PENCAPAIAN TEOREMA SYLOW PERTAMA

MELALUI AKSI GRUP

OLEH :

HARINA O. L. MONIM

94 03 701

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

1999

PENCAPAIAN TEOREMA SYLOW PERTAMA

MELALUI AKSI GRUP

SKRIPSI

UNTUK MELENGKAPI TUGAS – TUGAS DAN MEMENUHI SYARAT MEMPEROLEH GELAR SARJANA

OLEH :

HARINA O. L. MONIM
94 03 701

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2000

PENCAPAIAN TEOREMA SYLOW PERTAMA

MELALUI AKSI GRUP

DISETUJUI OLEH :

PEMBIMBING UTAMA

DRS. LOEKY HARYANTO, MS, M.Sc, MA
NIP. 131 959 064

Makassar, Maret 2000

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmatNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Secara khusus ucapan terima kasih yang tulus buat yang tercinta Ayahanda *H.O. Monim, BA* ,ibunda *O. Warikar* serta kakak – kakak dan adik sekeluarga yang telah banyak memberikan semangat dan bantuan baik material maupun spiritual sejak lahir hingga saat ini.

Selanjutnya pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar – besarnya kepada Bapak *Drs. Loeky Haryanto, MS, M.Sc, MA* selaku pembimbing utama, yang dengan sukarela telah banyak memberikan bimbingan, arahan dan dorongan dalam penyelesaian skripsi ini.

Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada :

1. Bapak *Prof. DR. Ir. Rady A. Gani, M.Sc* selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak *Ir. F. A. Wospakriek, M.Sc* selaku Rektor Universitas Cenderawasih.
3. Bapak *DR. Nello Angerilli* selaku Ketua EIUDP (Eastern Indonesia University Development Project) beserta staf, dan Dirjen Dikti yang telah memberikan beasiswa kepada penulis selama mengikuti pendidikan di Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin.
4. Bapak *DR. Dadang Ahmad S.* selaku Counselor CIDA Universitas Hasanuddin.

5. Bapak *DR. M. Noor Jalaluddin* selaku Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin beserta staf.
6. Bapak *Drs. Nirwan Ilyas, MS* selaku Ketua Jurusan dan Penasehat Akademik.
7. Bapak *Mayor Pol. Sultan Wahid beserta keluarga.*
8. Teman dan sahabat terkasih *Jeffry F. Kareth* yang telah banyak memberikan bantuan, dorongan serta dukungan doa selama ini.
9. Teman tersayang *Nurhaida, Tri Widjajanty, Isye Ayomi, Pierre Aronggear, Farech Girl Gank (Diah, Yetty, Nella, Sella, Mimi), Onna Monim , Arni , Novi , Yenni , Imee, teman pondokan Armina, dan semua teman mahasiswa matematika angkatan 1994.*

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan baik dari segi metode, isi, maupun teknik penulisannya. Oleh karena itu kritik dan saran yang sifatnya membangun , penulis harapkan demi kesempurnaan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada penulis maupun semua pihak yang membutuhkannya.

Makassar, Maret 2000

Penulis

ABSTRAK

Misalkan X adalah himpunan dan G adalah grup. Aksi G pada X merupakan fungsi $\bullet : G \times X \to X$ (hasil peta (g,x) biasa di tulis $g_\bullet x$, $\forall x \in X$, $g \in G$) yang memenuhi sifat :

1. $(g_1 g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x)$, $\forall x \in X$, $g_1, g_2 \in G$,
2. $e \bullet x = x$, $\forall x \in X$.

sehingga X disebut $G-$ set.

Bentuk khusus aksi grup adalah aksi grup G pada diri sendiri($X=G$) oleh perkalian kiri dan perluasannya, aksi grup G pada diri sendiri ($X=G$) oleh konjugasi dan perluasannya.

Beberapa hasil dari kasus khusus aksi grup bermanfaat dalam pembuktian teorema – teorema grup, khususnya dalam pembuktian Teorema Sylow Pertama.

ABSTRACT

Let X be a set and G is a group. An action of G on X is a map $\bullet : G \times X \to X$ (the image of (g,x) is usually written as $g_\bullet x$, $\forall x \in X$, $g \in G$) satisfying the following properties :

1. $(g_1 g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x)$, $\forall x \in X$, $g_1, g_2 \in G$,
2. $e \bullet x = x$, $\forall x \in X$.

Under these properties , X is called a G-set.

Special form of group action on a set are group actions G on themselves ($X=G$) by left multiplicatian and its generalization, group actions G on themselves ($X=G$) by conjugatios and its generalization.

Some Results on special group action s are useful in proving many theorems and it specially will be applied on the proof of the First Sylow Theorem.

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

f ; $f: A \mapsto B$	Pemetaan dari A ke B
$\bullet$; $a \bullet b$	Operasi biner
$H \leq G$	Grup bagian
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$	Hasil kali kartesius dari himpunan – himpunan berhingga
$h \mid k$	h membagi k
$\equiv$; $h \equiv k (\mathrm{mod}\ n)$	Kongruen
$\varnothing$	Himpunan kosong
$\cup$; $g_1H \cup g_2H \cup \ldots \cup g_kH$	Himpunan gabungan
$A \subseteq G$	Himpunan bagian
$< a >$	Subgrup siklik yang dibangun oleh a
$< a > = G$	Grup siklik yang dibangun oleh a
$\exists$	Ada beberapa
$\forall$	Untuk setiap
$\lvert a \rvert$	Order unsure grup
$\lvert G \rvert$	Order grup
G/H	Grup faktor
$(G:H)$	Indeks subgrup dalam grup

$\varphi^{-1}[K]$	Invers bayangan dari himpunan K
$\varphi(x)$	Bayangan dari unsure x
$Z(G)$	Pusat (center) dari grup G
$C_G(A)$	Pemusat (centralizer) dari A dalam G
$N_G(A)$	Penormal (normalizer) dari A dalam G
G_x	Stabilisator (stabilizer) dari x dalam G
Gx	Orbit dari G yang memuat x
X_G	Himpunan semua orbit yang berunsur tunggal
aH, $a+H$	Koset kiri
Ha, $H+a$	Koset kanan

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Dan Alasan Memilih Judul

Aljabar abstrak merupakan suatu cabang ilmu dalam bidang matematika yang ciri khasnya sarat dengan aksioma – aksioma, dimana sering dianggap sebagai subjek yang ideal dalam mengerjakan atau menyelesaikan suatu pembuktian. Aljabar abstrak diawali dengan konsep dasar tentang grup yang dikenal sebagai teori grup. Konsep ini bermanfaat, khususnya dalam pengembangan lebih lanjut dari teori grup itu sendiri serta pemakaian dalam bidang matematika lainnya, seperti pada geometri dan topologi.

Aksi grup adalah salah satu bagian dari pembahasan teori grup lanjutan yang konsepnya lebih umum dari operator biner, karena aksi grup merupakan suatu fungsi yang dikaitkan dengan sembarang grup dimana aksi ini dapat memberikan beberapa akibat yang bisa dimanfaatkan dalam pembuktian teorema – teorema grup abstrak.

Yang menjadi permasalahan adalah apabila aksi grup G pada himpunan X tidak sembarang, yaitu G atau X dipilih secara khusus. Bentuk khusus aksi grup ini adalah aksi grup G pada dirinya sendiri ($G = X$) serta perluasannya oleh perkallian kiri dan konjugasi. Apabila G adalah grup dan $A \subseteq G$, maka penormal (normalizer) A dalam G adalah subgrup terbesar dari G yang membuat A menjadi normal dalam G, dan persamaan kelas dari himpunan dimana keduanya merupakan contoh dari akibat aksi khusus yang banyak digunakan dalam pembuktian teorema grup – p dengan p adalah bilangan prima.

Subgrup yang berorder p^i ($1 \leq i \leq n$) dari grup berhingga $|G| = p^n m$ dengan gcd $(p,m) = 1$ dan $n \geq 1$ disebut subgrup – p Sylow yang keberadaanya dijamin oleh teorema Sylow pertama.

Penggunaan aksi khusus lainnya yaitu pada teorema Cauchy, dimana teorema ini digunakan dalam pembuktian teorema Sylow Pertama yang menyatakan bahwa jika p membagi order berhingga grup maka ada sebuah subgrup siklik yang berorder p dalam grup.

Dengan latar belakang ini , penulis bermaksud mempelajari dan menuangkannya dalam bentuk tulisan dengan judul : "**PENCAPAIAN TEOREMA SYLOW PERTAMA MELALUI AKSI GRUP**" sekaligus sebagai bahan tugas akhir untuk memenuhi persyaratan dalam meraih gelar sarjana pada jurusan Matematika Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin di Ujung Pandang.

1.2 Ruang Lingkup Pembahasan

Penulisan ini menyajikan contoh penggunaan aksi sembarang grup pada sebuah himpunan dengan bentuk khusus aksi grup yaitu aksi grup pada diri sendiri serta perluasannya oleh perkalian kiri dan konjugasi dalam pencapaian teorema Sylow pertama.

Karena konsep aksi grup adalah konsep fungsi yang dikaikan dengan grup, maka sistimatika penulisan diawali dengan pengetahuan dasar tentang teori fungsi, teori relasi dan teori grup . Pada khususnya relasi ekivalen menyebabkan terbentuknya kelas – kelas ekivalen yang disebut orbit dan aksi grup sendiri adalah sebuah fungsi yang memenuhi beberapa sifat.Pokok pembahasan terletak pada pembuktian teorema Sylow pertama dengan penggunaan beberapa akibat dari bentuk khusus aksi grup pada himpunan.

BAB II

AKSI GRUP

2.1 Fungsi dan Relasi Ekuivalen

Bagian ini diawali dengan membahas tentang fungsi dan relasi ekuivalen yang berkaitan erat dengan pembahasan aksi grup.

Definisi 2.1.1 (Fungsi)

- Diberikan sembarang dua himpunana tak kosong A dan B. *Fungsi f dari A ke B* merupakan suatu aturan yang mengaitkan setiap $a \in A$ ke tepat satu unsur $b \in B$.

  notasi :

  $$f : A \rightarrow B$$

  $$a \rightarrow f(a) = b \quad , \ \forall\, a \in A \, , b \in B.$$

- f disebut *fungsi satu-satu* jika setiap unsur yang berbeda di A mempunyai peta yang berbeda di B.
- f disebut *fungsi pada* jika setiap unsur di B mempunyai paling sedikit satu unsur di A.

Definisi 2.1.2

- Relasi ~ pada himpunan $S \neq \phi$ yang memenuhi sifat $\forall\, a,b,c \in S$:

  (1) (Refleksif) $\quad a \sim a$

  (2) (Simetris) $\quad a \sim b$ maka $b \sim a$

(3) (Transitif) $a \sim b$ dan $b \sim c$ maka $a \sim c$

disebut *relasi ekuivalen pada S.*

- Relasi ekuivalen membuat S terpartisi atas sel-sel yang disebut *kelas ekuivalen.*

- Kelas ekuivalen yang memuat $a = \bar{a} = \{ x \in S \mid x \sim a \}$.

Definisi 2.1.3 (Hasil Kali Kartesius)

Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah sembarang himpunan.

Himpunan $\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \}$ dari semua tupel – n terurut $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dengan $a_i \in A_i$ disebut *hasil kali kartesius* dari himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_n$. (notasi : $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$)

Definisi 2.1.4 (Keterbagian)

Misalkan $h, k \in Z$. k *habis dibagi* oleh h jika terdapat x sehingga $k = hx$. (notasi: $h \mid k$)

Definisi 2.1.5 (Kongruen Modulo n)

Misalkan h, k adalah unsur – unsur bilangan bulat dan n unsur bilangan Asli.

h *dikatakan kongruen ke k modulo n* jika $n \mid (h\text{-}k)$. (notasi $h \equiv k \pmod n$)

2.2 Grup dan Sifat – Sifat

Definisi 2.2.1 (Grup)

Misalkan G adalah himpunan tak kosong dengan sebuah operasi biner $*$ dalam G yang memenuhi sifat berikut :

g_1 : assosiatif

$$\forall\ a, b, c \in G \ni (a * b) * c = a * (b * c)$$

g_2 : $\exists\, e \in G \ni e * x = x * e = x, \forall\ a \in G$

g_3 : $\forall\ a \in G, \exists\, a^{-1} \in G \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} invers dari a)

sehingga (G , $*$) disebut *grup*.

Untuk selanjutnya grup (G , $*$) ditulis dengan G saja dan untuk operasi biner $*$ pada $a*b$ ditulis sebagai juxtaposition ab.

Sembarang bijeksi dari A ke A disebut permutasi pada A.

Definisi 2.2.2 (Grup Simetri)

Misalkan $A = \{ 1, 2, \ldots, n\}$. Grup dari semua permutasi pada A disebut *grup simetri* pada n. Untuk selanjutnya, grup simetri pada n dilambangkan S_n.

Definisi 2.2.3 (Orbit σ)

Misalkan $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dan $\sigma \in S_n$. Kelas-kelas ekuivalen pada A akibat pendefinisian relasi ekuivalen $a \sim b \Leftrightarrow b = \sigma^n(a)$, untuk suatu $n \in Z$ disebut *orbit* σ.

Definisi 2.2.4 (Order Grup)

Banyaknya unsur dalam grup berhingga G disebut ***order grup*** G.
(notasi: $|G|$)

Contoh 2.2.1

(Z_5,+) adalah grup terhadap operasi penjumlahan.

Banyaknya unsur atau order dari $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ adalah 5.

Definisi 2.2.5 (Order Unsur dalam Grup)

Jika G adalah grup dan a ($\neq e$) unsur dalam grup maka ***order unsur a*** adalah bilangan bulat positif terkecil m sehingga $a^m = e$. (notasi: $|a|$)

Definisi 2.2.6 (Grup Siklik)

Grup G disebut *grup siklik* jika ada $a \in G$ sehingga $G = \{ a^n \mid n \in Z \} = \langle a \rangle$ dan a disebut *pembangun* G.

Definisi 2.2.7 (Subgrup)

Misalkan G adalah grup dan $H \subseteq G$. Jika H tertutup terhadap operasi biner di G dan H adalah grup, maka H disebut ***subgrup*** dari G. (notasi :$H \leq G$)

Definisi 2.2.8 (Subgrup Siklik $\langle a \rangle$)

Misalkan G adalah grup dan $a \in G$.

$H = \{ a^n \mid n \in Z\} = \langle a \rangle$ disebut ***subgrup siklik*** dari G yang dibangun oleh a.

Sifat :(Subgrup Siklik $< a >$)

Misalkan $a \in G$. Jika $|< a >| < \infty$, maka $|a| = |< a >|$.

Definisi 2.2.9

Misalkan G adalah grup dan $H \leq G$.

Relasi ekuivalen $\sim_L$ pada G didefinisikan oleh $a \sim_L b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ dan relasi ekuivalen $\sim_R$ pada G didefinisikan oleh $a \sim_R b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

Definisi 2.2.10 (Koset)

Misalkan G adalah grup dan $H \leq G$

Notasi Perkalian :

$aH = \{ ah \mid h \in H \}$ disebut ***koset kiri*** dari H yang memuat a.

$Ha = \{ ha \mid h \in H \}$ disebut ***koset kanan*** dari H yang memuat a.

Notasi Penjumlahan :

$a+H = \{ a+h \mid h \in H \}$ disebut ***koset kiri*** dari H yang memuat a.

$H+a = \{ h+a \mid h \in H \}$ disebut ***koset kanan*** dari H yang memuat a.

Definisi 2.2.11 (Subgrup Normal)

Misalkan G adalah grup dan $H \leq G$.

H disebut ***subgrup normal*** jika $gH = Hg$, $\forall g \in G$. (notasi: $H \triangleleft G$)

Teorema 2.2.1

Jika H adalah subgrup dari grup G, maka $xH = yH \Leftrightarrow x^{-1}y \in H, \forall x, y \in G$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui $H \leq G$ dan $xH = yH$. Akan dibuktikan $x^{-1}y \in H$.

Dari $H \leq G$, $\exists e \in H \ni y = ye \in yH$

Karena $xH = yH$, maka $y \in xH$. Artinya $y = xh$, untuk suatu $h \in H$

$$x^{-1}y = x^{-1}(xh)$$

$$x^{-1}y = (x^{-1}x)\,h$$

$$x^{-1}y = h \in H$$

Jadi $x^{-1}y \in H$

($\Leftarrow$) Diketahui $x^{-1}y \in H$. Akan dibuktikan $xH = yH$

Tulis $x^{-1}y = h \in H$, sehingga $x\,(x^{-1}y) = xh$. Jadi $(xx^{-1})\,y = xh$

$$y = xh$$

Kalikan kedua ruas dengan $h^{'} \in \mathrm{H}$ dari kanan

$$yh^{'} = (xh)\,h^{'}\ ,\quad h^{'} \in H$$

Jika $h^{''} = hh^{'} \in H$ maka $yh^{'} = xh^{''}$.

Jika sembarang unsur $h^{''}$ dalam H, maka sembarang unsur $xh^{''}$ dalam xH.

Jadi sembarang unsur $xh^{''} \in xH$ akan memenuhi $xh^{''} = yh^{'} \in xH$, untuk suatu $h^{''} \in H$.

Terbukti $yH \subseteq xH$.

Secara simetri, $xH \subseteq yH$.

Sehingga terbukti bahwa $xH = yH$.

Dalil :

Jika H subgrup dari grup G dan gH adalah koset kiri dari H dalam G, maka order H sama dengan order gH.

Bukti :

Untuk membuktikan $|H| = |gH|$, buat suatu pemetaan yang bijektif dari H ke gH sebagai berikut :

$f : H \rightarrow gH$

$h \mapsto gh, \forall h \in H$

- $\forall h_1 h_2 \in H$, $f(h_1) = f(h_2) \Leftrightarrow gh_1 = gh_2$, $\forall g \in G$

$$\Leftrightarrow g^{-1}(gh_1) = g^{-1}(gh_2), g^{-1} \in G$$

$$\Leftrightarrow (g^{-1}g)h_1 = (g^{-1}g)h_2$$

$$\Leftrightarrow h_1 = h_2$$

Artinya f adalah fungsi satu - satu (1)

- Diketahui $gH = \{ gh \mid h \in H\}$

Misalkan $m \in gH$, maka

Ada $h \in H$ sehingga $m = gh \in gH \Leftrightarrow g^{-1}m = g^{-1}(gh) \in gH$

$$\Leftrightarrow g^{-1}m = (g^{-1}g)h \in gH$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}m = h \in H,$$

Jadi, untuk sembarang $m \in G$, ada $h \in H$ dengan $h = g^{-1}m$

sehingga $f(h) = f(g^{-1}m)$

$$= g(g^{-1}m)$$

$$= (gg^{-1})m$$

$= m \ , \ m \in gH$

artinya f adalah fungsi H pada gH (2)

Dari persamaan (1) dan (2), maka terbukti bahwa f adalah fungsi bijektif dari H ke gH, dengan kata lain $|H| = |gH|$

Teorema 2.2.2 (Teorema Lagrange)

Jika G adalah grup berhingga dan $H \leq G$ maka order H membagi order G. (notasi: $|H| \mid |G|$)

Bukti :

Diketahui $|G| < \infty$

Misalkan $|G| = n$ dan $|H| = m$ dari definisi $\sim_L$ dan $\sim_R$, G terpartisi menjadi sel-sel yaitu gH dimana $\forall g_i \in G$, g_i berada ditepat satu dan hanya satu g_iH dengan $i = 1, 2, \ldots, k$.Artinya $G = g_1H \cup g_2H \cup \ldots \cup g_kH$

Misalkan k adalah banyaknya sel dalam partisi G maka $n = km \Leftrightarrow m \mid n$.Artinya $|H| \mid |G|$. Jadi terbukti bahwa $H \leq G$ dan $|G| < \infty$ maka $|H| \mid |G|$.

Definisi 2.2.12 (Indeks Subgrup)

Misalkan G adalah grup dan $H \leq G$. Banyaknya koset kiri dari H dalam G disebut ***indeks subgrup*** H dalam G. (notasi $(G{:}H)$)

Misalkan H adalah subgrup normal dalam G. Didefinisikan himpunan koset-koset $G/H = \{ gH \mid g \in G \}$. Selanjutnya didefinisikan hasil kali dua koset g_1H dan g_2H sebagai $(g_1H)(g_2H)=(g_1g_2)H$ untuk sembarang g_1 dan g_2 dalam G. Bisa dibuktikan terhadap operasi antar koset di atas, G/H adalah grup dengan H sebagai unsur identitas.

Definisi 2.2.13 (Grup Faktor)

Jika G adalah grup dan $H \triangleleft G$ maka G/H disebut ***grup faktor*** terhadap operasi antar koset $(aH)(bH) = (ab)H$, $\forall a,b \in G$.

Definisi 2.2.14 (Homomorfisma Grup)

Misalkan G dan G' adalah grup.

Pemetaan ϕ dari G ke G' adalah ***homomorfisma grup*** jika untuk setiap unsur a dan b dalam G berlaku

$$\phi(ab) = \phi(a)\,\phi(b)$$

Definisi 2.2.15 (Homomorfisma Kanonik)

Misalkan G adalah grup dan $H \triangleleft G$.

Homomorfisma $\varphi : G \to G/H$ yang didefinisikan oleh $\varphi(x) = xH$ disebut ***homomorfisma kanonik*** dari G pada G/H dengan ker $(\varphi) = H$.

Definisi 2.2.16 (Pemusat (Centralizer) A dalam Grup G)

Misalkan G adalah grup dan $A \subseteq G$.

Himpunan $\{ g \in G \mid gag^{-1} = a , \forall a \in A \}$ adalah himpunan bagian dari G yang unsur – unsurnya bersifat komutatif dengan setiap unsur dalam A disebut *pemusat (centralizer) A dalam G.* (notasi : $C_G(A)$)

Definisi 2.2.17 (Pusat (Center) dari Grup G)

Misalkan G adalah grup.

Himpunan $\{ g \in G \mid gx = xg, \ \forall x \in G \}$ adalah himpunan bagian dari G yang unsur – unsurnya bersifat komutatif dengan setiap unsur dalam G disebut *pusat (center) dari G.* (notasi : $Z(G)$)

2.3. Aksi Grup

Definisi 2.3.1 (Aksi Grup)

Misalkan X adalah sembarang himpunan dan G adalah sembarang grup.

Aksi G pada X merupakan suatu fungsi $\bullet : G \times X \to X$ (hasil peta (g,x) biasa ditulis dengan $g \bullet x , \forall \ x \in X, g \in G$),yang memenuhi sifat:

(i) $e \bullet x = x \qquad , \forall \ x \in X$

(ii) $(g_1 g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x), \forall \ x \in X$ dan $g_1, g_2 \in G$.

terhadap sifat di atas X disebut $G-set$.

Definisi 2.3.2 (Stabilisator (Stabilizer) unsur x dalam G)

Misalkan X adalah G-set dan $x \in X$.

Himpunan $\{ g \in G \mid g \bullet x = x \}$ disebut ***stabilisator (stabilizer) dari x dalam G.***

(notasi : G_x)

Teorema 2.3.1

Jika X adalah G-set, maka untuk setiap x dalam X, G_x adalah subgrup dari G.

Bukti :

Diketahui X adalah G-set.

Akan ditunjukkan $G_x \leq G$.

1. $\forall x \in X$, $\forall g_1 \in G_x$ berarti $g_1 \bullet x = x$ dan $\forall g_2 \in G_x$ berarti $g_2 \bullet x = x$

   sebagai akibat $(g_1 g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x)$

   $$= g_1 \bullet x$$

   $$= x$$

   Artinya $(g_1 g_2) \in G_x$.

   Sehingga operasi di G_x tertutup terhadap operasi dalam G.

2. $\forall x \in X$, $\exists e \in G \ni e \bullet x = x$, berarti $e \in G_x$.

3. $\forall g \in G_x$, $x = e \bullet x = (g^{-1} g) \bullet x = g^{-1} \bullet (g \bullet x) = g^{-1} \bullet x$

   Artinya ada g^{-1} dalam G dengan sifat $g^{-1} \bullet x = x \ni g^{-1} \in G$.

   Jadi terbukti $G_x \leq G$.

Definisi 2.3.3 (Kernel Aksi)

Misalkan X adalah G–set dan $x \in X$.

Himpunan $\{ g \in G \mid g_{*}x = x, \forall x \in X\}$ disebut *kernel aksi* G pada himpunan X.

Teorema 2.3.2

Jika X adalah G – set, maka kernel aksi adalah subgrup dari G.

Bukti :

Diketahui X adalah G – set.

Akan ditunjukkan kernel aksi = $\{g \in G \mid g_{*}x = x, \forall x \in X\} \leq G$.

- $\forall g_1, g_2 \in$ kernel aksi, maka $(g_1 g_2)_{*}x = g_{1*}(g_{2*}x)$

$$= g_{1*}x$$

$$= x \quad , \forall x \in X$$

  Artinya $(g_1 g_2) \in$ kernel aksi.

  Sehingga operasi di kernel aksi tertutup terhadap operasi dalam G.

- $\exists e \in G$, dan menurut aksioma kedua aksi grup, maka $e_{*}x = x$, $\forall x \in X$.

  Artinya e juga dalam kernel aksi.

- $\forall g \in$ kernel aksi, maka $x = e_{*}x$

$$= (g^{-1}g)_{*}x$$

$$= g^{-1}{}_{*}(g_{*}x)$$

$$= g^{-1}{}_{*}x \quad , \forall x \in X$$

  Artinya $\exists g^{-1} \in$ ker dengan sifat $\forall x \in X, g^{-1}{}_{*}x = x \ni g^{-1} \in$ kernel aksi.

  Jadi terbukti bahwa kernel aksi adalah subgrup dari G.

Teorema 2.3.3

Misalkan X adalah G-set. Setiap $x_1, x_2 \in X, x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists\, g \in G$ sehingga g

$g_\bullet x_1 = x_2$, maka relasi $\sim$ ***relasi ekuivalen*** dalam X.

Bukti :

Diketahui X adalah G-set

Akan ditunjukkan relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalen

(i) $\forall x \in X, \exists e \in G \ni x_\bullet e = x$ sehingga $x \sim x$. Artinya relasi $\sim$ refleksif

(ii) $\forall\, x_1, x_2 \in X$ Anggap $x_1 \sim x_2$ berarti $\exists\, g \in G \ni g_\bullet x_1 = x_2$ maka $g^{-1}{}_\bullet x_2 = g^{-1}{}_\bullet(g_\bullet x_1) = (g^{-1}g)_\bullet x_1 = e_\bullet x_1 = x_1$ untuk suatu $g^{-1} \in G$ sehingga $x_2 \sim x_1$. Artinya relasi $\sim$ simetris

(iii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$, jika $x_1 \sim x_2$ dan $x_2 \sim x_3$ berarti $g_{1\bullet} x_1 = x_2$ dan $g_{2\bullet} x_2 = x_3$ untuk suatu $g_1, g_2 \in G$ maka $(g_2 g_1)_\bullet x_1 = g_{2\bullet}(g_{1\bullet} x) = g_{2\bullet} x_2 = x_3$ untuk suatu $g_2 g_1 = g_3 \in G$ sehingga $x_1 \sim x_3$. Artinya relasi $\sim$ transitif.

Jadi terbukti relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalen dalam X.

Definisi 2.3.4 (Orbit grup)

Misalkan X adalah G-set. Kelas ekuivalen $\{g_\bullet x \mid g \in G\}$ disebut ***orbit grup*** yang memuat x. (notasi: Gx)

Teorema 2.3.4

Jika X adalah G-set dan $x \in X$, maka $|Gx| = (G:G_x)$.

Bukti :

Diketahui X adalah G-set. Akan dibuktikan bahwa banyaknya unsur orbit yang memuat x merupakan indeks subgrup stabilisator dari x.

Untuk membuktikannya, cukup dengan memperlihatkan hubungan yang bijektif antara Gx dengan koset kiri dari G_x dalam G.

Didefinisikan pemetaan $\varphi : Gx \rightarrow gG_x$

1. Akan ditunjukkan bahwa φ terdefinisi dengan baik (well defined)

   Misalkan $x_1 \in Gx$ artinya ada $g_1 \in G$ sehingga $x_1 = g_1 * x$. Didefinisikan $\varphi(x_1)$ adalah koset kiri $g_1 G_x$ dari G_x. Misalkan $g_2 \in G$ dengan $g_2 * x = x_1$, maka

$$g_1 * x = g_2 * x$$

$$g_1^{-1} * (g_1 * x) = g_1^{-1} * (g_2 * x)$$

$$(g_1^{-1} g_1) * x = (g_1^{-1} g_2) * x$$

$$x = (g_1^{-1} g_2) x \Leftrightarrow \quad g_1^{-1} g_2 \in G_x$$ dan menurut teorema 2.2.1

   berlaku $g_2 G_x = g_1 G_x$

   Ini membuktikan bahwa φ terdefinisi dengan baik (well defined).

2. Akan ditunjukkan φ pemetaan satu – satu

$$\forall x_1, x_2 \in Gx \Rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

$$g_1 G_x = g_2 G_x$$

$$\Leftrightarrow \quad g_1 \in g_2 G_x$$

$$\Leftrightarrow \quad g_1 = g_2 g \text{, untuk suatu } g \in G_x$$

   karena $x_1 = g_1 * x$, maka $x_1 = (g_2 g) * x$

$$x_1 = g_2 * (g * x)$$

$$x_1 = g_2 \cdot x$$

$$x_1 = x_2$$

Jadi terbukti φ pemetaan satu – satu.

3. Akan ditunjukkan φ pemetaan pada

Setiap $g_1 G_x$ adalah koset kiri dari G_x dalam G yang memuat g_1, ada

$x_1 = g_1 \cdot x \in Gx \ni \varphi(x_1) = \varphi(g_1 \cdot x) = g_1 G_x$.

Jadi terbukti φ pemetaan pada.

Karena φ fungsi bijektif, maka terbukti bahwa $|Gx| = (G:G_x)$.

BAB III

AKSI GRUP PADA DIRI SENDIRI

Dalam bab ini akan dibahas tentang bentuk khusus dari aksi sembarang grup dan beberapa bentuk perluasannya, yang memberikan akibat yang dapat dimanfaatkan dalam pembuktian teorema pada bab berikutnya.

3.1 Aksi Grup G Pada Diri Sendiri dan Perluasannya Oleh Perkalian Kiri

Definisi 3.1.1

Misalkan G adalah sembarang grup. Aksi G pada G yang didefinisikan oleh $g \cdot x = gx$, $\forall g \in G, x \in G$ disebut ***aksi G pada diri sendiri oleh perkalian kiri.***

Perluasan dari bentuk aksi G pada diri sendiri ($X=G$) adalah aksi G pada himpunan koset – koset kiri dari subgrup H dalam G oleh perkalian kiri.

Definisi 3.1.2

Misalkan H adalah subgrup dari grup G dan G/H adalah himpunan semua koset kiri dari H. Aksi G yang didefinisikan oleh $g \cdot (xH) = (gx)H$, $\forall g \in G$, $xH \in G/H$ disebut ***perluasan dari aksi G pada diri sendiri (X=G) oleh perkalian kiri.***

Teorema 3.1.1

Misalkan G adalah grup dan G/H adalah himpunan koset-koset kiri dari subgrup H dalam G. Jika $H = \{e\}$ adalah subgrup identitas dalam G, maka $g \bullet (xH) = gx$, $\forall g \in G, x \in G$.

Bukti:

Diketahui $H = \{e\} \leq G$, maka $xH = \{xh \mid h \in H\}$

$$= \{xe\}$$

$$= \{x\}$$

Misalkan x diidentifikasikan dengan $\{x\}$, sehingga $g_\bullet(xH) = g_\bullet\{x\} = g_\bullet x = gx$, $\forall g \in G, x \in G$. Dengan kata lain perluasan aksi grup oleh perkalian kiri pada himpunan koset kiri dari subgrup identitas $H = \{e\}$ sama dengan aksi grup pada diri sendiri oleh perkalian kiri.

3.2. Aksi Grup G Pada Diri Sendiri dan Perluasannya Oleh Konjugasi.

Definisi 3.2.1.

Misalkan G adalah sembarang grup. Aksi G pada G yang didefinisikan oleh $g_\bullet x = gxg^{-1}$, $\forall g \in G, x \in G$ disebut ***aksi G pada diri sendiri oleh konjugasi.***

Contoh 3.2.1

Aksi G pada diri sendiri ($X=G$) oleh konjugasi adalah fungsi $\bullet : G * X \to X$ yang didefinisikan oleh $g_\bullet x = gxg^{-1}$, $\forall x \in G, g \in G$, maka

Kernel aksi $= \{g \in G \mid g_\bullet x = x, \forall x \in G\}$

$= \{g \in G \mid gxg^{-1} = x , \forall x \in G\}$

$= \{g \in G \mid gx = xg , \forall x \in G\}$

$= Z(G) =$ pusat dari G

Dan menurut teorema 2.3.2 $Z(G) \leq G$.

Perluasan dari bentuk khusus aksi ini merupakan bentuk yang sangat bermanfaat untuk digunakan dalam bab berikutnya, dimana salah satu perluasan bentuk khusus ini adalah penormal subgrup dari grup G.

Definisi 3.2.2

Misalkan G adalah grup. Misalkan $gAg^{-1} = \{ gag^{-1} \mid a \in A\}$ dan $P(G)$ adalah himpunan dari semua himpunan bagian A dalam G. Aksi G yang didefinisikan oleh $g_\bullet A = gAg^{-1}$, $\forall g \in G$, $A \in P(G)$ disebut *perluasan dari aksi G pada diri sendiri (X=G) oleh konjugasi.*

Teorema 3.2.1

Misalkan G adalah grup.

Misalkan $gAg^{-1} = \{ gag^{-1} \mid a \in A\}$ dan $P(G) = \{ A \mid A \subseteq G \}$.

Jika $A = \{a\}$, maka $g \bullet A = gag^{-1}$,$\forall g \in G, a \in G$

Bukti :

Diketahui $A=\{a\}$sehingga $gAg^{-1}=\{gag^{-1}\}$. Misalkan a diidentifikasikan dengan $\{a\}$, maka $g_\bullet A = g_\bullet\{a\} = g_\bullet a = gag^{-1}$, $\forall g \in G, a \in G$. Dengan kata lain perluasan dari aksi grup G oleh konjugasi pada himpunan bagian A dalam G

yang berunsur tunggal sama dengan aksi grup G pada diri sendiri (X=G) oleh konjugasi.

Definisi 3.2.3 (Unsur Konjugat)

Misalkan sembarang unsur a dan b dalam G.

$b = gag^{-1}$ untuk suatu $g \in G$, maka b disebut ***unsur konjugat*** dari a.

Definisi 2.2.4 (Kelas konjugasi)

Misalkan G adalah sembarang grup dan ada $a \in G$ yang memenuhi $\{gag^{-1} \mid g \in G\}$ disebut ***kelas konjugasi*** dari unsur a dalam G.

Contoh 3.2.2

Grup $S_3 = \{\rho_0\ \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$

Dengan : $\rho_0 = (1)$, $\mu_1 = (23)$

$\rho_1 = (123)$, $\mu_2 = (13)$

$\rho_2 = (132)$, $\mu_3 = (12)$

Ada 3(tiga) kelas konjugasi, yaitu :

1. $\{\rho_0\}$ sebab $\rho_0 = \rho_1\, \rho_0\, \rho_1^{-1}$, untuk $\rho_1 \in S_3$

2. $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ sebab $\mu_2 = \rho_1\, \mu_1 \rho_1^{-1}$, untuk $\rho_1 \in S_3$

$\mu_3 = \rho_2\, \mu_1 \rho_2^{-1}$, untuk $\rho_2 \in S_3$

$\mu_3 = \rho_1\, \mu_2 \rho_1^{-1}$, untuk $\rho_1 \in S_3$

$\{\rho_1, \rho_2\}$ sebab $\rho_1 = \mu_2\, \rho_2 \mu_2^{-1}$, untuk $\mu_2 \in S_3$

Contoh 3.2.3

Aksi grup $N_G(A)$ pada himpunan A oleh konjugasi adalah fungsi $\bullet : N_G(A) * A \to A$ dengan aturuan pengawanan $ga = gag^{-1}$, $\forall\, a \in A$, $g \in N_G(A)$, maka kernel aksi $= \{\, g \in N_G(A) \mid g \bullet a = a, \forall a \in A \,\}$

$= \{\, g \in N_G(A) \mid gag^{-1} = a, \forall a \in A \,\}$

$= C_G(A)$ = pemusat A dalam G.

Contoh 3.2.3 merupakan contoh dari bentuk perluasan aksi G pada diri sendiri oleh konjugasi dan menurut teorema 2.3.2 $C_G(A) \leq G$.

Definisi 3.2.5 (Penormal (Normalizer) A dalam G)

Misalkan G adalah grup dan $A \subseteq G$.

Himpunan $\{\, g \in G \mid gAg^{-1} = A \,\}$ adalah himpunan bagian terbesar dari G yang membuat A menjadi normal dalam G disebut *penormal (normalizer) A dalam G.* (notasi: $N_G(A)$)

Teorema 3.2.2

Misalkan G adalah grup dan $P(G) = \{\, A \mid A \subseteq G \,\}$

Jika G beraksi pada $P(G)$ oleh konjugasi maka berlaku stabilisator $G_A = N_G(A)$.

Bukti :

Diketahui $G_A = \{ g \in G \mid g \bullet A = A \}$

Untuk membuktikan $G_A = N_G(A)$, cukup dengan memperlihatkan bahwa kedua himpunan tersebut adalah saling subset.

Langkah 1 : (akan ditunjukkan bahwa $G_A \subseteq N_G(A)$)

Menurut definisi penormal grup G, jelas $G_A \subseteq N_G(A)$.

Langkah 2 : (akan ditunjukkan bahwa $N_G(A) \subseteq G_A$)

Aksi G pada $P(G)$ oleh konjugasi adalah fungsi :

$$\bullet : G \times P(G) \to P(G)$$

$$(g,A) \mapsto g \bullet A = gAg^{-1}, \forall g \in G, A \subseteq G.$$

Ambil sembarang $g \in N_G(A)$ artinya $gAg^{-1} = A$ dan menurut definisi fungsi aksi G oleh konjugasi diatas, $g \bullet A = gAg^{-1}$ dan sebagai akibat $g \bullet A = A$,$\forall A \subseteq G$, artinya $g \in G_A$. Karena $g \in N_G(A)$ berakibat $g \in G_A$, disimpulkan $N_G(A) \subseteq G_A$.

Jadi terbukti $G_A = N_G(A)$.

Lemma 3.2

Misalkan aksi G pada $P(G) = \{A \mid A \subseteq G\}$ oleh konjugasi dan A berunsur tunggal maka $N_G(A) = C_G(A)$.

Bukti :

Langkah 1: (akan ditunjukkan $C_G(A) \subseteq N_G(A)$

Menurut definisi dari $N_G(A)$, jelas $C_G(A) \subseteq N_G(A)$

Langkah 2 : (akan ditunjukkan $N_G(A) \subseteq C_G(A)$)

Ambil sembarang unsur $g \in N_G(A)$, g memenuhi sifat $gAg^{-1} = A$.

Karena diketahui aksi G pada $P(G)$ oleh konjugasi, maka $g \bullet A = gAg^{-1} = A$. Untuk A berunsur tunggal, menurut teorema 3.2.1 berlaku $g \bullet a = gag^{-1} = a$ atau $gag^{-1} = a$, sehingga g termuat dalam $C_G(A)$. Artinya $C_G(A) \subseteq N_G(A)$. Jadi terbukti bahwa $N_G(A) = C_G(A)$ untuk himpunan bagian A yang berunsur tunggal.

Teorema 3.2.3

Misalkan G adalah grup.

Jika A adalah himpunan bagian dari G ,maka $N_G(A)$ adalah subgrup dari G.

Bukti :

Menurut teorema 2.3.1 dan teorema 3.2.2 berturut-turut bahwa $G_x \leq G$ dan $N_G(A) = G_A$, maka sebagai akibat $N_G(A) \leq G$.

Jadi terbukti bahwa $A \subseteq G$,maka $N_G(A)$ subgrup dari G.

Teorema 3.2.4

Misalkan G adalah grup berhingga dan $x \in G$.

Jika $g \in N_G(\langle x \rangle)$, maka $gxg^{-1} = x^a$, untuk suatu $a \in Z$.

Bukti :

Berdasarkan definisi penormal $N_G(\langle x \rangle) = \{ g \in G \mid g\langle x \rangle g^{-1} = \langle x \rangle \}$. Karena $g\langle x \rangle g^{-1} = \{ gxg^{-1} \mid x \in \langle x \rangle \}$ dan $\langle x \rangle = \{ x^a \mid a \in Z \}$, maka $\{ gxg^{-1} \mid x \in \langle x \rangle \} = \{ x^a \mid a \in Z \}$, sehingga jelas bahwa untuk sembarang $g \in N_G(\langle x \rangle)$, g memenuhi sifat $gxg^{-1} = x^a$, untuk suatu $a \in Z$.

Jadi terbukti bahwa jika $g \in N_G(<x>)$, maka $gxg^{-1} = x^a$, untuk suatu $a \in Z$

Teorema 3.2.5

. Misalkan G adalah grup. Banyaknya konjugat unsur s dalam G adalah indeks subgrup pemusat s dalam G.

Bukti :

Definisikan $As = \{ gsg^{-1} \mid g \in G \}$ adalah himpunan dari semua konjugat unsure s dalam G dan $B = \{ gC_G(s) \mid g \in G \}$ adalah himpunan semua koset-koset kiri dari $C_G(s)$ dalam G.

Akan diperlihatkan adanya bijeksi antara unsure- unsure dalam As dengan unsure- unsure dalam B.

Pemetaan $\varphi : B \rightarrow As$

$gC_G(s) \mapsto \varphi(gC_G(s)) = gsg^{-1}$, untuk sembarang g dalam G.

- Akan ditunjukkan φ pemetaan 1 - 1

$$\begin{aligned}
\varphi(g_1C_G(s)) = \varphi(g_2C_G(s)) &\Leftrightarrow g_1sg_1^{-1} = g_2sg_2^{-1} \\
&\Leftrightarrow g_2^{-1}(g_1sg_1^{-1}) = g_2^{-1}(g_2sg_2^{-1}) \\
&\Leftrightarrow (g_2^{-1}g_1)sg_1^{-1} = (g_2^{-1}g_2)sg_2^{-1} \\
&\Leftrightarrow (g_2^{-1}g_1)sg_1^{-1} = sg_2^{-1} \\
&\Leftrightarrow ((g_2^{-1}g_1)sg_1^{-1})g_1 = (sg_2^{-1})g_1 \\
&\Leftrightarrow ((g_2^{-1}g_1)s)(g_1^{-1}g_1) = (sg_2^{-1})g_1 \\
&\Leftrightarrow (g_2^{-1}g_1)s = s(g_2^{-1}g_1) \\
&\Leftrightarrow (g_2^{-1}g_1)s(g_2^{-1}g_1)^{-1} = s
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad g_2^{-1}g_1 \in C_G(s)$$

Menurut teorema 2.2.1 berlaku $g_1C_G(s) = g_2C_G(s)$ untuk sembarang g_1 dan g_2 dalam G.

Artinya φ pemetaan 1 - 1

- Akan ditunjukkan φ pemetaan pada.

Jelas bahwa sembarang unsuregsg^{-1} dalam As mempunyai prapeta di unsure $gC_G(s)$ dalam B, sehingga untuk sembarang g dalam G berlaku $\varphi(gC_G(s)) = gsg^{-1}$.

Artinya φ pemetaan pada.

Karena φ pemetaan 1-1 dan pada maka terbukti bahwa banyaknya unsur konjugat s dalam G adalah sama dengan indeks $(G : C_G(s))$.

Teorema 3.2.6 (Persamaan Kelas)

Misalkan G adalah grup berhingga. Jika $\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}, \ldots, \overline{g_r}$ adalah penyajian kelas-kelas konjugasi yang berbeda dari G yang tak termuat dalam $Z(G)$, maka $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r}(G : C_G(g_i))$ disebut *persamaan kelas* dari G.

Bukti:

Setiap himpunan bagian yang berunsur tunggal $\{x\}$ adalah kelas konjugasi dari $G \Leftrightarrow x = gxg^{-1}, \forall g \in G$

$\Leftrightarrow gx = xg, \forall g \in G$

$\Leftrightarrow x \in Z(G)$

Misalkan $Z(G) = \{e, z_1, z_2, ..., z_m\}$ dan $K_1, K_2, ..., K_r$, $\forall$ K_i yang berbeda dengan $i \in \{1,2,...,r\}$, K_i menyajikkan kelas-kelas konjugasi dari G yang tak termuat dalam $Z(G)$. Karena $K_i = \overline{g_i}$ adalah kelas konjugasi dari G yang memuat g_i, maka semua himpunan kelas konjugasi dari G adalah $\{e\}, \{z_1\}, ..., \{z_m\}, K_1, K_2, ..., K_r$. Dengan adanya partisi G maka,

$$|G| = |\{e\}| + |\{z_1\}| + ... + |\{z_m\}| + |K_1| + |K_2| + ... + |K_r|$$

$$= 1 + 1 + ... + 1 + \sum_{i=1}^{r} |K_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} 1 \quad + \quad \sum_{i=1}^{r} (G : C_G(g_i)) \qquad \text{(menurut teorema 3.2.5)}$$

$$= |Z(G)| \ + \ \sum_{i=1}^{r} (G : C_G(g_i))$$

Jadi terbukti persamaan kelas grup G adalah penjumlahan antara order subgrup $Z(G)$ dengan jumlahan indeks subgrup $C_G(g_i)$ dalam G.

Berdasarkan teorema 3.2.6 di atas, bisa dicari persamaan kelas dari himpunan X. Misalkan X adalah G – set. X terpartisi atas kelas – kelas ekuivalen yang disebut orbit, akibat adanya relasi ekuivalen pada X yang dikenai aksi grup G. Diketahui $Gx = \{ g \bullet x \mid x \in X \}$ adalah orbit dari x dalam X dan misalkan berorder r. Misalkan ada orbit berunsur tunggal dalam X, sehingga himpunan dari semua orbit berunsur tunggal didefinisikan oleh $X_G = \{ x \in X \mid g \bullet x = x, \forall g \in G \}$ dan misalkan berorder s dengan $0 \leq s \leq r$. Jadi dapat dianggap $X_G = Z(G)$. Menurut teorema 3.2.2 bahwa

$N_G(A) = G_A$ dan menurut lemma 3.2 $N_G(A) = C_G(A)$, sebagai akibat $C_G(A) = G_A$. Misalkan jika G adalah grup, G_A dan $C_G(A)$ adalah subgrup dari G, maka $(G:G_A) = (G:C_G(A))$. Jadi persamaan kelas dari himpunan X dapat ditulis :

$$|X| = |X_G| + \sum_{i=1+s}^{r} |Gx_i| \qquad (*)$$

Teorema 4.1.1

Setiap grup berorder prima adalah siklik.

Bukti :

Diketahui $|G| = p$. Akan ditunjukkan ada unsur dalam G yang membangkitkan G.

Karena $|G| = p$ maka $|G| \geq 2$. Ambil sembarang $a \neq e \in G$ sehingga $\{e\} \neq \langle a \rangle = \{a^0, a, a^2, ...\} = \{e, a, a^2, ...\} \leq G$, artinya $\langle a \rangle$ mempunyai paling sedikit 2 unsure dan menurut teorema Lagrange $|\langle a \rangle| \mid |G|$ atau $|\langle a \rangle| \mid p$. Sebagai akibat, $|\langle a \rangle| = p$. Sehingga $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{p-1}\} = G$.

Jadi terbukti ada $a \neq e \in G$ sehingga a membangkitkan grup G.

Contoh 4.1.2

Grup $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ terhadap operasi penjumlahan dengan $|Z_5| = 5$ adalah grup siklik karena $\forall x \neq e \in Z_5 \Rightarrow \langle x \rangle = Z_5$

Teorema 4.1.2 :

Jika G adalah grup, $|G| = p^n$ dan X adalah G-set berhingga, maka $|X| \equiv |X_G| \pmod{p}$.

Bukti :

Menurut persamaan (*) pada sesi 3.2, apabila $|X_G| = s$, maka diperoleh rumus persamaan kelas :

Karena g_p tergantung pada $g_1, g_2, \ldots, g_{p-1}$ dan setiap $g_i \in G$ dengan $1 \leq i \leq p-1$,

maka $|X| = |G|^{p-1}$ (2)

Diketahui $p \mid |G|$, maka persamaan (2) menyebabkan $p \mid |X|$.

Langkah 2 :

Misalkan $\sigma = (1, 2, 3, \ldots, p) \in S_p$. Pandang aksi $<\sigma>$ pada X

sebagai $\sigma \bullet (g_1, g_2, \ldots, g_p) = (g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \ldots, g_{\sigma(p)})$

$$= (g_2, g_3, \ldots, g_p, g_1) \quad (3)$$

Akan ditunjukkan hasil aksi $\sigma \in S_p$ pada X dengan aturan pada persamaan (3) adalah unsur dalam X. Sebagai akibatnya, aksi $\sigma^j \bullet (g_1, g_2, \ldots, g_p)$ juga dalam X. (aksi well defined)

Koordinat tupel ke-p dalam tupel-p pada persamaan (3) adalah g_1.

Dari persamaan (1) : $\forall (g_1, g_2, \ldots, g_p) \in X \Leftrightarrow g_1 g_2 \ldots g_p = e$

$$\Leftrightarrow g_1(g_2 g_3 \ldots g_p) = e$$

$$\Leftrightarrow \quad g_1 = (g_2 g_3 \ldots g_p)^{-1}$$

Dari persamaan (3) : $(g_2 g_3 \ldots g_p)\, g_1 = g_1^{-1}\, g_1\, (g_2, g_3, \ldots, g_p)\, g_1$

$$= g_1^{-1}\, e\, g_1$$

$$= e$$

Sehingga terbukti bahwa $\sigma \bullet (g_1, g_2, \ldots, g_p) = (g_2, g_3, \ldots, g_p, g_1) \in X$.

Dari definisi aksi grup $<\sigma>$ pada himpunan X dengan aturan :

$\sigma \bullet (g_1, g_2, \ldots, g_p) = (g_2, g_3, \ldots, g_p, g_1) \in X$, maka

$\sigma^2 \bullet (g_1, g_2, \ldots, g_p) = (g_3, g_4, \ldots, g_1, g_2) \in X$

.

.

.

$$\sigma^{p-1} \bullet (g_1, g_2, \ldots, g_p) \quad = \quad (g_p, g_1, \ldots g_{p-2}, g_{p-1}) \in X$$

$$\sigma^{p} \bullet (g_1, g_2, \ldots, g_p) \quad = \quad (g_1, g_2, \ldots, g_p) \quad \in X$$

Karena p prima, $\forall i \neq j \in \{1,2,\ldots,p\text{-}1\}$ berlaku implikasi $i \neq j \Rightarrow \sigma^i \neq \sigma^j$ dan karena $\sigma^p = id$, maka dari hasil di atas,disimpulkan $<\sigma> = \{\sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{p-1}, \sigma^p, \sigma^{p+1}, \ldots\} = \{\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{p-1}, id\}$

Sehingga $|<\sigma>| = p$

Aksi $<\sigma>$ pada X memenuhi kedua aksioma aksi grup, sebab :

1. $\sigma_1 \bullet (\sigma_2 \bullet (g_1, g_2, \ldots, g_p)) = \sigma_1 \bullet (g_{\sigma_2(1)}, g_{\sigma_2(2)}, \ldots, g_{\sigma_2(p)})$

$$= (g_{\sigma_1(\sigma_2(1))}, g_{\sigma_1(\sigma_2(2))}, \ldots, g_{\sigma_1(\sigma_2(p))})$$

$$= (g_{\sigma_1\sigma_2(1)}, g_{\sigma_1\sigma_2(2)}, \ldots, g_{\sigma_1\sigma_2(p)}), \forall \sigma_1, \sigma_2 \in <\sigma>$$

$$, (g_1, g_2, \ldots, g_p) \in X.$$

2. $Id \bullet (g_1, g_2, \ldots, g_p) = (g_{id(1)}, g_{id(2)}, \ldots, g_{id(p)})$

$$= (g_1, g_2, \ldots, g_p), \forall (g_1, g_2, \ldots, g_p) \in X.$$

Langkah 3 :

Akan ditunjukkan ada $a \in G$ $(a \neq e)$ sehingga $(a, a, \ldots, a) \in X_{<\sigma>}$

Karena $e \in G$, maka $(e, e, \ldots, e) \in X_{<\sigma>}$ Jadi $X_{<\sigma>} \neq \emptyset$ (Akibatnya $|X_{<\sigma>}| = 0$). Dari teorema 4.1.2 dan persamaan (2), diperoleh $p \,|\, |X_{<\sigma>}|$. Karena $X_{<\sigma>} \neq \emptyset$, maka dari hasil ini disimpulkan ada paling sedikit p unsur dalam $X_{<\sigma>}$. (Sebab $|X_{<\sigma>}|$ adalah merupakan kelipatan p). Selanjutnya setiap unsur

$(g_1,g_2,\ldots,g_p) \in X_{<\sigma>}$ memenuhi kesamaan : $(g_1,g_2,\ldots,g_p) = \sigma \bullet (g_1,g_2,\ldots,g_p)$ atau $(g_1,g_2,\ldots,g_p) = (g_2,g_3,\ldots,g_p)$. Akibatnya $g_1 = g_2$.

Secara analog, karena :

$$
\begin{aligned}
(g_1,g_2,\ldots,g_p) &= \sigma^2 \bullet (g_1,g_2,\ldots,g_p) &&= (g_3, g_4, \ldots, g_1, g_2)\\
&= \sigma^3 \bullet (g_1,g_2,\ldots,g_p) &&= (g_4, g_5, \ldots, g_2, g_3)\\
&\quad\vdots &&\quad\vdots\\
&= \sigma^{p-1} \bullet (g_1,g_2,\ldots,g_p) &&= (g_p, g_1, \ldots, g_{p-2}, g_{p-1})
\end{aligned}
$$

maka $g_1 = g_2 = g_3 = \ldots = g_p$.

Jadi $(g_1,g_2,\ldots,g_p) \in X_{<\sigma>} \Leftrightarrow g_1 = g_2 = g_3 = \ldots = g_p$. Sehingga setiap unsur dalam $X_{<\sigma>}$ berbentuk $(a,a,\ldots,a)$. Pilih $(a,a,\ldots,a) \neq (e, e, \ldots, e)$ dalam X maka $aa\ldots a = e$ atau $a^p = e$. Karena p prima untuk setiap k yang memenuhi $1 \leq k \leq p-1$ berlaku $a^k \neq e$.Jadi $<a> = \{e,a,a^2,\ldots,a^{p-1}\}$.

Artinya ada $H = <a>$ dengan $|H| = p$.

Jadi terbukti bahwa jika $|G| < \infty$ dan $p \mid |G|$ maka G memuat H.

Akibat Teorema Cauchy

Grup berhingga G adalah grup-p jika dan hanya jika order dari G adalah perpangkatan dari p.

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Pembuktian pernyataan pertama menggunakan pembuktian secara tak langsung. Andaikan G grup-p tetapi ordernya bukan perpangkatan dari p. MIsalkan $|G| = p^n m$ dimana $gcd(p,m) = 1$.Artinya ada bilangan prima $q \neq p$ sehingga

$$|G| = p^n q^l m' \quad (m' \text{ tidak mengandung fakto } q)$$
$$= q^l p^n m'$$
$$= q^l m'' \text{ dan } q \mid |G|.$$

Jadi $q \mid |G|$ sehingga dengan Teorema Cauchy G memuat unsur beroder q^i, $0 \leq i \leq l$.

Hal ini kontradiksi dengan definisi grup $- p$ yaitu setiap unsur dalam grup berorder perpangkatan dari p. Jadi $|G|$ adalah perpangkatan dari p, $|G| = p^k$.

($\Leftarrow$) Misalkan $|G| = p^k$

Ambil sembarang $g \in G$ sehingga $\langle g \rangle \leq G$ .Karena $|G| = p^k$ dan $|\langle g \rangle| \mid |G|$

maka $|\langle g \rangle| = p^n$, $0 \leq n \leq k$ berdasarkan sifat $g^{p^k} = e$ dan $g^s \neq e$ jika $1 \leq s \leq p^n$-1

diperoleh $\langle g \rangle = \{g^0, g^1, \cdots, g^{p^n-1}\}$. Jadi G adalah grup $- p$.

Contoh 4.1.2

Misalkan G grup berhingga yang berorder 100. Disini $|G| = 100 = 2^2\, 5^2$.

G bukan grup -2 sebab ada $p = 5$ dimana $5 \mid G$, sehingga menurut teorema Cauchy G memuat unsur berorder 5.

4.2Teorema Sylow Pertama

Teorema 4.2.1

Jika H adalah subgrup-p dari grup berhingga G maka

$(G : H) \equiv (N_G(H) : H) \pmod p$.

Artinya $\forall\ xH \in X_H$ jika hanya jika xH adalah koset kiri dalam $N_G(H) / H$, karena banyaknya koset kiri ini adalah $(N_G(H) : H)$, maka $|X_H| = ((N_G(H):H)$. Karena H grup-p berhingga maka dengan teorema Cauchy $|H| = p^n$, untuk suatu n, Dan dari teorema 4.1.1 bahwa $|X| \equiv |X_H| \pmod p$, sehingga $(G : H) \equiv (N_G(H) : H) \pmod p$.

$\therefore$ Terbukti jika H grup-p maka $(G : H) \equiv (N_G(H) : H) \pmod p$.

Akibat Teorema 4.2.1

Misalkan H adalah subgrup $-p$ dari grup berhingga G. Jika $p \mid (G : H)$, maka $N_G(H) \neq H$.

Bukti :

Diketahui $p \mid (G : H)$ maka menurut lemma 4.1.1 berlaku $p \mid (N_G(H) : H)$. Artinya $(N_G(H) : H) = pk$, dimana $k \neq 0$ dan $k \in Z$, sehingga $(N_G(H) : H) > 1$. Artinya $N_G(H) \neq H$. Jadi terbukti jika $p \mid (G : H)$ maka $N_G(H) \neq H$.

Contoh 4.2

Grup $G = S_3$

$= \{ (1),(123),(132),(23),(13),(12) \}$

$H = \langle(123)\rangle \leq S_3$ dan H adalah subgrup $- 3$.

$H \leq N_G(H) \leq G$

Dengan teorema Lagrange $|H| \mid |N_G(H)|$ dan $|N_G(H)| \mid |G|$ Karena $|G| = 6$ dan $|H| = 3$, Kemungkinan $N_G(H)$ adalah H atau G.

Ambil $(12) \in G$, $(12)(123)(12)^{-1} = (12)(123)(12)$

$$= (132)$$

$$= (123)^{-1}$$

Sebagai akibatnya, menurut teorema 3.2. unsur konjugat (123) oleh 12) $\in S_3$ adalah pembangkit lainnya dari H, sehingga $(12) \in N_G(H)$. Karena $H \le N_G(H)$ maka $N_G(H) \neq H$.

Teorema 4.1.2. (Teorema Sylow Pertama)

Misalkan G adalah grup berhingga yang berorder $p^n m$, $n \geq 1$ dan $gcd(p,m) = 1$, maka :

(i) Untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, G memuat subgrup berorder p^i

(ii) Untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, n\text{-}1\}$, subgrup H dari G yang berorder p^i adalah subgrup normal dari suatu subgrup yang berorder p^{i+1}.

Bukti :

Diketahui $|G| = p^n m$, $n \geq 1$ dan $gcd(p,m) = 1$.

(i) Akan dibuktikan jika $|G| < \infty$ dan $p \mid |G|$, maka G memuat subgrup berorder p^i.

Langkah 1:

Untuk $n = 1$, maka $|G| = pm$ dan $p \nmid m$, maka menurut teorema Cauchy G memuat subgrup berorder p.

Langkah 2:

Proses induksi dengan $n > 1$, digunakan untuk menunjukkan: keberadaan subgrup berorder p^i ($i < n$) menyebabkan keberadaan subgrup berorder p^{i+1} ($1 \leq i < n$).

Misalkan $|H| = p^i$ dan $H \leq G$. Jadi $(G:H) = |G|/|H| = p^{n-i}m$. Karena $i < n$ atau $(n-i) > 0$, maka $p \mid (G : H)$. Dengan lemma 4.1.1 $p \mid (N_G(H) : H)$. Karena $H \triangleleft G$, bisa dibentuk $N_G(H) / H$ sehingga $p \mid \; | N_G(H) / H |$. Menutut teorema Cauchy $N_G(H) / H$ memuat subgrup berorder p. Katakanlah $K \leq N_G(H) / H$ dengan $|K| = p$. Jika $\varphi : N_G(H) \rightarrow N_G(H) / H$ adalah homomorfisma kanonik dengan $\varphi(x) = xH$, maka φ merupakan pemetaan pada (onto) dari $N_G(H)$ ke $N_G(H)/H$, sehingga $\exists\ \varphi^{-1}[K] \leq N_G(H)$. Karena $K \leq N_G(H) / H$, unsur identitas H dalam $N_G(H) / H$ juga berada dalam K. Sebagai akibatnya, kernel φ termuat dalam $\varphi^{-1}[K] = \{x \in N_G(H) \mid \varphi(x) \in K\}$. Karena kernel $\varphi = H$, banyaknya unsur dalam $\varphi^{-1}[K]$ adalah perkalian antara banyak koset kiri H dalam K dengan banyak unsur H.Dengan kata lain : $|\varphi^{-1}[K]| = |H|\,|K|$

$$= p^i p$$

$$= p^{i+1}, \forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}.$$

Sehingga terbukti untuk setiap $n \geq 1$ dan $|G| = p^n m$, dengan $\gcd(p,m) = 1$, maka G memuat subgrup berorder p^i untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., n\}$, yang juga mengakibatkan G memuat subgrup berorder p^{i+1} . untuk setiap $i \in \{1,2, ..., n-1\}$

(ii) Akan ditunjukkan bahwa subgrup berorder p^i ($i < n$) merupakan subgrup normal dari subgrup berorder p^{i+1} $(1 \leq i < n)$.

Untuk membuktikannya, digunakan proses yang sama dengan langkah 1 dan langkah 2 diatas. Dari langkah – langkah diatas, diketahui bahwa $\varphi^{-1}[K] \leq N_G(H)$ dan kernel $\varphi \leq \varphi^{-1}[K]$ atau kernel $\varphi \leq \varphi^{-1}[K] \leq N_G(H)$, dengan kernel $\varphi = H$. Karena $H \triangleleft N_G(H)$ dan termuat dalam $\varphi^{-1}[K]$, maka H normal disetiap subgrup dari $N_G(H)$ yang memuat H. Pada khususnya $H \triangleleft \varphi^{-1}[K]$ dengan $|\varphi^{-1}[K]| = p^{i+1}$. Jadi terbukti bahwa $H \leq G$ dan $\varphi^{-1}[K] \leq G$ dengan $|H| = p$ dan $|\varphi^{-1}[K]| = p^{i+1}$, maka $H \triangleleft \varphi^{-1}[K]$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Secara umum, sembarang aksi grup G pada himpunan X merupakan fungsi $\bullet : G \times X \to X$ yang memenuhi sifat:

(1) $(g_1g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x)$, $\forall x \in X, \forall g_1, g_2 \in G$,

(2) $e \bullet x = x$, $\forall x \in X$.

sehingga X disebut G - set .

Jadi aksi grup bisa dianggap sebagai perluasan dari operator biner.

Dalam penjabaran dan uraian bab – bab terdahulu, digunakan beberapa jenis atau bentuk aksi grup tertentu, antara lain:

(1) aksi grup G pada diri sendiri ($X = G$) oleh perkalian kiri $g \bullet x$, $\forall g \in G$, $x \in G$ dan bentuk perluasannya $g \bullet (xH) = (gx)H$, $\forall g \in G, xH \in G/H$.

(2) aksi grup G pada diri sendiri ($X = G$) oleh konjugasi $g \bullet x = gxg^{-1}, \forall g \in G$, $x \in G$ dan bentuk perluasannya $g \bullet A = gAg^{-1}, \forall g \in G, A \subseteq G$.

(3) aksi grup permutasi $< \sigma >$ pada himpunan $\{ (g_1, g_2, \ldots g_p) \mid g_i \in G$ dan $g_1 g_2 \ldots g_p = e \}$ yaitu himpunan semua tupel $- p$ dari unsur-unsur di G yang dinyatakan oleh $\sigma \bullet (g_1, g_2, \ldots g_p) = (g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \ldots, g_{\sigma(p)}) = (g_2, g_3, \ldots g_p, g_1)$

Teorema Sylow Pertama dicapai melalui peran aksi grup, yaitu aksi grup G pada diri sendiri (X=G) oleh perkalian kiri $g \bullet (xH) = (gx)H$, $\forall g \in G$, $xH \in G/H$ bersamaan dengan penormal (normalizer) subgrup dari grup $N_G(H)$ sebagai salah satu akibat penting dari aksi G pada diri sendiri ($X = G$) oleh konjugasi yang digunakan pada pembuktian indeks subgrup–p dari grup $(G : H) \equiv N_G(H)$ (modulo p), serta aksi grup permutasi $< \sigma >$ pada himpunan semua tupel – p dari unsur–unsur di G bersamaan dengan persamaan kelas dari himpunan X yang digunakan pada pembuktian teorema Cauchy.

5.2 Saran

Karena aksi grup mempunyai banyak penerapan, maka penggunaannya tidak hanya pada teorema Sylow Pertama saja, tetapi dapat digunakan dalam pengembangan teori aljabar yang lain, misalnya dalam teori modul (module) yaitu struktur aljabar yang merupakan perluasan dari konsep ruang vector.

Oleh sebab itu, konsep dasar yang mendukung konsep aksi grup seperti teori fungsi, teori relasi dan teori grup perlu disajikan secara lebih baik dan mendalam untuk para mahasiswa matematika.

DAFTAR PUSTAKA

- Dummid, David Steven. *Abstract Algebra.* Prentice Hall Inc, New Jersey. 1991.
- Fraleigh, John B. *A Firt Course In Abstract Algebra.* Addison – Wesley Publishing Company Inc. 1993.
- Hilman A, P, Alexanderson, G. L. *Abstract Algebra.* Pws Publishing Company. Boston. 1994.
- Hungerford, T. W. *Algebra.* New York. 1974.
- Kusno, K. *Struktur Aljabar.* Universitas Terbuka. Penerbit Karunia Jakarta . 1998.
- Sierdaski, Allan J. *An Introduction to Topology and Homotopy.* Pws Publishing Company. Boston. 1992.