HIMPUNAN FUNGSI RASIONAL SEJATI SEBAGAI SUATU GELANGGANG EUCLID

Oleh:

Zulkaidah Nur Ahzan
H 111 01 011

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
2005

HIMPUNAN FUNGSI RASIONAL SEJATI SEBAGAI SUATU GELANGGANG EUCLID

Skripsi ini diajukan :

Untuk melengkapi tugas-tugas dan memenuhi syarat-syarat untuk mencapai gelar sarjana Matematika

Oleh :

Zulkaidah Nur Ahzan
H 111 01 011

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
2005

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguh-sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

Himpunan Fungsi Rasional Sejati

Sebagai Suatu Gelanggang Euclid

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 16 Oktober 2005

ZULKAIDAH NUR AHZAN
NIM. H111 01 011

Himpunan Fungsi Rasional Sejati

Sebagai Suatu Gelanggang Euclid

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama **Pembimbing Pertama**

Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc **N u r d i n, S.Si, M.Si**

NIP. 130 992 471 **NIP. 132 259 080**

Pada Tanggal : 16 Oktober 2005

Pada hari ini, Sabtu Tanggal 27 Agustus 2005, panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

Himpunan Fungsi Rasional Sejati Sebagai Suatu Gelanggang Euclid

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 27 Agustus 2005

Panitia Ujian Skripsi		Tanda Tangan
1.Ketua	: Dr. Aidawayati R., MS	(……………………….)
2.Sekretaris	: Drs. Diaraya	(……………………….)
3.Anggota	: Drs. Amir Kamal A., M.Sc	(……………………….)
4.Anggota	: Nurdin, S.Si, M.Si	(……………………….)
5.Anggota	: Drs. Raupong, M.Si	(……………………….)

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Syukur Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada **Allah SWT** yang senantiasa mencurahkan rahmat, karunia, serta hidayah-Nya kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini. Salam dan salawat tercurah kepada **Rasulullah SAW** sebagai suri tauladan bagi setiap insan di dunia.

Penulisan skripsi ini diajukan sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari berbagai macam hambatan dan kendala, mulai dari tahap pembuatan proposal hingga tahap penulisan. Namun berkat usaha yang optimal, do'a serta bantuan dan motivasi dari berbagai pihak, hal tersebut dapat diatasi. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang setinggi-tingginya kepada **Ayahanda Amir Hamzaitun** dan **Ibunda Sitti Halijah, S.Pd** atas segala dukungan yang diberikan baik berupa do'a maupun dari segi materiil yang sangat besar dan berarti.

Pada kesempatan ini pula penulis dengan tulus hati dan penuh kerendahan hati, menghaturkan ucapan terima kasih kepada :

1. **Bapak Drs. Amir Kamal Amir M.Sc** selaku Pembimbing Utama dan Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA Unhas yang telah memberikan bimbingan, petunjuk dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
2. **Bapak Nurdin, S.Si, M.Si** selaku pembimbing pertama yang telah menyediakan dan meluangkan waktu, tenaga dan pikiran dalam membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya skripsi ini.
3. **Bapak Drs. Muh. Zakir, M.Si** selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unhas yang telah banyak membantu penulis dalam perkuliahan.
4. **Ibu Dra. Nur Erawati, M.Si** selaku Penasehat Akademik yang sudah banyak memberikan nasehat-nasehat kepada penulis selama perkuliahan.
5. **Ibu DR. Hj. Aidawayati Rangkuti, MS, Bapak Drs. Diaraya, dan Bapak Drs. Raupong, M.Si** selaku penguji yang telah meluangkan waktunya.
6. **Bapak Pimpinan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin** beserta seluruh stafnya yang telah banyak memberikan bantuan selama penulis menjalankan perkuliahan.
7. Para **Dosen Jurusan Matematika FMIPA Unhas** yang telah memberikan banyak ilmunya selama proses perkuliahan.
8. Para pegawai FMIPA Unhas khususnya Jurusan Matematika : **Pak Zaimun, Pak Amin** dan **Pak Nasir**.

9. Sahabat-sahabatku : **Arma, Dery, Esra, Fani, Hasnah 'n Rahma_Panda** yang telah banyak memberikan bantuan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman jalanku : **Maya** atas kebersamaan kita akhir-akhir ini.
11. Teman-teman **Angkatan '01 Mujha, Chichy, Neldy, Dian, Nhunu, Ahsan, Sudi, Amma_Preman, Yati, Sina, Fhivhy, Fahd, Dewi, Fidhia, Yemi, Widia, Rani, Anita, Ale, Uni, Uli, Hana.**
12. **Kak Vivin '00** yang telah banyak memberikan petunjuk dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
13. Kakak-kakak **Angkatan '98, '99,** dan **'00** serta adik-adikku **Angkatan '02, '03, '04,** dan **'05** dan semua pihak yang tak dapat disebutkan satu persatu, terima kasih atas semua bantuannya yang telah diberikan kepada penulis.

Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga saran dan kritik dari pembaca sangat penulis harapkan demi kesempurnaan skripsi ini.

Akhirnya, kepada **Allah SWT** kita bermohon, semoga berkah dan rahmat dan limpahan pahala yang berlipat ganda selalu dicurahkan kepada kita sekalian. Amin Yaa Rabbal Aalamin.

Makassar, September 2005

Penulis

ABSTRAK

Dalam penulisan ini akan ditunjukkan bagaimana suatu himpunan fungsi rasional sejati adalah suatu gelanggang Euclid. Metode yang digunakan untuk menunjukkan bahwa himpunan fungsi rasional sejati merupakan suatu gelanggang Euclid yaitu kita harus dapat menemukan pemetaan :

$$\delta_\infty(.) : \mathbf{R}_{pr}(s) \rightarrow N$$

yang memenuhi :

i. Untuk setiap $t_1(s), t_2(s)$ di $\mathbf{R}_{pr}(s)$ berlaku :

   $\delta_\infty(t_1(s)t_2(s)) \geq \delta_\infty(t_1(s))$

ii. Algoritma Hasil Bagi Euclid, yaitu :

   Untuk setiap $t_1(s), t_2(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ terdapat $q(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ dan $r(s) \in \mathbf{R}(s)$ sedemikian sehingga : $t_1(s) = t_2(s)q(s) + r(s)$ dan $r(s) = 0$ atau $\delta_\infty(r(s)) < \delta_\infty(t_2(s))$.

Disini juga akan ditunjukkan sifat-sifat dari fungsi rasional dan fungsi rasional sejati dalam bentuk teorema-teorema.

ABSTRACT

In this paper will show how a set of proper rational function is a Euclidean ring. Method that we used to show it, we design a map:

$$\delta_\infty(.) : \mathbf{R}_{pr}(s) \rightarrow N$$

that satisfy :

i. For every $t_1(s), t_2(s)$ in $\mathbf{R}_{pr}(s)$ satisfy :

   $\delta_\infty(t_1(s)t_2(s)) \geq \delta_\infty(t_1(s))$

ii. Euclidean Division Algorithm, that is :

   For every $t_1(s), t_2(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ there exist $q(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ and $r(s) \in \mathbf{R}(s)$ then :

   $t_1(s) = t_2(s)q(s) + r(s)$ and either $r(s) = 0$ or $\delta_\infty(r(s)) < \delta_\infty(t_2(s))$.

Also here we will show the properties of rational function and proper rational function formed in theorems.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR LAMBANG

$\delta_{\infty}(.)$	: pemetaan (baca:delta tak hingga)
$\in$	: elemen, anggota
$\sum$	: sigma atau jumlahan
$+\infty$	: positif tak hingga
$\delta_{\infty}(t(s))$	: derajat dari *t(s)*
q_{∞}	: derajat dari suatu fungsi rasional atau fungsi rasional sejati

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Gelanggang merupakan suatu himpunan yang sering dikaji dalam suatu tugas akhir, khususnya dalam bidang aljabar, yang di dalamnya mencakup struktur aljabar. Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner, katakan $*$ dan $\bullet$, disebut gelanggang jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. Untuk operasi $*$, R merupakan grup komutatif (abel).
2. Assosiatif terhadap operasi $\bullet$, yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$
3. Untuk setiap $a,b,c \in R$ memenuhi hukum distributif kiri yaitu $a \bullet (b * c) = (a \bullet b) * (a \bullet c)$ dan distributif kanan yaitu $(a * b) \bullet c = (a \bullet c) * (b \bullet c)$.

Konsep keterbagian pada lapangan, dalam hal ini lapangan hasil bagi, bukanlah hal yang menarik untuk dibicarakan. Namun akan menarik jika konsep keterbagian tersebut dibicarakan pada daerah integral yang bukan lapangan.

Polinomial merupakan daerah integral yang bukan merupakan suatu lapangan dan di dalamnya dapat dibuat algoritma pembagian (Nirwan Ilyas HF, 1986). Himpunan polinomial merupakan suatu gelanggang Euclid yaitu daerah integral dengan suatu pemetaan khusus, yaitu pemetaan Euclid.

Fungsi rasional adalah hasil bagi dua polinomial. Himpunan fungsi rasional ini akan membentuk lapangan. Sedangkan himpunan bagiannya yaitu himpunan fungsi rasional sejati adalah suatu daerah integral (A.I.G. Vardulakis, 1990).

Salah satu syarat agar suatu gelanggang membentuk lapangan yaitu jika setiap unsur dalam gelanggang tersebut adalah unit (mempunyai invers), sedangkan beberapa fungsi rasional sejati bukanlah unit, sehingga himpunan dari fungsi rasional sejati ini bukan lapangan. Perhatikan bahwa gelanggang yang dimaksud adalah gelanggang dengan unsur satuan.

Dilatarbelakangi dari uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkaji skripsi dengan judul :

"Himpunan Fungsi Rasional Sejati Sebagai Suatu Gelanggang Euclid"

B. Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penulisan ini yaitu bagaimana menunjukkan bahwa himpunan fungsi rasional sejati merupakan suatu gelanggang Euclid yaitu dengan menunjukkan bahwa algoritma hasil bagi Euclid berlaku pada himpunan fungsi rasional sejati.

C. Batasan Masalah

Penulisan ini dibatasi pada himpunan polinomial yang berderajat bulat non-negatif.

D. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk menunjukkan bahwa terdapat suatu daerah integral yang anggota-anggotanya adalah fungsi rasional sejati, serta membuktikan bahwa daerah integral tersebut adalah suatu gelanggang Euclid.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Gelanggang

Dalam teori grup digunakan satu operasi biner saja, hal ini berbeda dengan teori gelanggang karena digunakan dua operasi biner .

Definisi 1. Gelanggang

Bila R himpunan tidak kosong, yakni untuk setiap $a,b,c \in R$ dengan dua operasi biner masing-masing operasi $*$ dan $\bullet$ dinotasikan dengan $(R,*,\bullet)$ disebut gelanggang jika memenuhi sifat-sifat :

1) Terhadap operasi $*$, R merupakan suatu grup komutatif. Suatu himpunan R dengan operasi penjumlahan disebut grup komutatif jika memenuhi sifat-sifat berikut :

   a. Tertutup terhadap operasi $*$, yaitu untuk setiap $a,b \in R$ maka $a*b \in R$.

   b. Assosiatif terhadap operasi $*$, yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku :

      $a*(b*c)=(a*b)*c$

   c. Terdapat unsur identitas (terhadap operasi $*$), $e \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku : $a*e=a=e*a$

   d. Terdapat invers terhadap operasi $*$, yaitu untuk setiap $a \in R$ terdapat

$a^{-1} \in R$ sedemikian sehingga berlaku : $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

Keempat sifat di atas merupakan syarat dari suatu grup (dalam hal ini grup dengan operasi $*$), selanjutnya disebut sebagai suatu grup komutatif jika memenuhi sifat :

e. Komutatif terhadap operasi $*$, yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku :

$a * b = b * a$

2) Assosiatif terhadap operasi $\bullet$, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku :

$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

3) Memenuhi hukum distributif, baik distributif kiri yaitu :

$a \bullet (b * c) = (a \bullet b) * (a \bullet c)$

maupun distributif kanan yaitu :

$(a * b) \bullet c = (a \bullet c) * (b \bullet c)$

untuk setiap $a, b, c \in R$

Definisi 2. Gelanggang dengan Unsur Satuan

Misalkan himpunan R adalah suatu gelanggang, dan terdapat $e \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $a \bullet e = a = e \bullet a$ maka R disebut sebagai suatu gelanggang dengan unsur satuan.

Definisi 3. Gelanggang Komutatif

Misalkan R adalah suatu gelanggang, maka R disebut sebagai suatu gelanggang komutatif jika operasi $\bullet$ dalam gelanggang itu komutatif, yaitu untuk setiap $a,b \in R$ berlaku : $a \bullet b = b \bullet a$.

Definisi 4. Pembagi Nol

Suatu unsur a dalam suatu gelanggang R sedemikian sehingga terdapat $b \in R$ yang memenuhi $a \bullet b = 0$ maka a disebut pembagi nol kiri, selanjutnya jika memenuhi $b \bullet a = 0$ maka a disebut pembagi nol kanan. Jika a merupakan pembagi nol kiri sekaligus pembagi nol kanan maka a disebut suatu pembagi nol.

Definisi 5.

Misalkan R gelanggang. R tidak memuat pembagi nol jika hanya jika untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a \bullet b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$.

Definisi 6. Daerah Integral

Misalkan himpunan R adalah suatu gelanggang komutatif, jika R tidak memuat pembagi nol maka R disebut sebagai suatu daerah integral.

Definisi di atas dapat juga dikatakan bahwa suatu gelanggang komutatif adalah suatu daerah integral jika untuk setiap a,b dalam gelanggang komutatif $a \bullet b = 0$

maka $a = 0$ atau $b = 0$.

Definisi 7. Invers

Untuk setiap unsur a dalam suatu gelanggang R, dimana terdapat $a^{-1} \in R$ sedemikian sehingga memenuhi $a \bullet (a^{-1}) = e = (a^{-1}) \bullet a$, e = unsur satuan (identitas) $\in R$ maka a^{-1} disebut invers dari a (dalam hal ini invers terhadap operasi $\bullet$).

Definisi 8. Lapangan

Misalkan himpunan R adalah suatu gelanggang, maka R membentuk suatu lapangan jika R memenuhi :

a) R merupakan gelanggang komutatif.

b) R merupakan gelanggang dengan unsur satuan.

c) Untuk setiap $a \in R, a \neq 0$ maka a mempunyai invers.

Definisi 9. Unit

Suatu unsur a dalam suatu gelanggang R dengan unsur satuan disebut unit jika terdapat suatu unsur $b \in R$ sedemikian sehingga memenuhi :

$a \bullet b = e = b \bullet a$ $\qquad$ e = unsur satuan.

B. Gelanggang Polinomial

Sebelum menjelaskan apa yang dimaksud dengan polinomial, perlu diperhatikan bahwa jika polinomial dengan koefisien-koefisien dalam suatu gelanggang didefinisikan sebagai suatu penjumlahan berhingga, timbul kesulitan dalam mengalikan dua polinomial. Cara terbaik untuk memecahkan permasalahan ini adalah dengan mendefinisikan polinomial sebagai penjumlahan tak berhingga seperti :

$$f(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + f_3 s^3 + \dots + f_n s^n + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i$$

dengan $f_i \neq 0$ berhingga banyaknya.

Definisi 10. Polinomial

Misalkan **R** adalah lapangan bilangan riil, suatu polinomial $f(s)$ dengan koefisien-koefisien dalam **R** adalah suatu penjumlahan tak berhingga :

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \dots + f_n s^n + \dots$$

dimana $f_i \in \mathbf{R}$ untuk setiap *i*, dan hampir semua $f_i = 0$ tetapi berhingga banyaknya $f_i \neq 0$.

Untuk suatu indeks terbesar *i*, $f_i \neq 0$ maka *f*(*s*) disebut sebagai suatu polinomial berderajat *i*, dan f_i disebut koefisien utama. Selanjutnya jika $f_i = 0$ untuk setiap

$0 < i$ maka $f(s)$ disebut polinomial konstan.

Definisi 11. Penjumlahan dan Perkalian Dua Buah Polinomial

Pandanglah kedua bentuk polinomial berikut ini :

$f(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + f_3 s^3 + ... + f_n s^n + ... = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i$ dan polinomial

$$g(s) = g_0 + g_1 s + g_2 s^2 + g_3 s^3 + ... + g_m s^m + ... = \sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j$$

maka penjumlahan antara kedua polinomial di atas didefinisikan :

$$f(s) + g(s) = (f_0 + g_0) + (f_1 + g_1)s + (f_2 + g_2)s^2 + ... + (f_n + g_n)s^n + ...$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i \qquad ; c_i = f_i + g_i, \forall i$$

sedangkan perkaliannya kita definisikan sebagai :

$$f(s)g(s) = (f_0 g_0) + (f_0 g_1 + f_1 g_0)s + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0)s^2 + (f_0 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_3 g_0)s^3 + ...$$

$= \sum_{j=0}^{\infty} d_j s^j$, dengan $d_j = \sum_{i=0}^{j} f_i g_{j-i}$

C. Gelanggang Euclid

Gelanggang komutatif dengan unsur satuan yang tidak memuat pembagi nol dinamakan daerah integral. Jika daerah integral tersebut diberikan suatu pemetaan khusus maka daerah integral inilah yang disebut gelanggang Euclid. Secara jelasnya definisi gelanggang Euclid sebagai berikut :

Definisi 12. Gelanggang Euclid

Gelanggang polinomial $\mathbf{R}[s]$ disebut gelanggang Euclid jika terdapat pemetaan

$$\delta : \mathbf{R}[s] \to N$$

dimana N merupakan himpunan bilangan bulat non-negatif sembarang, sehingga :

(i) untuk setiap $a(s), b(s)$ di $\mathbf{R}[s]$ dengan $a(s)b(s) \neq 0$ berlaku $\delta[a(s)b(s)] \geq \delta(a(s))$

(ii) untuk setiap $a(s)b(s)$ di $\mathbf{R}[s]$ dengan $b(s) \neq 0$ terdapat $q(s), r(s)$ di $\mathbf{R}[s]$ sedemikian sehingga $a(s) = b(s)q(s) + r(s)$ dimana $r(s) = 0$ atau $\delta(r(s)) < \delta(b(s))$

Pemetaan δ yang tersebut pada definisi diatas disebut sebagai pemetaan Euclid. Contoh gelanggang Euclid adalah $\mathbf{R}[s]$, gelanggang polinomial dengan koefisien di $\mathbf{R}$, dengan pemetaan Euclidnya adalah derajat pangkat tertinggi dari suatu polinomial.

Lapangan hasil bagi $\mathbf{R}[s]$ ditulis $\mathbf{R}(s)$, dapat ditulis :

$$\mathbf{R}(s) = \left\{ \frac{n(s)}{d(s)} \middle| n(s), d(s) \in \mathbf{R}[s], d(s) \neq 0 \right\}$$

Sedangkan $\mathbf{R}_{pr}(s)$ himpunan bagian dari $\mathbf{R}(s)$ yang disebut sebagai fungsi rasional sejati dapat ditulis :

$$\mathbf{R}_{pr}(s) = \left\{ \frac{n(s)}{d(s)} \middle| \deg n(s) \le \deg d(s) \right\}$$

Dimana deg merupakan singkatan dari degree (derajat) yakni dimaksudkan sebagai derajat pangkat tertinggi dari suatu polinomial.

BAB III

HIMPUNAN FUNGSI RASIONAL SEJATI SEBAGAI SUATU GELANGGANG EUCLID

Sebelum membicarakan lebih lanjut tentang fungsi rasional, perlu diketahui teorema-teorema pendukung dalam suatu polinomial diantaranya adalah :

Teorema 1 :

Jika himpunan $\mathbf{R}[s]$, adalah suatu himpunan yang memuat setiap polinomial dengan koefisien-koefisien dalam $\mathbf{R}$, maka $\mathbf{R}[s]$ memenuhi sifat-sifat dari suatu gelanggang dan disebut sebagai suatu gelanggang polinomial dengan koefisien dalam $\mathbf{R}$.

Bukti :

Berdasarkan sifat-sifat dari suatu gelanggang maka $\mathbf{R}[s]$ juga harus memenuhi sifat-sifat tersebut. Pandanglah 3 (tiga) buah polinomial dalam $\mathbf{R}[s]$, masing-masing $f(s)$, $g(s)$, dan $h(s)$.

$$f(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + f_3 s^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i$$

$$g(s) = g_0 + g_1 s + g_2 s^2 + g_3 s^3 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j$$

$$h(s) = h_0 + h_1 s + h_2 s^2 + h_3 s^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

- Himpunan $\mathbf{R}[s]$ tertutup terhadap penjumlahan , hal ini dapat kita lihat dari definisi penjumlahan dua buah polinomial.
- Assosiatif terhadap penjumlahan :

$$f(s)+\{g(s)+h(s)\}=\sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i+\left\{\sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j+\sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i+\sum_{j=0}^{\infty}(g_j+h_j)s^j$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(f_i+g_i+h_i)s^i$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(f_i+g_i)s^i+\sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

$$=\left\{\sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i+\sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j\right\}+\sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

$$=\{f(s)+g(s)\}+h(s)$$

- Terdapat unsur satuan (identitas) penjumlahan yaitu polinomial nol $n(s)\in\mathbf{R}[s]$, dimana untuk setiap $f(s)$ dalam $\mathbf{R}[s]$ berlaku :

$$f(s)+n(s)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i+\sum_{i=0}^{\infty} 0s^i$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(f_i+0)s^i$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i=f(s)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (0 + f_i) s^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 0 s^i + \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i = n(s) + f(s)$$

- Terdapat invers penjumlahan, yakni untuk setiap $f(s)$ dalam $\mathbf{R}[s]$, maka terdapat $(-f(s)) \in \mathbf{R}[s]$ sedemikian sehingga berlaku :

$$f(s) + (-f(s)) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i + \sum_{i=0}^{\infty} (-f_i) s^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (f_i + (-f_i)) s^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 0 s^i = n(s)$$

- Komutatif terhadap penjumlahan :

$$f(s) + g(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i + \sum_{i=0}^{\infty} g_i s^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (f_i + g_i) s^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (g_i + f_i) s^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} g_i s^i + \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i$$

$$= g(s) + f(s)$$

- Assosiatif terhadap perkalian :

$$f(s)\{g(s)h(s)\} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{k} g_j h_{k-j} \right\} s^k \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{i} f_{i-k} \left(\sum_{j=0}^{k} g_j h_{k-j} \right) \right\} s^i$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{k} \left\{ \sum_{i=0}^{j} f_i g_{j-i} \right\} h_{k-j} \right] s^k$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{j} f_i g_{j-i} \right\} s^j \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i \sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j \right\} \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

$$= \{ f(s) g(s) \} h(s) \}$$

- Memenuhi hukum distributif, baik distributif kiri, yaitu :

$$f(s)\{g(s) + h(s)\} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j + \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (g_j + h_j) s^j \right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{j} f_i (g_{j-i} + h_{j-i}) \right\} s^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{j}(f_i g_{j-i} + f_i h_{j-i})\right\}s^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{j} f_i g_{j-i}\right\}s^j + \sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{j} f_i h_{j-i}\right\}s^j$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i \sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j + \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

$$= f(s)g(s) + f(s)h(s)$$

dan distributif kanan, yaitu :

$$\{f(s) + g(s)\}h(s) = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i + \sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j\right\}\sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

$$= \left\{\sum_{j=0}^{\infty}(f_j + g_j)s^j\right\}\sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{k}(f_i + g_i)h_{k-i}\right\}s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{k}(f_i h_{k-i} + g_i h_{k-i})\right\}s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{k} f_i h_{k-i}\right\}s^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{k} g_i h_{k-i}\right\}s^k$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k + \sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

$$= f(s)h(s) + g(s)h(s) .$$

Teorema 2 :

Jika **R** adalah lapangan bilangan riil dengan unsur satuan, maka himpunan **R**[s] juga merupakan gelanggang polinomial dengan unsur satuan. Selanjutnya jika **R** merupakan lapangan bilangan riil yang komutatif, maka himpunan **R**[s] juga merupakan gelanggang polinomial yang komutatif.

Bukti :

Misalkan $f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s^i, f(s) \in \mathbf{R}[s]$, dimana $f_i \in \mathbf{R}$ untuk setiap i.

- Karena **R** merupakan lapangan bilangan riil dengan unsur satuan, dengan kata lain terdapat $e \in \mathbf{R}$ untuk setiap $f_i \in \mathbf{R}$ sedemikian sehingga :

  $e(f_i) = f_i = (f_i)e$. Dengan demikian berarti terdapat polinomial konstan $e(s)$ = e dalam **R**[s] yang memenuhi :

$$\begin{aligned} f(s)e(s) &= (f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \ldots + f_n s^n + \ldots)e \\ &= (f_0 e + f_1 es + f_2 es^2 + \ldots + f_n es^n + \ldots) \\ &= (f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \ldots + f_n s^n + \ldots) \\ &= f(s) \\ &= (ef_0 + ef_1 s + ef_2 s^2 + \ldots + ef_n s^n + \ldots) \\ &= e(f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \ldots + f_n s^n + \ldots) \\ &= e(s)f(s) \end{aligned}$$

- Misalkan pula terdapat polinomial lain dalam $\mathbf{R}[s]$ yakni $g(s) = g_0 + g_1 s + g_2 s^2 + g_3 s^3 + \ldots + g_m s^m + \ldots$ karena $\mathbf{R}$ komutatif berarti untuk setiap $p, q \in \mathbf{R}$ berlaku $pq = qp$

$$\begin{aligned} f(s)g(s) &= (f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \ldots + f_n s^n + \ldots)(g_0 + g_1 s + g_2 s^2 + \ldots + g_m s^m + \ldots) \\ &= (f_0 g_0) + (f_0 g_1 + f_1 g_0)s + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0)s^2 + \ldots + (f_n g_m)s^{n+m} + \ldots \\ &= (g_0 f_0) + (g_0 f_1 + g_1 f_0)s + (g_0 f_2 + g_1 f_1 + g_2 f_0)s^2 + \ldots + (g_m f_n)s^{n+m} \\ &= (g_0 + g_1 s + g_2 s^2 + \ldots + g_m s^m + \ldots)(f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \ldots + f_n s^n + \ldots) \\ &= g(s)f(s) \end{aligned}$$

Teorema 3 :

Dua buah polinomial yang tidak nol dalam $\mathbf{R}[s]$ masing-masing :

$$f(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + f_3 s^3 + \ldots + f_n s^n + \ldots$$

$$g(s) = g_0 + g_1 s + g_2 s^2 + g_3 s^3 + \ldots + g_m s^m + \ldots$$

dengan derajat (degree=deg) $f(s)$ dan $g(s)$ masing-masing n dan m, maka akan berlaku :

a) Jika $f(s) + g(s) \neq 0$, maka :

$$\deg(f(s) + g(s)) \leq \max(n, m)$$

b) Jika $f(s)g(s) \neq 0$, maka :

$\deg(f(s)g(s)) \le (n+m)$

c) Jika **R** tidak memuat pembagi nol maka $\deg(f(s)g(s)) = n+m$

Bukti :

a) Oleh karena $f(s)$ dan $g(s)$ masing-masing berderajat n dan m sehingga jelas bahwa $f_n \ne 0$ dan $g_m \ne 0$. Dari definisi penjumlahan dua buah polinomial diperoleh :

$$f(s)+g(s)=\sum_{i=0}^{\infty}(f_i+g_i)s^i=\sum_{i=0}^{\infty}c_is^i=c(s)$$

Untuk $n=m$, jika $f_n=-g_m$ maka $\deg c(s)<m$ sedangkan untuk $n\ne m$ maka $\deg c(s)=\max(n,m)$ oleh karena $f_i=0$ untuk $n<i$ dan $g_i=0$ untuk $m<i$. Dengan demikian pembuktian selesai.

b) Misalkan $\deg(f(s)g(s))=k=i+j$. Andaikan $m+n<k$, akan berlaku $n<i$ atau $m<j$ (mungkin saja juga $n<j$ atau $m<i$). Karena untuk $n<i, f_i=0$ dan untuk $m<j, g_j=0$ diperoleh $f_ig_j=0$. Hal ini mengakibatkan $\deg(f(s)g(s))\ne k$. Jadi pengandaian di atas kontradiksi, harusnya $k\le m+n$. Pembuktian selesai.

c) Misalkan $f(s)g(s)=d(s)$. Karena **R** tidak memuat pembagi nol sejati, berarti untuk setiap $f_i, g_j \in$ **R**, maka $f_ig_j\ne 0$ untuk $f_i\ne 0$ dan $g_j\ne 0$.

Dari pembuktian b) diperoleh $\deg d(s) = k \leq m + n$. Diketahui bahwa koefisien utama dari $d(s)$ adalah $f_n g_m = d_k \neq 0$ berarti $\deg d(s) = k = m + n$.

Teorema 4 :

Misalkan **R**[s] adalah suatu himpunan polinomial dengan koefisien dalam **R**.

a) Jika **R** adalah suatu daerah integral, maka **R**[s] juga merupakan daerah integral dan dituliskan **D**[s].

b) Jika **R** adalah suatu lapangan, maka **R**[s] merupakan suatu daerah integral, bukan merupakan suatu lapangan, yang seperti itu dituliskan sebagai **F**[s].

Bukti :

a) Misalkan **D** adalah suatu daerah integral. Misalkan pula $f(s), g(s) \in \mathbf{D}[s]$.

$f(s)g(s) = 0; f(s) \neq 0$, akan dibuktikan bahwa $g(s) = 0$.

$f(s)g(s) = (f_0 g_0) + (f_0 g_1 + f_1 g_0)s + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0)s^2 + \ldots$

Karena $f_0 g_0 = 0$, maka $f_0 = 0$ atau $g_0 = 0$, misalkan $g_0 = 0$ maka :

$f(s)g(s) = (f_0 g_1)s + (f_0 g_2 + f_1 g_1)s^2 + (f_0 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1)s^3 + \ldots$

Karena $f_0 g_1 = 0$, maka $g_1 = 0$ sehingga :

$f(s)g(s) = (f_0 g_2)s^2 + (f_0 g_3 + f_1 g_2)s^3 + (f_0 g_4 + f_1 g_3 + f_2 g_2)s^4 \ldots$

Karena $f_0 g_2 = 0$, maka $g_2 = 0$.

Dengan cara yang sama diperoleh $g_i = 0$ untuk setiap i. Dengan demikian jelas bahwa $g(s) = 0$, atau **D**[s] adalah suatu daerah integral.

c) Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{F}[s]$ bukan suatu lapangan.

Misalkan $(1-s) = f(s) \in \mathbf{F}[s]$ dimana $\mathbf{F}$ adalah suatu himpunan bilangan riil (dalam hal ini adalah suatu lapangan). Jika $\mathbf{F}[s]$ adalah suatu lapangan berarti terdapat $f^{-1}(s) \in \mathbf{F}[s]$ sedemikian sehingga memenuhi :

$f(s)f^{-1}(s) = e = f^{-1}(s)f(s)$. Untuk memenuhi persamaan ini diperoleh :

$$f^{-1}(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + \ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} s^i$$

Dalam hal ini $f^{-1}(s)$ bukan suatu polinomial.

A. Fungsi Rasional

Misalkan $\mathbf{R}$ merupakan lapangan bilangan riil, $\mathbf{R}[s]$ gelanggang polinomial dengan koefisiennya dalam $\mathbf{R}$ dan $\mathbf{R}(s)$ lapangan hasil bagi dari $\mathbf{R}[s]$ yang dapat ditulis :

$$\mathbf{R}(s) = \left\{ t(s) \,\middle|\, t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s) \in \mathbf{R}[s], d(s) \neq 0 \right\}$$

Maka $\mathbf{R}(s)$ disebut lapangan fungsi rasional.

Sekarang jika $t(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)} \in \mathbf{R}(s)$ dimana $n(s), d(s) \in \mathbf{R}[s]$ dan $d(s) \neq 0$ maka akan ada 3 (tiga) fungsi yaitu :

1. Jika $\deg n(s) = \deg d(s)$ maka $t(s)$ disebut fungsi rasional biproper.

2. Jika $\deg n(s) > \deg d(s)$ maka $t(s)$ disebut fungsi rasional nonproper.

3. Jika $\deg n(s) < \deg d(s)$ maka $t(s)$ disebut fungsi rasional strictly proper.

dan definisikan pemetaan :

$\delta_\infty(.) : \mathbf{R}(s) \to Z \cup \{+\infty\}$ melalui :

$$\delta_\infty(t(s)) = \delta_\infty\left(\frac{n(s)}{d(s)}\right) = \deg d(s) - \deg n(s) \qquad t(s) \neq 0$$

$$\delta_\infty(t(s)) = +\infty \qquad t(s) = 0$$

Teorema 5: Untuk sebarang $t_1(s), t_2(s) \in \mathbf{R}(s), t_1(s), t_2(s) \neq 0$ dimana $t_1(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)}$, $t_2(s) = \frac{n_2(s)}{d_2(s)}, n_1(s), n_2(s), d_1(s), d_2(s) \in \mathbf{R}[s]$ dan $d_1(s), d_2(s) \neq 0$ maka :

(a) $\delta_\infty(t_1(s)t_2(s)) = \delta_\infty(t_1(s)) + \delta_\infty(t_2(s))$

(b) $\delta_\infty(t_1(s) + t_2(s)) \geq \min\{\delta_\infty(t_1(s)), \delta_\infty(t_2(s))\}$

Bukti : (a) $\delta_\infty(t_1(s)t_2(s)) = \delta_\infty\left(\frac{n_1(s)}{d_1(s)}\frac{n_2(s)}{d_2(s)}\right)$

$$= \delta_\infty\left(\frac{n_1(s)n_2(s)}{d_1(s)d_2(s)}\right)$$

$$= \deg(d_1(s)d_2(s)) - \deg(n_1(s)n_2(s))$$

$$= (\deg d_1(s) + \deg d_2(s)) - (\deg n_1(s) + \deg n_2(s))$$

$$= \deg d_1(s) + \deg d_2(s) - \deg n_1(s) - \deg n_2(s)$$

$$= (\deg d_1(s) - \deg n_1(s)) + (\deg d_2(s) - \deg n_2(s))$$

$$\delta_\infty(t_1(s)t_2(s)) = \delta_\infty(t_1(s)) + \delta_\infty(t_2(s))$$

(b) Akan dibuktikan bahwa $\delta_\infty(t_1(s) + t_2(s)) \geq \min\{\delta_\infty(t_1(s)), \delta_\infty(t_2(s))\}$

Akan ditinjau 2 (dua) kasus :

Kasus I : Misal $\delta_\infty(t_1(s)) < \delta_\infty(t_2(s))$ maka :

$$\delta_\infty\left(\frac{n_1(s)}{d_1(s)}\right) < \delta_\infty\left(\frac{n_2(s)}{d_2(s)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \deg d_1(s) - \deg n_1(s) < \deg d_2(s) - \deg n_2(s)$$

$$\Leftrightarrow \deg d_1(s) + \deg n_2(s) < \deg d_2(s) + \deg n_1(s)$$

$$\Leftrightarrow \deg(d_1(s)n_2(s)) < \deg(d_2(s)n_1(s))$$

atau

$$\deg(n_2(s)d_1(s)) < \deg(n_1(s)d_2(s)) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Dari pertidaksamaan (1) diperoleh :

$$\deg(n_1(s)d_2(s) + n_2(s)d_1(s)) = \deg(n_1(s)d_2(s))$$

$$\delta_\infty(t_1(s) + t_2(s)) = \delta_\infty\left(\frac{n_1(s)}{d_1(s)} + \frac{n_2(s)}{d_2(s)}\right)$$

$$= \delta_\infty\left(\frac{n_1(s)d_2(s) + n_2(s)d_1(s)}{d_1(s)d_2(s)}\right)$$

$$= \deg(d_1(s)d_2(s)) - \deg(n_1(s)d_2(s) + n_2(s)d_1(s))$$

$$= \deg d_1(s) + \deg d_2(s) - \deg(n_1(s)d_2(s))$$

$$= \deg d_1(s) + \deg d_2(s) - (\deg n_1(s) + \deg d_2(s))$$

$$= \deg d_1(s) + \deg d_2(s) - \deg n_1(s) - \deg d_2(s)$$

$$= \deg d_1(s) - \deg n_1(s)$$

$$\delta_\infty(t_1(s) + t_2(s)) = \delta_\infty(t_1(s)) = \min\{\delta_\infty(t_1(s)), \delta_\infty(t_2(s))\}$$

Kasus II : Misal $\delta_\infty(t_1(s)) = \delta_\infty(t_2(s))$ maka :

$$\delta_\infty\left(\frac{n_1(s)}{d_1(s)}\right) = \delta_\infty\left(\frac{n_2(s)}{d_2(s)}\right)$$

$$\deg d_1(s) - \deg n_1(s) = \deg d_2(s) - \deg n_2(s)$$

$$\deg d_1(s) + \deg n_2(s) = \deg d_2(s) + \deg n_1(s)$$

$$\deg(d_1(s)n_2(s)) = \deg(d_2(s)n_1(s))$$

Perhatikan bahwa misalkan :

a) $n_1(s)d_2(s) = a_k s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \ldots + a_1 s + a_0$

dimana $k \in Z, a_i \in \mathbf{R}, i = 0,1,2,3,\ldots,k$

b) $n_2(s)d_1(s) = b_k s^k + b_{k-1}s^{k-1} + \ldots + b_1 s + b_0$

dimana $k \in Z, b_j \in \mathbf{R}, j = 0,1,2,3,\ldots,k$

Kemudian a) dan b) dijumlahkan, sehingga diperoleh :

$$n_1(s)d_2(s) = a_k s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$n_2(s)d_1(s) = b_k s^k + b_{k-1}s^{k-1} + \ldots + b_1 s + b_0$$

$$= (a_k + b_k)s^k + \ldots + (a_1 + b_1)s + (a_0 + b_0)$$

Jika $(a_k + b_k) \neq 0$ maka :

$$\deg(n_1(s)d_2(s) + n_2(s)d_1(s)) = \deg(n_1(s)d_2(s)) = k$$

Sedangkan jika $(a_k + b_k) = 0$ maka :

$$\deg(n_1(s)d_2(s) + n_2(s)d_1(s)) < \deg(n_1(s)d_2(s)) = k$$

$$\therefore \deg(n_1(s)d_2(s) + n_2(s)d_1(s)) < \deg(n_1(s)d_2(s))$$

$$= \deg(n_2(s)d_1(s)) = k.$$

Kemudian :

$$\delta_\infty(t_1(s) + t_2(s)) = \delta_\infty\left(\frac{n_1(s)d_2(s) + n_2(s)d_1(s)}{d_1(s)d_2(s)}\right)$$

$$= \deg(d_1(s)d_2(s)) - \deg(n_1(s)d_2(s) + n_2(s)d_1(s))$$

$$\geq \deg(d_1(s)d_2(s)) - \deg(n_1(s)d_2(s))$$

$$= (\deg d_1(s) + \deg d_2(s)) - (\deg n_1(s) + \deg d_2(s))$$

$$= \deg d_1(s) - \deg n_1(s)$$

$$\delta_\infty(t_1(s) + t_2(s)) \geq \delta_\infty(t_1(s))$$

atau

$$\delta_\infty(t_1(s)+t_2(s)) = \delta_\infty\left(\frac{n_1(s)d_2(s)+n_2(s)d_1(s)}{d_1(s)d_2(s)}\right)$$

$$= \deg(d_1(s)d_2(s)) - \deg(n_1(s)d_2(s)+n_2(s)d_1(s))$$

$$\geq \deg(d_1(s)d_2(s)) - \deg(n_2(s)d_1(s))$$

$$= (\deg d_1(s) + \deg d_2(s)) - (\deg n_2(s) + \deg d_1(s))$$

$$= \deg d_2(s) - \deg n_2(s)$$

$$\delta_\infty(t_1(s)+t_2(s)) \geq \delta_\infty(t_2(s))$$

Jadi $\delta_\infty(t_1(s)+t_2(s)) \geq \min\{\delta_\infty(t_1(s)), \delta_\infty(t_2(s))\}$

Dari hasil yang diperoleh pada Kasus I dan Kasus II dapat disimpulkan :

$$\delta_\infty(t_1(s)+t_2(s)) \geq \min\{\delta_\infty(t_1(s)), \delta_\infty(t_2(s))\}$$

Akibat dari teorema di atas dapat diturunkan sebagai berikut :

Akibat : Misal $t_1(s), t_2(s) \in \mathbf{R}(s)$ dengan $t_1(s) \neq 0, t_2(s) \neq 0$ seperti pada Teorema 5 di atas, maka :

i. $\delta_\infty(t_1(s)/t_2(s)) = \delta_\infty(t_1(s)) - \delta_\infty(t_2(s))$

ii. $\delta_\infty(1/t_1(s)) = -\delta_\infty(t_1(s))$

Bukti :

i. $\delta_\infty(t_1(s)/t_2(s)) = \delta_\infty\left(\frac{n_1(s)/d_1(s)}{n_2(s)/d_2(s)}\right)$

$$= \delta_\infty\left(\frac{n_1(s)d_2(s)}{n_2(s)d_1(s)}\right)$$

$$= \deg(n_2(s)d_1(s)) - \deg(n_1(s)d_2(s))$$

$$= (\deg n_2(s) + \deg d_1(s)) - (\deg n_1(s) + \deg d_2(s))$$

$$= (\deg d_1(s) - \deg n_1(s)) - (\deg d_2(s) - \deg n_2(s))$$

$$\delta_\infty(t_1(s)/t_2(s)) = \delta_\infty(t_1(s)) - \delta_\infty(t_2(s))$$

ii. $\delta_\infty(1/t_1(s)) = \delta_\infty(1) - \delta_\infty(t_1(s)) = -\delta_\infty(t_1(s))$

Teorema 6 : Untuk setiap $t(s) \in \mathbf{R}(s)$ dapat ditulis seperti :

$$t(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^{q_\infty} \frac{n_1(s)}{d_1(s)}$$

dimana $q_\infty = \delta_\infty(t(s))$ dan $n_1(s), d_1(s) \in \mathbf{R}[s]$ dengan $\deg n_1(s) = \deg d_1(s)$.

Bukti : Tulis $t(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)} s^{q_\infty} s^{-q_\infty} = u(s)s^{-q_\infty}$

dimana $u(s) = \dfrac{n_1(s)}{d_1(s)} = \dfrac{n(s)}{d(s)} s^{q_\infty}$

$$\delta_\infty(u(s)) = \deg d(s) - \deg(n(s)s^{q_\infty})$$

$$= \deg d(s) - (\deg n(s) + q_\infty)$$

$$= \deg d(s) - \deg n(s) - q_\infty$$

$$\delta_\infty(u(s)) = 0$$

Contoh : 1. Misal $t(s)=\dfrac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$, maka $\delta_\infty(t(s))=3-1=2=q_\infty$

dan $t(s)$ dapat ditulis sebagai :

$$t(s)=\left(\frac{1}{s}\right)^2\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s^2}\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

2. Misal $t(s)=\dfrac{(s+2)(s+3)}{(s+1)}$, maka $\delta_\infty(t(s))=1-2=-1=q_\infty$

dan $t(s)$ dapat ditulis :

$$t(s)=\left(\frac{1}{s}\right)^{-1}\frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)}=s\left[\frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)}\right]$$

B. Fungsi Rasional Sejati

Disini akan ditunjukkan bahwa fungsi rasional sejati adalah suatu gelanggang Euclid yaitu dengan menunjukkan bahwa algoritma hasil bagi Euclid berlaku pada fungsi rasional sejati.

Teorema 7: Untuk setiap $t_1(s),t_2(s)\neq 0$ dengan $t_1(s),t_2(s)\in\mathbf{R}(s)$, terdapat suatu fungsi rasional sejati $q(s)\in\mathbf{R}_{pr}(s)$ dan suatu fungsi rasional $r(s)\in\mathbf{R}(s)$ sedemikian sehingga :

$$t_1(s)=t_2(s)q(s)+r(s)$$

dan $r(s)=0$ atau $\delta_\infty(r(s))<\delta_\infty(t_2(s))$.

$t_1(s) = u_1(s)s^{-q_{1\infty}}$ dan $t_2(s) = u_2(s)s^{-q_{2\infty}}$

a. Jika $\delta_\infty(t_1(s)) \geq \delta_\infty(t_2(s))$ maka $\delta_\infty(t_1(s)) = \delta_\infty(t_2(s)) + \delta_\infty(q(s))$

$\delta_\infty(t_1(s)) = \delta_\infty(t_2(s)) + \delta_\infty(q(s)) \Leftrightarrow \delta_\infty(t_1(s)) = \delta_\infty(t_2(s)q(s))$

Akibatnya $t_1(s) = t_2(s)q(s) \Leftrightarrow q(s) = \dfrac{t_1(s)}{t_2(s)} = \dfrac{u_1(s)s^{-q_{1\infty}}}{u_2(s)s^{-q_{2\infty}}}$

$$= u_1(s)u_2(s)^{-1}s^{-q_{1\infty}+q_{2\infty}}$$

$$q(s) = u_1(s)u_2(s)^{-1}s^{-(q_{1\infty}-q_{2\infty})}$$

$t_1(s) = t_2(s)q(s)$ ekivalen dengan :

$t_1(s) = t_2(s)q(s) + r(s)$ dengan $q(s) = u_1(s)u_2(s)^{-1}s^{-(q_{1\infty}-q_{2\infty})}$ dan $r(s) = 0$.

b. Jika $\delta_\infty(t_1(s)) < \delta_\infty(t_2(s))$ dan $t_1(s) = t_2(s)q(s) + r(s)$ dengan $t_2(s) \neq 0$

Maka $q(s) = 0$, akibatnya $t_1(s) = r(s)$.

Karena $\delta_\infty(t_1(s)) < \delta_\infty(t_2(s))$ dan $r(s) = t_1(s)$ maka $\delta_\infty(r(s)) < \delta_\infty(t_2(s))$.

Contoh : 1. Misal $t_1(s) = s^2, \delta_\infty(t_1(s)) = -2 = q_{1\infty}$

$t_2(s) = s^3, \delta_\infty(t_2(s)) = -3 = q_{2\infty}$

Maka $t_1(s) = s^2 = t_2(s)q(s) = s^3\left(\dfrac{1}{s}\right)$ dimana $\delta_\infty(q(s)) = 1$

Jadi $q(s)$ sejati.

2. Misal $t_1(s) = \dfrac{1}{s+1}, \delta_\infty(t_1(s)) = 1 = q_{1\infty}$

$$t_2(s) = s^3, \delta_\infty(t_2(s)) = -3 = q_{2\infty}$$

Tulis $t_1(s) = u_1(s)\left(\frac{1}{s}\right)^{q_{1\infty}} = \left[\frac{s}{s+1}\right]\left(\frac{1}{s}\right)$

$$t_2(s) = u_2(s)\left(\frac{1}{s}\right)^{q_{2\infty}} = 1\left(\frac{1}{s}\right)^{-3}$$

Maka $q(s) = u_1(s)u_2(s)^{-1}s^{-(q_{1\infty}-q_{2\infty})}$

$$q(s) = 1\left[\frac{s}{s+1}\right]s^{-4} = \frac{1}{s^3(s+1)} \in \mathbf{R}_{pr}(s).$$

3. Misal $t_1(s) = s, \delta_\infty(t_1(s)) = -1 = q_{1\infty}$

   $$t_2(s) = \frac{1}{s}, \delta_\infty(t_2(s)) = 1 = q_{2\infty}$$

   Maka $t_1(s) = s = \frac{1}{s}.q(s) + r(s)$ dengan $q(s) = 0$ dan $r(s) = s$.

Perhatikan bahwa :

1. Untuk sembarang $t(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ dengan $t(s) \neq 0$ maka $\delta_\infty(t(s)) \geq 0$.
2. Himpunan fungsi rasional sejati, ditulis $\mathbf{R}_{pr}(s)$, dibawah operasi penjumlahan dan perkalian adalah suatu gelanggang komutatif dengan unsur satuan (bilangan riil 1) dan tidak memuat pembagi nol. Sehingga $\mathbf{R}_{pr}(s)$ adalah suatu daerah integral.

Teorema 8: Misal $u(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$

Unsur $u(s)$ unit di $\mathbf{R}_{pr}(s)$ jika hanya jika $\delta_\infty(u(s)) = 0$.

Bukti: ($\Rightarrow$) Misal $u(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ dan tulis $u(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)}$ dimana $n(s), d(s) \in \mathbf{R}[s], d(s) \neq 0.$

Karena $u(s)$ unit di $\mathbf{R}_{pr}(s)$ berarti terdapat suatu $u^{'}(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ sedemikian sehingga $u(s)u^{'}(s) = 1.$

Dalam hal ini $u^{'}(s) = \dfrac{d(s)}{n(s)}.$

Diketahui bahwa $u^{'}(s)$ di $\mathbf{R}_{pr}(s)$ maka $\deg d(s) \leq \deg n(s)$ ....(*)

dan $u(s)$ di $\mathbf{R}_{pr}(s)$ maka $\deg n(s) \leq \deg d(s)$ ....(**)

Dari (*) dan (**) dapat diperoleh bahwa deg $n(s)$ = deg $d(s)$, akibatnya $\delta_{\infty}(u(s)) = 0.$

($\Leftarrow$) Misal $u(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ dan $\delta_{\infty}(u(s)) = 0$.

Tulis $u(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)}$ dimana $n(s), d(s) \in \mathbf{R}[s], d(s) \neq 0.$ Karena

$\delta_{\infty}(u(s)) = 0$ maka $\delta_{\infty}\left(\dfrac{n(s)}{d(s)}\right) = \deg d(s) - \deg n(s) = 0$.

Tulis $u^{'}(s) = \dfrac{d(s)}{n(s)}$ maka :

$\delta_{\infty}(u^{'}(s)) = \deg n(s) - \deg d(s) = \deg d(s) - \deg d(s) = 0$ dan $u^{'}(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$.

Jadi karena terdapat $u^{'}(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ sedemikian sehingga $u(s)u^{'}(s) = 1$ maka $u(s)$ unit di $\mathbf{R}_{pr}(s)$.

Selanjutnya pandang bahwa $\delta_{\infty}(.)$ dibatasi hanya pada $\mathbf{R}_{pr}(s)$. Sehingga :

$$\delta_{\infty}(.) : \mathbf{R}_{pr}(s) \rightarrow N$$

dengan :

i. Untuk setiap $t_1(s), t_2(s)$ di $\mathbf{R}_{pr}(s)$ berlaku :

$$\delta_{\infty}(t_1(s)t_2(s)) \geq \delta_{\infty}(t_1(s))$$

ii. Untuk setiap $t_1(s), t_2(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ terdapat $q(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$ dan $r(s) \in \mathbf{R}(s)$ sedemikian sehingga : $t_1(s) = t_2(s)q(s) + r(s)$ dan $r(s) = 0$ atau $\delta_{\infty}(r(s)) < \delta_{\infty}(t_2(s))$.

Bukti :

i. Ambil $t_1(s), t_2(s) \in \mathbf{R}_{pr}(s)$

$$\delta_{\infty}(t_1(s)t_2(s)) = \delta_{\infty}(t_1(s)) + \delta_{\infty}(t_2(s)) \geq \delta_{\infty}(t_1(s))$$

ii. Lihat teorema 7.

Jadi $\mathbf{R}_{pr}(s)$ dengan pemetaan Euclidnya $\delta_{\infty}(.)$ merupakan suatu gelanggang Euclid.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Setelah menelaah penulisan ini, diperoleh kesimpulan bahwa gelanggang polinomial dengan koefisien dalam **R** adalah suatu gelanggang Euclid.

B. Saran

Penulisan ini bisa dikembangkan ke dalam polinomial berderajat non-integer (selain bilangan bulat).

DAFTAR PUSTAKA

Fraleigh, John B., 1994, *A First Course In Abstract Algebra,* Addison-Wesley Publishing Company, Massachussets, USA.

Foldes, Stephan, 1994, *Fundamental Structures of Algebra and Discrete Mathematics,* John Wiley and Sons, Inc, New York.

Ehrlich, Gertrude, 1991, *Fundamental Concepts of Abstract Algebra,* PWS-KENT Publishing Company, Boston, Massachussets.

HF, Nirwan Ilyas, 1986, *Hubungan Antara Daerah Ideal Utama Dengan Daerah Faktorisasi Tunggal,* Universitas Hasanuddin, Makassar.

Spindler, Karlheinz, 1994, *Abstract Algebra With Applications Volume II,* Darmsdath, Germany.

Vardulakis, A.I.G., 1991, *Linear Multivariable Control,* John Wiley & Sons Ltd, New York .