sistem persamaan differensial, maka titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama sama dengan nol.

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa orde satu sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.4)$$

Titik  $x_e$  disebut juga titik kesetimbangan dari persamaan (2.4) jika memenuhi  $f(x_e, t) = 0$ . Titik  $x_e$  sering pula disebut sebagai titik kritis (critical point) yang merupakan keadaan setimbang dari persamaan (2.4).

## Definisi

Titik kesetimbangan  $x_e$  dikatakan stabil jika diberikan sebarang  $t_0$  dan bilangan positif  $\epsilon$ , terdapat suatu bilangan positif  $\delta(\epsilon, t_0)$  sedemikian sehingga, jika  $\|x_0 - x_e\| < \delta$  maka  $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$ , untuk setiap  $t > t_0$ .

## 2.6 Linearisasi Sistem Nonlinear

Tinjau sistem persamaan differensial nonlinear

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Dimana  $f_1, f_2$  dan  $f_3$  merupakan fungsi terdeferensialkan. Jika  $x_e = \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \\ x_{e3} \end{bmatrix}$ ,

merupakan kesetimbangan tunggal dan misalkan  $u_i = x_i - x_{e_i}$  maka menurut

**Teorema Taylor** untuk fungsi tiga peubah:

$$f_i(x) = f_i(x_e) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_e)u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_e)u_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3}(x_e)u_3 + g_i(u)$$

untuk  $i = 1, 2, 3$ . Atau

$$\begin{aligned}f_1(x) &= f_1(x_e) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e)u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_e)u_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_e)u_3 + g_1(u) \\ f_2(x) &= f_2(x_e) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_e)u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_e)u_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_e)u_3 + g_2(u) \\ f_3(x) &= f_3(x_e) + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_e)u_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_e)u_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_e)u_3 + g_3(u)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Dimana

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$x_e = (x_{e_1}, x_{e_2}, x_{e_3})$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

Diasumsikan bahwa  $g_i = (u_1, u_2, u_3)$  mempunyai turunan pertama parsial dan memenuhi  $\frac{g_i}{\|u\|} \rightarrow 0$  bila  $\|u\| \rightarrow 0$  khususnya untuk

$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ . Karena  $x_e = (x_{e_1}, x_{e_2}, x_{e_3})$  merupakan keadaan setimbang, maka:  $f_i = ((x_{e_1}, x_{e_2}, x_{e_3})) = 0$ ,

untuk  $i = 1, 2, 3$ .

Dan untuk,

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 - x_{e_1})$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_2 - x_{e_2})$$

$$\dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt} = \frac{d}{dt}(x_3 - x_{e_3})$$

maka persamaan (2.6) dapat ditulis:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_{e_1} \\ x_2 - x_{e_2} \\ x_3 - x_{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_e) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_e) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_e) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_e) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_e) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \\ g_3(u) \end{bmatrix}$$

Dalam notasi vektor dapat ditulis:

$$\dot{u} = Au + g(u) \tag{2.7}$$

Dimana

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, g(u) = \begin{bmatrix} g_1(u_1, u_2, u_3) \\ g_2(u_1, u_2, u_3) \\ g_3(u_1, u_2, u_3) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_e) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_e) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_e) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_e) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_e) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \quad \text{untuk } x = x_e$$

Matriks  $A$  disebut sebagai matriks Jacobian. Untuk  $x(t)$  yang sangat dekat dengan  $x_e$ , maka  $g(u)$  menjadi sangat kecil dan dapat diabaikan, sehingga persamaan (2.6) dapat didekati dengan persamaan linier:

$$\dot{u} = Au$$

Keadaan yang mungkin terjadi adalah bergesernya keadaan kesetimbangan. Bila keadaan kesetimbangan  $x_e$  bergeser ke  $x(0)$  maka kestabilan akan berubah. Dengan kata lain jika  $x(t) \rightarrow x_e$  untuk  $t \rightarrow \infty$  atau  $u(t) = x(t) - x_e$ , maka  $u(t) \rightarrow 0$  yang telah menjadi persoalan linier. Yang harus diperhatikan adalah pendekatan yang dilakukan dimana kondisi  $x$  haruslah dekat ke  $x_e$ . Jadi dalam hal ini yang terjadi adalah kestabilan lokal saja.

## 2.7 Analisis Kestabilan Sistem dengan Metode Nilai Eigen

Misalkan diberikan suatu sistem persamaan differensial linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{2.8}$$



Dimana  $a_{ij}$  merupakan koefisien konstan, untuk setiap  $i, j = 1, 2, 3$  dan

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt}$$

Dalam notasi vector, persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.9)$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ dan } x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

Misalkan solusi dari persamaan (2.8) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (2.10)$$

yang ekuivalen dengan

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t}$$

Dimana  $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$  adalah vektor konstan yang akan ditentukan. Substitusi

persamaan (2.10) ke dalam persamaan (2.9), diperoleh:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

yang ekuivalen dengan

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad (2.11)$$

Definisi :

Misalkan  $A$  adalah matriks  $n \times n$ . Jika  $Ax$  adalah kelipatan skalar dari  $x$ , yakni

$Ax = \lambda x$  untuk suatu skalar  $\lambda$ , maka vektor tak nol  $x$  di dalam  $R^n$  dinamakan

vektor eigen dari  $A$ . Skalar  $\lambda$  dinamakan nilai eigen dari  $A$  dan  $x$  dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .

Persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai sistem homogen,

$$(A - \lambda I)\alpha = 0 \quad (2.12)$$

Dimana  $I$  adalah matriks identitas.

Persamaan (2.12) akan menghasilkan penyelesaian yang nontrivial ( $\alpha \neq 0$ ) jika dan hanya jika  $\det(A - \lambda I) = 0$ , atau

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik (2.13), maka diperoleh nilai eigen dari matriks  $A$ , yaitu  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  dan vektor eigen  $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$  yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen tersebut. Jadi solusi dari persamaan (2.8) secara umum adalah :

$$x(t) = c_1 \alpha e^{\lambda_1 t} + c_2 \beta e^{\lambda_2 t} + c_3 \gamma e^{\lambda_3 t} \quad (2.14)$$

dimana  $c_1$ ,  $c_2$  dan  $c_3$  adalah konstanta sembarang yang nilainya dapat diperoleh melalui nilai awal yang diberikan.

#### **Teorema:**

*Titik keseimbangan (0,0,0) dari sistem persamaan differensial linear (2.14) adalah stabil jika semua nilai eigen dari matriks  $A$  mempunyai bagian real yang tidak positif dan stabil asimptotik jika semua nilai eigen dari matriks  $A$*

*mempunyai bagian real yang negatif. Titik kesetimbangan (0,0,0) tidak stabil jika terdapat nilai eigen dari matriks A mempunyai bagian real yang positif ([9]).*

## BAB III PEMBAHASAN

### 3.1 Model Mangsa Pemangsa dan Model SIS pada Mangsa

#### 3.1.1 Model Mangsa Pemangsa

Model mangsa pemangsa yang akan dibahas merupakan modifikasi persamaan Lotka-Volterra dengan kepadatan populasi mangsa yang bergantung pada pertumbuhan logistik. Misalkan  $H(t)$  dan  $P(t)$  merupakan jumlah populasi mangsa dan pemangsa berturut-turut dan  $t$  adalah waktu, maka model mangsa pemangsa berbentuk:

$$\frac{dH}{dt} = r \left(1 - \frac{H}{K}\right) H - aHP = \left[ r \left(1 - \frac{H}{K}\right) - aP \right] H \quad (3.1)$$

$$\frac{dP}{dt} = kaHP - cP = (kaH - c)P \quad (3.2)$$

Keterangan :

- $H$  = jumlah populasi mangsa pada waktu  $t$
- $P$  = jumlah populasi pemangsa pada waktu  $t$
- $r$  = Laju Pertumbuhan Mangsa
- $K$  = kapasitas tamping populasi mangsa atau titik maksimum laju  
Pertumbuhan populasi
- $a$  = Laju Interaksi Mangsa Pemangsa
- $c$  = Laju Kematian Pemangsa
- $k$  = Laju pemangsaan menjadi pemangsa

### a. Penentuan Titik Keseimbangan

Titik kesetimbangannya dapat diperoleh apabila tidak ada perubahan laju pertumbuhan pada kedua populasi  $H$  dan  $P$ , Dengan kata lain  $\frac{dH}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0$  sehingga dihasilkan tiga titik keseimbangan sebagai berikut :

$$\left(r \left(1 - \frac{H}{K}\right) - aP\right)H = 0 \quad (3.3)$$

$$(kaH - c)P = 0 \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.3) dan (3.4) diperoleh titik keseimbangan sebagai berikut :

- $E_1 = (0,0)$
- $E_2 = (K,0)$
- $E_3 = \left(\frac{c}{ka}, \frac{r(kaK-c)}{ka^2K}\right)$

### b. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Keseimbangan

Karena model tersebut nonlinear, maka sebelum analisis kestabilan diperlukan proses linearisasi dengan menggunakan deret Taylor dan akan ditentukan matriks Jacobinya.

Pandang sistem persamaan berikut :

$$\dot{H} = f_1(H, P) \quad (3.5)$$

$$\dot{P} = f_2(H, P)$$

Matriks Jacobi dari system persamaan (3.5) di atas ditulis dalam bentuk :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H} & \frac{\partial f_1}{\partial P} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial P} \end{vmatrix}$$

Nilai eigen dari dari matriks jacobi diperoleh dari persamaan :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = 0$$

Dan

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H} - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial P} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial P} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial H} = -\frac{rH}{K} + r\left(1 - \frac{H}{K}\right) - aP$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial P} = -aH$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial H} = kaP$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial P} = kaH - c$$

Sehingga matriks jacobinya diperoleh :

$$|J - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} -\frac{rH}{K} + r\left(1 - \frac{H}{K}\right) - aP & -aH \\ kaP & kaH - c \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$|J - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} \left(-\frac{rH}{K} + r\left(1 - \frac{H}{K}\right) - aP\right) - \lambda & -aH \\ kaP & (kaH - c) - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (3.6)$$

a). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_1 = (0,0)$

Dengan mensubstitusi  $H = 0$  dan  $P = 0$  pada persamaan (3.6) diperoleh

persamaan karakteristik titik  $E_1$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = (r - \lambda)(-c - \lambda) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = r \text{ dan } \lambda_2 = -c$$

Karena  $r > 0$ , maka terdapat nilai eigen yang positif sehingga pada titik kesetimbangan  $E_1 = (0,0)$  tidak stabil.

b). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_2 = (K, 0)$

Dengan mensubstitusi  $H = K$  dan  $P = 0$  pada persamaan (3.6) diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_2$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -r - \lambda & -aK \\ 0 & (kaK - c) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = -(r + \lambda)(-\lambda + kaK - c) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = -r \text{ dan } \lambda_2 = kaK - c$$

Titik keseimbangan  $E_2$  akan stabil jika semua nilai eigennya bernilai real negatif. Agar  $E_2$  stabil maka  $kaK - c < 0$

$$aK < c$$

$$\frac{aK}{c} < 1$$

c). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_3 = \left(\frac{c}{ka}, \frac{r(kaK - c)}{ka^2K}\right)$

Dengan mensubstitusi  $H = \frac{c}{ka}$  dan  $P = \frac{r(kaK - c)}{ka^2K}$  pada persamaan (3.6) diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_3$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\frac{rc}{Kak} + r\left(1 - \frac{c}{kaK}\right) - \frac{r(kaK - c)}{akK} & -\frac{c}{k} \\ \frac{r(kaK - c)}{aK} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = \frac{\lambda^2 kaK + \lambda rc + rckaK - rc^2}{kaK} = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = -\frac{rc - \sqrt{r^2c^2 - 4k^2a^2K^2rc + 4kaKrc^2}}{2kaK}$$

$$\lambda_2 = -\frac{rc + \sqrt{r^2c^2 - 4k^2a^2K^2rc + 4kaKrc^2}}{2kaK}$$

Untuk  $\lambda_1$  :

Misalkan  $r^2c^2 - 4k^2a^2K^2rc + 4kaKrc^2 = \eta$  dan  $\sqrt{\eta} = \mu > 0$ . Misalkan  $rc > 0$  dan  $rc \gg \mu$  sehingga  $rc - \mu > 0$ .  $kaK > 0$  maka  $\frac{rc - \mu}{2kaK} > 0$ . Sehingga  $-\frac{rc - \mu}{2kaK} < 0$ .

Untuk  $\lambda_2$  :

Misalkan  $r^2c^2 - 4k^2a^2K^2rc + 4kaKrc^2 = \eta$  dan  $\sqrt{\eta} = \mu > 0$ . Misalkan  $rc > 0$  sehingga  $rc + \mu > 0$ ,  $kaK > 0$  maka  $\frac{rc + \mu}{2kaK} > 0$ . Sehingga  $-\frac{rc + \mu}{2kaK} < 0$ .

Karena nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai negatif maka titik  $E_3 = \left(\frac{c}{ka}, \frac{r(kaK - c)}{ka^2K}\right)$

stabil.

### 3.1.2 Model SIS

Pada model mangsa pemangsa diasumsikan bahwa predator tidak hanya memakan mangsa yang rentan tapi juga memakan mangsa yang terinfeksi. Namun, infeksi tersebut tidak menyebabkan imunitas pada mangsa setelah sembuh. Sehingga model epidemiologi untuk mangsa bertipe SIS yaitu model penyakit mangsa adalah

$$\frac{dH}{dt} = r \left(1 - \frac{H}{K}\right) H \quad (3.7)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left(b - \frac{b\theta H}{K}\right) H - \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right] X - \frac{\beta XY}{H} + \gamma Y \quad (3.8)$$



$$\frac{dY}{dt} = \frac{\beta XY}{H} - \gamma Y - \left[ d + \frac{(1-\theta)rH}{K} \right] Y \quad (3.9)$$

Dimana  $r = b - d > 0, 0 \leq \theta < 1$

- $r$  : Laju pertumbuhan mangsa
- $X$  : Mangsa yang rentan terinfeksi
- $Y$  : Mangsa yang terinfeksi
- $H$  : Jumlah mangsa
- $K$  : Daya dukung alam
- $b$  : Laju kelahiran
- $\theta$  : Proporsi kelahiran dan kematian
- $\beta$  : Laju interaksi antar mangsa yang rentan dengan mangsa yang terinfeksi
- $\gamma$  : Laju mangsa terinfeksi menjadi mangsa yang rentan
- $b - \frac{\theta r H}{K}$  : Koefisien laju kelahiran
- $d + \frac{(1-\theta)rH}{K}$  : Koefisien laju kematian

Terbatasnya pertumbuhan dalam persamaan logistik timbul karena kepadatan bergantung pada laju kematian ketika  $\theta = 0$  dan bergantung pada laju kelahiran ketika  $\theta = 1$  dan kombinasi keduanya adalah  $0 < \theta < 1$ , jika  $H = X + Y$ ,  $M = \frac{Y}{H}$ ,  $\frac{X}{H} = 1 - M$ , maka model (2) dapat disederhanakan menjadi dua dimensi yaitu :

$$M = \frac{Y}{H}$$

$$M = \frac{Y}{X + Y}$$

$$M(X + Y) = Y$$

$$\frac{dM}{dt}(X + Y) + M\left(\frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt}\right) = \frac{dY}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt}H = \frac{dY}{dt} - M\frac{dX}{dt} - M\frac{dY}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt}H = \frac{dY}{dt}(1 - M) - M\frac{dX}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt}H = \left(\frac{\beta XY}{H} - \gamma Y - \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right]Y - aqYP\right)(1 - M)$$

$$- M\left(\left(b - \frac{\theta rH}{K}\right)H - \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right]X - \frac{\beta XY}{H} + \gamma Y\right)$$

$$\frac{dM}{dt}H = \left(\beta(1 - M)HM - \gamma MH - \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right]MH\right)(1 - M)$$

$$- M\left(\left(b - \frac{\theta rH}{K}\right)H - \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right](1 - M)H - \beta(1 - M)HM + \gamma MH\right)$$

$$\frac{dM}{dt} = \left(\beta(1 - M)M - \gamma M - \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right]M\right)(1 - M)$$

$$- M\left(\left(b - \frac{\theta rH}{K}\right) - \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right](1 - M) - \beta(1 - M)M + \gamma M\right)$$

$$\frac{dM}{dt} = \beta(1 - M)M - \gamma M - \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right]M - \beta(1 - M)M^2 + \gamma M^2$$

$$+ \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right]M^2 + \left(b - \frac{\theta rH}{K}\right)M + \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right]M$$

$$- \left[d + \frac{(1 - \theta)rH}{K}\right]M^2 + \beta(1 - M)M^2 - \gamma M^2$$

$$\begin{aligned}
&= \beta(1 - M)M - \gamma M - \left(b - \frac{\theta r H}{K}\right)M \\
&= \left[\beta(1 - M) - \left(\gamma + b - \frac{\theta r H}{K}\right)\right]M
\end{aligned}$$

Sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{dH}{dt} = r \left(1 - \frac{H}{K}\right)H \quad (3.10)$$

$$\frac{dM}{dt} = \left[\beta(1 - M) - \left(\gamma + b - \frac{\theta r H}{K}\right)\right]M \quad (3.11)$$

Dari persamaan (3.10) dan (3.11) terdapat solusi yang memenuhi  $D = \{(H, M) | 0 \leq M < 1, 0 \leq H < K\}$ . Karena persamaan tersebut tidak memperlihatkan hubungan antara kematian dan infeksi penyakit, maka terdapat 2 batasan basic reproduction  $R_0$  dan modifikasi basic reproduction  $R_0^m$ .

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + b - \theta r} \geq R_0^m \frac{\beta}{\gamma + b}$$

#### a. Penentuan Titik Kesetimbangan

Penentuan titik kesetimbangan dari persamaan (3.10) dan (3.11) diperoleh pada saat  $\dot{H} = 0$  dan  $\dot{M} = 0$ , sehingga diperoleh :

$$\left(r \left(1 - \frac{H}{K}\right)\right)H = 0 \quad (3.12)$$

$$\left(\beta(1 - M) - \left(\gamma + b - \frac{\theta r H}{K}\right)\right)M = 0 \quad (3.13)$$

Dari (3.12) dan (3.13) diperoleh titik keseimbangan sebagai berikut :

- $E_1 = (0, 0)$
- $E_2 = (K, 0)$

- $E_3 = \left\{ 0, \frac{\beta - \gamma - b}{\beta} \right\}$
- $E_4 = \left\{ K, \frac{\beta - \gamma - b + \theta r}{\beta} \right\}$

### b. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Kesetimbangan

Untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan  $E_1, E_2, E_3, E_4$  dilakukan linearisasi model disekitar titik kesetimbangan dengan matriks Jacobi.

Pandang system persamaan berikut :

$$\dot{H} = f_1(H, M) \quad (3.14)$$

$$\dot{M} = f_2(H, M)$$

Matriks Jacobi dari system persamaan (3.14) di atas ditulis dalam bentuk :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H} & \frac{\partial f_1}{\partial M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial M} \end{vmatrix}$$

Nilai eigen dari dari matriks jacobi diperoleh dari persamaan :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = 0$$

Dan

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H} - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial M} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial H} = -\frac{rH}{K} + r \left( 1 - \frac{H}{K} \right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial M} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial H} = \frac{\theta r M}{K}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial M} = -\beta M + \beta(1 - M) - \gamma - b + \frac{\theta r H}{K}$$

Sehingga matriks jacobinya diperoleh :

$$J - \lambda I = \begin{vmatrix} -\frac{rH}{K} + r\left(1 - \frac{H}{K}\right) & 0 \\ \frac{\theta r M}{K} & -\beta M + \beta(1 - M) - \gamma - b + \frac{\theta r H}{K} \end{vmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$J - \lambda I = \begin{vmatrix} \left(-\frac{rH}{K} + r\left(1 - \frac{H}{K}\right)\right) - \lambda & 0 \\ \frac{\theta r M}{K} & \left(-\beta M + \beta(1 - M) - \gamma - b + \frac{\theta r H}{K}\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

a). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_1 = (0, 0)$

Dengan mensubstitusi  $H = 0$  dan  $M = 0$  pada persamaan (3.15)

diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_1$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & (\beta - \gamma - b) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = (r - \lambda)((\beta - \gamma - b) - \lambda) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = r \text{ dan } \lambda_2 = \beta - \gamma - b$$

Karena  $r > 0$ , maka terdapat nilai eigen yang positif sehingga pada titik kesetimbangan  $E_1 = (0,0)$  tidak stabil.

**b). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_2 = (K, 0)$**

Dengan mensubstitusi  $H = K$  dan  $M = 0$  pada persamaan (3.15) diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_2$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -r - \lambda & 0 \\ 0 & (\beta - \gamma - b + \theta r) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = -(\lambda + r)(-\lambda + \beta - \gamma - b + \theta r) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = -r \text{ dan } \lambda_2 = \beta - \gamma - b + \theta r$$

Nilai eigen  $\lambda_2$  negatif jika dan hanya jika  $\beta - \gamma - b + \theta r < 0$  sehingga titik  $E_2 = (K, 0)$  stabil asimtotik. Sebaliknya nilai eigen  $\lambda_2$  positif jika dan hanya jika  $\beta - \gamma - b + \theta r > 0$  sehingga titik  $E_2 = (K, 0)$  tidak stabil.

**c). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_3 = \left\{0, \frac{\beta - \gamma - b}{\beta}\right\}$**

Dengan mensubstitusi  $H = 0$  dan  $M = \frac{\beta - \gamma - b}{\beta}$  pada persamaan (3.15) diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_3$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} r - \lambda & 0 \\ \frac{\theta r(\beta - \gamma - b)}{K\beta} & \left(-\beta + \beta \left(1 - \frac{\beta - \gamma - b}{\beta}\right)\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = -(-\lambda + r)(\lambda + \beta - \gamma - b) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = r \text{ dan } \lambda_2 = -\beta + \gamma + b$$

Karena  $r > 0$ , maka terdapat nilai eigen yang positif sehingga pada titik kesetimbangan  $E_3 = \left\{0, \frac{\beta - \gamma - b}{\beta}\right\}$  tidak stabil.

d). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_4 = \left\{ K, \frac{\beta - \gamma - b + \theta r}{\beta} \right\}$

Dengan mensubstitusi  $H = K$  dan  $M = \frac{\beta - \gamma - b + \theta r}{\beta}$  pada persamaan (3.15) diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_4$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -r - \lambda & 0 \\ \frac{\theta r(\beta - \gamma - b + \theta r)}{K\beta} & \left(-\beta + \beta \left(1 - \frac{\beta - \gamma - b + \theta r}{\beta}\right)\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = (\lambda + r)(\lambda + \beta - \gamma - b + \theta r) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = -r \text{ dan } \lambda_2 = -\beta + \gamma + b - \theta r$$

Nilai eigen  $\lambda_2$  negatif jika dan hanya jika  $-\beta + \gamma + b - \theta r < 0$  sehingga titik  $E_2 = (K, 0)$  stabil asimtotik. Sebaliknya nilai eigen  $\lambda_2$  positif jika dan hanya jika  $-\beta + \gamma + b - \theta r > 0$  sehingga titik  $E_2 = (K, 0)$  tidak stabil.

### c. Basic Reproduction Number

Pada model ini, basic reproduction number yang diperoleh adalah

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + b - \theta r} \geq R_0^m = \frac{\beta}{\gamma + b}$$

Titik kesetimbangan  $E_1 = (0,0)$  dan  $E_2 = (K,0)$  menunjukkan bahwa peluang mangsa untuk terinfeksi penyakit tidak ada. Sehingga ekosistem pada mangsa bebas penyakit. Pada titik kesetimbangan  $E_3 = \left(0, 1 - \frac{1}{R_0^m}\right)$  menunjukkan bahwa ketika  $R_0^m > 1$  maka mangsa berpeluang untuk memperoleh penyakit namun jumlah mangsa sama dengan nol. Secara biologis,  $E_3$  tidak relevan. Titik kesetimbangan  $E_1 = \left(K, 1 - \frac{1}{R_0}\right)$  menunjukkan bahwa jumlah populasi mangsa bergantung pada daya dukung alam, sedangkan peluang mangsa untuk terinfeksi

adalah  $1 - \frac{1}{R_0}$  jika  $R_0 > 1$  maka penyakit dapat menyebar pada populasi mangsa.

### 3.2 Model Mangsa Pemangsa SIS dengan Mangsa yang Rentan Terinfeksi

Model tersebut merupakan gabungan antara model mangsa pemangsa dengan model SIS mangsa. Model tersebut memberikan gambaran bahwa pemangsa tidak hanya memakan mangsa yang rentan saja melainkan pemangsa juga memakan mangsa yang terinfeksi. Oleh karena itu model bertipe SIS ditujukan untuk mangsa sedangkan pemangsa masih bersifat rentan dan tidak terjadi infeksi penyakit terhadap sesama pemangsa.

$$\frac{dH}{dt} = r \left(1 - \frac{H}{K}\right) H - a(X + qY)P \quad (3.16)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left(b - \theta r \frac{H}{K}\right) H - \left[d + (1 - \theta)r \frac{H}{K}\right] X - \frac{\beta XY}{H} + \gamma Y - aXP \quad (3.17)$$

$$\frac{dY}{dt} = \beta X \frac{Y}{H} - \gamma Y - \left[d + (1 - \theta)r \frac{H}{K}\right] Y - aqYP \quad (3.18)$$

$$\frac{dP}{dt} = ka(X + qY)P - cP \quad (3.19)$$

Jika  $H = X + Y$ ,  $I = \frac{Y}{H}$ ,  $\frac{X}{H} = 1 - M$ , model tersebut dapat disederhanakan

menjadi 3 variabel  $(H, M, P)$ , sehingga  $M = \frac{Y}{X+Y}$ ,  $X = (1 - M)H$

$$M(X + Y) = Y$$

$$\frac{dM}{dt}(X + Y) + M \frac{dX}{dt} + M \frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt}(X + Y) = \frac{dY}{dt} - M \frac{dX}{dt} - M \frac{dY}{dt}$$



## b. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Kesetimbangan

Untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  dilakukan linearisasi model disekitar titik kesetimbangan dengan matriks Jacobi.

Pandang system persamaan berikut :

$$\begin{aligned}\dot{H} &= f_1(H, M, P) \\ \dot{M} &= f_2(H, M, P) \\ \dot{P} &= f_3(H, M, P)\end{aligned}\tag{3.23}$$

Matriks Jacobi dari system persamaan (3.23) di atas ditulis dalam bentuk :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H} & \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial P} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial M} & \frac{\partial f_2}{\partial P} \\ \frac{\partial f_3}{\partial H} & \frac{\partial f_3}{\partial M} & \frac{\partial f_3}{\partial P} \end{vmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobi diperoleh dari persamaan :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = 0$$

Sehingga matriks Jacobinya diperoleh :

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H} - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial P} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial M} - \lambda & \frac{\partial f_2}{\partial P} \\ \frac{\partial f_3}{\partial H} & \frac{\partial f_3}{\partial M} & \frac{\partial f_3}{\partial P} - \lambda \end{vmatrix} = 0\tag{3.24}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial H} = -\frac{rH}{K} + r \left(1 - \frac{H}{K}\right) - a(1 + (q-1)M)P$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial M} = -a(q-1)PH$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial P} = -a(1 + (q-1)M)H$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial H} = \frac{\theta r M}{K}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial M} = (-\beta + a(q-1)P)M + \beta(1-M) - \gamma - b + \frac{\theta r H}{K} - a(q-1)(1-M)P$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial P} = -a(q-1)(1-M)M$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial H} = ka(1 + (q-1)M)P$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial M} = kaH(q-1)P$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial P} = kaH(1 + (q-1)M) - c$$

a). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_1 = (0, 0, 0)$

Dengan mensubstitusi  $H = 0$ ,  $M = 0$  dan  $P = 0$  pada persamaan (3.24)

diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_1$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} r - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta - \gamma - b - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = (-\lambda + r)(-\lambda + \beta - \gamma - b)(\lambda + c) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = r, \lambda_2 = \beta - \gamma - b \text{ dan } \lambda_3 = -c$$

Dengan itu titik keseimbangan  $E_1 = (0,0,0)$  tidak sabil.

b). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_2 = \left(0, 1 - \frac{(\gamma+b)}{\beta}, 0\right)$

Dengan mensubstitusi  $H = 0$ ,  $M = 1 - \frac{(\gamma+b)}{\beta}$  dan  $P = 0$  pada persamaan (3.24)

diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_2$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} r - \lambda & 0 & 0 \\ \theta r(\beta - \gamma - b) & -\beta + \beta \left(1 - \frac{\beta - \gamma - b}{\beta}\right) - \lambda & 0 \\ K\beta & 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dimana :

$$W_1 = -\frac{a(q-1) \left(1 - \frac{\beta - \gamma - b}{\beta}\right) (\beta - \gamma - b)}{\beta}$$

$$g(\lambda) = -(-\lambda + r)(\lambda + \beta - \gamma - b)(\lambda + c) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = r, \lambda_2 = -\beta + \gamma + b \text{ dan } \lambda_3 = -c$$

Dengan ini titik keseimbangan  $E_2 = \left(0, 1 - \frac{(\gamma+b)}{\beta}, 0\right)$  tidak stabil.

**c). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_3 = (K, 0, 0)$**

Dengan mensubstitusi  $H = K$ ,  $M = 0$  dan  $P = 0$  pada persamaan (3.24)

diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_3$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -r - \lambda & 0 & -aK \\ 0 & \beta - \gamma - b + \theta r - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & kaK - c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = (\lambda + r)(-\lambda + \beta - \gamma - b + \theta r)(-\lambda + kaK - c) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = -r, \lambda_2 = \beta - \gamma - b + \theta r \text{ dan } \lambda_3 = kaK - c$$

Nilai eigen  $\lambda_2$  negatif jika dan hanya jika  $\beta - \gamma - b + \theta r < 0$ , dan  $(kaK - c) < 0$  sehingga titik  $E_3 = (K, 0, 0)$  stabil asimtotik. Sebaliknya nilai eigen  $\lambda_2$  positif jika dan hanya jika  $\beta - \gamma - b + \theta r > 0$  sehingga titik  $E_3 = (K, 0, 0)$  tidak stabil.

d). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_4 = \left( \frac{c}{ka}, 0, \frac{r(kaK-c)}{ka^2K} \right)$

Dengan mensubstitusi  $H = \frac{c}{ka}$ ,  $M = 0$  dan  $P = \frac{r(kaK-c)}{ka^2K}$  pada persamaan

(3.24) diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_4$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} W_2 - \lambda & W_3 & W_4 \\ W_5 & W_6 - \lambda & W_7 \\ W_8 & W_9 & W_{10} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$W_2 = -\frac{rc}{Kka} + r \left( 1 - \frac{c}{kaK} \right) - \frac{r(kaK-c)}{akK}$$

$$W_3 = -\frac{(q-1)r(kaK-c)c}{a^2k^2K}$$

$$W_4 = -\frac{c}{k}$$

$$W_5 = 0$$

$$W_6 = \beta - \gamma - b + \frac{\theta rc}{kaK} - \frac{(q-1)r(kaK-c)}{akK}$$

$$W_7 = 0$$

$$W_8 = \frac{r(kaK-c)}{aK}$$

$$W_9 = \frac{c(q-1)r(kaK-c)}{ka^2K}$$

$$W_{10} = 0$$

$$g(\lambda) = -\frac{1}{k^2a^2K^2} \left( (-\lambda kaK + \beta kaK - \gamma kaK - bkaK + \theta rc - rqkaK + rqc + rkaK - rc)(\lambda^2 kaK + \lambda rc + arkKc - rc^2) \right) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = \frac{\beta kaK - \gamma kaK - bkaK + \theta rc - rqkaK + rqc + rkaK - rc}{kaK}$$

$$\lambda_2 = -\frac{-rc - \sqrt{r^2c^2 - 4k^2a^2K^2rc + 4kaKrc^2}}{2kaK}$$

$$\lambda_3 = -\frac{-rc + \sqrt{r^2c^2 - 4k^2a^2K^2rc + 4kaKrc^2}}{2kaK}$$

Untuk  $\lambda_1$  :

- Misalkan  $r^2c^2 - 4k^2a^2K^2rc + 4kaKrc^2 = \eta$  dan  $\sqrt{\eta} = \mu > 0$ .

Misalkan  $rc > 0$  dan  $rc \gg \mu$  sehingga  $rc - \mu > 0$ .  $kaK > 0$  maka

$$\frac{rc - \mu}{2kaK} > 0. \text{ Sehingga } -\frac{rc - \mu}{2kaK} < 0.$$

- Misalkan  $r^2c^2 - 4k^2a^2K^2rc + 4kaKrc^2 = \eta$  dan  $\sqrt{\eta} = \mu > 0$ .

Misalkan  $rc > 0$  sehingga  $+\mu > 0$ ,  $kaK > 0$  maka  $\frac{rc + \mu}{2kaK} > 0$ .

$$\text{Sehingga } -\frac{rc + \mu}{2kaK} < 0.$$

Dan misalkan  $\beta kaK - \gamma kaK - bkaK + \theta rc - rqaKaK + rqc + rkaK - rc = \mu_1$  dan  $\mu_1 > 0$ , sehingga  $\lambda_1$  bernilai positif, maka  $E_4 = \left(\frac{c}{ka}, 0, \frac{r(kaK - c)}{ka^2K}\right)$

tidak stabil.

sebaliknya misalkan  $\beta kaK - \gamma kaK - bkaK + \theta rc - rqaKaK + rqc + rkaK - rc = \mu_1$  dan  $\mu_1 < 0$ , sehingga  $\lambda_1$  bernilai negatif, maka  $E_4 =$

$$\left(\frac{c}{ka}, 0, \frac{r(kaK - c)}{ka^2K}\right) \text{ stabil.}$$

e). Kestabilan di titik kesetimbangan  $E_5 = \left(K, 1 - \frac{(\gamma + b - \theta r)}{\beta}, 0\right)$

Dengan mensubstitusi  $H = K$ ,  $M = 1 - \frac{(\gamma + b - \theta r)}{\beta}$  dan  $P = 0$  pada

persamaan (3.24) diperoleh persamaan karakteristik titik  $E_5$  :

$$g(\lambda) = |J - \lambda I| = \begin{vmatrix} W_{11} - \lambda & W_{12} & W_{13} \\ W_{14} & W_{15} - \lambda & W_{16} \\ W_{17} & W_{18} & W_{19} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$W_{11} = -r$$

$$W_{12} = 0$$

$$W_{13} = -a \left( 1 + \frac{(q-1)(\beta - \gamma - b + \theta r)}{\beta} \right) K$$

$$W_{14} = \frac{\theta r(\beta - \gamma - b + \theta r)}{K\beta}$$

$$W_{15} = -\beta + \beta \left( 1 - \frac{\beta - \gamma - b + \theta r}{\beta} \right)$$

$$W_{16} = -\frac{a(q-1) \left( 1 - \frac{\beta - \gamma - b + \theta r}{\beta} \right) (\beta - \gamma - b + \theta r)}{\beta}$$

$$W_{17} = 0$$

$$W_{18} = 0$$

$$W_{19} = kaK \left( 1 + \frac{(q-1)(\beta - \gamma - b + \theta r)}{\beta} \right) - c$$

$$g(\lambda) = -\frac{1}{\beta} ((\lambda + r)(\lambda + \beta - \gamma - b + \theta r)(-\lambda\beta + kaKq\beta - kaKq\gamma - kaKqb + kaKq\theta r + \gamma kaK + bkaK - \theta rkaK - \beta c)) = 0$$

Dari persamaan karakteristik  $g(\lambda)$  diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = -r$$

$$\lambda_2 = -\beta + \gamma + b - \theta r$$

$$\lambda_3 = \frac{kaKq\beta - kaKq\gamma - kaKqb + kaKq\theta r + \gamma kaK - \theta rkaK - \beta c}{\beta}$$

Nilai eigen  $\lambda_2$  positif jika dan hanya jika  $(\beta - \gamma - b + \theta r) > 0$ , dan  $kaKq\beta - kaKq\gamma - kaKqb + kaKq\theta r + \gamma kaK - \theta rkaK - \beta c < 0$  sehingga

titik  $E_S = \left( K, 1 - \frac{\gamma + b - \theta r}{\beta}, 0 \right)$  stabil asimtotik. Sebaliknya nilai eigen  $\lambda_2$  positif

jika dan hanya jika  $(\beta - \gamma - b + \theta r) < 0$  sehingga titik  $E_5 = \left( K, 1 - \frac{(\gamma + b - \theta r)}{\beta}, 0 \right)$  tidak stabil.

### c. Basic Reproduction Number

Persamaan (3.20), (3.21) da (3.22) tersebut akan menghasilkan nilai karakteristik yang real negatif atau kompleks dengan bagian real yang negatif jika dan hanya jika  $R_0 < 1$  dengan

$$R_0 = \frac{\beta kaK + c\theta r + rqc + karK}{\gamma Kka + bKka + arKkq + rc}$$

Jika  $R_0 < 1$  maka populasi yang terinfeksi akan punah dengan kata lain akan membuat titik kesetimbangan  $E_4$  menjadi stabil tak endemik, yang dimana di dalam populasi tersebut tidak terdapat polasi mangsa yang terinfeksi.

Solusi titik kesetimbangan  $E_4 = \left( \frac{c}{ka}, 0, \frac{r(kaK - c)}{ka^2K} \right)$  akan stabil asimtotik secara lokal jika dan hanya jika  $R_0 > 1$ .

Tinjau nilai  $R_0$

$$R_0 = \frac{\beta kaK + c\theta r + rqc + karK}{\gamma Kka + bKka + arKkq + rc}$$

Agar  $R_0 < 1$  maka salah satu parameter yang dapat dikontrol adalah parameter  $\beta$  dan  $\gamma$  yaitu semakin besar nilai  $\beta$  dan semakin kecil nilai  $\gamma$  maka nilai  $R_0$  akan semakin besar pula. Dan sangat dipengaruhi oleh nilai  $q$ .

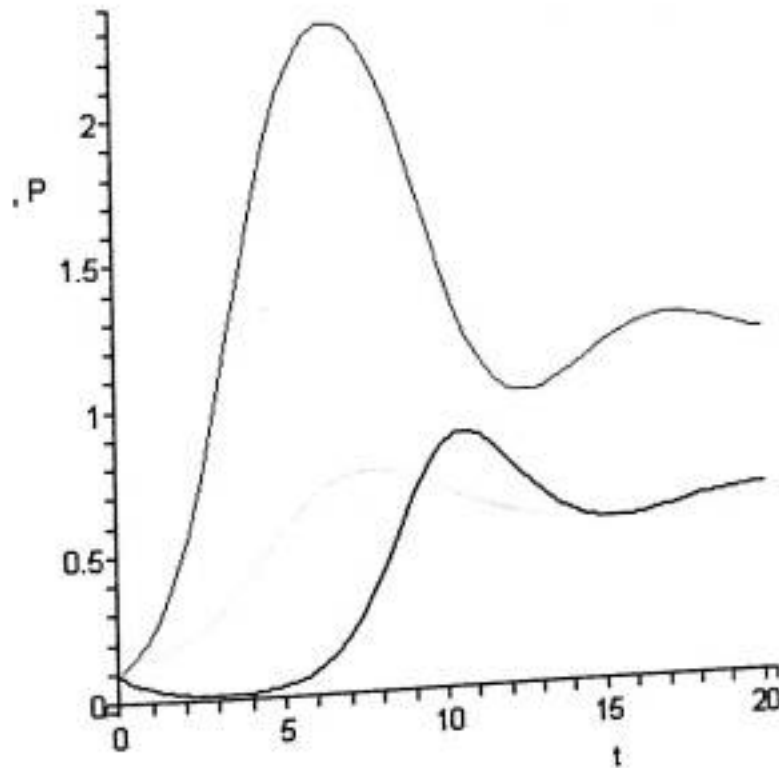
### 3.3 Simulasi Numerik

a. Misalkan nilai parameter model (3.20), (3.21), dan (3.22) sebagai berikut :

Tabel 1:

$B$	$\gamma$	$r$	$C$	$k$	$a$	$K$	$b$	$\theta$	$q$
1.55	0.15	1	1	1	1	2.6	0.9	0.8	0.7

Analisis kestabilan titik keseimbangan model dengan parameter tabel 1 :



Gambar 1





Pada gambar 3.1 dengan diberikan syarat awal  $H(0) = 0,1$  ,  $M(0) = 0,1$  dan  $P(0) = 0,1$  diperlihatkan perubahan besar populasi mangsa  $H(t)$  , besar populasi mangsa yang rentan dalam populasi total mangsa  $M(t)$  dan besar populasi pemangsa  $P(t)$ . Nilai-nilai parameter tersebut akan mengakibatkan nilai  $R_0 = 1,464864865$ . Ini berarti  $R_0 > 1$ , dipastikan infeksi penyakit tetap berada dalam suatu populasi. Dengan solusi  $\{H=0., P=0., M=0.\}$ ,  $\{H=0.,P=0.,M=0.3225806452\}$ ,  $\{P=0.,M=0.,H=2.600000000\}$ ,  $\{M=0.,H=1.,P=0.6153846154\}$ ,  $\{P=0.,H=2.600000000,M=0.8387096775\}$ , $\{P=7.182481771,M=4.370882539,H=-3.2126999038\}$ ,  $\{M=2.649219654, H=4.872484553,P=-4.258709955\}$ ,  $\{M=0.6143064092, H=1.225928770, P=0.6478897896\}$ .

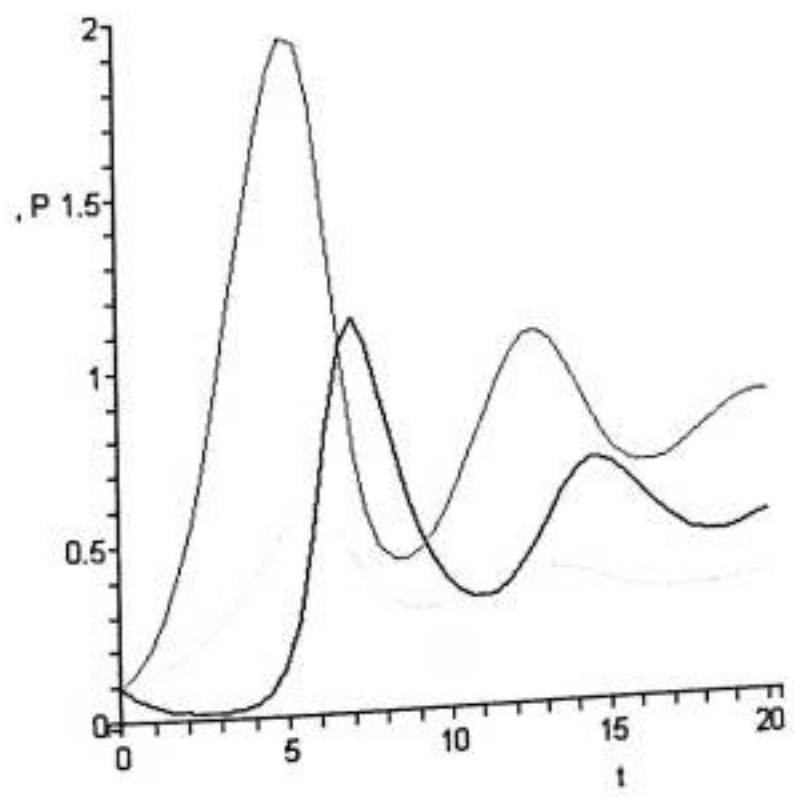
Dikarenakan tingkat pemangsaan pemangsa terhadap mangsa yang rentan, kecil, sehingga populasi mangsa akan menurun seiring naiknya populasi mangsa yang rentan dikarenakan infeksi penyakit terhadap populasi mangsa menjadi mangsa yang rentan.

b. Misalkan nilai parameter model (3.20), (3.21), dan (3.22) sebagai berikut :

Tabel 2:

$\beta$	$\gamma$	$r$	$c$	$k$	$a$	$K$	$b$	$\theta$	$q$
1.55	0.15	1	1	1	1	2.6	0.9	0.8	1.6

Analisis kestabilan titik keseimbangan model dengan parameter tabel 2 :



Gambar 3.2

- $H(t)$
- $M(t)$
- $P(t)$

Pada gambar 3.2 dengan diberikan syarat awal  $H(0) = 0,1$  ,  $M(0) = 0,1$  dan  $P(0) = 0,1$  diperlihatkan perubahan besar populasi mangsa  $H(t)$  , besar populasi mangsa yang rentan dalam populasi total mangsa  $M(t)$  dan besar populasi pemangsa  $P(t)$ . Nilai-nilai parameter tersebut akan mengakibatkan nilai  $R_0 = 1,144486692$ . Ini berarti  $R_0 > 1$ , dipastikan infeksi penyakit tetap berada dalam suatu populasi. Dengan solusi  $\{H = 0., P = 0., M = 0.\}$ ,  $\{H = 0., P = 0., M = 0.3225806452\}$ ,  $\{P = 0., M = 0., H = 2.6000000000\}$ ,  $\{M = 0., H = 1., P = .6153846154\}$ ,  $\{P = 0., H = 2.6000000000, M = .8387096775\}$ ,  $\{P = .5646908588, M = .3436918417, H = .8290395269\}$ .

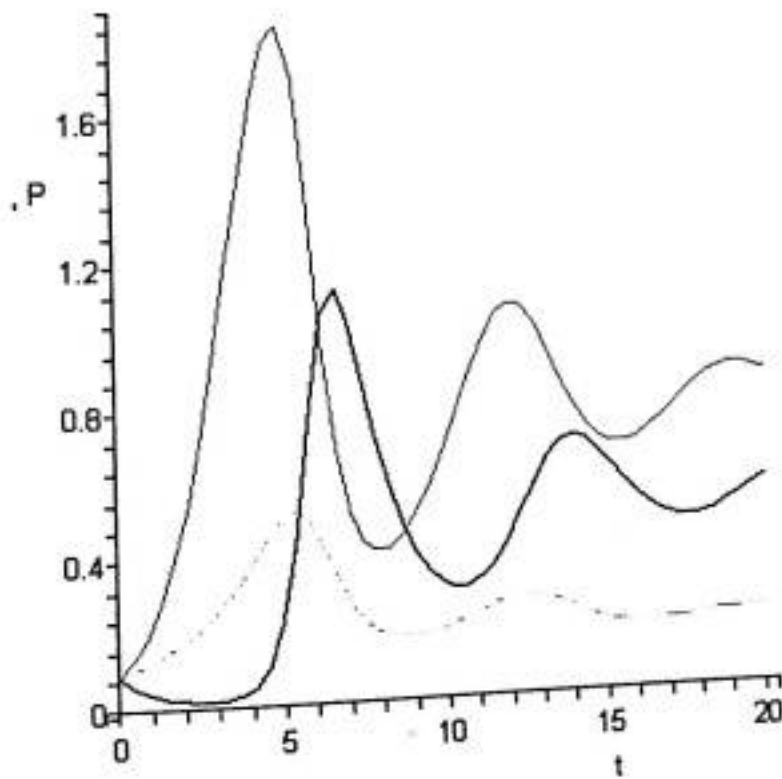
Seiring berjalannya waktu  $t$  jumlah populasi mangsa yang rentan  $M(t)$  mengalami kenaikan maksimum pada tahun ke 6, sedangkan populasi mangsa  $H(t)$  mulai mengalami penurunan. Dan populasi pemangsa  $P(t)$  mulai mengalami peningkatan.

c. Misalkan nilai parameter model (3.20), (3.21), dan (3.22) sebagai berikut :

Tabel 3:

$\beta$	$\gamma$	$r$	$c$	$k$	$a$	$K$	$b$	$\theta$	$q$
1.55	0.15	1	1	1	1	2.6	0.9	0.8	2

Analisis kestabilan titik keseimbangan model dengan parameter tabel 3 :



Gambar 3.3





Pada gambar 3.3 dengan diberikan syarat awal  $H(0) = 0,1$ ,  $M(0) = 0,1$  dan  $P(0) = 0,1$  diperlihatkan perubahan besar populasi mangsa  $H(t)$ , besar populasi mangsa yang rentan dalam populasi total mangsa  $M(t)$  dan besar populasi pemangsa  $P(t)$ . Nilai-nilai parameter tersebut akan mengakibatkan nilai  $R_0 = 1,055991041$ . Ini berarti,  $R_0 > 1$  dipastikan infeksi penyakit tetap berada dalam suatu populasi.

Dengan solusi  $\{H = 0., \{H = 0., P = 0., M = .3225806452\}, \{P = 0., M = 0., H = 2.600000000\}, \{P = 0., H = 2.600000000, M = .8387096775\}, \{M = 0., H = 1., P = .6153846154\}, \{H = .8379407246, M = .1934018370, P = .5678850869\}$

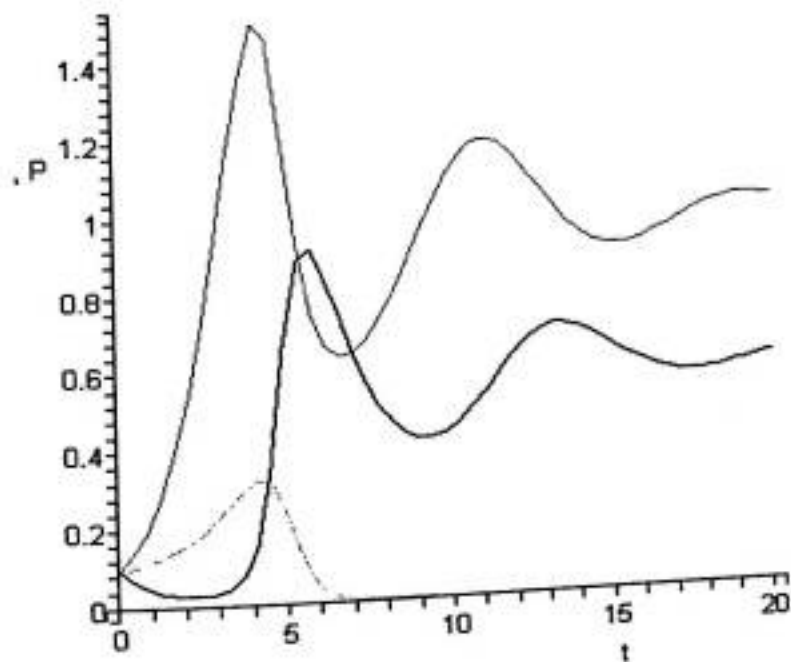
Seiring berjalannya waktu  $t$  jumlah populasi mangsa yang rentan  $M(t)$  mengalami kenaikan maksimum pada tahun ke 5, sedangkan populasi mangsa  $H(t)$  mulai mengalami penurunan. Dan populasi pemangsa  $P(t)$  mulai mengalami peningkatan.

d. Misalkan nilai parameter model (3.20), (3.21), dan (3.22) pada grafik dibawah ini :

Tabel 4

$\beta$	$\gamma$	$r$	$c$	$k$	$a$	$K$	$b$	$\theta$	$q$
1.55	0.15	1	1	1	1	2.6	0.9	0.8	2.5

Analisis kestabilan titik keseimbangan model dengan parameter tabel 4 :



Gambar 3.4



Pada gambar 3.4 dengan diberikan syarat awal  $(0) = 0,1$  ,  $M(0) = 0,1$  dan  $P(0) = 0,1$  diperlihatkan perubahan besar populasi mangsa  $H(t)$  , besar populasi mangsa yang rentan dalam populasi total mangsa  $M(t)$  dan besar populasi pemangsa  $P(t)$ . Nilai-nilai parameter tersebut akan mengakibatkan nilai  $R_0 = 0,9706744868$ . Ini berarti  $R_0 < 1$ , tapi masih mendekati nilai ambang  $R_0$  yaitu 1 yang dimana dalam populasi tersebut sudah tidak terjadi infeksi. Dengan solusi sol :=  $\{H = 0., P = 0., M = 0.\}$ ,  $\{H = 0., P = 0., M = .3225806452\}$ ,  $\{P = 0., M = 0., H = 2.600000000\}$ ,  $\{M = 0., H = 1., P = .6153846154\}$ ,  $\{P = 0., H = 2.600000000, M = .8387096775\}$ ,  $\{H = 1.274216416, M = -.1434693053, P = .6497443103\}$ .

Seiring berjalannya waktu  $t$  jumlah populasi mangsa yang rentan  $M(t)$  mengalami kenaikan maksimum pada tahun ke 4, sedangkan populasi mangsa  $H(t)$  mulai mengalami penurunan. Dan populasi pemangsa  $P(t)$  mulai mengalami peningkatan.

## BAB IV

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 4.1 Kesimpulan

Model dari mangsa pemangsa dikembangkan menjadi model mangsa pemangsa dengan mangsa yang terinfeksi. Dari model tersebut terdapat titik kesetimbangan yang stabil dengan analisis kestabilan.

Nilai  $R_0$  yang diperoleh menunjukkan pengaruh mangsa yang terinfeksi terhadap mangsa yang rentan. Dimana  $R_0 < 1$  menunjukkan hilangnya populasi yang terinfeksi dari suatu populasi yang dimana didalam populasi tersebut sudah tidak terjadi wabah penyakit yang mengakibatkan mangsa terinfeksi pada saat  $t \rightarrow \infty$ .

Parameter yang dapat dikontrol yaitu  $\beta$  yang merupakan banyaknya kontak antara mangsa yang rentan dengan mangsa yang terinfeksi,  $\gamma$  merupakan tingkat kesembuhan mangsa yang terinfeksi menjadi mangsa yang rentan, dan  $q$  yang merupakan tingkat pemangsaan pemangsa perhadap mangsa yang terinfeksi. Jika nilai parameter  $\beta$  di buat kecil, sedangkan nilai parameter  $\gamma$  dan  $q$  tersebut di buat jadi besar maka akan semakin mempercepat berkurangnya bahkan hilangnya populasi yang terinfeksi dalam populasi tersebut.

Dari grafik (3.1), (3.2), dan (3.3) diketahui bahwa semakin besar nilai  $q$  maka semakin cepat populasi mangsa yang rentan  $M(t)$  berada pada titik



maksimum dan kemudian mengalami penurunan besar populasi hingga akhirnya musnah. Yaitu jika  $q$  naik maka nilai  $R_0$  turun akibatnya populasi yang rentan akan musnah, dimana solusi untuk  $M(t)$  bernilai negatif.

Jika nilai  $R_0 > 1$  dan nilainya besar sekali akan mengakibatkan jumlah populasi mangsa yang terinfeksi sangat besar sehingga mengakibatkan populasi pemangsa juga bertambah, seperti yang ditunjukkan pada gambar (3.1). jika nilai  $R_0 > 1$  dan nilainya mendekati satu maka di dalam populasi tersebut memang masih terdapat populasi yang terinfeksi, tetapi jumlah populasi itu sangat kecil sehingga mengakibatkan populasi pemangsa akan berkurang. Jika nilai  $R_0 < 1$  dan nilainya mendekati nol maka populasi mangsa yang terinfeksi akan lebih cepat menghilang dan populasi pemangsa hanya akan mengikuti pertumbuhan populasi mangsa.

## 4.2 Saran

Pada penulisan skripsi ini hanya dibahas mengenai model mangsa pemangsa Lotka-Volterra dengan mengelompokkan model mangsa yang terinfeksi. Diharapkan pada penulisan selanjutnya, model ini dapat lebih dikembangkan pada interaksi mangsa pemangsa dengan mangsa yang terinfeksi.

## DAFTAR PUSTAKA

Barnes, B., Fulford, G. R, 2002, **Mathematical Modeling with Case Studies**, Taylor Group, London.

Boyce, W. E., and Di Prima, R.C, 1992, **Elementary Differential Equation**, San Fransisco.

Haberman, Richard, 1997, **Mathematical Models - An Introduction To Applied Mathematics**, Prentice-Hall, Inc., 1987.

Hethcote, W Herbert .2004. **A predator Prey Model with Infected Prey**. Research paper #832, hal.259-268. Department of Mathematics, University of Iowa, 14 MacLean Hall, Iowa City, USA. Department of Mathematics, Southwest Normal University, Chongqing 400715, PR China.

Kreyszig Erwin.1994.**Advanced Engineering Mathematics**, John Willey and Sons.Inc.New York.

Toaha, Syamsuddin, 2007, **Sistem Dinamik dan Kestabilan**, Universitas Hasanuddin, Makassar, Sulawesi Selatan.