SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DENGAN METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON ORDE LIMA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

ABDILLAH

H 111 00 022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR
2006

Lembar Keotentikan

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul :

Solusi numerik persamaan diferensial biasa dengan metode Adams-bashforth-moulton orde lima

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, Maret 2006

Abdillah
H111 00 022

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DENGAN METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON ORDE LIMA

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dr. Jeffry Kusuma	Drs. Nirwan Ilyas, M.Si
NIP. 132 050 973	NIP. 131 992 471

Pada Tanggal : **Maret 2006**

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

Pada hari ini, tanggal   Maret 2006, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DENGAN METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON ORDE LIMA

yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Statistika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, Maret 2006

Panitia Ujian Skripsi		**Tanda Tangan**
1. Ketua	**: Drs. Daeng Idris, M.Si**	(........................)
2. Sekretaris	**: Dra. Nur Erawaty, M.Si**	(........................)
3. Anggota	**: Dr. Jeffry Kusuma**	(........................)
4. Anggota	**: Drs. Nirwan Ilyas, M.Si**	(........................)
5. Anggota	**: Anisa, S.Si, M.Si**	(........................)

KATA PENGANTAR

Bismillah Ar Rahman Ar Rahim

Seagala puji syukur penulis panjatkan kefadirat **Ilahi Rabbi** atas segala nikmat, rahmat dan hinayah **Nya,** pertolonga serta kesehatan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Salam serta shalawat semoga tetap tercurah kepada **Rasulullah Muhammad SAW** sebagai teladan untuk seluruh umat manusia yang maha mulia akhlaknya.

Penulis menyadari bahwa sejak penyusunan proposal sampai skripsi ini banyak hambatan dan rintangan namun berkat bantuan dan motivasi dari berbagai pihak semua ini dapat teratasi dengan baik.

Penulis juga mrnyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari para pembaca demi kesempurnaan skripsi ini.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan penghargaan dan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada **Ibunda Habiba** dan **Ayahanda Abdul Malik** yang telah mendidikku dengan penuh kesabaran dan ketabahan serta lantunan doa-doa mereka yang terus mengalir bagai air, juga untuk adik-adikku **Abidin** dan **Uswatun Hasanah** atas segala sugesti yang telah engkau berikan semoga **Allah SWT** memberikan kemudahan bagimu. Demikian pula penulis ucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak **Dr. Jeffry Kusuma** dan Bapak **Drs. Nirwan Ilyas, M.Si** selaku *pembimbing utama* dan *pembimbing pertama* atas kebaikan hatinya yang telah memberikan petunjuk dan bimbingan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
2. Bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si** dan Bapak **Drs. Amir Kamal Amir, M.S.c** selaku Ketua Jurusan dan sekretaris jurusan Matematika Fakultas MIPA UNHAS atas kemudahan yang telah diberikan selama penulis dalam menuntut ilmu.
3. Bapak dan Ibu Dosen yang telah berupaya mendidik dan mengajarkan ilmu kepada penulis serta para staf yang telah memberikan bantuan dan dorongan selama penulis menjalani perkulihaan.
4. Bapak **Drs. Diaraya** selaku penasehat akademik yang telah memberikan perhatiannya selama perkulihaan.
5. Bapak **Drs. Daeng Idris, M.Si**, Ibu **Dra. Nur Erawaty, M.Si** dan **Ibu Anisa, S.Si, M.Si** selaku penguji yang selalu bersedia meluangkan waktunya.
6. For All My Family in Makassar, terima kasih atas kasih sayang yang tulus tanpa pamrih semoga **Allah SWT** membalas Nya dengan sebaik-baiknya balasan.
7. Kanda **Muhtar, S.Si** atas segala bantuannya yang penulis butuhkan. semoga Rahman dan Rahim Nya selalu tercurahkan buat kakanda.
8. Buat *My Friend's* : **Siswadi, S.Si, Fany Novembry, S.Si, Rudy Amir, S.Si, Istiawan, S.Si, Muhammad Al Imran, S.Si, Marlin, C.S.Si, Aco Firsam**

Rizal, S.Si, Abdul Khalid Nusi, S.Si, Muhmmad Makmun, S.Si, Abdul Gafur, S.Si, Suparman, S.Si, Abdul Rahman, S.Si, Djafar Lessy, S.Si, Yusra, S.Si, Sugimin. *'Kalian akan selalu menjadi teman, sahabat, saudara walaupun kita dipisahkan oleh maut'.*

9. *For my all friend's Angkatan 2k matematika :* **Indah, Celly, Vivien, Azwati, Ochi, Enha, Cicha, Tina, Mell, Muly, Lina, Imhe, Chenceng, Ina, Ani, Eva, Masni, Niar, Mila, Naomi, Amha, Ana, Uni, Uly, Ira, Elke, Mardawiah, Ci'py, Eka, Wati, Ani, Tris, Wiwi, Ummi, Yerlin, Hasmuni, Ila', Raras, Nina, Jannah, Vony, Uki', Desy,** dan yang penulis lupa namanya. *'Apalah arti semua nama, yang terpenting engkau tetap bersemayang dalam benakku'.*

10. *Toek* teman dudu'2ku yang selalu setia menemaniku **A. Muhammad Tasrif Arfan,** semoga engkau mendapatkan apa yang engkau cita-citakan.

11. *Adik-adikku* **Angkatan 01, 02, 03, 04, 05** atas kebersamaannya selama kita bersama-sama dan tidak bersama-sama. *'dimana ada pertemuan disitu ada perpisahan'*

12. Kanda-kanda **Angkatan 99, 98, 97++** .

13. Kepada semua pihak yang yang telah membantu tapi tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis berharap semoga tulisan ini dapat memberi mamfaat kepada semua pihak yang membutuhkannya.

Makassar, Maret 2006

Penulis

Rizal, S.Si, Abdul Khalid Nusi, S.Si, Muhmmad Makmun, S.Si, Abdul Gafur, S.Si, Suparman, S.Si, Abdul Rahman, S.Si, Djafar Lessy, S.Si, Yusra, S.Si, Sugimin. *'Kalian akan selalu menjadi teman, sahabat, saudara walaupun kita dipisahkan oleh maut'.*

9. *For my all friend's Angkatan 2k matematika :* **Indah, Celly, Vivien, Azwati, Ochi, Enha, Cicha, Tina, Mell, Muly, Lina, Imhe, Chenceng, Ina, Ani, Eva, Masni, Niar, Mila, Naomi, Amha, Ana, Uni, Uly, Ira, Elke, Mardawiah, Ci'py, Eka, Wati, Ani, Tris, Wiwi, Ummi, Yerlin, Hasmuni, Ila', Raras, Nina, Jannah, Vony, Uki', Desy,** dan yang penulis lupa namanya. *'Apalah arti semua nama, yang terpenting engkau tetap bersemayang dalam benakku'.*
10. *Toek* teman dudu'2ku yang selalu setia menemaniku **A. Muhammad Tasrif Arfan,** semoga engkau mendapatkan apa yang engkau cita-citakan.
11. *Adik-adikku* **Angkatan 01, 02, 03, 04, 05** atas kebersamaannya selama kita bersama-sama dan tidak bersama-sama. *'dimana ada pertemuan disitu ada perpisahan'*
12. Kanda-kanda **Angkatan 99, 98, 97++** .
13. Kepada semua pihak yang yang telah membantu tapi tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis berharap semoga tulisan ini dapat memberi mamfaat kepada semua pihak yang membutuhkannya.

Makassar, Maret 2006

Penulis

ABSTRACT

This paper to deriving a five-order Adams-Bashforth-Moulton method based on ordinary differential equation in form $y' = f(x, y)$ with initial value $y(x_0) = y_0$. The derivatives are given by approximate the function $f(x, y(x))$ into a Newton backward interpolation polynomial of fourth degree.

ABSTRAK

Tulisan ini menurunkan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima dengan mengacu pada persamaan diferensial biasa yang berbentuk $y' = f(x, y)$ dengan syarat awal $y(x_0) = y_0$. Penurunan dilakukan dengan menghampiri fungsi $f(x, y(x))$ ke dalam polinom interpolasi beda mundur Newton derajat empat.

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tak diketahui. Persamaan diferensial berperanan penting di alam, sebab kebanyakan fenomena alam dirumuskan dalam bentuk diferensial. Persamaan diferensial sering digunakan sebagai model matematika dalam bidang sains maupun dalam bidang rekayasa.

Ada banyak teknik untuk memperoleh solusi persamaan diferensial, suatu fungsi dasar ataupun fungsi khusus, seperti fungsi Legendre, fungsi Bessel dan fungsi Gauss. Kita tidak ingin mengurangi pentingnya bidang dasar matematika ini, tetapi bagaimanapun juga kita menyadari bahwa seringkali tidak semua persoalan praktis dapat diselesaikan metoda klasik, ataupun memberikan solusi yang begitu sulit diperoleh untuk dievaluasi. Misalnya :

$$y' = x^2 + y^2$$

Tidak mempunyai solusi dasar. Dalam banyak kasus praktis, beberapa koefisien atau persamaan diferensial adalah nonlinier atau hanya diberikan sebagai susunan tabel data percobaan, hal yang terakhir ini tidak dapat diselesaikan secara analitik.

Jelas bahwa kita harus memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi analitiknya yang dinamakan dengan solusi numerik. Sampai sejauh ini kita telah mengenal beberapa metode numerik seperti metode Euler, metode Deret Taylor, dan metode Runge Kutta. Semua metode tersebut dikelompokkan ke dalam metode satu langkah, sebab untuk menaksir nilai $y(x_{n+1})$ dibutuhkan satu buah taksiran nilai sebelumnya, $y(x_n)$.

Kelompok metode penyelesaian persamaan diferensial biasa yang lain ialah metode banyak langkah. Pada metode banyak-langkah, perkiraan nilai $y(x_{n+1})$ membutuhkan beberapa taksiran nilai sebelumnya, $y(x_n)$, $y(x_{n-1})$, ... Yang termasuk ke dalam metode banyak-langkah adalah metode prediktor-korektor. Ada beberapa metode prediktor-korektor yang termasuk ke dalam metode banyak-langkah salah satunya adalah metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Disini penulis mencoba menurunkan metode Adams-Bashforth-Moulton yang mempunyai orde yang lebih tinggi dari orde empat untuk mendapatkan solusi yang mempunyai ketelitian yang lebih baik.

Berdasarkan uraian di atas, penulis berusaha untuk mengangkat masalah itu dalam sebuah skripsi dengan rencana judul :

"Solusi Numerik Persamaan Diferensial Biasa Dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima"

I.2 Rumusan Masalah

Bagaimana menentukan solusi numerik persamaan differensial biasa dengan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima.

I.3 Batasan Masalah

Tulisan ini hanya memusatkan perhatian pada penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa orde pertama dengan satu kondisi awal :

$$y' = f(x, y) \;, \quad y(x_0) = y_0$$

I.4 Tujuan Penulisan

Menentukan solusi numerik persamaan diferensial biasa dengan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima.

BAB II
POLINOM INTERPOLASI NEWTON

Misal diberikan $(n+1)$ pasang titik, masing-masing adalah :

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \ldots, (x_n, f_n)$$

dengan $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

Selanjutnya akan dicari suatu polinomial berorde $\leq n$, sedemikian hingga polinomial tersebut melalui semua titik yang diberikan, dalam arti suatu polinomial $P_n(x)$ sedemikian hingga :

$$P_n(x_0) = f_0, P_n(x_1) = f_1, P_n(x_2) = f_2, \ldots, P_n(x_n) = f_n \qquad \text{(II.1)}$$

Polinomial yang demikian ini disebut Polinom Penginterpolasi dan nilai-nilai $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut simpul.

II.1 Interpolasi Beda Terbagi Newton

Secara umum, interpolasi polinom orde-n, dapat dinyatakan dengan :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + S_n(x)$$

atau

$$S_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x) \qquad \text{(II.2)}$$

Agar memenuhi persamaan (II.1), maka untuk setiap nilai $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ haruslah $S_n(x) = 0$ karena pada simpul-simpul tersebut $P_n(x) = P_{n-1}(x)$ akibatnya bentuk dari $S_n(x)$ adalah :

$$S_n(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) \qquad \text{(II.3)}$$

Selanjutnya untuk membangun koefisien a_n, pada persamaan (II.2) disubsitusikan $x = x_n$, sehingga diperoleh :

$$S_n(x_n) = P_n(x_n) - P_{n-1}(x_n)$$

Agar memenuhi persamaan (II.1) maka $P_n(x_n) = f_n$, sehingga dari persamaan (II.3), diperoleh :

$$a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}) = f_n - P_{n-1}(x_n)$$

atau

$$a_n = \frac{f_n - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

untuk $n = 1$, maka :

$$a_1 = \frac{f_1 - P_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \equiv a_1[x_0, x_1]$$

untuk $n = 2$, maka :

$$a_2 = \frac{f_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f_2 - \left\{f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)\right\}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{(f_2 - f_1)(x_1 - x_0) - (f_1 - f_0)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} = \frac{\frac{(f_2 - f_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{(f_1 - f_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)}$$

$$\frac{a_1[x_1, x_2] - a_1[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = a_2[x_0, x_2]$$

Dengan cara analog, diperoleh :

$$a_3[x_0, x_3] = \frac{a_2[x_1, x_3] - a_2[x_0, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Secara umum diperoleh :

$$a_h[x_i, x_{i+h}] = \frac{a_{h-1}[x_i, x_{i+h-1}] - a_h[x_{i-1}, x_{i+h-2}]}{x_{i+h} - x_i} \tag{II.4}$$

dimana $h = 1,2,3,...,n-i$

Dengan menggunakan persamaan (II.4) interpolasi polinom orde-n, dapat dinyatakan dengan :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})a_n[x_0, x_n] \tag{II.5}$$

Interpolasi ini biasa juga disebut Interpolasi Beda Terbagi Newton.

Menghitung koefisien $a_k[x_i, x_{i+k}]$ dengan menggunakan persamaan (II.4), bagi sebagian orang mungkin tidak disenangi, sehingga biasanya proses perhitungan ini dinyatakan dalam Tabel Beda Terbagi Newton, seperti yang terlihat pada Tabel 1(*Lampiran 1*).

II.2 Interpolasi Polinom dengan Simpul Berjarak Sama

- Beda Maju

Misalkan simpul-simpul pada persamaan (II.5) berjarak sama atau dapat ditulis $x_k - x_{k-1} = h$ untuk setiap $k = 1,2,3,...,n$ maka :

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h \\
x_2 &= x_1 + h = x_0 + 2h \\
x_3 &= x_2 + h = x_0 + 3h \\
&\vdots \\
x_{n-2} &= x_{n-3} + h = x_0 + (n-2)h \\
x_{n-1} &= x_{n-2} + h = x_0 + (n-1)h \\
x_n &= x_{n-1} + h = x_0 + nh
\end{aligned}$$

Misalkan :

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

Untuk mempersingkat penulisan digunakan simbol :

$\Delta f_p \quad = f_{p+1} - f_p$

$\Delta^2 f_p = \Delta f_{p+1} - \Delta f_p$

$\Delta^3 f_p = \Delta^2 f_{p+1} - \Delta^2 f_p$

$\vdots$

$\Delta^q f_p = \Delta^{q-1} f_{p+1} - \Delta^{q-1} f_p$

untuk $p = 0,1,2,3,\ldots,n-q$

Dari Tabel 1 nilai-nilai $a_1[x_0,x_1], a_2[x_0,x_2],\ldots,a_n[x_0,x_n]$ diperoleh :

$$a_1[x_0,x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{h} = \frac{\Delta f_0}{1!\,h}$$

$$a_2[x_0,x_2] = \frac{a_1[x_1,x_2] - a_1[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{\Delta f_0}{h}}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}$$

$$a_3[x_0,x_3] = \frac{a_2[x_1,x_3] - a_2[x_0,x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{\dfrac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1} - \dfrac{\Delta^2 f_0}{2h^2}}{x_3 - x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{\left\{\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right\}}{x_3 - x_1} - \dfrac{\Delta^2 f_0}{2h^2}}{x_3 - x_0} = \frac{\dfrac{\dfrac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{h}}{2h} - \dfrac{\Delta^2 f_0}{2h^2}}{3h}$$

$$= \frac{\dfrac{(\Delta f_2 - \Delta f_1)}{2h^2} - \dfrac{\Delta^2 f_0}{2h^2}}{3h} = \frac{\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0}{6h^3} = \frac{\Delta^3 f_0}{3!\,h^3}$$

Bentuk umumnya dapat ditulis,

$$a_m[x_0, x_m] = \frac{a_{m-1}[x_1, x_m] - a_{m-1}[x_0, x_{m-1}]}{x_m - x_0} = \frac{\Delta^m f_0}{m! h^m} \tag{II.6}$$

dimana, $m = 1,2,3,\ldots,n$

Misalkan x adalah suatu nilai yang berada pada selang $x_0 < x < x_n$, maka terdapat suatu $r \in R^+$ sedemikian hingga :

$$x = x_0 + rh$$

Akibatnya :

$$x - x_0 = rh$$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = (x - x_0) - h = (r-1)h$$

$$x - x_2 = x - (x_0 + h) = (x - x_0) - 2h = (r-2)h$$

$$\vdots$$

$$x - x_n = x - (x_0 + kh) = (x - x_0) - kh = (r-k)h$$

dimana $k = 0,1,2,3,\ldots,n$

Sehingga,

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) = r(r-1)(r-2)(r-3)\ldots(r-k)h^{k+1}$$

Dengan demikian, maka persamaan (II.5) dapat dituliskan dalam parameter r sebagai :

$$\begin{aligned} p_n(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots + \\ \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)}{(n-1)!}\Delta^{n-1} f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \end{aligned} \tag{II.7}$$

Persamaan ini disebut **Beda Maju (forward differences) Newton.**

- Beda Mundur

Misalkan :

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

Untuk mempersingkat penulisan digunakan simbol :

$$\nabla f_p \quad = f_p - f_{p-1}$$

$$\nabla^2 f_p = \nabla f_p - \nabla f_{p-1}$$

$$\nabla^3 f_p = \nabla^2 f_p - \nabla^2 f_{p-1}$$

$$\vdots$$

$$\nabla^q f_p = \nabla^{q-1} f_p - \nabla^{q-1} f_{p-1}$$

untuk $p = 0,1,2,3,...,n-q$

Dari Tabel 1 nilai-nilai $a_1[x_{n-1}, x_n], a_2[x_{n-2}, x_n], ..., a_n[x_0, x_n]$ diperoleh :

$$a_1[x_{n-1}, x_n] = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\nabla f_n}{h} = \frac{\nabla f_n}{1!h}$$

$$a_2[x_{n-2}, x_n] = \frac{a_1[x_{n-1}, x_n] - a_1[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}} = \frac{\frac{\nabla f_n}{h} - \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}}{x_n - x_{n-2}} = \frac{\frac{\nabla f_n - \nabla f_{n-1}}{h}}{2h}$$

$$= \frac{\nabla^2 f_0}{2!h^2}$$

$$a_3[x_{n-3}, x_n] = \frac{a_2[x_{n-2}, x_n] - a_2[x_{n-3}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-3}} = \frac{\frac{\nabla^2 f_n}{2h^2} - \frac{f[x_{n-2}, x_{n-1}] - f[x_{n-3}, x_{n-2}]}{x_{n-1} - x_{n-3}}}{x_n - x_{n-3}}$$

$$= \frac{\frac{\nabla^2 f_n}{2h^2} - \frac{\left\{\frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} - \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})}{x_{n-2} - x_{n-3}}\right\}}{x_{n-1} - x_{n-3}}}{x_n - x_{n-3}}$$

$$= \frac{\dfrac{\nabla^2 f_n}{2h^2} - \dfrac{\dfrac{\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2}}{h}}{2h}}{3h} = \frac{\dfrac{\nabla^2 f_n}{2h^2} - \dfrac{(\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2})}{2h^2}}{3h}$$

$$= \frac{\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1}}{6h^3} = \frac{\nabla^3 f_n}{3!\,h^3}$$

Bentuk umumnya dapat ditulis,

$$a_t[x_{n-t}, x_n] = \frac{a_{t-1}[x_{n-t+1}, x_n] - a_{t-1}[x_{n-t}, x_{n-t+1}]}{x_n - x_{n-t}} = \frac{\nabla^t f_n}{t!\,h^t} \qquad \text{(II.8)}$$

dimana, $t = 1,2,3,...$

Karena $x = x_n + rh$, maka

$$x - x_n = rh$$

$$x - x_{n-1} = x - (x_n - h) = (x - x_n) + h = (r+1)h$$

$$x - x_{n-2} = x - (x_n - 2h) = (x - x_n) + 2h = (r+2)h$$

$$x - x_{n-3} = x - (x_n - 3h) = (x - x_n) + 3h = (r+3)h$$

$$\vdots$$

$$x - x_0 = x - (x_n - kh) = (x - x_n) + kh = (r+k)h$$

dimana $k = 0,1,2,3,...,n$

Dengan demikian, persamaan (II.5) dapat dituliskan dalam parameter r sebagai :

$$\begin{aligned} p_n(x) = f_0 + r\nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!}\nabla^3 f_0 \\ \frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+n-2)}{(n-1)!}\nabla^{n-1} f_0 + \frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)}{n!}\nabla^n f_0 \end{aligned} \qquad \text{(II.9)}$$

Persamaan ini disebut **Beda Mundur (backward differences) Newton.**

BAB III
PEMBAHASAN

III.1 Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima

Tinjau persamaan diferensial biasa orde satu $y' = f(x, y)$. Bila kedua ruas diintegrasikan dari x_n sampai $x_{n+1} = x_n + h$ diperoleh

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = y(x)\Big|_{x_n}^{x_{n+1}} = y_{n+1} - y_n$$

atau,

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx \qquad \text{(III.1)}$$

Secara umum rumus **prediktor** berorde tinggi dapat diperoleh dengan menggunakan polinom yang menginterpolasi pada simpul-simpul $x_{n-m}, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ untuk bilangan bulat $m > 0$.

Dengan memilih $m = 4$ maka persamaan **prediktor** diperoleh dengan mengaproksimasi fungsi $f(x, y(x))$ dengan menggunakan polinom derajat empat yang menginterpolasi pada simpul-simpul yang berjarak sama yaitu, $x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$. Disini interpolasi polinom yang digunakan adalah interpolasi beda mundur Newton yang dalam hal ini :

$$x_{n-1} = x_n - h$$

$$x_{n-2} = x_{n-1} - h = (x_n - h) - h = x_n - 2h$$

$$x_{n-3} = x_{n-2} - h = (x_n - 2h) - h = x_n - 3h$$

$$x_{n-4} = x_{n-3} - h = (x_n - 3h) - h = x_n - 4h$$

Dari persamaan (II.8) nilai-nilai $a_1[x_{n-1}, x_n], a_2[x_{n-2}, x_n], a_3[x_{n-3}, x_n]$ dan $a_4[x_{n-4}, x_n]$ diperoleh :

$$a_1[x_{n-1}, x_n] = \frac{\nabla f_n}{h} \tag{III.2}$$

$$a_2[x_{n-2}, x_n] = \frac{\nabla^2 f_n}{2h^2} \tag{III.3}$$

$$a_3[x_{n-3}, x_n] = \frac{\nabla^3 f_n}{6h^3} \tag{III.4}$$

$$a_4[x_{n-4}, x_n] = \frac{\nabla^4 f_n}{24h^4} \tag{III.5}$$

Dari persamaan(II .5) Interpolasi polinom derajat empat dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned} P_4(x) = f_n &+ (x - x_n)a_1[x_{n-1}, x_n] + a_2[x_{n-2}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ &+ (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})a_3[x_{n-3}, x_n] \\ &+ (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})a_4[x_{n-4}, x_n] \end{aligned} \tag{III.6}$$

Dengan mensubsitusi persamaan (III.2) sampai persamaan (III.5) ke persamaan (II.6) diperoleh :

$$\begin{aligned} P_4(x) = f_n &+ \frac{\nabla f_n}{h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ &+ (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})\frac{\nabla^3 f_n}{3!h^3} \\ &+ (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})\frac{\nabla^4 f_n}{4!h^4} \end{aligned} \tag{III.7}$$

Misalkan x adalah suatu nilai yang berada pada selang $x_{n-4} < x < x_n$, maka terdapat suatu $r \in R^+$ sedemikian hingga :

$$x = x_n + rh$$

Akibatnya :

$$x - x_n = rh$$

$$x - x_{n-1} = x - (x_n - h) = (x - x_n) + h = (r+1)h$$

$$x - x_{n-2} = x - (x_n - 2h) = (x - x_n) + 2h = (r+2)h$$

$$x - x_{n-3} = x - (x_n - 3h) = (x - x_n) + 3h = (r+3)h$$

Sehingga persamaan (III.7) dapat dituliskan dalam parameter r sebagai :

$$\begin{aligned} p_4(x) = f_n + r\nabla f_n + \frac{r(r+1)}{2}\nabla^2 f_n + \frac{r(r+1)(r+2)}{6}\nabla^3 f_n \\ + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}\nabla^4 f_n \end{aligned} \qquad \text{(III.8)}$$

Sehingga persamaan (III.1) dapat ditulis kembali sebagai :

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Bigg(f_n + r\nabla f_n + \frac{r(r+1)}{2}\nabla^2 f_n + \frac{r(r+1)(r+2)}{6}\nabla^3 f_n \\ + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}\nabla^4 f_n \Bigg) dx \end{aligned} \qquad \text{(III.9)}$$

dimana,

untuk $x = x_n$, maka $r = \dfrac{(x_n - x_n)}{h} = 0$

untuk $x = x_{n+1}$, maka $r = \dfrac{(x_{n+1} - x_n)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$

dan $r = \dfrac{(x - x_n)}{h} \Rightarrow dr = \dfrac{1}{h}dx$

Maka persamaan (III.9) dapat ditulis sebagai :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f_n \int_0^1 dr + \nabla f_n \int_0^1 r dr + \nabla^2 f_n \int_0^1 \frac{r(r+1)}{2} dr + \nabla^3 f_n \int_0^1 \frac{r(r+1)(r+2)}{6} dr \right.$$

$$\left. + \nabla^4 f_n \int_0^1 \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24} dr \right) \quad \text{(III.10)}$$

Dimana integral dari,

$$\int_0^1 dr = [r]_0^1 = 1 \quad \text{(III.11)}$$

$$\int_0^1 r dr = \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{(III.12)}$$

$$\int_0^1 \frac{r(r+1)}{2} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 (r^2 + r) dr = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 = \frac{5}{12} \quad \text{(III.13)}$$

$$\int_0^1 \frac{r(r+1)(r+2)}{6} dr = \frac{1}{6} \int_0^1 (r^3 + 3r^2 + 2r) dr = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4} r^4 + r^3 + r^2 \right]_0^1 = \frac{3}{8} \quad \text{(III.14)}$$

$$\int_0^1 \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24} dr = \frac{1}{24} \int_0^1 (r^4 + 6r^3 + 11r^2 + 6r) dr$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{1}{5} r^5 + \frac{3}{2} r^4 + \frac{11}{3} r^3 + 3r^2 \right]_0^1 = \frac{251}{720} \quad \text{(III.15)}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (III.11) sampai (III.15) ke persamaan (III.10), diperoleh :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n + \frac{251}{720} \nabla^4 f_n \right) \quad \text{(III.16)}$$

karena,

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1} \quad \text{(III.17)}$$

$$\nabla^2 f_n = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = (f_n - f_{n-1}) - (f_{n-1} - f_{n-2}) = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{(III.18)}$$

$$\nabla^3 f_n = \nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1} = (f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) - (\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2})$$

$$= (f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) - \{(f_{n-1} - f_{n-2}) - (f_{n-2} - f_{n-3})\}$$

$$= f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3} \quad \text{(III.19)}$$

$$\nabla^4 f_n = \nabla^3 f_n - \nabla^3 f_{n-1} = (f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}) - (\nabla^2 f_{n-1} - \nabla^2 f_{n-2})$$

$$= (f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}) - \{(\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2}) - (\nabla f_{n-2} - \nabla f_{n-3})\}$$

$$= (f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}) - \{(f_{n-1} - f_{n-2}) - (f_{n-2} - f_{n-3})$$

$$-(f_{n-2} - f_{n-3}) + (f_{n-3} - f_{n-4})\}$$

$$= (f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}) - \{f_{n-1} - 3f_{n-2} + 3f_{n-3} - f_{n-4}\}$$

$$= f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4} \quad \text{(III.20)}$$

Dengan bantuan *MAPLE 9.5* (*Lampiran 3*) persamaan (III.17) sampai (III.20) disubsitusi ke persamaan (III.16) diperoleh persamaan **prediktor** :

$$y^*_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1901}{720} f_n - \frac{1387}{360} f_{n-1} + \frac{109}{30} f_{n-2} - \frac{637}{360} f_{n-3} + \frac{251}{720} f_{n-4}\right)$$

atau,

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(1901 f_n - 2774 f_{n-1} + 6618 f_{n-2} - 1274 f_{n-3} + 251 f_{n-4}) \quad \text{(II.21)}$$

Persamaan **korektor** dibentuk dengan cara yang sama pada persamaan **prediktor**. Tetapi, simpul-simpul yang yang diperlukan untuk pembentukan polinom $\tilde{p}_4(x)$ interpolasi ialah $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}$ yang berjarak sama yang dalam hal ini :

$$x_n = x_{n+1} - h$$

$$x_{n-1} = x_n - h = (x_{n+1} - h) - h = x_{n+1} - 2h$$

$$x_{n-2} = x_{n-1} - h = (x_{n+1} - 2h) - h = x_{n+1} - 3h$$

$$x_{n-3} = x_{n-2} - h = (x_{n+1} - 3h) - h = x_{n+1} - 4h$$

Tabel beda terbagi Newton yang dibentuk dari ke lima simpul tersebut diperlihatkan oleh Tabel 2(*Lampiran 2*).

dimana,

$$a_1[x_n, x_{n+1}] = \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{\nabla f_{n+1}}{h} \tag{III.22}$$

$$a_2[x_{n-1}, x_{n+1}] = \frac{a_1[x_n, x_{n+1}] - a_1[x_{n-1}, x_n]}{x_{n+1} - x_{n-1}} = \frac{\frac{\nabla f_{n+1}}{h} - \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}}{x_{n+1} - x_{n-1}} = \frac{\frac{\nabla f_{n+1} - \nabla f_n}{h}}{2h}$$

$$= \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} \tag{III.23}$$

$$a_3[x_{n-2}, x_{n+1}] = \frac{a_2[x_{n-1}, x_{n+1}] - a_2[x_{n-2}, x_n]}{x_{n+1} - x_{n-2}}$$

$$= \frac{\frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} - \frac{a_1[x_{n-1}, x_n] - a_1[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}}{x_{n+1} - x_{n-2}}$$

$$= \frac{\frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} - \frac{\frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}}{x_n - x_{n-2}}}{x_{n+1} - x_{n-2}} = \frac{\frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} - \frac{\frac{\nabla f_n - \nabla f_{n-1}}{h}}{2h}}{3h}$$

$$= \frac{\frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} - \frac{\nabla f_n - \nabla f_{n-1}}{2h^2}}{3h}$$

$$= \frac{\nabla^2 f_{n+1} - \nabla^2 f_n}{6h^3} = \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6h^3} \tag{III.24}$$

$$a_4[x_{n-3}, x_{n+1}] = \frac{a_3[x_{n-2}, x_{n+1}] - a_3[x_{n-3}, x_n]}{x_{n-3}, x_{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{\nabla^3 f_{n+1}}{6h^3} - \dfrac{a_2[x_{n-2}, x_n] - a_2[x_{n-3}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-3}}}{x_{n+1} - x_{n-3}}$$

$$= \frac{\dfrac{\nabla^3 f_{n+1}}{6h^3} - \dfrac{\dfrac{a_1[x_{n-1}, x_n] - a_1[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}} - \dfrac{a_1[x_{n-2}, x_{n-1}] - a_1[x_{n-3}, x_{n-2}]}{x_{n-1} - x_{n-3}}}{x_n - x_{n-3}}}{x_{n+1} - x_{n-3}}$$

$$= \frac{\dfrac{\nabla^3 f_{n+1}}{6h^3} - \dfrac{\dfrac{\dfrac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - \dfrac{f_{n-1} - f_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}}{x_n - x_{n-2}} - \dfrac{\dfrac{f_{n-1} - f_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} - \dfrac{f_{n-2} - f_{n-3}}{x_{n-2} - x_{n-3}}}{x_{n-1} - x_{n-3}}}{x_n - x_{n-3}}}{x_{n+1} - x_{n-3}}$$

$$= \frac{\dfrac{\nabla^3 f_{n+1}}{6h^3} - \dfrac{\dfrac{\dfrac{\nabla f_n - \nabla f_{n-1}}{h}}{2h} - \dfrac{\dfrac{\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2}}{h}}{2h}}{3h}}{4h} = \frac{\dfrac{\nabla^3 f_{n+1}}{6h^3} - \dfrac{\dfrac{\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1}}{2h^2}}{3h}}{4h}$$

$$= \frac{\dfrac{\nabla^3 f_{n+1} - \nabla^3 f_n}{6h^3}}{4h} = \frac{\nabla^4 f_{n+1}}{24h^4} \tag{III.25}$$

Dari persamaan (II .5) Interpolasi polinom derajat empat dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_4(x) = {} & f_{n+1} + (x - x_{n+1})a_1[x_n, x_{n+1}] + a_2[x_{n-1}, x_{n+1}](x - x_{n+1})(x - x_n) \\ & + (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})a_3[x_{n-2}, x_{n+1}] \\ & + (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})a_4[x_{n-3}, x_{n+1}]\end{aligned} \tag{III.26}$$

Dengan mensubsitusi persamaan (III.22) sampai persamaan (III.25) ke persamaan (II.26) diperoleh :

$$\widetilde{P}_4(x) = f_{n+1} + \frac{\nabla f_{n+1}}{h}(x - x_{n+1}) + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2}(x - x_{n+1})(x - x_n)$$
$$+ (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})\frac{\nabla^3 f_{n+1}}{3!\,h^3}$$
$$+ (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-3})\frac{\nabla^4 f_{n+1}}{4!\,h^4} \qquad \text{(III.27)}$$

Misalkan x adalah suatu nilai yang berada pada selang $x_{n-3} < x < x_{n+1}$, maka terdapat suatu $r \in R^+$ sedemikian hingga :

$$x = x_{n+1} + rh$$

Akibatnya :

$$x - x_{n-2} = x - (x_{n+1} - 3h) = (x - x_{n+1}) + 3h = (r+3)h$$

$$x - x_{n-1} = x - (x_{n+1} - 2h) = (x - x_{n+1}) + 2h = (r+2)h$$

$$x - x_n \ = x - (x_{n+1} - h) = (x - x_{n+1}) + h = (r+1)h$$

$$x - x_{n+1} = rh$$

Sehingga persamaan (III.20) dapat dituliskan dalam parameter r sebagai :

$$\widetilde{p}_4(x) = f_{n+1} + r\nabla f_{n+1} + \frac{r(r+1)}{2}\nabla^2 f_{n+1} + \frac{r(r+1)(r+2)}{6}\nabla^3 f_{n+1}$$
$$+ \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}\nabla^4 f_{n+1} \qquad \text{(III.28)}$$

Sehingga persamaan **Korektor** dapat ditulis sebagai :

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \widetilde{p}_4(x)$$

$$= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f_{n+1} + r\nabla f_{n+1} + \frac{r(r+1)}{2}\nabla^2 f_{n+1} + \frac{r(r+1)(r+2)}{6}\nabla^3 f_{n+1} + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}\nabla^4 f_{n+1} \right) dx \tag{III.29}$$

dimana,

untuk $x = x_n$, maka $r = \frac{(x_n - x_{n+1})}{h} = -\frac{h}{h} = -1$

untuk $x = x_{n+1}$, maka $r = \frac{(x_{n+1} - x_{n+1})}{h} = \frac{0}{h} = 0$

dan $r = \frac{(x - x_{n+1})}{h} \Rightarrow dr = \frac{1}{h}dx$

maka persamaan (III.22) dapat ditulis sebagai :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f_{n+1}\int_{-1}^{0} dr + \nabla f_{n+1}\int_{0}^{1} r dr + \nabla^2 f_{n+1}\int_{0}^{1} \frac{r(r+1)}{2} dr + \nabla^3 f_{n+1}\int_{0}^{1} \frac{r(r+1)(r+2)}{6} dr + \nabla^4 f_{n+1}\int_{0}^{1} \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24} dr \right) \tag{III.30}$$

Dimana integral dari,

$$\int_{-1}^{0} dr = [r]_{-1}^{0} = 1 \tag{III.31}$$

$$\int_{-1}^{0} r dr = \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2} \tag{III.32}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{r(r+1)}{2} dr = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (r^2 + r) dr = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{2}r^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{12} \tag{III.33}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{r(r+1)(r+2)}{6} dr = \frac{1}{6}\int_{-1}^{0} (r^3 + 3r^2 + 2r) dr = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}r^4 + r^3 + r^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{24} \tag{III.34}$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}dr = \frac{1}{24}\int_{-1}^{0}\left(r^4+6r^3+11r^2+6r\right)dr$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{1}{5}r^5+\frac{3}{2}r^4+\frac{11}{3}r^3+3r^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{19}{720} \qquad \text{(III.35)}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (III.31) sampai (III.35) ke persamaan (III.30), diperoleh persamaan **Korektor** :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{n+1} - \frac{19}{720}\nabla^4 f_{n+1}\right) \qquad \text{(III.36)}$$

karena,

$$\nabla f_{n+1} = f_{n+1} - f_n \qquad \text{(III.37)}$$

$$\nabla^2 f_{n+1} = \nabla f_{n+1} - \nabla f_n = \left(f_{n+1} - f_n\right) - \left(f_n - f_{n-1}\right) = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1} \qquad \text{(III.38)}$$

$$\nabla^3 f_{n+1} = \nabla^2 f_{n+1} - \nabla^2 f_n = \left(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}\right) - \left(\nabla f_n - \nabla f_{n-1}\right)$$

$$= \left(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}\right) - \left\{\left(f_n - f_{n-1}\right) - \left(f_{n-1} - f_{n-2}\right)\right\}$$

$$= f_{n+1} - 3f_n + 3f_{n-1} - f_{n-2} \qquad \text{(III.39)}$$

$$\nabla^4 f_{n+1} = \nabla^3 f_{n+1} - \nabla^3 f_n = \left(f_{n+1} - 3f_n + 3f_{n-1} - f_{n-2}\right) - \left(\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1}\right)$$

$$= \left(f_{n+1} - 3f_n + 3f_{n-1} - f_{n-2}\right) - \left\{\left(\nabla f_n - \nabla f_{n-1}\right) - \left(\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2}\right)\right\}$$

$$= \left(f_{n+1} - 3f_n + 3f_{n-1} - f_{n-2}\right) - \left\{\left(f_n - f_{n-1}\right) - \left(f_{n-1} - f_{n-2}\right)\right.$$

$$\left. - \left(f_{n-1} - f_{n-2}\right) + \left(f_{n-2} - f_{n-3}\right)\right\}$$

$$= \left(f_{n+1} - 3f_n + 3f_{n-1} - f_{n-2}\right) - \left\{f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}\right\}$$

$$= f_{n+1} - 4f_n + 6f_{n-1} - 4f_{n-2} + f_{n-3} \qquad \text{(III.40)}$$

Dengan bantuan *MAPLE 9.5* (*Lampiran 4*) persamaan (III.37) sampai (III.40) disubtitusi ke persamaan (III.36) diperoleh :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{251}{720}f^*_{n+1} + \frac{323}{360}f_n - \frac{11}{30}f_{n-1} + \frac{53}{360}f_{n-2} - \frac{19}{720}f_{n-3}\right)$$

atau,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}\left(251f^*_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}\right) \qquad \text{(III.41)}$$

Jadi, **metode *Adams-Bashforth-Moulton* orde lima** dapat ditulis sebagai berikut :

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}\left(1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}\left(251f^*_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}\right)$$

III.2 Aplikasi Pada Persamaan DifFerensial

Bagian terpenting dari suatu metode numerik adalah menguji nilai-nilai yang diberikan dengan membandingkan hasilnya dengan solusi eksak dari suatu persamaan. Metode yang baru saja didapat akan diterapkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dan membandingkan hasilnya dengan solusi eksaknya serta membandingkan keakuratannya dengan metode Adams-Bashforth-Moulton yang berorde rendah, dalam hal ini Adams-Bashforth-Moulton orde empat yang memiliki persamaan :

Prediktor : $y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$

Korektor : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f^*_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} - f_{n-2})$

Dan untuk mendapatkan beberapa nilai awal lain, kita menggunakan metode Runge-Kutta orde lima yang memiliki persamaan :

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \tfrac{1}{3}h, y_n + \tfrac{1}{3}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \tfrac{1}{3}h, y_n + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{6}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{8}k_1 + \tfrac{3}{8}k_2)$$

$$k_5 = hf(x_n + \tfrac{2}{3}h, y_n + \tfrac{2}{27}k_1 + \tfrac{1}{9}k_2 + \tfrac{1}{3}k_3 + \tfrac{4}{27}k_4)$$

$$k_6 = hf(x_n + h, y_n - \tfrac{1}{22}k_1 + \tfrac{3}{22}k_2 + \tfrac{27}{11}k_3 - 4k_4 + \tfrac{27}{11}k_5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{120}(11k_1 + 81k_3 - 64k_4 + 81k_5 + 11k_6)$$

Disini akan ditinjau persamaan diferensial dengan syarat awal :

$$y' = y - x + 2 \qquad y(0) = 0$$

yang mempunyai solusi eksak $y(x) = e^x + x - 1$

Dengan bantuan Excel, menghitung $y(1)$ dengan mengambil $h = 0{,}1$ diperoleh hasil seperti yang tersaji pada tabel 3 (*Lampiran 5*).

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

IV.1 Kesimpulan

Dengan demikian bisa disimpulkan bahwa dalam kasus ini metode Adams-Bashforth-moulton orde lima memberikan solusi yang lebih teliti dari solusi yang diperoleh dengan metode Adams-Bashforth-moulton orde empat.

IV.2 Saran

Dalam penulisan skripsi ini penulis hanya memusatkan perhatian pada penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa orde pertama, jika ada yang berminat mengambil tugas akhir tentang metode numerik, bisa mengkajinya lebih lanjut untuk persamaan diferensial orde tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

1. Munir, Rinaldi , *Metode Numerik,* Informatika Bandung. 2003.

2. McCracken, Daniel D.dan Dorn, William s, *Studi Kasus Metode Numerik dengan Fortran IV, terj.* Farida Muchtadi. Penerbit Erlangga, Jakarta. 1986.

3. Kreyszig, Erwin, *Advanced Engineering Mathematics,* Wayne Anderson, Singapore. 1993.

4. Purcell, Edwin J. dan Varberg, Dale, *Kalkulus dan Geometri Analitis,* Penerbit Erlangga, Jakarta. 1987.

5. Conte, Samuel D. dan Carl de Boor, *Dasar-Dasar Analisa Numerik,* Wayne Anderson, Makassar. 2001.

6. Kusuma, Jeffry dan Muhtar, *Metode Runge-Kutta Orde Lima untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa,* Jurusan Matematika FMIPA Unhas, Makassar. 2006.

Lampiran 1

Tabel1. Beda Terbagi Newton

i	x_i	f_i	Beda Terbagi				
			I	II	III	IV	...
0	x_0	f_0					
			$a_1[x_0, x_1]$				
1	x_1	f_1		$a_2[x_0, x_2]$			
			$a_1[x_1, x_2]$		$a_3[x_0, x_3]$		
2	x_2	f_2		$a_2[x_1, x_3]$		$a_4[x_0, x_4]$	...
			$a_1[x_2, x_3]$		$a_3[x_1, x_4]$		
3	x_3	f_3		$a_2[x_2, x_4]$		$\vdots$	
			$a_1[x_3, x_4]$		$\vdots$		
4	x_4	f_4		$\vdots$			
			$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
			$\vdots$				
$n-4$	x_{n-4}	f_{n-4}		$\vdots$			
			$a_1[x_{n-4}, x_{n-3}]$		$\vdots$		
$n-3$	x_{n-3}	f_{n-3}		$a_2[x_{n-4}, x_{n-2}]$		$\vdots$	
			$a_1[x_{n-3}, x_{n-2}]$		$a_3[x_{n-4}, x_{n-1}]$		
$n-2$	x_{n-2}	f_{n-2}		$a_2[x_{n-3}, x_{n-1}]$		$a_4[x_{n-4}, x_n]$	...
			$a_1[x_{n-2}, x_{n-1}]$		$a_3[x_{n-3}, x_n]$		
$n-1$	x_{n-1}	f_{n-1}		$a_2[x_{n-2}, x_n]$			
			$a_1[x_{n-1}, x_n]$				
n	x_n	f_n					

Lampiran 2

Tabel 2. Beda Terbagi Newton

i	x_{n+i}	f_{n+i}	Beda Terbagi			
			I	II	III	IV
-3	x_{n-3}	f_{n-3}				
			$a_1[x_{n-3}, x_{n-2}]$			
-2	x_{n-2}	f_{n-2}		$a_2[x_{n-3}, x_{n-1}]$		
			$a_1[x_{n-2}, x_{n-1}]$		$a_3[x_{n-3}, x_n]$	
-1	x_{n-1}	f_{n-1}		$a_2[x_{n-2}, x_n]$		$a_4[x_{n-3}, x_{n+1}]$
			$a_1[x_{n-1}, x_n]$		$a_3[x_{n-2}, x_{n+1}]$	
0	x_n	f_n		$a_2[x_{n-1}, x_{n+1}]$		
			$a_1[x_n, x_{n+1}]$			
1	x_{n+1}	f_{n+1}				

Lampiran 3

```
> restart;
> r[0]:=1;
```

$$r_0 := 1$$

```
> r[1]:=1/2;
```

$$r_1 := \frac{1}{2}$$

```
> r[2]:=5/12;
```

$$r_2 := \frac{5}{12}$$

```
> r[3]:=3/8;
```

$$r_3 := \frac{3}{8}$$

```
> r[4]:=251/720;
```

$$r_4 := \frac{251}{720}$$

```
> delf[0]:=f[n];
```

$$delf_0 := f_n$$

```
> delf[1]:=f[n]-f[n-1];
```

$$delf_1 := f_n - f_{n-1}$$

```
> delf[2]:=f[n]-2*f[n-1]+f[n-2];
```

$$delf_2 := f_n - 2\,f_{n-1} + f_{n-2}$$

```
> delf[3]:=f[n]-3*f[n-1]+3*f[n-2]-f[n-3];
```

$$delf_3 := f_n - 3\,f_{n-1} + 3\,f_{n-2} - f_{n-3}$$

```
> delf[4]:=f[n]-4*f[n-1]+6*f[n-2]-4*f[n-3]+f[n-4];
```

$$delf_4 := f_n - 4\,f_{n-1} + 6\,f_{n-2} - 4\,f_{n-3} + f_{n-4}$$

```
> y[n+1]:=y[n]+h*sum(r[i]*delf[i],i=0..4);
```

$$y_{n+1} := y_n + h\left(\frac{1901}{720}f_n - \frac{1387}{360}f_{n-1} + \frac{109}{30}f_{n-2} - \frac{637}{360}f_{n-3} + \frac{251}{720}f_{n-4}\right)$$

```
>
```

Lampiran 4

```
> restart;
> r[0]:=1;
```

$$r_0 := 1$$

```
> r[1]:=-1/2;
```

$$r_1 := \frac{-1}{2}$$

```
> r[2]:=-1/12;
```

$$r_2 := \frac{-1}{12}$$

```
> r[3]:=-1/24;
```

$$r_3 := \frac{-1}{24}$$

```
> r[4]:=-19/720;
```

$$r_4 := \frac{-19}{720}$$

```
> delf[0]:=f[n+1];
```

$$delf_0 := f_{n+1}$$

```
> delf[1]:=f[n+1]-f[n];
```

$$delf_1 := f_{n+1} - f_n$$

```
> delf[2]:=f[n+1]-2*f[n]+f[n-1];
```

$$delf_2 := f_{n+1} - 2\,f_n + f_{n-1}$$

```
> delf[3]:=f[n+1]-3*f[n]+3*f[n-1]-f[n-2];
```

$$delf_3 := f_{n+1} - 3\,f_n + 3\,f_{n-1} - f_{n-2}$$

```
> delf[4]:=f[n+1]-4*f[n]+6*f[n-1]-4*f[n-2]+f[n-3];
```

$$delf_4 := f_{n+1} - 4\,f_n + 6\,f_{n-1} - 4\,f_{n-2} + f_{n-3}$$

```
> y[n+1]:=y[n]+h*sum(r[i]*delf[i],i=0..4);
```

$$y_{n+1} := y_n + h\left(\frac{251}{720}f_{n+1} + \frac{323}{360}f_n - \frac{11}{30}f_{n-1} + \frac{53}{360}f_{n-2} - \frac{19}{720}f_{n-3}\right)$$

```
>
```

LAMPIRAN 5

Tabel 3 (h=0,1)

n	x_n	$e^{x_n} + x_n - 1$	P-C ORDE 4		PC ORDE 5	
			y_n	ERROR	y_n	ERROR
0	0.00	0.0000000000				
1	0.10	0.2051709181				
2	0.20	0.4214027582				
3	0.30	0.6498588076				
4	0.40	0.8918246976				
5	0.50	1.1487212707	1.1487216822	4.12E-07	1.1487212735	2.84E-09
6	0.60	1.4221188004	1.4221194868	6.86E-07	1.4221188164	1.60E-08
7	0.70	1.7137527075	1.7137537221	1.01E-06	1.7137527390	3.16E-08
8	0.80	2.0255409285	2.0255423329	1.40E-06	2.0255409789	5.04E-08
9	0.90	2.3596031112	2.3596049762	1.86E-06	2.3596031839	7.28E-08
10	1.00	2.7182818285	2.7182842353	2.41E-06	2.7182819278	9.93E-08