

*SKRIPSI FISIKA*

**DINAMIKA KOSMOLOGI DUNIA *BRANE* DENGAN  
KONTRIBUSI  $\Lambda$  SEBAGAI ENERGI GELAP**

**MUHAMMAD NUR GAZALI YUNUS**

**H21113018**



**DEPARTEMEN FISIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2019**



**DINAMIKA KOSMOLOGI DUNIA *BRANE* DENGAN  
KONTRIBUSI  $\Lambda$  SEBAGAI ENERGI GELAP**

**SKRIPSI**

*Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada Program Studi Fisika Departemen Fisika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Hasanuddin*

Oleh:

**MUHAMMAD NUR GAZALI YUNUS**

**H21113018**

**DEPARTEMEN FISIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2019**



Optimization Software:  
[www.balesio.com](http://www.balesio.com)

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Muhammad Nur Gazali Yunus  
NIM : H21113018  
Program Studi : Fisika  
Judul Skripsi : Dinamika Kosmologi Dunia *Brane* dengan Kontribusi  
Λ sebagai Energi Gelap

Makassar, 21 Januari 2019

Disahkan oleh:

Pembimbing Utama

Drs. Bansa Wang B.J., M.Si.

NIP. 19631206 199412 1 001

Pembimbing Pertama

Prof. Dr. Tasrief Surungan, M.Sc.

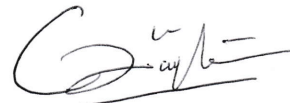
NIP. 19670222 199203 1 003



## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini merupakan karya orisinal saya dan sepanjang pengetahuan saya tidak memuat bahan yang pernah dipublikasi atau telah ditulis oleh orang lain dalam rangka tugas akhir untuk suatu gelar akademik di Universitas Hasanuddin atau di lembaga pendidikan tinggi lainnya di manapun; kecuali bagian yang telah dikutip sesuai kaidah ilmiah yang berlaku. Saya juga menyatakan bahwa skripsi ini merupakan hasil kerja saya sendiri dan dalam batas tertentu dibantu oleh pihak pembimbing.

Penulis



Muhammad Nur Gazali Yunus



## ABSTRAK

Telah dilakukan studi sistem dinamika kosmologi dunia *brane* dengan kontribusi  $\Lambda$  sebagai energi gelap. Persamaan medan gravitasi Einstein dalam skenario dunia *brane* dimodifikasi dengan pendekatan dimensi ekstra. Medan materi dalam skenario ini terbatas pada ruang-waktu 4-dimensi (*brane*), sedangkan gravitasi bertindak dalam ruang-waktu penuh (5-dimensi). Solusi FRW *brane* dari persamaan medan Einstein efektif juga diturunkan untuk sistem *brane* yang tidak tertutup dan statik. Selanjutnya, dinamika kosmologi dunia *brane* ditinjau pada daerah energi tinggi dan limit energi rendah. Pada pendekatan energi tinggi, diperoleh radiasi gelap atau ‘radiasi gravitasi’ yang mendominasi keadaan paling awal alam semesta. Sedangkan pada limit energi rendah, diperoleh konstanta kosmologi *bulk* non-lokal,  $\Lambda_5$  yang berperan penting, khususnya pada percepatan ekspansi alam semesta saat ini dengan kontribusi energi gelap  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ , dimana dianggap persamaan keadaan untuk energi gelap bervariasi terhadap waktu. Selain itu, dibahas pula beberapa pengaruh dari  $\Lambda_5$  dalam kosmologi dunia *brane*.

**Kata Kunci:** Dinamika kosmologi, Dunia *brane*, Energi gelap, Energi tinggi, Konstanta kosmologi



## ABSTRACT

The dynamical system of braneworld cosmology has been studied with dark energy contribution  $\Lambda$ . In the braneworld scenario, the Einstein gravitational field equation is modified by an extra-dimensional approach. The matter fields in this scenario, are confined on the 4-dimensional spacetime (brane), while gravity acts in the full spacetime (5-dimensions). The FRW brane solutions of the effective Einstein field equation have also been derived by considering the static brane and a not closed brane system. Furthermore, the cosmological dynamics of braneworld is also studied at high energy regime and at low energy limit. In high energy approach, the dark radiation or ‘the gravitational radiation’ also dominates in the very early universe. Whereas, at low energy limit, the nonlocal bulk cosmological constant,  $\Lambda_5$  has an important role, especially in the late-time cosmic acceleration with dark energy contributes about  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ , which is assumed the equation of state for dark energy varies with time. Moreover, some effects of  $\Lambda_5$  are also discussed in braneworld cosmology.

**Keywords:** Braneworld, Cosmological constant, Cosmological dynamics, Dark energy, High energy



## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah, puji dan syukur yang tak terhingga penulis panjatkan kehadirat Allah ﷻ, entitas yang telah menciptakan objek penelitian yang luar biasa luas dan sangat kompleks, yaitu alam semesta ini dan segala isinya, yang juga telah memberi pertolongan, pengetahuan, kekuatan dan kesabaran kepada penulis sehingga Skripsi ini dapat terselesaikan, meskipun dalam bentuk yang sederhana. Shalawat dan salam tak lupa penulis haturkan kepada baginda Rasulullah Muhammad ﷺ, yang telah menyampaikan risalah dan petunjuk dari Allah ﷻ kepada umat manusia, yang menjadi petunjuk bagi penulis untuk memahami entitas-Nya dalam ayat-ayat kauliah, yaitu alam fisis dan fenomena yang terjadi di dalamnya.

Secara khusus Skripsi ini penulis persembahkan sebagai wujud terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta, terkhusus kepada Ibunda yang telah berjuang seorang diri dalam mendidik dan mengasuh penulis dari kecil hingga dewasa dengan penuh kesabaran dan pengorbanan serta do'a dan nasehat yang tak ternilai sebab Ayahanda penulis telah berpulang ke sisi-Nya sejak penulis masih dalam kandungan. Meskipun demikian, rasa syukur dan terima kasih tetap tercurahkan kepada Ayahanda tercinta yang telah menginspirasi penulis melalui buku-buku bacaan dan tulisan beliau. Semoga keduanya senantiasa diridhai oleh Allah ﷻ ; Amien.

Dalam penyusunan Skripsi ini, penulis banyak mendapat bantuan dari pihak, baik secara materil maupun moril. Oleh karena itu penulis sampaikan terima kasih yang setinggi-tingginya, terutama kepada:



1. Drs. Bansawang BJ, M.Si. dan Prof. Dr. Tasrief Surungan, M.Sc., masing-masing selaku pembimbing utama dan pembimbing pertama yang telah membimbing, mengarahkan dan memotivasi penulis, serta Azwar Sutiono, S.Si., M.Si. yang juga turut membantu penulis dalam memahami sistem dinamika kosmologi dan plot evolusinya.
2. Dosen-dosen penguji, Prof. Dr. rer.nat. Wira Bahari Nurdin, Prof. Dr. Syamsir Dewang, M.Eng.Sc., dan Eko Juarlin, S.Si., M.Si., atas kritikan, saran dan masukannya.
3. Dr. H. Arifin, MT., selaku Ketua Departemen Fisika Unhas yang senantiasa memotivasi penulis agar segera menyelesaikan studi dan Skripsi ini. Bapak dan Ibu Dosen serta staf Departemen Fisika Unhas yang telah membimbing dan mengarahkan penulis selama di bangku perkuliahan.
4. Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi atas bantuan dana penelitian melalui Hibah Program Kreativitas Mahasiswa (PKM) 5 Bidang Tahun Anggaran 2018.
5. Rekan-rekan Laboratorium Fisika Teori dan Komputasi, L. M. Aldin Haswari dan La Faras yang turut membantu penulis. Kanda Muh. Syahrul Padli, S.Si. yang telah meluangkan waktunya untuk berdiskusi dengan penulis mengenai geometri, kanda Abd. Muin Banyal, S.Si., kanda Wahyudi, dan kanda Asri atas diskusi dan bantuannya.
6. Muh. Fauzi Mustamin, S.Si. dan Sultan, S.Si., selaku sahabat seperjuangan penulis, yang telah banyak meluangkan waktunya untuk berdiskusi dan selalu memotivasi penulis agar segera menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Sanak saudara dan keluarga yang telah banyak memberikan bantuannya selama penulis menuntut ilmu, serta semua pihak yang telah memberi bantuan dan partisipasinya terhadap penulis dalam rangka penyelesaian Skripsi ini.

Lewat penyusunan Skripsi ini tentunya penulis banyak menghadapi berbagai tantangan serta kesulitan, namun karena bimbingan, arahan, nasehat dan dukungan dari semua pihak, akhirnya semua hambatan dan kesulitan tersebut dapat





Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik, saran dan masukan yang membangun dari pembaca agar Skripsi ini menjadi lebih baik. Segala bentuk kritikan, saran dan masukan dapat dikirimkan ke alamat email penulis<sup>1</sup>. Saran dan masukan dari pembaca akan sangat bermanfaat bagi penulis.

Akhirnya, penulis berharap semoga setiap bantuan dan kontribusi yang telah diberikan oleh semua pihak yang terlibat dalam penyusunan Skripsi ini dapat menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang terbaik dari Allah ﷻ, Sang Pencipta dan Pengatur alam semesta yang kompleks ini. Penulis juga berharap semoga Skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita sekalian, khususnya bagi dunia riset di bidang fisika teoretik.

Makassar, Desember 2018

M. N. Gazali Yunus



.gazaliyunus@gmail.com

*“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan pergantian malam dan siang terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang-orang yang berakal, (yaitu orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri, duduk, atau dalam keadaan berbaring, dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata), Ya Tuhan kami, tidaklah Engkau menciptakan semua ini dengan sia-sia; Maha Suci Engkau, lindungilah kami dari azab neraka.”*

— QS. ALI ‘IMRAN (3): 190-191

*“God could have made the Universe in a different way; that is, whether the necessity of logical simplicity leaves any freedom at all.”*

— ALBERT EINSTEIN

*“If you can’t explain a result in simple, nontechnical terms, then you don’t really understand it.”*

— ERNEST RUTHERFORD

*“I was sure that nearly everyone is interested in how the universe operates, but most people cannot follow mathematical equations.”*

— STEPHEN HAWKING, *My Brief History*

*“Even most people who are enthusiastic about string theory tend to underestimate how radical it will prove to be in its impact on how we understand physical law.”*

— EDWARD WITTEN, Institute for Advanced Study

*“I believe there is something basic we are all missing, some wrong assumption we are all making. ... If string theory or loop quantum gravity by themselves were the answer, we would know it by now. They may be starting points, they may be parts of the answer, they may contain necessary lessons. But the right theory must contain new elements.”*

— LEE SMOLIN, Perimeter Institute

*... doesn’t work as simply as you think, that is very complex.”*

— M. N. GAZALI YUNUS, Hasanuddin University



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN SAMPUL</b> .....	<b>i</b>
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	<b>iii</b>
<b>PERNYATAAN</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>v</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>vi</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>xi</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xv</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xvi</b>
<b>DAFTAR SINGKATAN DAN LAMBANG</b> .....	<b>xvii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
I.1 Latar Belakang .....	1
I.2 Rumusan Masalah .....	4
I.3 Tujuan Penelitian .....	4
I.4 Ruang Lingkup Penelitian .....	5
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	<b>6</b>
II.1 Perumusan Persamaan Medan Einstein .....	6
II.2 Aksi Einstein-Hilbert .....	8
II.3 Persamaan Medan Einstein dengan Konstanta Kosmologi .....	12
II.4 Metrik Friedmann-Robertson-Walker .....	15
II.5 Persamaan Friedmann .....	18



<b>BAB III PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN DALAM DUNIA BRANE..</b>	<b>22</b>
III.1 Prinsip Aksi Einstein-Hilbert dalam Dunia <i>Brane</i> .....	22
III.2 Geometri Dunia <i>Brane</i> .....	25
III.3 Persamaan Medan Einstein “ Efektif ” pada <i>Brane</i> .....	28
<b>BAB IV KOSMOLOGI DUNIA BRANE .....</b>	<b>34</b>
IV.1 Metrik FRW dalam Dunia <i>Brane</i> .....	34
IV.2 Persamaan Friedmann dalam Dunia <i>Brane</i> .....	35
IV.3 Limit Energi Rendah dan Kosmologi pada Daerah Energi Tinggi	46
<b>BAB V DINAMIKA KOSMOLOGI DUNIA BRANE .....</b>	<b>50</b>
V.1 Persamaan Dinamik pada Kosmologi Dunia <i>Brane</i> .....	50
V.2 Pendekatan Sistem Dinamik pada <i>Brane</i> .....	51
V.3 Dinamika Alam Semesta <i>Brane</i> .....	56
V.4 Awal-awal Alam Semesta <i>Brane</i> .....	58
<b>BAB VI KONSTANTA KOSMOLOGI NON-LOKAL .....</b>	<b>61</b>
VI.1 Konstanta Kosmologi “ Efektif ” dalam Dunia <i>Brane</i> .....	61
VI.2 Energi Gelap dalam Dunia <i>Brane</i> .....	63
VI.3 Jari-jari Kelengkungan <i>Bulk AdS 5D</i> .....	65
<b>BAB VII KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>	<b>68</b>
VII.1 Kesimpulan .....	68
VII.2 Saran .....	69
<b>LAMPIRAN A .....</b>	<b>71</b>
<b>LAMPIRAN B .....</b>	<b>88</b>
<b>LAMPIRAN C .....</b>	<b>96</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>98</b>



## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b>	Ilustrasi gravitasi Einstein sebagai efek dari kelengkungan ruang-waktu akibat distribusi materi dan energi .....	7
<b>Gambar 2.2</b>	Bentuk ruang manifold $\Sigma$ dengan kelengkungan yang berbeda, (a) <i>flat</i> , $k = 0$ , (b) kelengkungan positif, $k = +1$ ( <i>closed</i> ), dan (c) kelengkungan negatif, $k = -1$ ( <i>open</i> ) .....	17
<b>Gambar 3.1</b>	Skenario dunia <i>brane</i> dalam ruang-waktu 5D .....	22
<b>Gambar 3.2</b>	Skema geometri dunia <i>brane</i> .....	25
<b>Gambar 3.3</b>	<i>Gauss map</i> .....	26
<b>Gambar 3.4</b>	Medan gravitasi dari sumber materi dalam <i>brane</i> pada teraan RS, menunjukkan kelengkungan dalam <i>bulk</i> .....	29
<b>Gambar 3.5</b>	Ilustrasi simetri $Z_2$ model RS1 dalam skenario dunia <i>brane</i> ....	31
<b>Gambar 5.1</b>	Lintasan solusi ruang fase untuk persamaan (5.12)-(5.13) pada titik tetap $(\Omega_\Lambda, \Omega) \cong (1, 0)$ dengan variasi $w_\Lambda$ . (a) Untuk $w_\Lambda > 0$ , titik kritis (2) pada titik $x \equiv x_1 = 1, y \equiv x_2 = 0$ adalah titik <i>saddle</i> . (b) Untuk $w_\Lambda = 0$ , solusi menjadi tidak stabil, dan (c) untuk $w_\Lambda < 0$ , titik kritis (1) pada titik $x = 1, y = 0$ adalah titik stabil, sedangkan titik kritis (2) pada titik $x = 0, y = 0$ adalah titik <i>saddle</i> .....	54
<b>Gambar 5.2</b>	Lintasan solusi ruang fase untuk persamaan (5.12)-(5.13) pada titik tetap $(\Omega_\Lambda, \Omega) \cong (1, 0)$ dengan variasi $w_\Lambda$ adalah $-4/3 < w_\Lambda < -1/3$ , dimana titik kritis (1) pada titik $x \equiv x_1 = 1, y \equiv x_2 = 0$ adalah titik stabil, sedangkan titik kritis (2) pada titik $x = 0, y = 0$ adalah titik <i>saddle</i> .....	55



<b>Gambar 5.3</b>	Evolusi dari $\Omega_\Lambda$ , $\Omega_m$ , dan $\Omega_R$ dengan radiasi total efektif, $\Omega_R = \Omega_r + \Omega_u$ , seiring dengan evolusi persamaan keadaan total efektif, $w_{\text{eff}}$ dan persamaan keadaan energi gelap, $w_\Lambda = -4/3 + e^{-N}$ . Kondisi awal diberikan sebagai $x_1 = 0.5 \times 10^{-7}$ , $x_2 = 0.12$ , $x_3 = 0.65$ , $x_4 = 0.745$ pada $N = 0$ .....	57
<b>Gambar 5.4</b>	Evolusi dari komponen penyusun radiasi total efektif $\Omega_u$ , $\Omega_r$ , dengan $\Omega_r = \Omega_r^{(1)} + \Omega_r^{(2)}$ (kurva putus-putus warna abu-abu), dan $w_{\text{eff}}$ pada daerah energi tinggi (awal-awal alam semesta) .	59
<b>Gambar 5.5</b>	Daerah dominasi suku koreksi energi tinggi pada kondisi paling awal alam semesta (era dominasi radiasi) dengan kurva padat warna abu-abu adalah $\Omega_r^{(2)} + \Omega_u$ .....	60
<b>Gambar 6.1</b>	Evolusi dari $\Omega_\rho$ dan $\Omega_\Lambda$ untuk $\Omega_\Lambda$ (kurva putus-putus warna abu-abu) memenuhi persamaan (6.12)-(6.14). Kondisi awal diberikan sebagai $x_5 = x_1 = 0.5 \times 10^{-7}$ pada $N = 0$ .....	64
<b>Gambar 6.2</b>	Jari-jari skala kelengkungan ruang-waktu <i>bulk</i> AdS 5D mengikuti persamaan (6.17) yang bergantung pada evolusi $\Omega_\rho$ terhadap $N$ .....	66
<b>Gambar B.1</b>	Transformasi konformal dengan faktor $\Omega^2$ .....	89
<b>Gambar B.2</b>	Polarisasi gelombang gravitasi penuh pada kuantitas $h_{\mu\nu}^{TT}$ .....	95



## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 2.1</b>	Parameter persamaan keadaan materi-energi .....	20
<b>Tabel 5.1</b>	Variasi $w_\Lambda$ pada titik tetap $(\Omega_\Lambda, \Omega) \cong (1, 0)$ .....	53



## DAFTAR LAMPIRAN

<b>A</b>	<b>PERHITUNGAN DETAIL</b> .....	<b>71</b>
A.1	Penurunan Persamaan Gauss-Codazzi-Mainardi .....	71
A.2	Penguraian Proyeksi Tensor Riemann 5D: $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ .....	77
A.3	Kondisi Israel <i>Junction</i> .....	79
A.4	Simbol Christoffel, Tensor Ricci, dan Skalar Ricci Metrik FRW pada <i>Brane</i> .....	80
A.5	Persamaan Konservatif dan Kontinuitas .....	85
<b>B</b>	<b>TENSOR KELENGKUNGAN WEYL: <math>C_{\mu\nu\rho\sigma}</math></b> .....	<b>88</b>
B.1	Suku ‘ <i>Electric</i> ’ dan ‘ <i>Magnetic</i> ’ Weyl .....	89
B.2	Suku <i>Transverse-Traceless</i> Weyl dan Polarisasi Gelombang Gravitasi ....	92
<b>C</b>	<b>SATUAN</b> .....	<b>96</b>
C.1	Tetapan Fisis dan Satuan Alami .....	96
C.2	Konversi Satuan .....	97





## DAFTAR SINGKATAN DAN LAMBANG

Singkatan	Definisi
TOE	<i>Theory of Everything</i>
4D, 5D, ... 10D	4-Dimensi, 5-Dimensi, ... (D = Dimensi)
AdS	Anti de-Sitter
RS1	Model 1 Randall-Sundrum
RS2	Model 2 Randall-Sundrum
DGP	Dvali-Gabadadze-Porrati
EH	Einstein-Hilbert
FRW	Friedmann-Robertson-Walker
AdS <sub>5</sub>	Ruang-waktu 5D murni Anti de-Sitter
SN Ia	Supernovae tipe Ia
CMB	<i>Cosmic Microwave Background</i>
BAO	<i>Baryon Acoustic Oscillations</i>
WMAP	<i>Wilkinson Microwave Anisotropy Probe</i>
$\Lambda$ CDM	$\Lambda$ - <i>Cold Dark Matter</i>
QCD	<i>Quantum Chromo-Dynamics</i>
GB	Gauss-Bonnet
TT	<i>Transverse-Traceless</i>

Lambang	Definisi
---------	----------



Manifold ruang  $n$ -dimensi

Manifold kompak internal ruang ekstra 1D

Lambang	Definisi
$\Sigma$	Permukaan-hiper, <i>brane</i>
$\mathcal{M}$	Ruang-waktu penuh, <i>bulk</i>
$\Lambda_5$	Konstanta kosmologi non-lokal dalam <i>bulk</i>
$g_{\mu\nu}$	Metrik ruang-waktu penuh
$q_{\mu\nu}$	Metrik induksi pada $\Sigma$
$n_\mu$	Vektor satuan normal pada $\Sigma$
$u_\mu$	Medan vektor kecepatan ruang-waktu 4D
$h_{\mu\nu}$	Metrik ruang pada $\Sigma$
$D_\mu$	Operator turunan kovarian pada $\Sigma$
$\nabla_\mu$	Operator turunan kovarian dalam ruang-waktu penuh

Catatan:

Dalam Skripsi ini terdapat beberapa lambang ditulis sama dengan makna berbeda. Untuk itu, setiap lambang yang ditulis di dalam teks isi Skripsi ini diberikan penjelasan sesuai dengan konteks pembahasan.



# BAB I

## PENDAHULUAN

### I.1 Latar Belakang

Kosmologi merupakan salah satu kajian fisika teori yang sangat ramai diteliti saat ini. Teori kosmologi yang sudah sangat maju, juga didukung kuat oleh hasil-hasil eksperimen dan observasi kosmik. Tujuan utama studi ini adalah untuk menggambarkan evolusi alam semesta dari waktu awal hingga sekarang dan bahkan prediksi alam semesta kedepannya. Salah satu kesuksesan besar kosmologi adalah mampu menggambarkan secara rinci keadaan awal evolusi alam semesta. Tidak hanya itu, kosmologi juga mampu menjelaskan struktur skala besar alam semesta seperti yang terlihat saat ini. Gambaran matematis kosmologi diberikan dalam ungkapan persamaan medan Einstein yang digagas pertama kali pada tahun 1915. Materi-energi dalam teori ini menjadi dasar untuk semua model kosmologi. Dalam persamaan medan Einstein, materi-energi diperkenalkan melalui tensor energi-momentum yang bergantung dari teori yang mendasarinya.

Kemajuan penelitian dalam fisika teori saat ini juga telah sampai pada pencarian sebuah teori yang mampu menjelaskan keempat gaya-gaya fundamental (nuklir lemah, elektromagnetik, nuklir kuat, dan gravitasi) dalam satu teori unifikasi, yaitu *Theory of Everything* (TOE). Teori unifikasi ini menurut para fisikawan mampu menjelaskan keadaan paling awal alam semesta secara akurat, sebab diyakini bahwa sebelum gaya-gaya fundamental terpisah-pisah seperti saat ini, semua gaya fundamental mulanya terunifikasi pada skala energi yang sangat tinggi atau pada temperatur yang sangat tinggi, yaitu pada titik awal alam semesta.

Namun kendala dalam teori unifikasi ini adalah sangat sulit menyatukan gaya yang bersifat makroskopik dengan gaya lainnya yang sifatnya mikroskopik. Salah satu upaya untuk menyatukan gravitasi dengan gaya lainnya dengan melakukan penyetaraan yang menggagas suatu boson pembawa



medan gravitasi yaitu graviton. Namun, gravitasi sebagai objek geometris berdasarkan teori relativitas Einstein tidak dapat terkuantisasi dan graviton yang dianggap sebagai partikel pembawa medan gravitasi belum ditemukan secara eksperimen. Selain itu, konsep graviton dalam teori kuantum-gravitasi (*Quantum Gravity*) sangat asing dan tidak kompatibel dengan relativitas umum, sehingga perlu dilakukan modifikasi persamaan medan Einstein dalam relativitas umum.

Pada tahun 1970-an, Leonard Susskind, seorang fisikawan asal Stanford University berhasil menemukan sebuah partikel dengan struktur internal yang dapat merapat dan meregang, serta memutar dan memuntir dari persamaan matematis Gabriele Veneziano untuk gaya nuklir kuat. Partikel tersebut tidak berbentuk titik atau bola seperti gambaran fisika kuantum, melainkan berbentuk seperti tali (*string*) yang bergetar pada 9 arah ruang yang kemudian dikenal sebagai teori *string* [1]. Pada tahun 1980-an, teori *string* dikembangkan dengan mengompaktifikasikan *bosonic string* 26-dimensi pada ruang-waktu 10-dimensi (10D) yang kemudian dikenal sebagai teori *superstring* dan memberikan 5 tipe *string* yang berbeda, yakni: tipe I, tipe IIA, tipe IIB, heterotik  $SO(32)$ , dan heterotik  $E_8 \times E_8$  [1,2]. Pada tahun 1995, Edward Witten berhasil menggabungkan kelima teori *string* tersebut menjadi sebuah teori tunggal yang disebut teori-M. Dalam teori ini, Witten menambahkan 1 dimensi ruang dengan simetri  $Z_2$  ke dalam persamaannya dan menjadikan *superstring* 10D terunifikasi melalui kompaktifikasi dan *duality* pada ruang-waktu 11-dimensi (11D) [1-4].

Saat ini, teori-M 11D diyakini oleh para fisikawan sebagai salah satu kandidat TOE yang paling kuat karena mampu menjelaskan kembali fisika kuantum dan relativitas Einstein dengan sangat baik melalui kompaktifikasi [1]. Pada tahun 1996 Horava-Witten menunjukkan bahwa *string* heterotik  $E_8 \times E_8$  10D setara dengan realisasi teori-M dalam *orbifold* 11D  $\mathbf{R}^{10} \times \mathbf{S}^1/Z_2$ . Ruang-waktu 11D ini kemudian dikompaktifikasi menjadi  $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{S}^1/Z_2 \times [\text{Calabi-Yau}]^6$  [3,4]. Karena ruang ekstra Calabi-Yau 6-dimensi (6D) sangat kecil, lebih kecil dari dimensi lain,

ruang ekstra ini dapat direduksi ke dalam ruang-waktu 5-dimensi (5D)  $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{S}^1/Z_2$ , dengan ruang-waktu 4D sebagai suatu lapisan batas pada waktu 5D [1,5]. Dalam skenario dunia *brane* yang didasari teori Horava-



Witten, ruang-waktu 4D digambarkan sebagai dinding domain atau sebuah permukaan-hiper (*hypersurface*) disebut sebagai *brane* dan ruang-waktu 5D dikenal sebagai ruang-waktu *bulk* [3-5]. Partikel model standar terkurung pada *brane*, sedangkan graviton terpancar dalam ruang-waktu *bulk* [5]. Dalam hal ini, medan materi hanya terbatas pada *brane*, sedangkan gravitasi bertindak dalam ruang-waktu penuh 5D.

Skenario dunia *brane* telah menjadi subjek penelitian intensif di bidang fisika teoretik sejak memasuki abad ke-21. Selain teori Horava-Witten, skenario dunia *brane* juga dipelopori oleh Randall-Sundrum (1999), dimana *brane* yang identik dengan tensi positif ( $\sigma$ ) tertanam dalam ruang-waktu Anti de-Sitter (AdS) 5D dengan dimensi ekstra kecil [6,7]. Selain model Randall-Sundrum, terdapat juga model dunia *brane* lain yang diusulkan oleh Dvali, Gabadadze, dan Porrati (DGP) (2000). Dalam model DGP, ruang-waktu 4D digambarkan sebagai dinding domain *3-brane* tertanam dalam ruang-waktu *bulk* Minkowski dengan volume dimensi ekstra yang sangat besar dan tak hingga [8,9]. Skenario dunia *brane* yang diberikan oleh Referensi [3,4,6-9] dapat memberikan gambaran baru untuk memahami evolusi alam semesta pada pendekatan dimensi tinggi dalam kosmologi dengan memodifikasi persamaan medan Einstein biasa ke bentuk persamaan medan Einstein efektif 4D yang diperoleh dari proyeksi metrik 5D [10]. Persamaan medan Einstein efektif ini dapat memberikan gambaran kontribusi materi energi tinggi dan bahkan graviton dalam modifikasinya.

Penelusuran persamaan medan Einstein efektif 4D dalam dunia *brane* melalui analisa tensor dari proyeksi metrik 5D telah diberikan oleh Referensi [10-12]. Dalam penelitian ini dilakukan penelusuran persamaan medan Einstein efektif 4D dalam dunia *brane* melalui prinsip aksi Einstein-Hilbert seperti yang telah diberikan oleh Referensi [5,13-17]. Solusi kosmologi dari persamaan medan Einstein efektif 4D dalam dunia *brane* dan dinamika kosmologinya diberikan oleh Referensi [13-21], dan dalam penelitian ini, dinamika kosmologi ditinjau pada energi tinggi serta efek non-lokal pada limit energi rendah. Beberapa penelitian lain yang menjadi landasan dilakukannya studi dinamika kosmologi skenario dunia *brane* ini adalah adanya studi materi gelap [22] dan energi



gelap dalam model dunia *brane* [23,24], bahkan graviton dalam kosmologi dunia *brane* [25]. Dinamika kosmologi dari hasil penelitian dan pengamatan Supernovae (SNe) tipe Ia yang diberikan oleh Referensi [26-29] menunjukkan bahwa alam semesta mengalami ekspansi dipercepat dengan adanya kontribusi konstanta kosmologi,  $\Lambda$  sebagai rapat energi gelap,  $\Omega_\Lambda$ . Kontribusi energi gelap berdasarkan hasil pengamatan SNe Ia tersebut adalah  $\Omega_\Lambda \approx 0,7$  sedangkan kontribusi materi  $\Omega_M \approx 0,3$  yang meliputi materi, radiasi, dan materi gelap yang lebih dominan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini ditelusuri dinamika kosmologi dalam skenario dunia *brane* dengan meninjau kontribusi materi-energi sebagai fluida ideal dengan rapat materi,  $\rho$  dan konstanta kosmologi,  $\Lambda$  sebagai energi gelap, serta studi pengaruh konstanta kosmologi non-lokal,  $\Lambda_5$  dalam dinamika kosmologi dunia *brane*.

## I.2 Rumusan Masalah

Bagaimana bentuk persamaan medan Einstein efektif 4D jika ditinjau pada dimensi tinggi dalam skenario dunia *brane*. Selain itu, bagaimana solusi kosmologi dari persamaan medan Einstein efektif tersebut dalam dunia *brane*. Bagaimana dinamika kosmologinya jika ditinjau kontribusi konstanta kosmologi,  $\Lambda$  sebagai energi gelap dan pengaruh konstanta kosmologi non-lokal,  $\Lambda_5$  dalam *bulk* 5D terhadap sistem dinamikanya dalam skenario dunia *brane*.

## I.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menurunkan persamaan medan Einstein efektif 4D dari prinsip aksi Einstein-Hilbert dan proyeksi metrik 5D.
2. Merumuskan persamaan Friedmann dari persamaan medan Einstein efektif 4D dan metrik FRW dalam skenario dunia *brane* dengan meninjau kontribusi materi-energi sebagai fluida ideal.
3. Menurunkan dinamika kosmologi dari persamaan Friedmann dalam skenario *brane* dan menggambarkan dinamika kosmologinya jika ditinjau  $\Lambda$  sebagai energi gelap serta menggambarkan pengaruh  $\Lambda_5$  dalam *bulk* 5D terhadap sistem dinamikanya.



#### I.4 Ruang Lingkup Penelitian

Penelitian ini difokuskan pada perumusan persamaan medan Einstein efektif 4D dalam dunia *brane* dari prinsip aksi Einstein-Hilbert dengan memproyeksikan metrik 5D. Solusi kosmologi dari persamaan medan Einstein efektif 4D dalam dunia *brane* ditinjau pada limit energi rendah, dan juga pada daerah energi tinggi dengan tidak mengabaikan suku kuadratik,  $\Pi_{\mu\nu}$  yang relevan dengan energi tinggi dan suku tensor Weyl,  $E_{\mu\nu}$  yang relevan dengan graviton 5D dalam *bulk*. Selanjutnya, ditelusuri metrik FRW dalam dunia *brane* dengan meninjau koordinat normal Gaussian,  $dy = n_\mu dx^\mu$  dalam ruang-waktu *bulk* 5D yang kemudian diturunkan pada *brane* 4D. Dinamika kosmologi dunia *brane* diperoleh dari perumusan persamaan Friedmann dalam dunia *brane* yang juga menggambarkan dinamika kosmologi pada daerah energi tinggi. Gambaran evolusi alam semesta dalam dinamika kosmologi dunia *brane* diturunkan melalui pendekatan sistem dinamik dengan memperkenalkan variabel-variabel tak-berdimensi dan persamaan-persamaan *autonomous*. Kemudian penelitian ini dibatasi hanya sampai pada dinamika kosmologi dunia *brane* dengan meninjau konstanta kosmologi,  $\Lambda$  sebagai energi gelap, dan pengaruh konstanta kosmologi non-lokal,  $\Lambda_5$  dalam *bulk* 5D terhadap dinamika kosmologinya dalam skenario dunia *brane*.



## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### II.1 Perumusan Persamaan Medan Einstein

Sebelum perumusan teori relativitas umum mengenai gravitasi oleh Albert Einstein, teori Newton tentang gravitasi menjadi sangat fundamental sejak masanya. Fenomena gerak benda langit yang berinteraksi melalui gaya gravitasi dapat diterangkan dengan teori gravitasi Newton, dimana persamaan gravitasi Newton memenuhi persamaan Poisson dengan distribusi materi  $\rho$ , yang menjadi sumber gravitasi [30,31].

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho , \quad (2.1)$$

dengan  $\phi$  dan  $G$  masing-masing adalah potensial skalar dan konstanta gravitasi Newton. Namun, teori gravitasi Newton hanya mampu menjelaskan fenomena gravitasi yang bersifat non-relativistik. Hal ini menuntun Einstein untuk merumuskan kembali teori gravitasi yang bersesuaian dengan teori relativitas khusus, dimana materi dan energi setara. Akibatnya, radiasi dan medan listrik ataupun bentuk energi lainnya dapat pula menghasilkan medan gravitasi.

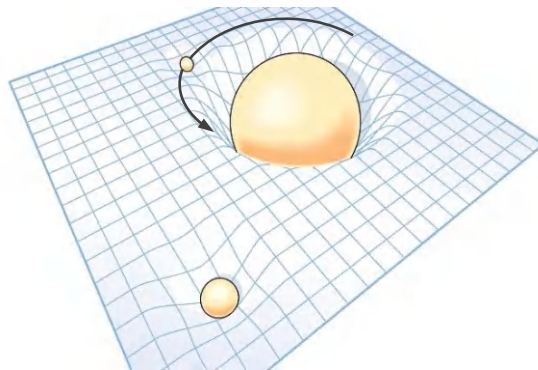
Berdasarkan asas kesetaraan, pada tahun 1915 Einstein berhasil merumuskan kembali teori gravitasi Newton dalam teori relativitas umumnya dengan berasumsi bahwa gravitasi tidak seperti gaya-gaya lainnya, melainkan gravitasi merupakan efek dari kelengkungan ruang-waktu yang diakibatkan oleh distribusi materi dan energi. Dengan asumsi tersebut, Einstein menggambarkan gerak benda-benda langit yang berinteraksi melalui gaya gravitasi ditentukan oleh kelengkungan

ruang-waktu objek dengan massa yang besar [31]. Objek dengan massa yang besar melengkungkan ruang-waktu lebih besar dibanding objek yang massanya lebih kecil. Akibatnya objek dengan massa yang lebih kecil akan bergerak relatif terhadap





objek yang massanya lebih besar. Secara umum gambaran dari gravitasi dalam teori relativitas umum Einstein dapat dilihat pada Gambar 2.1 berikut.



**Gambar 2.1** Ilustrasi gravitasi Einstein sebagai efek dari kelengkungan ruang-waktu akibat distribusi materi dan energi

Sumber: Encyclopædia Britannica, Inc. 2012.

Selain asas kesetaraan, teori relativitas umum juga dibangun dari asas kovariansi umum yang menyatakan bahwa semua sistem koordinat yang digunakan dalam mengungkapkan hukum-hukum fisika sama baiknya dan berlaku sama, serta harus memiliki bentuk yang kovarian. Selain itu, hukum fisika dalam tinjauan ruang-waktu dituliskan dalam notasi tensor dan menggunakan ruang-waktu lengkung Riemann [31]. Atas dasar itu, Einstein kemudian merumuskan persamaan medan gravitasi menggunakan ruang-waktu 4 dimensi yang melengkung (ruang Riemann) untuk mendeskripsikan kontribusi materi-energi dalam ruang, yang umumnya dikenal sebagai persamaan medan Einstein. Dengan menggunakan analisis tensor, diperoleh bentuk umum persamaan medan Einstein sebagai berikut [12,30-32]

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (2.2)$$

dimana  $G_{\mu\nu}$  dan  $T_{\mu\nu}$  masing-masing adalah tensor Einstein dan tensor energi-momentum yang mendeskripsikan distribusi materi dalam ruang-waktu 4 dimensi.  $R_{\mu\nu}$  merupakan tensor kelengkungan dari geometri ruang yang dikenal sebagai

cci

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} . \quad (2.3)$$



Adapun  $R$  dalam persamaan (2.2) adalah skalar Ricci, dengan  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , dan  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  dalam persamaan (2.3) merupakan simbol Christoffel jenis kedua yang diberikan oleh

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}), \quad (2.4)$$

dengan  $g_{\mu\nu}$  dan  $g^{\mu\nu}$  masing-masing adalah tensor metrik dalam bentuk kovarian dan kontravarian.

$\kappa$  pada persamaan (2.2) merupakan tetapan penyetaraan yang nilainya belum diketahui. Untuk menentukan nilai dari  $\kappa$ , maka persamaan medan Einstein dapat direduksi menjadi hukum gravitasi Newton. Reduksi persamaan medan Einstein dalam limit non-relativistik dan medan gravitasi lemah serta dalam medan statik akan diperoleh nilai  $\kappa = 8\pi G/c^4$  [31], sehingga persamaan medan Einstein secara lengkap dapat dituliskan sebagai

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

dengan  $c$  adalah kecepatan cahaya yang nilainya dalam konsep relativistik dapat dipilih sama dengan 1 ( $\hbar = c = 1$ ).

## II.2 Aksi Einstein-Hilbert

Selain melalui analisa tensor, persamaan medan Einstein dapat diturunkan kembali dari prinsip aksi yang digagas oleh David Hilbert pada tahun 1915 berdasarkan pekerjaan Einstein sebelumnya, yang kemudian dikenal sebagai aksi Einstein-Hilbert. Perumusan medan Einstein dengan aksi Einstein-Hilbert akan dapat diperoleh hubungan sistematis antara tensor energi-momentum dengan Lagrangian materi [31]. Dimana Lagrangian materi ini sangat ampuh dalam menjabarkan dinamika dan energi sistem serta dapat dipahami dengan baik.

Dalam mekanika klasik benda titik, besaran aksi merupakan integral dari energi sistem terhadap waktu, yang dinyatakan sebagai

$$S = \int L dt. \quad (2.6)$$



Sedangkan dalam teori medan klasik yang merupakan generalisasi dari mekanika benda titik, yaitu dengan mengambil banyaknya titik-titik menjadi tak berhingga sehingga variabel-variabel yang digunakan adalah variabel kontinu dalam ruang-waktu, yang kemudian dinyatakan sebagai rapat Lagrangian  $\mathcal{L}$ , dimana  $\mathcal{L} = dL/dV$ , maka besaran aksi dapat dituliskan menjadi

$$S = \int \mathcal{L} dV dt = \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x \quad , \quad (2.7)$$

dengan  $\sqrt{-g} d^4x$  adalah integral ruang-waktu 4D, dimana  $\sqrt{-g}$  merupakan Jacobian ruang-waktu yang diperoleh dari penggabungan komponen ruang  $dV = J(x^i) d^3x$  dengan komponen waktu  $dt$  atau  $dx^0$  ( $x^0 \equiv ct$ , dengan  $c = 1$ ). Sedangkan tanda negatif disisipkan untuk menjamin agar nilainya selalu positif karena dalam limit medan lemah, tensor metrik menuju metrik Minkowski mempunyai determinan  $-1$  [31].

Lagrangian dan rapat Lagrangian adalah skalar, dimana rapat Lagrangian dalam aksi Einstein-Hilbert merupakan rapat Lagrangian gravitasi ditambahkan dengan rapat Lagrangian materi sebagai sumber dari gravitasi. Rapat Lagrangian dalam aksi Einstein-Hilbert dapat dituliskan sebagai [31]

$$\mathcal{L} = \frac{R}{2\kappa} - \mathcal{L}_M \quad , \quad (2.8)$$

dengan  $\mathcal{L}_G \equiv R/2\kappa$  adalah rapat Lagrangian gravitasi dan  $\mathcal{L}_M$  adalah rapat Lagrangian materi sebagai sumber gravitasi. Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (2.8) ke dalam persamaan (2.7) maka aksi Einstein-Hilbert dapat dituliskan menjadi

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2\kappa} - \mathcal{L}_M \right) d^4x \quad . \quad (2.9)$$

Berdasarkan prinsip aksi Hamilton, variasi dari suatu aksi haruslah sama dengan nol [31]. Jadi variasi dari aksi Einstein-Hilbert dapat dituliskan sebagai.

$$\delta S_{EH} = 0 = \delta \int \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2\kappa} - \mathcal{L}_M \right) d^4x$$



$$= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) - \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) . \quad (2.10)$$

Selanjutnya, dengan meninjau terlebih dahulu integrasi suku pertama dari variasi aksi Einstein-Hilbert pada persamaan (2.10) di atas, dimana

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) + \int d^4x R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Jika menggunakan teorema Gauss, maka integral dari  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$  pada suku pertama persamaan (2.11) akan lenyap karena berubah menjadi integral permukaan yang variasinya adalah nol [31]. Sehingga yang tersisa adalah integral suku kedua pada persamaan (2.11) yang jika diuraikan akan diperoleh

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) = \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + \int d^4x g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} (\delta \sqrt{-g}) . \quad (2.12)$$

Relasi dari variasi determinan metrik  $\delta \sqrt{-g}$  pada suku kedua persamaan (2.12) adalah [31,32]

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} . \quad (2.13)$$

Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (2.13) ke dalam persamaan (2.12), maka integrasi suku pertama dari variasi aksi Einstein-Hilbert (2.11) diperoleh

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) &= \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (2.14)$$

dimana  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$  adalah tensor Einstein dalam bentuk kovarian.

Selanjutnya ditinjau rapat Lagrangian materi pada integrasi suku kedua n (2.10), dan mengingat bahwa Lagrangian merupakan fungsi dari posisi an pertamanya,  $\mathcal{L}_M \equiv \mathcal{L}_M(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_{,\alpha})$ , [12,31] maka integrasi suku kedua amaan (2.10) dapat dituliskan menjadi



$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) &= \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \delta g_{,\alpha}^{\mu\nu} \\ &= \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \partial_\alpha(\delta g^{\mu\nu}) .\end{aligned}\quad (2.15)$$

Jika ditinjau kembali aturan diferensial parsial pada suku kedua persamaan (2.15), maka persamaan (2.15) dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) &= \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} (\delta g^{\mu\nu}) \right] .\end{aligned}\quad (2.16)$$

Mengacu pada persamaan Hamilton untuk variasi dari suatu aksi stasioner, maka suku kedua dari persamaan (2.16) menjadi lenyap atau sama dengan nol, sehingga persamaan (2.16) dapat dituliskan menjadi

$$\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) = \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} .\quad (2.17)$$

Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (2.17) dan (2.14) ke dalam persamaan (2.10), dan mengambil variasi total dari aksi Einstein-Hilbert,  $\delta S_{EH} = 0$ , maka variasinya dapat dituliskan menjadi

$$\int \left\{ G_{\mu\nu} - \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \right) \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 .\quad (2.18)$$

Dari persamaan (2.18) dan relasinya pada persamaan (2.14), dapat diperoleh persamaan medan gravitasi Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} ,\quad (2.19)$$

$T_{\mu\nu}$  tidak lain adalah tensor energi-momentum yang dapat dituliskan



$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \right) \right]. \quad (2.20)$$

Tensor energi-momentum pada persamaan (2.20) di atas merupakan sajian eksplisit untuk setiap medan materi selain gravitasi [32].

### II.3 Persamaan Medan Einstein dengan Konstanta Kosmologi

Jika ditinjau kembali aksi Einstein-Hilbert pada persamaan (2.9), maka aksi Einstein-Hilbert,  $S_{EH}$  dapat dituliskan menjadi

$$S_{EH} = S_G + S_M, \quad (2.21)$$

dimana  $S_G$  dan  $S_M$  masing-masing adalah aksi medan gravitasi dan aksi medan materi, yang dapat dituliskan sebagai [31]

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_G, \quad \text{dan} \quad S_M = - \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M. \quad (2.22)$$

Jika rapat Lagrangian gravitasi pada persamaan (2.8), dimana  $\mathcal{L}_G \equiv R/2\kappa$ , ditambahkan dengan suatu konstanta kosmologi, maka rapat Lagrangian gravitasi dapat dituliskan kembali menjadi [33]

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) = \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda), \quad (2.23)$$

dimana  $\Lambda$  dikenal sebagai konstanta kosmologi.

Dengan demikian, jika diambil variasi aksi Einstein-Hilbert sama dengan nol,  $\delta S_{EH} = 0$ , maka diperoleh

$$\delta S_{EH} = 0 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \delta[\sqrt{-g}(R - 2\Lambda)] + \delta S_M. \quad (2.24)$$

Selanjutnya, jika diuraikan kembali persamaan (2.24), dimana  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , maka diperoleh

$$\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda \right) \delta g^{\mu\nu} + \delta S_M = 0. \quad (2.25)$$



Jika ditinjau aksi medan materi pada persamaan (2.22), maka variasi aksinya,  $\delta S_M$  adalah

$$\delta S_M = - \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) . \quad (2.26)$$

Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (2.17) dan (2.20) ke dalam persamaan (2.26), akan diperoleh relasi antara tensor energi-momentum,  $T_{\mu\nu}$  dengan aksi medan materi, sehingga  $T_{\mu\nu}$  dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih kompak sebagai berikut [31,33]

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} , \text{ dan} \quad (2.27a)$$

$$T_{\mu\nu} = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (2.27b)$$

Dengan memasukkan persamaan (2.27a) ke dalam persamaan (2.25), maka diperoleh

$$\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda - 8\pi G T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0 . \quad (2.28)$$

Dari persamaan (2.28) di atas, diperoleh persamaan medan Einstein dengan konstanta kosmologi,  $\Lambda$  yang dituliskan sebagai [33]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = 8\pi G T_{\mu\nu} , \text{ atau} \quad (2.29a)$$

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (2.29b)$$

Jika ditinjau ruang vakum atau medan materi,  $\mathcal{L}_M = 0$ , maka akan diperoleh hubungan antara medan gravitasi Einstein dengan konstanta kosmologi, yaitu:

$$G_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu} \Lambda . \quad (2.30)$$

Persamaan medan Einstein dengan konstanta kosmologi,  $\Lambda$ , seperti pada persamaan

merupakan persamaan medan Einstein model statik.



Sebelum penemuan Edwin Hubble mengenai gerak menjauh antar-galaksi non-lokal, para fisikawan meyakini bahwa pada saat itu alam semesta berbentuk statik. Dimana solusi statik persamaan medan Einstein (2.19) adalah [31]

$$\frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 = -\frac{8\pi G}{c^2} p_0 \quad (2.31)$$

Persamaan (2.31) di atas menunjukkan bahwa tekanan materi menjadi negatif  $p_0 = -\rho_0$ , sesuatu yang jelas keliru. Hal ini dapat dijelaskan karena meskipun alam semesta statik pada mula-mula, namun gravitasi dari materi akan mengerutkan alam semesta sehingga solusi persamaan medan Einstein di atas tidaklah realistis.

Untuk mengatasi hal tersebut, Einstein kemudian memperkenalkan suatu konstanta invarian,  $g_{\mu\nu} \Lambda$  ke dalam persamaan medannya (seperti pada persamaan (2.29a)). Dengan  $\Lambda$  positif, akan menciptakan kelengkungan ruang-waktu yang melawan gaya tarik gravitasi dari materi. Adapun solusi statik dari persamaan (2.29) tersebut adalah [31]

$$\frac{k}{R_0^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \quad (2.32)$$

Persamaan (2.32) memberikan solusi alam semesta datar,  $k = 0$  bila  $\Lambda = -8\pi G\rho_0$ . Namun demikian solusi ini tidaklah stabil, karena selisih yang sangat kecil pun antara  $\rho_0$  dan  $\Lambda$  akan menghasilkan alam semesta yang berekspansi atau mengerut dengan cepat. Setelah penemuan Hubble di tahun 1929, Einstein pun membuang konstanta kosmologinya dan persamaan medannya kembali menjadi persamaan medan Einstein model dinamik (2.19) dengan mempertimbangkan model kosmologi baru yang berekspansi diperlambat [31].

Namun, penemuan belakangan ini memberikan informasi bahwa alam semesta berekspansi dipercepat, dan konstanta kosmologi Einstein pun digunakan kembali seperti pada persamaan (2.29b) dan  $\Lambda$  pun berubah menjadi kontribusi energi vakum [26-28]. Kontribusi dari energi vakum tersebut kemudian dikenal energi gelap yang menyebabkan alam semesta berekspansi dipercepat [29].





## II.4 Metrik Friedmann-Robertson-Walker

Metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW) merupakan solusi eksak persamaan medan Einstein yang memberikan deskripsi alam semesta makroskopis yang bersifat homogen (seragam) dan isotropik (sama ke segala arah). Selain itu, metrik FRW juga menggambarkan pengembangan/ ekspansi ruang secara seragam (ekspansi Hubble), dengan waktu kosmik,  $x^0 = t$  dalam kerangka yang bergerak bersama dengan pengembangan ruang. Secara makroskopik, alam semesta juga dapat dipandang sebagai ruang yang didominasi oleh radiasi dan materi berkerapatan,  $\rho$  rendah [31].

Metrik FRW dimulai dengan asumsi ruang homogen dan isotropik yang dinamik, dimana komponen ruang dari metrik ini bergantung terhadap waktu. Adapun bentuk umum dari metrik FRW ini adalah [34]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) d\sigma^2, \quad (2.33)$$

dengan  $c$  adalah kecepatan cahaya yang dipilih  $c = 1$ ,  $t$  adalah koordinat waktu,  $R(t)$  adalah fungsi faktor skala, dan  $d\sigma^2$  merupakan metrik dalam  $\Sigma$ , ruang 3-manifold simetri maksimal, yang diberikan sebagai [34]

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.34)$$

dimana  $(x^1, x^2, x^3)$  adalah koordinat dalam  $\Sigma$  dan  $\gamma_{ij}$  adalah metrik 3-dimensi simetri maksimal.

Karena diasumsikan bahwa ruang 3D homogen dan isotropik, maka kelengkungan ruang haruslah konstan atau tetap. Dalam hal ini, tensor Riemann dari ruang dibangun dari metrik dan konstanta tensor. Tensor Riemann dengan metrik 3-dimensi simetri maksimal diberikan oleh [32,34]:

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (2.35)$$

dimana  $k$  adalah konstanta yang bernilai,  $k = {}^{(3)}R/6$  untuk ruang 3-dimensi, tensor Ricci adalah [32]

$${}^{(3)}R_{jl} = 2k\gamma_{jl}. \quad (2.36)$$



Jika ruang simetri maksimal, maka dengan pasti persamaan (2.34) dapat menjadi simetri bola, sehingga persamaan (2.34) dapat dijabarkan menjadi [34]

$$d\sigma^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} kr^2\right)^2} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.37)$$

Dan jika ditransformasikan koordinat  $r \rightarrow \tilde{r}$ , dengan  $\tilde{r} = \frac{r}{1 + \frac{1}{4} kr^2}$ , maka metrik

$d\sigma^2$  pada persamaan (2.37) dapat dituliskan menjadi

$$d\sigma^2 = \frac{d\tilde{r}^2}{1 - k\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.38)$$

dengan nilai dari  $k$  adalah kelengkungan dan juga memberikan bentuk dari permukaan ruang, dengan normalisasi,  $k \in \{-1, 0, +1\}$  ketiganya memberi metrik ruang yang berbeda dan menyerap ukuran fisis dari manifold ke faktor skala,  $R(t)$  [31,32,34].

Jika  $k = -1$ , kelengkungan pada  $\Sigma$  menunjukkan kelengkungan negatif, dan dikenal sebagai *open* (terbuka). Untuk  $k = 0$ , tidak ada kelengkungan dalam  $\Sigma$  dan disebut sebagai *flat* (datar). Sedangkan, untuk  $k = +1$ , kelengkungan positif dalam  $\Sigma$ , dan disebut juga *closed* (tertutup) [31,32]. Bentuk permukaan ruang berdasarkan dari kelengkungannya dengan normalisasi  $k \in \{-1, 0, +1\}$  ditunjukkan pada Gambar 2.2.

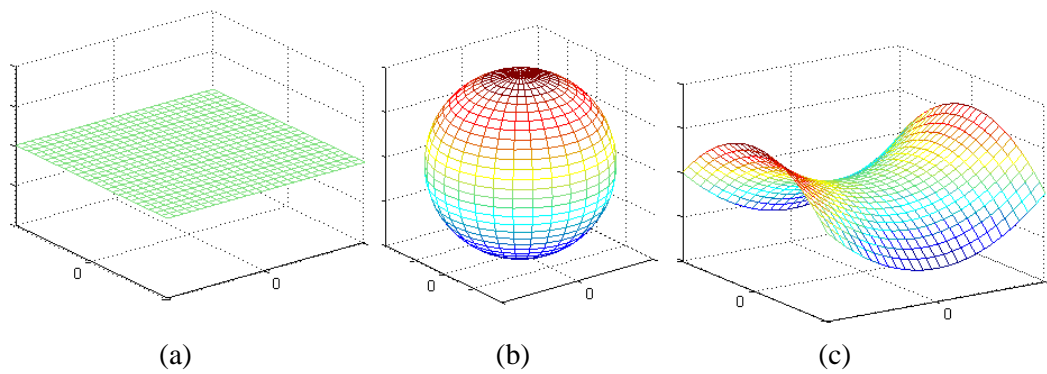
Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (2.38) ke dalam persamaan (2.33), dimana metrik FRW dalam ruang-waktu digambarkan sebagai suatu permukaan-hiper simetri maksimal yang berkembang secara seragam pada ukurannya, maka diperoleh

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[ \frac{d\tilde{r}^2}{1 - k\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.39)$$

Equation (2.39) is known as the Friedmann-Robertson-Walker (FRW) metric [31,34]. Equation (2.39) can also be written in another form,

:





**Gambar 2.2** Bentuk ruang manifold  $\Sigma$  dengan kelengkungan yang berbeda, (a) *flat*,  $k = 0$ , (b) kelengkungan positif,  $k = +1$  (*closed*), dan (c) kelengkungan negatif,  $k = -1$  (*open*) [31].

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.40)$$

dimana  $a(t)$  merupakan faktor skala yang tak berdimensi yang relasinya adalah  $a(t) = R(t)/R_0$ , dengan dimensi jarak  $r = R_0 \tilde{r}$ , dan parameter kelengkungan adalah  $\kappa = k/R_0^2$ , dengan catatan bahwa  $\kappa$  dapat diambil sembarang nilai, tidak hanya  $\{-1, 0, +1\}$ .

Jika ditinjau kembali persamaan (2.40), maka tensor metrik dari metrik FRW dapat disajikan sebagai

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left( -1, \frac{a^2}{1 - \kappa r^2}, a^2 r^2, a^2 r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (2.41)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan tensor metrik pada persamaan (2.41) dan hubungannya dimana  $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$  dengan tensor Ricci dan simbol Christoffel yang diberikan oleh persamaan (2.3)-(2.4), maka komponen tensor Ricci yang tidak nol dapat diberikan sebagai berikut [31,32]:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a},$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2},$$

$$R_{22} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa),$$



$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) . \quad (2.42)$$

Dan skalar Ricci untuk persamaan (2.42) diberikan oleh [32]:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right] . \quad (2.43)$$

## II.5 Persamaan Friedmann

Pada tahun 1922, seorang kosmolog bernama Alexander Friedmann berhasil menurunkan solusi persamaan medan Einstein untuk ruang yang homogen dan isotropik serta berisi materi dan radiasi, yang kemudian dikenal sebagai persamaan Friedmann. Persamaan Friedmann merupakan persamaan yang menggambarkan dinamika alam semesta yang memenuhi metrik FRW. Metrik FRW dimasukkan ke dalam persamaan medan Einstein sebagai variabel tensor metrik dalam medannya. Dengan menganggap materi dan energi sebagai fluida ideal, dengan kerapatan materi adalah  $\rho$  dan tekanan  $p$ , maka dapat dipilih tensor energi-momentum untuk fluida ideal [31],

$$T_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} \cdot \text{diag}(-\rho c^2, p, p, p) . \quad (2.44)$$

Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (2.41)-(2.44) ke dalam persamaan (2.29a), maka diperoleh:

- (i) Untuk komponen  $\mu, \nu = 0$ ;

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} , \quad (2.45)$$

- (ii) Untuk komponen  $\mu, \nu = 1$ ;

$$-2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\kappa}{a^2} + \Lambda = 8\pi G p , \quad (2.46)$$

- (iii) Sedangkan, untuk komponen  $\mu, \nu = 2$ ; dan  $\mu, \nu = 3$ ; memberikan hasil yang sama dengan komponen pada nomor (ii). Sehingga, dengan memasukkan persamaan (2.45) ke dalam persamaan (2.46), diperoleh

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} . \quad (2.47)$$



Persamaan (2.45) dan (2.47) kemudian dikenal sebagai persamaan Friedmann. Faktor skala,  $a$  pada kedua persamaan tersebut dapat diubah kembali menjadi  $R$  tanpa merubah bentuknya, yang dapat dituliskan sebagai [31,32]

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} , \quad (2.48)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} . \quad (2.49)$$

Persamaan Friedmann memberikan hubungan antara dinamika alam semesta (faktor skala dan laju ekspansi) dengan kerapatan materi-energi dan kelengkungan ruang alam semesta. Dari kedua persamaan Friedmann, dapat diperoleh beberapa parameter kosmologi. Pada persamaan (2.48), jika  $k = +1$ , maka  $R$  dapat diartikan sebagai jari-jari alam semesta. Sehingga, laju ekspansi alam semesta dapat dikarakterisasi dengan parameter Hubble [31,32]

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{R}}{R} , \quad (2.50)$$

dimana nilai dari parameter Hubble dikenal juga sebagai tetapan Hubble,  $H_0$ . Hasil pengukuran untuk tetapan Hubble adalah  $70 \pm 10$  km/sMpc, (Mpc merupakan singkatan dari Megaparsec, yang nilainya sebanding dengan  $3,09 \times 10^{24}$  cm). Karena masih terdapat beberapa ketidakpastian pada nilai tersebut, maka tetapan Hubble sering diparameterisasi menjadi:  $H_0 = 100h$  km/sMpc, dengan  $h \approx 0,7$ .

Parameter Hubble pada persamaan (2.50) dapat pula diambil turunannya terhadap waktu yang diberikan sebagai [32]

$$\dot{H} = \frac{\ddot{R}}{R} - H^2 , \quad (2.51)$$

dan dengan memasukkan kedua persamaan Friedmann (2.48) dan (2.49) ke persamaan (2.51) maka diperoleh

$$\dot{H} = -4\pi G \sum_{i(c)} (1 + w_i) \rho_i . \quad (2.52)$$



Persamaan (2.52) dikenal juga sebagai persamaan gerak yang menggambarkan evolusi alam semesta, dimana  $w_i$  adalah parameter persamaan keadaan yang merupakan suatu konstanta diberikan sebagai  $w_i = p_i/\rho_i$ . Setiap materi-energi memiliki besar parameter persamaan keadaan yang berbeda, besar parameter persamaan keadaan tersebut diberikan pada Tabel 2.1 berikut [32,33].

**Tabel 2.1** Parameter persamaan keadaan materi-energi

Materi-energi	$w_i$
Materi Non-relativistik	0
Radiasi	1/3
Kelengkungan	- 1/3
Vakum atau Energi Gelap	- 1

Dan jika dipilih  $k = 0$  dan  $\Lambda = 0$  pada persamaan (2.48), maka diperoleh parameter kerapatan yang didefinisikan sebagai [32]

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}, \quad (2.53)$$

dengan  $\rho_{crit}$  merupakan kerapatan kritis yang dapat menggambarkan kelengkungan ruang alam semesta. Jika  $\rho = \rho_{crit}$  alam semesta akan berbentuk datar, jika  $\rho < \rho_{crit}$  menggambarkan alam semesta memiliki kelengkungan negatif, sedangkan, alam semesta akan memiliki kelengkungan positif jika  $\rho > \rho_{crit}$ .

Selain menggambarkan kelengkungan ruang alam semesta, parameter kerapatan pada persamaan (2.53), juga dapat menggambarkan parameter rapat materi-energi penyusun alam semesta. Dengan menggunakan tetapan Hubble, maka dapat diperoleh [33]:

$$\Omega_r^{(0)} = \frac{8\pi G \rho_r^{(0)}}{3H_0^2}, \quad \Omega_m^{(0)} = \frac{8\pi G \rho_m^{(0)}}{3H_0^2}, \quad \Omega_{DE}^{(0)} = \frac{8\pi G \rho_{DE}^{(0)}}{3H_0^2}. \quad (2.54)$$

$\Omega_r^{(0)}$ ,  $\Omega_m^{(0)}$ , dan  $\Omega_{DE}^{(0)}$  masing-masing adalah parameter kerapatan untuk relativistik, materi non-relativistik, dan *dark energy* (energi gelap).



Dengan meninjau kembali persamaan Friedmann (2.48), dimana konstanta kosmologi,  $\Lambda$  berkontribusi sebagai energi vakum dengan rapat energi vakum diberikan oleh [29]:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad . \quad (2.55)$$

Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (2.55) ke persamaan (2.53), maka parameter rapat energi vakum dapat dituliskan sebagai

$$\Omega_{\Lambda}^{(0)} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad . \quad (2.56)$$

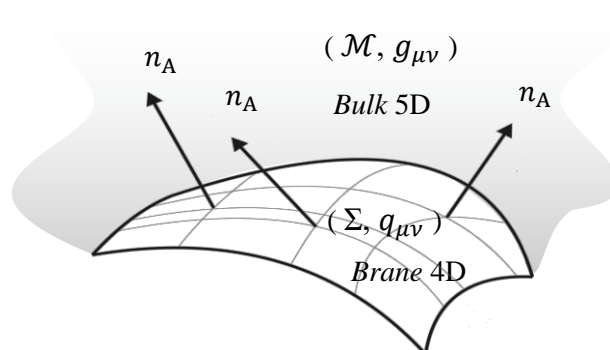
Jika dipilih  $k = 0$  pada persamaan (2.48), maka diperoleh parameter kerapatan total dari kontribusi materi-energi di alam semesta adalah  $\Omega_M + \Omega_{\Lambda} = 1$ , dengan  $\Omega_M$  adalah parameter kerapatan untuk kontribusi materi total di alam semesta, dan  $\Omega_{\Lambda}$  adalah kontribusi energi vakum yang kemudian dikenal sebagai kontribusi energi gelap [28,29].



**BAB III**  
**PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN**  
**DALAM DUNIA BRANE**

**III.1 Prinsip Aksi Einstein-Hilbert dalam Dunia Brane**

Dalam skenario dunia *brane*, ruang-waktu 4D digambarkan sebagai dinding domain 3-*brane*  $(\Sigma, q_{\mu\nu})$  yang tertanam dalam ruang-waktu 5D  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ , *bulk*. Tensor metrik pada sebuah *brane*,  $\Sigma$  adalah  $q_{\mu\nu}$  yang dikenal sebagai metrik induksi dengan indeks  $\mu$  dan  $\nu$  berjalan dari 0 sampai 3,  $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ . Sedangkan dalam ruang-waktu 5D, tensor metrik diberikan oleh  $g_{\mu\nu}$ , dimana indeks  $\mu$  dan  $\nu$  pada kasus ini berjalan dari 0, 1, 2, 3, 5. Gambaran dari skenario dunia *brane* ditunjukkan pada Gambar 3.1 berikut.



**Gambar 3.1** Skenario dunia *brane* dalam ruang-waktu 5D

Pada Gambar 3.1,  $n_A$  merupakan vektor satuan normal pada sebuah permukaan-hiper  $\Sigma$ .

Prinsip aksi Einstein-Hilbert total dalam skenario dunia *brane* diberikan sebagai [19]

$$S = S_{brane} + S_{bulk} , \tag{3.1}$$





dimana 
$$S_{brane} = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-q} ({}^{(4)}R - 2\Lambda_4) - \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-q} \mathcal{L}_m^{(4)}, \quad (3.2)$$

$$S_{bulk} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} ({}^{(5)}R - 2\Lambda_5) - \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m^{(5)}, \quad (3.3)$$

dengan  $\kappa_4^2 \sim M_4^{-2} = 8\pi G_4$  merupakan konstanta gravitasi pada *brane* 4D, sedangkan  $\kappa_5^2 \sim M_5^{-3} = 8\pi G_5$  adalah konstanta gravitasi 5D.  $\Lambda_4$  dan  $\mathcal{L}_m^{(4)}$  masing-masing adalah konstanta kosmologi dan Lagrangian materi pada *brane*, sedangkan  $\Lambda_5$  dan  $\mathcal{L}_m^{(5)}$  masing-masing adalah konstanta kosmologi dan Lagrangian materi dalam *bulk*.

Dengan menghitung variasi aksi EH dalam dunia *brane*, dimana  $\delta S = \delta S_{brane} + \delta S_{bulk}$ , maka dapat diperoleh persamaan medan Einstein dalam skenario dunia *brane*. Berdasarkan prinsip aksi Hamilton, variasi dari suatu aksi haruslah sama dengan nol. Jadi variasi aksi pada *brane* dari persamaan (3.2) dapat dituliskan sebagai

$$\delta S_{brane} = 0 = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_{\Sigma} d^4x \delta[\sqrt{-q} ({}^{(4)}R - 2\Lambda_4)] - \int_{\Sigma} d^4x \delta[\sqrt{-q} \mathcal{L}_m^{(4)}] \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_{\Sigma} d^4x \delta[\sqrt{-q} ({}^{(4)}R - 2\Lambda_4)] + \delta S_M^{(4)}, \quad (3.5)$$

dimana 
$$\delta S_M^{(4)} = - \int_{\Sigma} d^4x \delta[\sqrt{-q} \mathcal{L}_m^{(4)}]. \quad (3.6)$$

Dengan menurunkan persamaan (3.5) secara runut seperti pada persamaan (2.24)-(2.28), maka diperoleh persamaan medan Einstein lokal *brane* 4D yang diberikan sebagai

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + \kappa_4^2 T_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

dimana 
$${}^{(4)}G_{\mu\nu} \equiv {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu} {}^{(4)}R \quad (3.8)$$

an tensor Einstein pada *brane*. Berdasarkan persamaan (3.6) serta merujuk persamaan (2.27), maka diperoleh pula relasi antara tensor energi-momentum



terlokalisasi pada *brane*,  $T_{\mu\nu}$  dengan Lagrangian medan materi pada *brane* melalui aksi medan materi yang diberikan sebagai

$$\delta S_M^{(4)} = - \int_{\Sigma} d^4x \delta[\sqrt{-q} \mathcal{L}_m^{(4)}] = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-q} T_{\mu\nu} \delta q^{\mu\nu} , \quad (3.9)$$

maka  $T_{\mu\nu}$  dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih kompak menjadi:

$$T_{\mu\nu} \equiv -2 \frac{\delta \mathcal{L}_m^{(4)}}{\delta q^{\mu\nu}} + q_{\mu\nu} \mathcal{L}_m^{(4)} . \quad (3.10)$$

Selanjutnya ditinjau variasi aksi dalam *bulk* pada persamaan (3.3) yang diberikan sebagai

$$\delta S_{bulk} = 0 = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{\mathcal{M}} d^5x \delta[\sqrt{-g} ({}^{(5)}R - 2\Lambda_5)] - \int_{\mathcal{M}} d^5x \delta[\sqrt{-g} \mathcal{L}_m^{(5)}] \quad (3.11)$$

$$= \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{\mathcal{M}} d^5x \delta[\sqrt{-g} ({}^{(5)}R - 2\Lambda_5)] + \delta S_M^{(5)} . \quad (3.12)$$

Berdasarkan variasi aksi pada persamaan (3.12), maka diperoleh persamaan medan Einstein dalam *bulk* 5D yang diberikan sebagai

$${}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} {}^{(5)}R = -\Lambda_5 g_{\rho\sigma} + \kappa_5^2 \mathcal{T}_{\rho\sigma}^{(5)} , \quad (3.13)$$

dimana  ${}^{(5)}G_{\rho\sigma} \equiv {}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} {}^{(5)}R$  merupakan tensor Einstein dalam *bulk*, dan  $\mathcal{T}_{\rho\sigma}^{(5)}$  merupakan tensor energi-momentum dari medan materi dalam *bulk* yang relasinya dengan Lagrangian medan materi dalam *bulk* diberikan dalam bentuk kompak sebagai berikut

$$\mathcal{T}_{\rho\sigma}^{(5)} \equiv -2 \frac{\delta \mathcal{L}_m^{(5)}}{\delta g^{\rho\sigma}} + g_{\rho\sigma} \mathcal{L}_m^{(5)} . \quad (3.14)$$

Persamaan (3.10) dan (3.14) masing-masing merupakan tensor energi-momentum dari medan materi yang terlokalisasi pada *brane* dan tensor energi-momentum dari medan materi dalam *bulk* sebagaimana yang telah disajikan oleh Maeda [5].



## III.2 Geometri Dunia *Brane*

### III.2.1 Metrik induksi

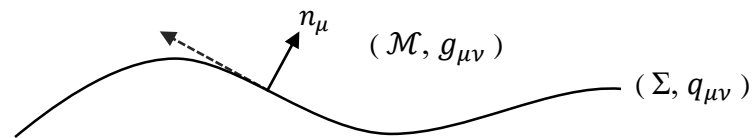
Berdasarkan skenario dunia *brane* dengan ruang-waktu penuh 5D, elemen garis atau metrik dari ruang-waktu 5D secara umum diberikan sebagai

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (3.15)$$

dimana  $g_{\mu\nu}$  adalah tensor metrik 5D. Jika ditinjau geometri dari skenario dunia *brane* yang ditunjukkan pada Gambar 3.2, maka metrik 5D pada persamaan (3.15) dalam skenario dunia *brane* secara lengkap dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} ds^2 &= (q_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu) dx^\mu dx^\nu \\ &= q_{\mu\nu}(t, y) dx^\mu dx^\nu + dy^2 , \end{aligned} \quad (3.16)$$

dengan  $n_\mu$  merupakan vektor satuan normal pada suatu permukaan-hiper  $\Sigma$ , dan  $n_\mu dx^\mu = dy$  dimana  $y$  merupakan suatu koordinat normal Gaussian yang ortogonal pada *brane*.



**Gambar 3.2** Skema geometri dunia *brane*

Dalam skenario dunia *brane*, metrik induksi pada  $\Sigma$  merupakan tensor metrik pada *brane* 4D yang secara umum didefinisikan sebagai [37]

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu , \quad (3.17)$$

yang menyatakan komponen tangensial dari  $g_{\mu\nu}$  sedangkan  $n_\mu n_\nu$  merupakan komponen yang tegak lurus terhadap  $\Sigma$  [12]. Komponen dari vektor satuan normal,  $n_\mu$  pada persamaan (3.17) adalah  $n_\mu = (0, 0, 0, 0, 1)$  [35], dimana indeks  $\mu, \nu$  berjalan dari 0, 1, 2, 3, 5 dengan tensor metrik 5D diberikan sebagai [36]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} q_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & g_{55} \end{pmatrix} , \quad g_{55} = 1 , \quad (3.18)$$



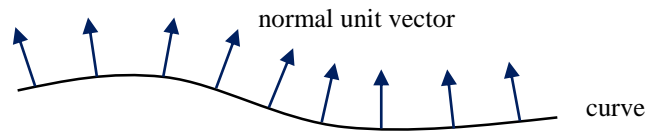
dengan  $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 1$  dan vektor satuan normal  $n^\mu$  [37]:

$$n^\mu n_\mu = \varepsilon, \quad \begin{cases} \varepsilon = +1, & \Sigma \text{ rupa ruang,} \\ \varepsilon = -1, & \Sigma \text{ rupa waktu.} \end{cases} \quad (3.19)$$

$q_{\mu\nu}$  pada persamaan (3.17) memiliki karakter  $(d - 1)$ -dimensi dan tidak dapat dibolak-balik, dengan  $q_{\mu\nu}n^\nu = 0$ . Metrik induksi,  $q$  juga dapat digunakan untuk memproyeksikan tensor penuh  $d$ -dimensi ke dalam permukaan-hiper  $\Sigma$  [37].

### III.2.2 Proyeksi tensor

Kelengkungan ruang-waktu pada permukaan-hiper  $\Sigma$  dalam skenario dunia *brane* memenuhi teorema Gauss. Dalam teorema Gauss, kelengkungan intrinsik dari suatu permukaan didasari oleh Gauss *map* yang ditunjukkan pada Gambar 3.3,



**Gambar 3.3** Gauss *map*

dimana Riemann meningkatkan dimensinya yang kemudian dikenal sebagai tensor kelengkungan Riemann pada permukaan-hiper  $\Sigma$ .

Beberapa proyeksi tensor Riemann 5D pada *brane* 4D atau permukaan-hiper  $\Sigma$  diberikan sebagai [5,15]

$${}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^\mu q_\mu^\alpha q_\beta^\nu q_\gamma^\rho q_\delta^\sigma = {}^{(4)}R_{\beta\gamma\delta}^\alpha + K_\gamma^\alpha K_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\gamma}, \quad (3.20)$$

$${}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^\mu q_\mu^\alpha q_\beta^\nu q_\gamma^\rho n^\sigma = 2 D^{[\alpha} K_{\beta]\gamma} = D^\alpha K_{\beta\gamma} - D_\beta K_\gamma^\alpha, \quad (3.21)$$

$${}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^\mu q_\mu^\alpha n^\nu q_\beta^\rho n^\sigma = -\varepsilon_n K_\beta^\alpha + K_\gamma^\alpha K_\beta^\gamma. \quad (3.22)$$

Persamaan (3.20), (3.21), dan (3.22) masing-masing adalah persamaan Gauss, persamaan Codazzi, dan persamaan Mainardi. Penurunan persamaan Gauss-

Mainardi secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran A.1. Kelengkungan atau bentuk fundamental kedua (*second fundamental form*) dari  $\Sigma$

dapat dituliskan sebagai  $K_{\mu\nu} = q_\mu^\alpha q_\nu^\beta \nabla_\alpha n_\beta$ , dimana  $K = K_\mu^\mu = q^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = q^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu$



adalah *trace* dari kelengkungan ekstrinsik.  $D_\mu$  merupakan operator turunan kovarian yang memenuhi  $q_{\mu\nu}$  yang didefinisikan sebagai  $D_\mu \equiv q_\mu^\nu \nabla_\nu$  [12] serta  $\mathcal{E}_n$  yang merupakan simbolisasi turunan Lie sepanjang arah- $n$ , dimana  $\mathcal{E}_n = \partial/\partial y$ . Kelengkungan ekstrinsik juga didefinisikan setengah dari turunan Lie metrik induksi sepanjang arah- $n$  yang diberikan sebagai [15,37]

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_n q_{\mu\nu} . \quad (3.23)$$

Persamaan Gauss (3.20) dan persamaan Codazzi (3.21) dikontraksikan pada indeks  $\alpha$  dan  $\gamma$  dan diperoleh

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma - {}^{(5)}R_{\beta\gamma\delta}^\alpha n_\alpha q_\mu^\beta n^\gamma q_\nu^\delta + KK_{\mu\nu} - K_\mu^\alpha K_{\nu\alpha} , \quad (3.24)$$

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} q_\mu^\rho n^\sigma . \quad (3.25)$$

Persamaan (3.24)-(3.25) dikenal juga sebagai persamaan Gauss-Codazzi yang mana persamaan (3.24) merupakan tensor Ricci yang dinyatakan sebagai proyeksi metrik 5D pada permukaan-hiper  $\Sigma$  dan kelengkungan ekstrinsik. Sedangkan persamaan (3.25) merupakan proyeksi tensor Ricci 5D yang dinyatakan dalam turunan kovarian tensor kelengkungan ekstrinsik [12]. Dengan mengontraksikan lagi persamaan (3.24) pada indeks  $\mu$  dan  $\nu$ , maka dapat diperoleh skalar Ricci pada  $\Sigma$  yang diberikan sebagai

$${}^{(4)}R = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} q^{\rho\sigma} - {}^{(5)}R_{\beta\gamma\delta}^\alpha n_\alpha n^\gamma q^{\beta\delta} + K^2 - K^{\nu\alpha} K_{\nu\alpha} , \quad (3.26)$$

atau dapat pula dituliskan dalam bentuk yang lebih kompak menjadi [12,36]

$${}^{(4)}R = {}^{(5)}R - 2{}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma + K^2 - K^{\nu\alpha} K_{\nu\alpha} , \quad (3.27)$$

dimana diambil  ${}^{(5)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha n^\beta n^\gamma n^\delta = 0$  dan  ${}^{(5)}R$  merupakan skalar Ricci dalam *bulk* 5D. Skalar Ricci pada persamaan (3.27) memberikan relasi yang sangat jelas antara skalar Ricci pada *brane* dengan skalar Ricci dalam *bulk* 5D. Jika proyeksi skalar Ricci (3.27) dimasukkan pada aksi *bulk* [36], memungkinkan diperoleh aksi EH “efektif” pada *brane* yang menuntun kepada persamaan medan pada *brane*, tanpa mengabaikan suku energi tinggi. Mengingat bahwa aksi *brane* oleh Kanno dan Soda [13] terbatas pada limit energi rendah.



### III.3 Persamaan Medan Einstein “Efektif” pada *Brane*

Penurunan persamaan medan Einstein “efektif” pada *brane* dilakukan dengan memodifikasi suku gravitasi pada ruas kiri (*left hand side*) persamaan medan Einstein lokal *brane* (3.7). Dalam modifikasi gravitasi, ditinjau tensor Einstein pada *brane* (3.8) yang menyatakan kelengkungan ruang-waktu lokal *brane*. Selanjutnya, dengan memasukkan proyeksi tensor kelengkungan Ricci yang dinyatakan pada persamaan Gauss (3.24) dan skalar Ricci (3.27) ke dalam tensor Einstein pada *brane* 4D, dan diambil  $q_{\mu\nu} \cong g_{\rho\sigma} q_{\mu}^{\rho} q_{\nu}^{\sigma}$  maka diperoleh [10,12]

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = \left[ {}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} {}^{(5)}R \right] q_{\mu}^{\rho} q_{\nu}^{\sigma} + {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^{\rho} n^{\sigma} q_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_{\mu}^{\alpha} K_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu} (K^2 - K^{\nu\alpha} K_{\nu\alpha}) - \mathcal{E}_{\mu\nu} , \quad (3.28)$$

dimana  $\mathcal{E}_{\mu\nu}$  adalah suku proyeksi tensor Riemann 5D yang didefinisikan sebagai

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}R_{\beta\rho\sigma}^{\alpha} n_{\alpha} n^{\rho} q_{\mu}^{\beta} q_{\nu}^{\sigma} , \quad (3.29)$$

dengan tensor Riemann pada persamaan (3.29) dapat diuraikan dalam sajian tensor kelengkungan Weyl, tensor Ricci dan skalar Ricci yang diberikan oleh [10,12,37]

$${}^{(5)}R_{\beta\rho\sigma}^{\alpha} = {}^{(5)}C_{\beta\rho\sigma}^{\alpha} + \frac{2}{3} \left( g_{[\rho}^{\alpha} {}^{(5)}R_{\sigma]\beta} - g_{\beta[\rho} {}^{(5)}R_{\sigma]}^{\alpha} \right) - \frac{1}{6} g_{[\rho}^{\alpha} g_{\sigma]\beta} {}^{(5)}R , \quad (3.30)$$

dengan  ${}^{(5)}C_{\alpha\beta\rho\sigma}$  adalah tensor kelengkungan Weyl 5D. Sedangkan suku pertama pada ruas kanan persamaan (3.28) tidak lain adalah tensor Einstein dalam *bulk* 5D yang memenuhi persamaan (3.13).

Jika persamaan medan Einstein dalam *bulk* (3.13) dikontraksikan pada indeks  $\rho$  dan  $\sigma$  maka diperoleh persamaan medan Einstein 5D dalam sajian tensor rank-0 sebagai berikut

$${}^{(5)}G_{\rho}^{\rho} = -\frac{3}{2} {}^{(5)}R = -5\Lambda_5 + \kappa_5^2 \mathcal{T}^{(5)} , \quad (3.31)$$

${}^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma} = \delta_{\rho}^{\rho} = 5$  adalah *trace* dari tensor metrik  $g$ . Selanjutnya, dengan kan persamaan (3.31) ke dalam persamaan (3.13), maka diperoleh tensor dalam sajian tensor energi-momentum



$${}^{(5)}R_{\rho\sigma} = \frac{2}{3}\Lambda_5 g_{\rho\sigma} + \kappa_5^2 \left( \mathcal{T}_{\rho\sigma}^{(5)} - \frac{1}{3}g_{\rho\sigma} \mathcal{T}^{(5)} \right). \quad (3.32)$$

Dengan memasukkan persamaan (3.13) dan (3.30)-(3.32) ke dalam persamaan (3.28), maka diperoleh [15]

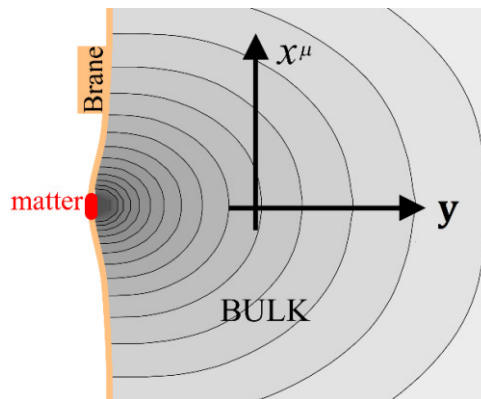
$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Lambda_5 q_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\kappa_5^2 \left[ \mathcal{T}_{\rho\sigma}^{(5)} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma + \left( \mathcal{T}_{\rho\sigma}^{(5)} n^\rho n^\sigma - \frac{1}{4} \mathcal{T}^{(5)} \right) q_{\mu\nu} \right] \\ + KK_{\mu\nu} - K_\mu^\alpha K_{\nu\alpha} - \frac{1}{2}q_{\mu\nu}(K^2 - K^{\nu\alpha}K_{\nu\alpha}) - E_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

dimana  $\mathcal{T}^{(5)} = {}^{(5)}\mathcal{T}_\rho^\rho$  dan

$$E_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}C_{\beta\rho\sigma}^\alpha n_\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma, \quad (3.34)$$

adalah komponen *traceless*, yang merupakan proyeksi tensor Weyl dalam *bulk* ortogonal terhadap  $n^\nu$ . Tensor Weyl memenuhi sifat  $E_{\mu\nu}n^\nu = 0 = E_{[\mu\nu]} = E_\mu^\mu$ , yang didasari oleh sifat simetrinya. Penjabaran persamaan (3.29) menggunakan persamaan (3.30) dapat dilihat pada Lampiran A.2. Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (3.32), maka persamaan Codazzi (3.25) dapat pula ditulis dalam sajian tensor energi-momentum dalam *bulk* yang diberikan sebagai [10,12]

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K = \kappa_5^2 \mathcal{T}_{\rho\sigma}^{(5)} q_\mu^\rho n^\sigma. \quad (3.35)$$



**3.4** Medan gravitasi dari sumber materi dalam *brane* pada teraan RS, menunjukkan kelengkungan dalam *bulk*.

(Gambar diambil dari [11,15])



Jika ditinjau tensor energi-momentum total dalam *bulk* 5D, termasuk kontribusi dari *brane* secara eksplisit seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.4, maka persamaan medan Einstein 5D (3.13) dalam skenario dunia *brane* dapat diberikan sebagai [15]

$${}^{(5)}G_{AB} = -\Lambda_5 g_{AB} + \kappa_5^2 \left( T_{AB}^{(5)} + T_{AB}^{\text{brane}} \delta(y) \right), \quad (3.36)$$

dimana

$$T_{\mu\nu}^{\text{brane}} = -\lambda q_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}, \quad (3.37)$$

adalah tensor energi-momentum total lokal *brane*.  $T_{\mu\nu}$  merupakan tensor energi-momentum partikel dan medan materi lainnya yang terkurung pada *brane*, sehingga memenuhi  $T_{AB} n^A = 0$ . Sedangkan  $\lambda$  adalah energi vakum yang terlokalisasi pada *brane* atau secara spesifik, adalah tensi *brane* dalam model RS.

Kelengkungan ekstrinsik pada *brane* dapat ditentukan dengan mengintegrasikan persamaan (3.36) sepanjang dimensi ekstra,  $y$  dan menerapkan simetri  $Z_2$  dalam dunia *brane*. Integrasi persamaan (3.36) menuntun pada kelengkungan ekstrinsik dalam sajian tensor energi-momentum dari sumber medan materi lokal *brane* yang dikenal sebagai “Israel *junction condition*” diberikan sebagai [10,12,15,38]

$$K_{\mu\nu}^+ = -K_{\mu\nu}^- = -\frac{1}{2}\kappa_5^2 \left( T_{\mu\nu}^{\text{brane}} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} T^{\text{brane}} \right). \quad (3.38)$$

Penurunan kondisi Israel *junction* (3.38) secara eksplisit dapat dilihat pada Lampiran A.3.

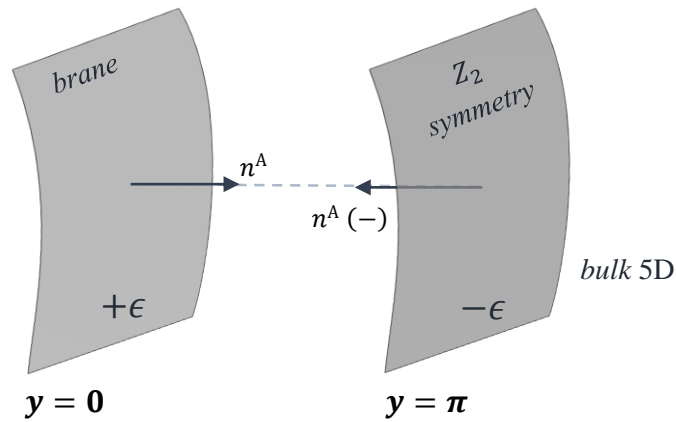
Simetri  $Z_2$  dalam skenario dunia *brane* model RS, merupakan simetri dari *brane* pada suatu titik dalam *bulk* 5D yang terlihat identik dengan *brane* sebagai titik acuan (permukaan-hiper  $\Sigma$  dengan limit  $y \rightarrow +0$ ), tapi dengan vektor normal terbalik  $n^A \rightarrow -n^A$  [15]. Simetri ini dalam skenario dunia *brane* ditunjukkan pada

3.5. Dengan memasukkan tensor energi-momentum total lokal *brane* dalam persamaan (3.38), maka kelengkungan ekstrinsik pada *brane*





$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\kappa_5^2 \left[ T_{\mu\nu} + \frac{1}{3}(\lambda - T) q_{\mu\nu} \right]. \quad (3.39)$$



**Gambar 3.5** Ilustrasi simetri  $Z_2$  model RS1 dalam skenario dunia *brane*

Terakhir, dengan memasukkan sajian kelengkungan ekstrinsik (3.39) ke dalam persamaan (3.33), maka diperoleh generalisasi persamaan medan Einstein “efektif” pada *brane* yang diberikan sebagai [15]

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + \kappa_4^2 T_{\mu\nu} + \kappa_5^4 \Pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\kappa_5^2 \mathcal{F}_{\mu\nu}, \quad (3.40)$$

dimana

$$\Lambda_4 \equiv \frac{1}{2}(\Lambda_5 + \kappa_4^2 \lambda), \quad (3.41)$$

$$\kappa_4^2 = \frac{1}{6} \kappa_5^4 \lambda. \quad (3.42)$$

Selain itu,

$$\kappa_4^2 = \ell^{-1} \kappa_5^2 \quad \text{atau} \quad M_4^2 = M_5^3 \ell \quad [11]. \quad (3.43)$$

Persamaan (3.41) merupakan konstanta kosmologi “efektif” pada *brane* dengan kontribusi konstanta kosmologi non-lokal,  $\Lambda_5$ . Persamaan medan “efektif” (3.40) pada *brane* merupakan bentuk generalisasi persamaan medan Einstein biasa dalam

umum, karena terdapat beberapa suku koreksi tambahan dalam persamaan tersebut. Suku koreksi yang pertama adalah suku kuadrat,  $\Pi_{\mu\nu}$  yang disebabkan oleh kelengkungan ekstrinsik yang diproyeksikan pada tensor Einstein:



$$\Pi_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{12} T T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} T_{\mu\alpha} T_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{8} q_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - \frac{1}{24} q_{\mu\nu} T^2 . \quad (3.44)$$

Suku  $\Pi_{\mu\nu}$ , yang merupakan kuadrat dari suku materi,  $T_{\mu\nu}$  bisa jadi memiliki peran yang sangat penting, khususnya di awal-awal alam semesta ketika skala materi-energi sangat tinggi [10]. Suku koreksi kedua adalah suku proyeksi tensor Weyl,  $E_{\mu\nu}$  yang didefinisikan pada persamaan (3.34). Suku koreksi yang terakhir adalah suku “medan materi non-lokal”,  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  yang men-generalisasikan persamaan medan “efektif” Shiromizu, *et al.* [10] diberikan sebagai:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{T}_{AB}^{(5)} q_{\mu}^A q_{\nu}^B + \left( \mathcal{T}_{AB}^{(5)} n^A n^B - \frac{1}{4} \mathcal{T}^{(5)} \right) q_{\mu\nu} , \quad (3.45)$$

dimana  $\mathcal{T}_{AB}^{(5)}$  merupakan tensor energi-momentum dari medan materi dalam *bulk* yang juga menggambarkan suatu tekanan pada *bulk* selain konstanta kosmologi [15].

Dengan menggunakan kondisi *junction* (3.39) pada persamaan Codazzi (3.35), diperoleh juga relasi antara materi pada *brane* dengan materi dalam *bulk*, yaitu:

$$D^{\nu} T_{\mu\nu} = -2 \mathcal{T}_{AB}^{(5)} q_{\mu}^A n^B . \quad (3.46)$$

Pada skenario dunia *brane*, diasumsikan bahwa tidak ada medan materi lain selain medan gravitasi dalam *bulk*,  $\mathcal{T}_{AB}^{(5)} = 0$ , maka suku “medan materi non-lokal” lenyap,  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = 0$ , sehingga persamaan medan Einstein dalam *bulk* dan persamaan medan “efektif” pada *brane* masing-masing adalah:

$${}^{(5)}G_{AB} = -\Lambda_5 g_{AB} , \quad (3.47)$$

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + \kappa_4^2 T_{\mu\nu} + \kappa_5^4 \Pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} , \quad (3.48)$$

sedangkan pada persamaan (3.46) diperoleh bentuk konservatif untuk suku materi *brane*, yakni:

$$D^{\nu} T_{\mu\nu} = 0 . \quad (3.49)$$



Dengan demikian, berdasarkan persamaan konservatif pada persamaan (3.49), maka tidak ada pertukaran energi-momentum antara *brane* dan *bulk*, secara murni pada kasus ini, hanya ada interaksi gravitasi. Jika ditinjau identitas Bianchi yang dikontraksikan pada persamaan (3.48), dimana  $D^\mu {}^{(4)}G_{\mu\nu} = 0$  menunjukkan adanya relasi antara  $E_{\mu\nu}$  dan suku kuadrat,  $\Pi_{\mu\nu}$  yang diberikan sebagai

$$D^\mu E_{\mu\nu} = \kappa_5^4 D^\mu \Pi_{\mu\nu} . \quad (3.50)$$

Hal ini menunjukkan bahwa,  $E_{\mu\nu}$  tidak dapat ditentukan secara spesifik, namun divergensinya dibatasi oleh suku kuadrat dari materi. Pada saat yang sama, suku Weyl ini juga membawa informasi medan gravitasi non-lokal (dalam *bulk*). Dan suku ini tidak lenyap jika ruang-waktu *bulk* bukan ruang-waktu AdS murni.

Jika suku  $E_{\mu\nu}$  diuraikan lebih lanjut pada suku *transverse-traceless*,  $E_{\mu\nu}^{TT}$  dan suku *longitudinal*,  $E_{\mu\nu}^L$  yang sepenuhnya ditentukan oleh materi lokal *brane*. Karenanya jika suku  $E_{\mu\nu}^{TT}$  tidak ada, persamaan medan Einstein “efektif” menjadi tertutup dengan kuantitas sepenuhnya terbatas hanya pada *brane*. Namun, umumnya pada kasus gravitasi standar, suku  $E_{\mu\nu}^{TT}$  korespondensi dengan gelombang gravitasi pada *brane* 4D atau graviton 5D, dan sudah pasti suku ini dibangkitkan oleh gerak materi dan efek eksitasi gerak materi sebagai imbasnya. Hal ini menunjukkan bahwa persamaan medan Einstein “efektif” pada *brane* (3.48) tidaklah tertutup karena adanya efek non-lokal dari *bulk* [10]. Asumsi ini juga diperkuat dengan persamaan (3.49) yang mana menunjukkan bahwa secara murni dalam skenario dunia *brane* hanya terjadi interaksi gravitasi antara *bulk* dan *brane*. Namun, jika ditinjau lebih lanjut lagi pada bentuk generalisasi persamaan medan Einstein “efektif” pada *brane* (3.40), dengan meninjau bahwa medan materi non-lokal pada *brane* tidak lenyap,  $\mathcal{F}_{\mu\nu} \neq 0$  dan diasumsikan bahwa  $\mathcal{T}_{AB}^{(5)}$  merupakan medan materi gravitasi non-lokal yaitu graviton. Maka pada kasus ini persamaan (3.46) dapat menggambarkan interaksi antara materi lokal *brane*, dalam hal ini yaitu

model standar dengan graviton sebagai partikel dari gravitasi. Interaksi ini nuntun pada unifikasi gaya-gaya fundamental, yang dikenal sebagai TOE. un penjelasan lebih rinci mengenai tensor kelengkungan Weyl dapat dilihat ppiran B.



## BAB IV

### KOSMOLOGI DUNIA *BRANE*

#### IV.1 Metrik FRW dalam Dunia *Brane*

Metrik FRW (Friedmann-Robertson-Walker) merupakan metrik standar untuk kajian kosmologi. Sebagaimana yang dibahas pada Subbab II.4, dimana alam semesta dipandang bersifat homogen dan isotropik. Metrik FRW dalam skenario dunia *brane* dapat ditentukan dengan meninjau metrik 5D yang diberikan pada persamaan (3.15), dan secara eksplisit menggunakan koordinat normal Gaussian pada persamaan (3.16). Dari persamaan (3.16) tersebut, bentuk umum metrik dalam skenario dunia *brane* yang memiliki simetri kosmologi dapat dituliskan sebagai [17,39]

$$ds^2 = -N^2(t, y) dt^2 + A^2(t, y) \gamma_{ij} dx^i dx^j + dy^2, \quad (4.1)$$

dimana

$$N(t, y) = \frac{\dot{A}(t, y)}{\dot{a}(t)}, \quad (4.2)$$

dengan  $a(t)$  adalah faktor skala pada *brane*. Jika ditinjau *brane* statik pada koordinat normal Gaussian dan terlokalisasi pada titik koordinat tetap, sehingga dapat dipilih  $y = 0$  pada *brane*. Tanpa mengubah bentuk metriknya, secara konsisten metrik pada persamaan (4.1) dapat menggambarkan kosmologi FRW pada *brane* untuk *brane* statik ( $y = 0$ ) yang dituliskan sebagai

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.3)$$

dengan  $A(t, y = 0) \equiv a(t)$  dan  $N(t, y = 0) = 1$  [17,39], yang tidak lain adalah metrik FRW standar 4D (lihat Subbab II.4). Selanjutnya, dengan menurunkan persamaan (4.3), maka diperoleh metrik FRW pada *brane* statik yang dituliskan sebagai



$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (4.4)$$

dimana  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ . Pada kasus ini, tensor Weyl tidak dipandang sebagai tensor kelengkungan ruang pada *brane* melainkan dipandang sebagai efek dari massa *black hole* dalam *bulk* [39,40]. Sehingga tensor Weyl pada persamaan medan Einstein “efektif” (3.48) tidak sepenuhnya lenyap, karena kontribusinya sebagai materi-energi dari efek non-lokal *bulk* [15,41], yang diasumsikan sebagai kontribusi ‘radiasi gravitasi’ (dibahas pada Subbab IV.2). Adapun komponen-komponen tensor Ricci yang tidak nol dari metrik FRW pada *brane* (4.4) diberikan sebagai (penurunan persamaan (4.5) dan (4.6) dapat dilihat pada Lampiran A.4)

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \\ {}^{(4)}R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \\ {}^{(4)}R_{22} &= r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \\ {}^{(4)}R_{33} &= r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \end{aligned} \quad (4.5)$$

dan skalar Ricci pada *brane* diberikan oleh:

$${}^{(4)}R = q^{\mu\nu} {}^{(4)}R_{\mu\nu} = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (4.6)$$

## IV.2 Persamaan Friedmann dalam Dunia *Brane*

Persamaan medan Einstein “efektif” pada *brane* (3.48) dapat dituliskan kembali ke bentuk persamaan medan Einstein biasa dengan mereduksi kedua suku koreksi, yaitu: suku  $\Pi_{\mu\nu}$  dan suku  $E_{\mu\nu}$  ke dalam tensor energi-momentum total yang diberikan sebagai [5]

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + \kappa_4^2 T_{\mu\nu}^{\text{total}}, \quad (4.7)$$

Tensor energi-momentum total didefinisikan sebagai

$$T_{\mu\nu}^{\text{total}} = T_{\mu\nu} + \frac{6}{\lambda} \Pi_{\mu\nu} - \frac{1}{\kappa_4^2} E_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$



dengan suku Weyl,  $E_{\mu\nu}$  diasumsikan hanya berkontribusi sebagai materi-energi efek non-lokal *bulk* [41]. Sebagaimana gambaran dinamika alam semesta pada kosmologi FRW, dimana materi-energi dianggap sebagai fluida ideal dengan rapat materi-energi,  $\rho$  dan tekanan isotropik,  $P$  maka sajian tensor energi-momentum total pada *brane* dapat dituliskan menjadi

$$T_{\mu\nu}^{\text{total}} \equiv q_{\mu\nu} \cdot \text{diag}(-\rho^{\text{total}}, p^{\text{total}}, p^{\text{total}}, p^{\text{total}}). \quad (4.9)$$

#### IV.2.1 Analisis kovariansi pada *brane*

Secara umum, bentuk tensor energi-momentum pada *brane* untuk setiap medan materi lokal maupun non-lokal (berlaku untuk medan skalar, fluida ideal, gas kinetik, dan lain-lain), termasuk pula kombinasi dari medan-medan yang berbeda, secara kovarian diberikan sebagai [15, 41]

(i) Suku tensor energi-momentum lokal *brane*;

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P h_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu, \quad (4.10)$$

dimana  $u^\mu$  adalah medan vektor kecepatan pada ruang-waktu 4D, dengan medan vektor satuan  $u^\mu u_\mu = -1$ , dan metrik ruang (atau tensor proyeksi) yang ortogonal terhadap  $u^\mu$  pada *brane* adalah

$$h_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu + u_\mu u_\nu, \quad (4.11)$$

serta tegangan anisotropik dan fluks energi pada persamaan (4.10) masing-masing didefinisikan sebagai  $\pi_{\mu\nu} = \pi_{\langle\mu\nu\rangle}$  dan  $q_\mu = q_{\langle\mu\rangle}$ , dimana *bracket* melambangkan proyeksi spasial, sifat simetri, dan *trace-free* [15]:

$$V_{\langle\mu\rangle} = h_\mu{}^\nu V_\nu, \quad W_{\langle\mu\nu\rangle} = \left[ h_{(\mu}{}^\alpha h_{\nu)}{}^\beta - \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} h_{\mu\nu} \right] W_{\alpha\beta}. \quad (4.12)$$

Pada tinjauan kerangka inersia, yang menggambarkan ruang-waktu homogen dan isotropik di tiap titik pada *brane*, maka diperoleh

$$\vec{0}), \quad h_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 1, 1, 1), \quad V_\mu = (0, V_i), \quad W_{\mu 0} = 0 = \sum W_{ii}, \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow \pi_{\langle\mu\nu\rangle} = 0, \quad q_{\langle\mu\rangle} = (0, q_i), \quad \text{sehingga} \quad q_\mu u_\nu = 0. \quad (4.14)$$



Pada kasus kosmologi FRW pada *brane*, tensor energi-momentum pada persamaan (4.10) dapat dituliskan kembali ke bentuk yang lebih sederhana untuk fluida ideal adalah

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P h_{\mu\nu} . \quad (4.15)$$

Sedangkan kontraksi persamaan (4.15) memberikan bentuk skalar dari tensor energi-momentum sebagai berikut

$$T \equiv T_\mu^\mu = \rho u_\mu u^\mu + P h_\mu^\mu = \text{diag}(-\rho, P, P, P) . \quad (4.16)$$

(ii) Suku kuadratik;

Suku  $\Pi_{\mu\nu}$  pada persamaan (3.44) membawa efek lokal *brane* dalam *bulk* yang secara eksplisit diuraikan sebagai [15,41]

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu} = & \frac{1}{24} [2\rho^2 - 3\pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}] u_\mu u_\nu + \frac{1}{24} [2\rho^2 + 4\rho P + \pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta} - 4q_\alpha q^\alpha] h_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{12} (\rho + 2P) \pi_{\mu\nu} + \pi_{\alpha\langle\mu} \pi_{\nu\rangle}^\alpha + q_{\langle\mu} q_{\nu\rangle} + \frac{1}{3} \rho q_{(\mu} u_{\nu)} - \frac{1}{12} q^\alpha \pi_{\alpha(\mu} u_{\nu)} . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Bentuk sederhananya untuk fluida ideal jika ditinjau kosmologi FRW pada *brane* adalah

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{1}{12} \rho^2 u_\mu u_\nu + \frac{1}{12} \rho (\rho + 2P) h_{\mu\nu} . \quad (4.18)$$

Sedangkan bentuk skalar dari suku ini adalah

$$\Pi = \Pi_\mu^\mu = \frac{1}{12} \cdot \text{diag}(-\rho^2, \rho(\rho + 2P), \rho(\rho + 2P), \rho(\rho + 2P)) . \quad (4.19)$$

(iii) Suku proyeksi Weyl;

Efek non-lokal pada *brane* yang berasal dari *bulk* disimbolkan sebagai tensor  $E_{\mu\nu}$  (proyeksi Weyl) yang diberikan pada persamaan (3.48), pada tinjauan fluida ideal dapat diuraikan sebagai

$$E_{\mu\nu} = - \frac{6}{\kappa_4^2 \lambda} \left[ \mathcal{U} \left( u_\mu u_\nu + \frac{5}{3} h_{\mu\nu} \right) + \mathcal{P}_{\mu\nu} + \mathcal{Q}_\mu u_\nu + \mathcal{Q}_\nu u_\mu \right] , \quad (4.20)$$



dengan  $6/\kappa_4^2\lambda = (\kappa_5/\kappa_4)^4$  merupakan faktor dimensi [41]. Tensor  $E_{\mu\nu}$  persamaan (4.20) merupakan tensor energi-momentum “efektif” sebagai efek non-lokal dari *bulk*, yakni sebagai rapat materi-energi “efektif”  $\mathcal{U}$ , tegangan anisotropik “efektif”  $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ , dan fluks energi “efektif”  $\mathcal{Q}_\mu$  yang terlokalisasi pada *brane*.

Persamaan (4.20) diasumsikan sebagai persamaan fluida “efektif” Weyl. Melalui persamaan fluida “efektif” ini, efek medan gravitasi dalam *bulk* yang terlokalisasi pada *brane* secara spesifik diberikan sebagai berikut [15,41]:

- a) Rapat materi-energi “efektif” sebagai efek non-lokal pada *brane* yang muncul dari medan gravitasi bebas dalam *bulk* adalah

$$\mathcal{U} = -\left(\frac{\kappa_4^2\lambda}{6}\right)E_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \quad (4.21)$$

dan tekanan isotropik “efektif” sebagai efek non-lokal *bulk* adalah  $5\mathcal{U}/3$  (merupakan koreksi energi tinggi yang dibahas pada Subbab IV.3), karena  $E_{\mu\nu}$  adalah *trace-free*. Secara spesifik, rapat materi-energi ini dikenal juga sebagai “radiasi gelap” dengan unifikasi skalar atau mode spin-0 (“Coulomb”) [15].

- b) Fluks energi “efektif” sebagai efek non-lokal pada *brane* yang muncul dari medan gravitasi bebas dalam *bulk* adalah

$$\mathcal{Q}_\mu = -\left(\frac{\kappa_4^2\lambda}{6}\right)E_{\langle\mu\rangle\nu}u^\nu, \quad (4.22)$$

dengan unifikasi skalar (mode spin-0) dan vektor (*transverse*) atau mode spin-1 (“gravi-magnetik”), dan  $\mathcal{Q}_\mu \equiv \mathcal{U}v_\mu$ , dengan  $v_\mu$  adalah kecepatan relatif fluida Weyl terhadap  $u^\mu$  [15].

- c) Tegangan anisotropik “efektif” sebagai efek non-lokal pada *brane* yang muncul dari medan gravitasi bebas dalam *bulk* adalah

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = -\left(\frac{\kappa_4^2\lambda}{6}\right)E_{\langle\mu\nu\rangle}, \quad (4.23)$$

dan unifikasi skalar (mode spin-0), vektor (mode spin-1), dan tensor (*transverse-traceless*) atau mode spin-2 (“gelombang gravitasi”) dalam 4D dari 2 “graviton” dalam 5D [15].





Dalam model RS, jika ruang-waktu *bulk* 5D murni Anti de-Sitter (AdS<sub>5</sub>), maka tensor  $E_{\mu\nu}$  menjadi lenyap, juga termasuk jika ruang-waktu 5D *conformally flat* ( $g_{AB}$  adalah *conformally flat*,  $E_{\mu\nu} = 0$ ). Sedangkan fluks energi “efektif” dan tegangan anisotropik “efektif” menjadi lenyap,

$$Q_\mu = 0 = \mathcal{P}_{\mu\nu}, \quad (4.24)$$

untuk kosmologi FRW pada *brane*, dimana  $\mathcal{U} = 0$  hanya jika massa *black hole* dalam *bulk* adalah nol. Keberadaan *black hole* dalam *bulk* melalui efek “Coulomb” membangkitkan “radiasi gelap” pada *brane* [15], yang diasumsikan sebagai efek ‘radiasi gravitasi’ pada ruang-waktu 4D.

Jadi, bentuk sederhana tensor  $E_{\mu\nu}$  sebagai fluida ideal untuk kosmologi FRW pada *brane* dengan rapat materi-energi “efektif” sebagai efek non-lokal yang dibangkitkan oleh medan gravitasi bebas dalam *bulk* adalah

$$E_{\mu\nu} = -\frac{6}{\kappa_4^2 \lambda} \left[ \mathcal{U} \left( u_\mu u_\nu + \frac{5}{3} h_{\mu\nu} \right) \right], \quad (4.25)$$

dan kontraksi persamaan (4.25) memberikan bentuk skalar dari persamaan tersebut yaitu

$$E_\mu^\mu = -\left( \frac{6}{\kappa_4^2 \lambda} \right) \cdot \text{diag} \left( -\mathcal{U}, \frac{5}{3}\mathcal{U}, \frac{5}{3}\mathcal{U}, \frac{5}{3}\mathcal{U} \right). \quad (4.26)$$

Dengan menggunakan kovariansi suku tensor energi-momentum lokal *brane* (4.10), suku kuadratik sebagai efek lokal *brane* dalam *bulk* (4.17), dan suku proyeksi Weyl sebagai efek non-lokal *bulk* pada *brane* (4.20) yang pada kasus fluida ideal (fungsi distribusi satu-partikel isotropik), yakni  $q_\mu = 0 = \pi_{\mu\nu}$ , maka rapat materi-energi, tekanan isotropik, fluks energi, dan tegangan anisotropik total “efektif” masing-masing diberikan dalam sajian umum sebagai

$$\rho^{\text{total}} = \rho \left( 1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + \frac{6}{\kappa_4^4 \lambda} \mathcal{U}, \quad (4.27)$$

$$P^{\text{total}} = P \left( 1 + \frac{\rho}{\lambda} \right) + \frac{\rho^2}{2\lambda} + \frac{10}{\kappa_4^4 \lambda} \mathcal{U}, \quad (4.28)$$



$$q_{\mu}^{\text{total}} = \frac{6}{\kappa_4^4 \lambda} Q_{\mu} , \quad (4.29)$$

$$\pi_{\mu\nu}^{\text{total}} = \frac{6}{\kappa_4^4 \lambda} \mathcal{P}_{\mu\nu} . \quad (4.30)$$

Pada kasus ini, fluks energi dan tegangan anisotropik total tidak lenyap, karena efek non-lokal *bulk* ini dapat berkontribusi pada fluida tidak-ideal “efektif” bahkan ketika materi dan energi pada *brane* adalah fluida ideal [41]. Dalam hal ini, fluks energi dan tegangan anisotropik “efektif” diinduksi pada *brane* melalui perambatan graviton 5D [15].

#### IV.2.2 Persamaan konservatif

Tensor energi-momentum total “efektif” dengan efek lokal dan non-lokal pada *brane* memiliki keadaan konservatif yang masing-masing memenuhi sifat identitas pada persamaan (3.49) dan (3.50). Persamaan konservatif energi dan momentum untuk medan materi lokal *brane* memenuhi persamaan konservatif (3.49) yang diberikan sebagai [15,41] (penurunan persamaan (4.31) dapat dilihat pada Lampiran A.5)

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + P) + D^{\mu} q_{\mu} + 2A^{\mu} q_{\mu} + \sigma^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu} = 0 , \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\langle\mu\rangle} + \frac{4}{3} \Theta q_{\mu} + D_{\mu} P + (\rho + P) A_{\mu} + D^{\nu} \pi_{\mu\nu} + A^{\nu} \pi_{\mu\nu} \\ + \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} - [\omega, q]_{\mu} = 0 . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Pada persamaan di atas, *overdot* didefinisikan dari  $u^{\nu} \nabla_{\nu}$ , sedangkan  $\Theta = \nabla^{\mu} u_{\mu}$  merupakan laju ekspansi volume.  $A_{\mu} = \dot{u}_{\mu} = A_{\langle\mu\rangle}$  adalah percepatan pada ruang-waktu 4D,  $\sigma_{\mu\nu} = D_{\langle\mu} u_{\nu\rangle}$  adalah laju pergeseran, dan  $[\omega, q]_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \omega^{\nu} q^{\alpha}$ , dengan  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$  merupakan tensor proyeksi yang ortogonal terhadap  $u^{\mu}$  dan  $\omega_{\mu} = -\frac{1}{2} \text{curl } u_{\mu} = \omega_{\langle\mu\rangle}$  merupakan tingkat vortisitas. Sedangkan hubungan operator curl dan operator turunan kovarian diberikan oleh [15,41]

$$\text{curl } V_{\mu} = \varepsilon_{\mu\alpha\beta} D^{\alpha} V^{\beta} , \quad \text{curl } W_{\mu\nu} = \varepsilon_{\alpha\beta(\mu} D^{\alpha} W^{\beta}_{\nu)} . \quad (4.33)$$



Untuk kasus kosmologi FRW pada *brane*, dapat dipilih  $A_\mu = \sigma_{\mu\nu} = \omega_\mu = 0$  dan  $\Theta = 3H$  dimana  $H = \dot{a}/a$  adalah tetapan Hubble. Jika materi-energi pada *brane* adalah fluida ideal dan memenuhi kosmologi FRW, maka persamaan konservatif lokal *brane* (4.31) dan (4.32) dapat disederhanakan menjadi

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (4.34)$$

$$D_\mu P = 0. \quad (4.35)$$

Persamaan (4.34) juga dikenal sebagai persamaan kontinuitas dalam kosmologi FRW *brane*. Sedangkan persamaan (4.35) menunjukkan rapat kehomogenan pada *brane* dengan  $D_\mu P = wD_\mu \rho = 0$ , dimana  $P \equiv w\rho$ . Jika ditinjau kasus alam semesta didominasi oleh komponen tunggal, maka dalam fluida ideal persamaan keadaan didefinisikan sebagai [31]

$$w \equiv \frac{P}{\rho} = \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \sim \frac{T}{m}, \quad (4.36)$$

dengan  $w$  adalah konstanta. Dengan menggunakan hubungan  $P = w\rho$ , persamaan kontinuitas kosmologi FRW *brane* dapat dituliskan kembali menjadi

$$\dot{\rho} + 3H(1+w)\rho = 0, \quad (4.37)$$

yang sangat bergantung pada persamaan keadaan dari dominasi komponen tunggal alam semesta yang secara eksplisit diberikan sebagai berikut [33]

(i) Materi non-relativistik;

Pada kasus alam semesta didominasi oleh materi non-relativistik, materi (materi gelap dan baryon) lebih dominan daripada radiasi ( $T \ll m$ , dan  $\rho \rightarrow \rho_m$ ) sehingga persamaan keadaan untuk dominasi materi non-relativistik adalah  $w \cong 0$ . Persamaan kontinuitas untuk kasus ini diberikan sebagai

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0. \quad (4.38)$$

(ii) Materi relativistik;

da kasus dominasi materi relativistik, yaitu pada awal-awal alam semesta radiasi sangat mendominasi dibandingkan materi dengan limit  $m \rightarrow 0$ , dan  $\rho \rightarrow \rho_r$ ). Pada limit relativistik ini, kecepatan partikel mendekati



kecepatan cahaya ( $v \sim c$ ), sehingga persamaan keadaan untuk kasus ini diperoleh  $w \cong 1/3$  dan persamaan kontinuitas diberikan sebagai

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0. \quad (4.39)$$

Selanjutnya persamaan konservatif non-lokal *bulk* pada *brane* yang memenuhi persamaan (3.50) dapat diuraikan menjadi [5,10]

$$D^\mu E_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\kappa_5^4 \left[ T^{\alpha\beta} (D_\nu T_{\alpha\beta} - D_\beta T_{\nu\alpha}) + \frac{1}{3} (T_{\mu\nu} - q_{\mu\nu} T) D^\mu T \right]. \quad (4.40)$$

Turunan kovarian dari tensor proyeksi Weyl pada persamaan (4.40) sebagai persamaan konservatif non-lokal *bulk* sangat bergantung pada divergensi dari suku kuadratik. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara suku Weyl sebagai efek non-lokal dengan materi lokal *brane* adalah interaksi energi tinggi, sehingga dapat diasumsikan bahwa “radiasi gelap” atau ‘radiasi gravitasi’ sangat kuat pada daerah energi tinggi (dengan relasi  $\mathcal{U} \sim \rho_u^2$  yang dibahas pada Subbab IV.3), dengan solusi “radiasi gelap” dari persamaan (4.42), yaitu [15]:

$$\rho_u = \rho_{u_0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4, \quad (4.41)$$

dimana  $\rho_u = \rho_{u_0}$  untuk  $a = a_0 = 1$ . Dengan demikian, persamaan konservatif energi dan momentum non-lokal sebagai persamaan perambatan untuk efek non-lokal *bulk* pada *brane* ( $\rho_u$  dan  $Q_\mu$ ) yang diberikan oleh Referensi [15,41] untuk kasus materi-energi pada *brane* adalah fluida ideal dan memenuhi kosmologi FRW *brane* dimana  $Q_\mu$  dan  $\mathcal{P}_{\mu\nu}$  dapat diabaikan, maka diperoleh persamaan konservatif non-lokal *bulk* pada *brane* adalah sebagai berikut

$$\dot{\rho}_u + 4H\rho_u = 0, \quad \text{dan} \quad (4.42)$$

$$\frac{1}{3} D_\mu \rho_u = -\frac{1}{6}\kappa_4^4 (\rho + P) D_\mu \rho = 0, \quad (4.43)$$

dengan  $\mathcal{P}_u = \rho_u/3$ . Persamaan (4.42) merupakan persamaan kontinuitas untuk “radiasi gelap” atau ‘radiasi gravitasi’. Sedangkan persamaan (4.43) menunjukkan [5]:



- a) Jika  $E_{\mu\nu} = 0$  dan tensor energi-momentum lokal *brane* memiliki bentuk fluida ideal, maka rapat materi-energi,  $\rho$  haruslah homogen, sehingga  $D_\mu \rho = 0$ . Pada kasus kosmologi FRW pada *brane*, persamaan (4.43) menjadi lenyap karena bernilai nol;
- b) Namun sebaliknya, meskipun  $D_\mu \rho = 0$ , rapat kehomogenan tidak menunjukkan  $E_{\mu\nu}$  lenyap secara total, hal ini ditunjukkan oleh persamaan (4.25) dengan persamaan kontinuitas (4.42).

Jika  $E_{\mu\nu} = 0$ , maka persamaan medan “efektif” pada *brane* menjadi sistem tertutup. Namun jika *brane* adalah sistem tertutup, perturbasi menjadi tidak stabil, dan juga tidak ada jaminan bahwa *brane* berada dalam *bulk*, sehingga skenario dunia *brane* menjadi tidak berarti. Jika ditinjau rapat ketakhomogenan yang mengharuskan  $E_{\mu\nu}$  tidak nol,

$$D_\mu \rho \neq 0 \implies E_{\mu\nu} \neq 0, \quad (4.44)$$

dan perturbasi dari model FRW pada *brane* juga memenuhi  $E_{\mu\nu} \neq 0$ , maka persamaan medan “efektif” pada *brane* menjadi sistem yang tidak tertutup. Pada kasus  $E_{\mu\nu}$  tidak nol,  $\mathcal{P}_{\mu\nu}$  juga tidak nol pada keadaan tertentu yang pada kenyataan tidak dapat dihindari dalam model kosmologi dan astrofisika. Jika demikian, efek anisotropik dan ketakhomogenan dari distribusi materi-radiasi pada lokal *brane* bisa menjadi sumber untuk tensor Weyl 5D, yang kembali menjadi efek non-lokal *bulk* pada *brane* melalui proyeksinya,  $E_{\mu\nu}$  [15].

(iii) Energi gelap (*Dark Energy*);

Pada kasus ini, alam semesta didominasi oleh energi gelap, yakni komponen alam semesta yang tidak diketahui, yang bertanggung jawab pada percepatan ekspansi alam semesta saat ini. Berdasarkan analisis data kombinasi SN Ia, CMB, dan BAO, menggunakan WMAP, menunjukkan parameter kerapatan energi gelap saat ini, yaitu [33]:

$$\Omega_{DE}^{(0)} = 0.726 \pm 0.015, \quad (\text{WMAP Data 5-tahun}) \quad (4.45)$$

maupun keadaan untuk energi gelap adalah



$$w_{DE} = -0.94 \pm 0.1 . \quad (4.46)$$

Selain itu, pada kasus alam semesta didominasi oleh energi gelap, model  $\Lambda$ CDM [31,42] memenuhi data observasi menggunakan WMAP dan SN Ia dimana konstanta kosmologi,  $\Lambda$  berkontribusi sebagai energi gelap [29] dengan tekanan isotropik negatif,  $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$  dan sajian persamaan keadaan energi gelap adalah  $w_\Lambda = -1$ . Berdasarkan persamaan kontinuitas (4.37), diperoleh  $\dot{\rho}_\Lambda = \dot{\Lambda} = 0$  untuk  $w_\Lambda = -1$ , yang berarti bahwa pada keadaan ini, rapat energi gelap atau kontribusi dari  $\Lambda$  sebagai energi gelap adalah konstan atau tidak berubah terhadap waktu. Dalam studi dinamika kosmologi, setiap materi-energi penyusun alam semesta haruslah dinamik [33], maka  $\Lambda$  sebagai energi gelap dapat pula diasumsikan berubah terhadap waktu. Agar asumsi ini terpenuhi dan dengan meninjau persamaan keadaan energi gelap (4.46), maka dapat dipilih  $w_\Lambda \neq -1$  sehingga rapat energi gelap menjadi dinamik ( $\dot{\rho}_\Lambda = \dot{\Lambda} \neq 0$ ). Dengan demikian, persamaan kontinuitas untuk kontribusi  $\Lambda$  sebagai energi gelap dengan  $w_\Lambda \neq -1$  diberikan sebagai

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\Lambda + 3H(1 + w_\Lambda)\rho_\Lambda &= 0, \text{ atau} \\ \dot{\Lambda} + 3H(1 + w_\Lambda)\Lambda &= 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

#### IV.2.3 Persamaan Friedmann “efektif” pada brane

Persamaan Friedmann “efektif” pada *brane* merupakan persamaan Friedmann yang diturunkan dari persamaan medan Einstein “efektif” pada *brane* (3.48) yang memenuhi metrik FRW pada *brane* (4.4) dan menggambarkan dinamika alam semesta *brane*. Dengan menggunakan persamaan (4.5)-(4.9), dan dengan memasukkan persamaan (4.27)-(4.28) untuk kosmologi FRW pada *brane*, maka diperoleh turunan dari persamaan medan Einstein “efektif” pada *brane* adalah sebagai berikut:

(i) Untuk  ${}^{(4)}G_{00}$  dengan  $\mu = \nu = 0$ ;

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda_4}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\kappa^2}{3}\rho\left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right) + \frac{2\mathcal{U}}{\kappa^2\lambda}, \quad (4.48)$$



(ii) Untuk  ${}^{(4)}G_{11}$  dengan  $\mu = \nu = 1$ ;

$$-2\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} = -\Lambda_4 + \kappa^2 P^{\text{total}}, \quad (4.49)$$

(iii) Sedangkan, untuk  ${}^{(4)}G_{22}$  dan  ${}^{(4)}G_{33}$  memberikan hasil yang sama seperti pada persamaan (4.49),  ${}^{(4)}G_{11} = {}^{(4)}G_{22} = {}^{(4)}G_{33}$ .

Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (4.48) ke dalam persamaan (4.49), maka diperoleh

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda_4}{3} - \frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3P) - \frac{\kappa^2 \rho}{3 \cdot 2\lambda}(2\rho + 3P) - \frac{6\mathcal{U}}{\kappa^2 \lambda}, \quad (4.50)$$

dengan  $\kappa_4^2 = \kappa^2 = 8\pi G_N$ , dan

$$\lambda = \frac{3M_4^2}{\ell^2}. \quad (4.51)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.43), maka diperoleh hubungan

$$2\lambda \equiv \sigma, \text{ dimana } \sigma = \frac{6M_5^3}{\ell}, \quad (4.52)$$

adalah tensi pada *brane* dalam model RS [11]. Dengan demikian, persamaan (4.48) dan (4.50) dapat dituliskan menjadi

$$H^2 = \frac{\Lambda_4}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\kappa^2}{3}\rho + \frac{\kappa^2 \rho^2}{3\sigma} + \frac{4\mathcal{U}}{\kappa^2 \sigma}, \quad (4.53)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda_4}{3} - \frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3P) - \frac{\kappa^2 \rho}{3\sigma}(2\rho + 3P) - \frac{12\mathcal{U}}{\kappa^2 \sigma}. \quad (4.54)$$

Persamaan (4.53) dan (4.54) merupakan persamaan Friedmann “efektif” pada *brane*, yang mana dua suku terakhir pada kedua persamaan tersebut merupakan suku koreksi dalam skenario dunia *brane* terhadap persamaan Friedmann standar

h (2.47).



### IV.3 Limit Energi Rendah dan Kosmologi pada Daerah Energi Tinggi

#### IV.3.1 Limit energi rendah

Pada analisis tingkat energi, diperkenalkan skala energi massa  $\kappa_4^2 \sim M_4^{-2}$  dengan  $M_4 \sim M_P$ , dimana  $M_P \sim 10^{16}$  TeV adalah skala massa Planck. Sedangkan  $\kappa_5^2 \sim M_5^{-3}$ , dengan besar  $M_5$  ditentukan melalui generalisasi skala energi massa pada dimensi ekstra dan hubungannya dengan skala fundamental yang diberikan oleh [15]

$$M_{4+d} \gtrsim 10^{(32-15d)/(d+2)} \text{ TeV}, \quad (4.55)$$

$$\Rightarrow M_5 > 10^5 \text{ TeV}$$

dimana kompaktifikasi dimensi ekstra dengan volume besar memiliki skala energi yang lebih rendah dari skala Planck,

$$M_{ew} \sim 1 \text{ TeV} \lesssim M_{4+d} \leq M_P \sim 10^{16} \text{ TeV}, \quad (4.56)$$

dengan  $M_{ew}$  adalah skala *electroweak*, serta  $\lambda \equiv M_\lambda^4$  dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.42) yang diberikan sebagai

$$M_\lambda^4 \sim \left(\frac{M_5}{M_4}\right)^2 M_5^4 > (1 \text{ TeV})^4, \quad (4.57)$$

$$\Rightarrow \lambda^{1/4} = M_\lambda > 1 \text{ TeV}.$$

Namun pada limit energi rendah,  $M_5$  dan  $M_\lambda$  cukup besar dibandingkan skala energi materi normal, yakni  $M \ll M_5, M_\lambda$ , dengan  $T_{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(M^4)$  [5].

Suku kedua pada ruas kanan persamaan (3.48) merupakan kontribusi materi normal yang memenuhi energi lokal *brane*, sedangkan suku ketiga yaitu suku kuadrat,  $\Pi_{\mu\nu}$  dapat diabaikan pada limit energi rendah. Hal ini ditunjukkan oleh perbandingan suku  $\Pi_{\mu\nu}$  terhadap suku materi biasa yang diberikan sebagai

$$\frac{\kappa_5^4 |\Pi_{\mu\nu}|}{\kappa_4^2 |T_{\mu\nu}|} \sim \frac{|T_{\mu\nu}|}{\lambda} \sim \frac{M^4}{M_\lambda^4} = \frac{\rho}{\lambda} \sim \frac{\rho}{\sigma}. \quad (4.58)$$





$\Pi_{\mu\nu} \sim (T_{\mu\nu})^2$  merupakan suku koreksi materi energi tinggi yang dapat diabaikan pada limit energi rendah, dimana  $\rho \ll \lambda$  pada gambaran alam semesta saat ini ( $\rho \ll \sigma$ , dan  $H \propto \rho^{1/2}$ ), tetapi lebih dominan pada energi tinggi,  $\rho \gg \lambda$  yang terjadi di awal-awal alam semesta ( $\rho \gg \sigma$ , dan  $H \propto \rho$ ) dan mengubah dinamika kosmologi standar dimana  $H \propto \rho^{1/2}$  [15,17].

Selanjutnya ditinjau limit energi pada suku tensor Weyl,  $E_{\mu\nu}$ . Pertama untuk suku *longitudinal*,  $E_{\mu\nu}^L$  yang sepenuhnya ditentukan oleh  $T_{\mu\nu}$  melalui persamaan (4.40), diperoleh

$$\frac{|E_{\mu\nu}^L|}{\kappa^2 |T_{\mu\nu}|} \sim \frac{M^4}{M_\lambda^4} \sim \frac{\rho}{\sigma}, \quad (4.59)$$

dengan skala energi yang setara dengan suku kuadratik [5,10]. Kedua untuk suku *transverse-traceless* tensor Weyl,  $E_{\mu\nu}^{TT}$  yang menggambarkan efek non-lokal *bulk*. Efek ini murni dari materi-energi dalam *bulk*, yaitu graviton 5D yang bergerak bebas dalam ruang-waktu 5D dan dapat secara bebas tereksitasi melewati *brane*, yang kemudian muncul sebagai efek non-lokal pada *brane*. Untuk menghitung skala energi dari efek ini, dapat ditinjau sebuah potensial gravitasi yang diperkenalkan oleh Randall-Sundrum [7]. Potensial gravitasi antara dua benda pada *brane* dimodifikasi melalui pertukaran graviton yang berada dalam *bulk* 5D yang diberikan sebagai [5,7,15]

$$V(r) \sim G_N \frac{M_1 M_2}{r} \left( 1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} \right), \quad (4.60)$$

dimana  $r$  adalah jarak antara dua benda dan

$$\ell = \sqrt{-\frac{6}{\Lambda_5}} \quad (4.61)$$

adalah jari-jari skala kelengkungan ruang-waktu AdS *bulk* 5D [5,11]. Skala kelengkungan,  $\ell$  dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.43) yang sebagai [11,15]

$$\ell \sim \frac{M_4^2}{M_5^3} \sim 10^{31} M_P^{-1} \sim 10^{31} l_P, \quad (4.62)$$



$$\Rightarrow \ell \sim (10^{-15} \text{ TeV})^{-1} \lesssim 10^{-4} \text{ m},$$

dengan  $l_p \sim 10^{-35} \text{ m}$  adalah skala panjang Planck. Dengan demikian, secara konservatif perbandingan energi untuk suku *transverse-traceless* tensor Weyl diberikan sebagai [5,10]

$$\frac{|E_{\mu\nu}^{TT}|}{\kappa^2 |T_{\mu\nu}|} \sim M^2 \ell^2 \sim \frac{M_5^6 M^2}{M_\lambda^8}. \quad (4.63)$$

Pada limit energi rendah, tidak hanya suku  $\Pi_{\mu\nu}$ , suku  $E_{\mu\nu}$  juga dapat diabaikan. Hal ini ditunjukkan pada perbandingan energi dari persamaan (4.59) dan (4.63), dimana pada limit energi rendah suku  $E_{\mu\nu} \rightarrow 0$  dan kontribusinya tidak ada, sebab suku ini memiliki skala energi tinggi yang setara dengan suku kuadrat dalam  $T_{\mu\nu}$ . Sehingga persamaan medan Einstein “efektif” pada *brane* (3.48) dapat dituliskan menjadi persamaan medan Einstein biasa,

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} \simeq -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (4.64)$$

untuk limit energi rendah [10], yang mana memenuhi model  $\Lambda$ CDM pada dinamika kosmologinya seperti yang disajikan oleh Gazali Yunus, *et al.* [43].

#### IV.3.2 Kosmologi pada daerah energi tinggi

Pada kasus energi tinggi, suku  $\Pi_{\mu\nu}$  dan suku  $E_{\mu\nu}$  dalam persamaan medan Einstein “efektif” pada *brane* (3.48) tidak diabaikan. Mengingat bahwa skala energi suku  $E_{\mu\nu}$  setara dengan skala energi suku  $\Pi_{\mu\nu}$  dalam  $T_{\mu\nu}$ . Oleh sebab itu, jika diambil prinsip kesetaraan ( $E_{\mu\nu} \sim \Pi_{\mu\nu}$ ), maka pada pendekatan energi tinggi diperoleh

$$\frac{\kappa^2 \rho^2}{3 \sigma} \cong \frac{4\mathcal{U}}{\kappa^2 \sigma}, \quad (4.65)$$

dan ‘rapat radiasi gelap’ ( $\rho_u$ ) dapat didefinisikan melalui hubungan pada (4.65) sebagai

$$\rho_u \equiv \frac{2(3\mathcal{U})^{1/2}}{\kappa^2}. \quad (4.66)$$



Dengan menggunakan persamaan (4.42), maka persamaan konservatif untuk “radiasi gelap” pada daerah energi tinggi dapat dituliskan menjadi

$$\dot{\mathcal{U}} + 8H\mathcal{U} = 0. \quad (4.67)$$

Dari persamaan ini, dapat diperoleh persamaan keadaan untuk radiasi gelap adalah  $w_{\mathcal{U}} = 5/3$  dan tekanan isotropik “efektif” sebagai efek non-lokal *bulk* adalah  $5\mathcal{U}/3$  pada kasus energi tinggi. Jika ditinjau persamaan keadaan umum (4.36), maka untuk  $w > 1/3$ , keadaan ini memungkinkan adanya materi relativistik yang memiliki kecepatan lebih cepat dari cahaya ( $v_r \gtrsim c$ ) khususnya pada daerah energi tinggi, yakni pada kondisi paling awal alam semesta.

Pada pendekatan energi tinggi ini, dinamika kosmologi standar menjadi termodifikasi seperti yang telah dibahas sebelumnya, dan persamaan Friedmann “efektif” pada *brane* (4.53) dapat pula dituliskan kembali sebagai

$$H^2 = H_S^2 + H_{HE}^2, \quad (4.68)$$

dengan

$$H_S^2 = \frac{\Lambda_4}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\kappa^2}{3}\rho, \quad \text{dan} \quad (4.69)$$

$$H_{HE}^2 = \frac{\kappa^2 \rho^2}{3\sigma} + \frac{4\mathcal{U}}{\kappa^2 \sigma}, \quad (4.70)$$

dimana  $H_S^2$  merupakan persamaan Friedmann standar dengan  $H_S \propto \rho^{1/2}$  yang dominan pada limit energi rendah ( $H^2 \sim H_S^2$ ). Sedangkan  $H_{HE}^2$  merupakan suku koreksi energi tinggi terhadap persamaan Friedmann standar dengan  $H_{HE} \propto \rho$  dan dari persamaan (4.67) diperoleh solusi rapat radiasi energi tinggi  $\mathcal{U} \sim \rho^2 \propto a^{-8}$  yang dominan pada keadaan paling awal alam semesta ( $H^2 \sim H_{HE}^2$ ). Dengan demikian, persamaan (4.53) merupakan persamaan dinamika kosmologi yang paling efektif untuk menggambarkan evolusi materi-energi dari keadaan paling awal alam semesta hingga saat ini karena tambahan suku koreksi energi tinggi yang

dan modifikasi dari model dunia *brane*.



## BAB V

### DINAMIKA KOSMOLOGI DUNIA *BRANE*

#### V.1 Persamaan Dinamik pada Kosmologi Dunia *Brane*

Dalam studi dinamika kosmologi, untuk menggambarkan evolusi materi-energi (komponen tunggal) penyusun alam semesta, maka diperlukan suatu persamaan dinamik atau persamaan gerak seperti yang diperkenalkan pada persamaan (2.52). Pada daerah energi tinggi, persamaan (2.52) dapat digeneralisasi dengan menambahkan suku koreksi energi tinggi dalam skenario dunia *brane* yang diberikan sebagai

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \sum_i (1 + w_i) \rho_i - \kappa^2 \sum_j (1 + w_j) \frac{\rho_j^2}{\sigma}, \quad (5.1)$$

dimana  $i$  berjalan pada limit energi rendah yang memenuhi dinamika kosmologi standar, dengan komponen berupa kelengkungan, energi gelap, materi relativistik (radiasi), dan materi non-relativistik ( $i = k, \Lambda, M$ , dan  $M = r, m$ ). Sedangkan  $j$  berjalan pada daerah energi tinggi, dengan komponen berupa radiasi dan radiasi gelap ( $j = r, \mathcal{U}$ ). Untuk  $w_\Lambda \neq -1$ , maka persamaan (5.1) dapat diuraikan menjadi

$$\dot{H} = \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda_4}{2} (1 + w_\Lambda) - \frac{\kappa^2}{2} (\rho_M + P_M) - \frac{\kappa^2 \rho_r}{\sigma} (\rho_r + P_r) - \frac{16 \mathcal{U}}{\kappa^2 \sigma}. \quad (5.2)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.51), maka persamaan (4.54) dapat digeneralisasi menurut persamaan (4.53) dan (5.2) untuk kasus  $w_\Lambda \neq -1$  dan pendekatan energi tinggi yang diberikan sebagai

$$\ddot{H} = \frac{4}{3} (1 + 3w_\Lambda) - \frac{4\pi G_N}{3} (\rho_M + 3P_M) - \frac{\kappa^2 \rho_r}{3\sigma} (2\rho_r + 3P_r) - \frac{12 \mathcal{U}}{\kappa^2 \sigma}, \quad (5.3)$$



atau dapat pula disederhanakan menjadi

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3P) - \frac{\kappa^2 \rho_r}{3\sigma}(2\rho_r + 3P_r) - \frac{12\mathcal{U}}{\kappa^2\sigma}, \quad (5.4)$$

dimana  $\rho$  dan  $P$  masing-masing merupakan rapat materi-energi total,  $\rho = \rho_\Lambda + \rho_M$  dan tekanan isotropik total  $P = P_\Lambda + P_M$  pada limit energi rendah, dengan  $P_\Lambda = w_\Lambda \rho_\Lambda$  dan  $\rho_\Lambda$  memenuhi persamaan (2.55).

Dalam model  $\Lambda$ CDM, berdasarkan data observasi sudut horizon pada CMB, alam semesta hampir datar (*flat*) dan dianggap bahwa  $k = 0$ , dengan kerapatan total materi-energi penyusun alam semesta adalah  $\Omega_{\text{tot}} \simeq 1$  [31]. Untuk kasus alam semesta *flat* ( $k = 0$ ), diperoleh persamaan gerak “efektif” dalam kosmologi dunia *brane* mengikuti persamaan (4.53) dan (5.2) sebagai berikut:

$$3H^2 = \Lambda_4 + \kappa^2 \rho_M + \frac{\kappa^2 \rho_r^2}{\sigma} + \frac{12\mathcal{U}}{\kappa^2\sigma}, \quad (5.5)$$

$$\dot{H} = -\frac{\Lambda_4}{2}(1 + w_\Lambda) - \frac{\kappa^2}{2}(\rho_M + P_M) - \frac{\kappa^2 \rho_r}{\sigma}(\rho_r + P_r) - \frac{16\mathcal{U}}{\kappa^2\sigma}, \quad (5.6)$$

dimana rapat materi-energi  $\rho_M$  dan tekanan  $P_M$  masing-masing diberikan sebagai  $\rho_M = \rho_r + \rho_m$  dan  $P_M = P_r = \rho_r/3$ , dengan  $\rho_r$  adalah rapat radiasi dan  $\rho_m$  adalah rapat materi non-relativistik. Disini persamaan keadaan efektif total,  $w_{\text{eff}} = P_{\text{tot}}/\rho_{\text{tot}}$  diberikan sebagai [33]

$$w_{\text{eff}} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}. \quad (5.7)$$

## V.2 Pendekatan Sistem Dinamik pada *Brane*

Pada studi lanjut dinamika kosmologi, untuk medan skalar dan fluida ideal diperkenalkan variabel-variabel tak-berdimensi (*dimensionless*) [33]. Dinamika kosmologi dunia *brane* dalam studi ini juga digunakan variabel-variabel tak-berdimensi untuk menggambarkan evolusi alam semesta. Berdasarkan persamaan (5.5) dan (5.6) dan “efektif” (5.5) untuk  $k = 0$  dengan tambahan suku koreksi energi tinggi, dapat diberikan variabel-variabel tak-berdimensi sebagai berikut:



$$x_1 \equiv \frac{\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3H}}, \quad x_2 \equiv \frac{\kappa\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{3H}}, \quad x_3 \equiv \frac{\kappa\rho_r}{\sqrt{3\sigma H}}, \quad x_4 \equiv \frac{2\sqrt{u}}{\kappa H\sqrt{\sigma}}. \quad (5.8)$$

Sedangkan parameter-parameter kerapatan untuk energi gelap, radiasi, dan radiasi gelap atau ‘radiasi gravitasi’ masing-masing dapat dituliskan sebagai

$$\Omega_\Lambda = x_1^2, \quad \Omega_r = x_2^2 + x_3^2, \quad \Omega_u = x_4^2, \quad (5.9)$$

dan materi non-relativistik didefinisikan sebagai

$$\Omega_m \equiv \frac{\kappa^2\rho_m}{3H^2} = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \quad (5.10)$$

yang mana memenuhi hubungan

$$\Omega_{\text{tot}} \equiv \Omega_\Lambda + \Omega_m + \Omega_r + \Omega_u = 1, \quad (5.11)$$

dari persamaan (5.5).

Dengan menggunakan persamaan (5.5)-(5.6) dan persamaan kontinuitas untuk setiap medan materi-energi pada *brane*, maka dapat diperoleh persamaan-persamaan *autonomous*, yaitu turunan dari variabel  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , dan  $x_4$  terhadap  $N$ , dengan  $N = \ln a$  yang diberikan sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dN} = -\frac{3}{2}(1 + w_\Lambda)x_1 - x_1 \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (5.12)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = -2x_2 - x_2 \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (5.13)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = -4x_3 - x_3 \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (5.14)$$

$$\frac{dx_4}{dN} = -4x_4 - x_4 \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (5.15)$$

dimana  $\dot{H}/H^2$  diberikan sebagai

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{2}(3 + 3w_\Lambda x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2). \quad (5.16)$$



Untuk kasus ini, persamaan keadaan efektif total (5.7) adalah

$$w_{\text{eff}} = w_{\Lambda} x_1^2 + \frac{1}{3}(x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2). \quad (5.17)$$

Pada limit energi rendah, suku energi tinggi lenyap ( $x_3, x_4 = 0$ ), titik tetap dari sistem dinamik (5.12)-(5.15) untuk  $w_{\Lambda} \neq -1$  pada masa dominasi energi gelap diberikan sebagai

$$(x_1, x_2) = (\pm 1, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = w_{\Lambda}, \quad (5.18)$$

yang memenuhi syarat  $dx_i/dN = 0$ . Dengan demikian, berdasarkan persamaan (5.18), untuk masa dominasi energi gelap (dalam hal ini  $\Lambda$  berkontribusi sebagai energi gelap) diperoleh titik tetap  $(\Omega_{\Lambda}, \Omega) \cong (1, 0)$ . Sedangkan nilai eksplisit  $w_{\Lambda}$  dapat ditentukan dengan meninjau lintasan solusi ruang fase dari sistem dinamik (5.12)-(5.15) pada titik tetap  $(\Omega_{\Lambda}, \Omega) \cong (1, 0)$ .

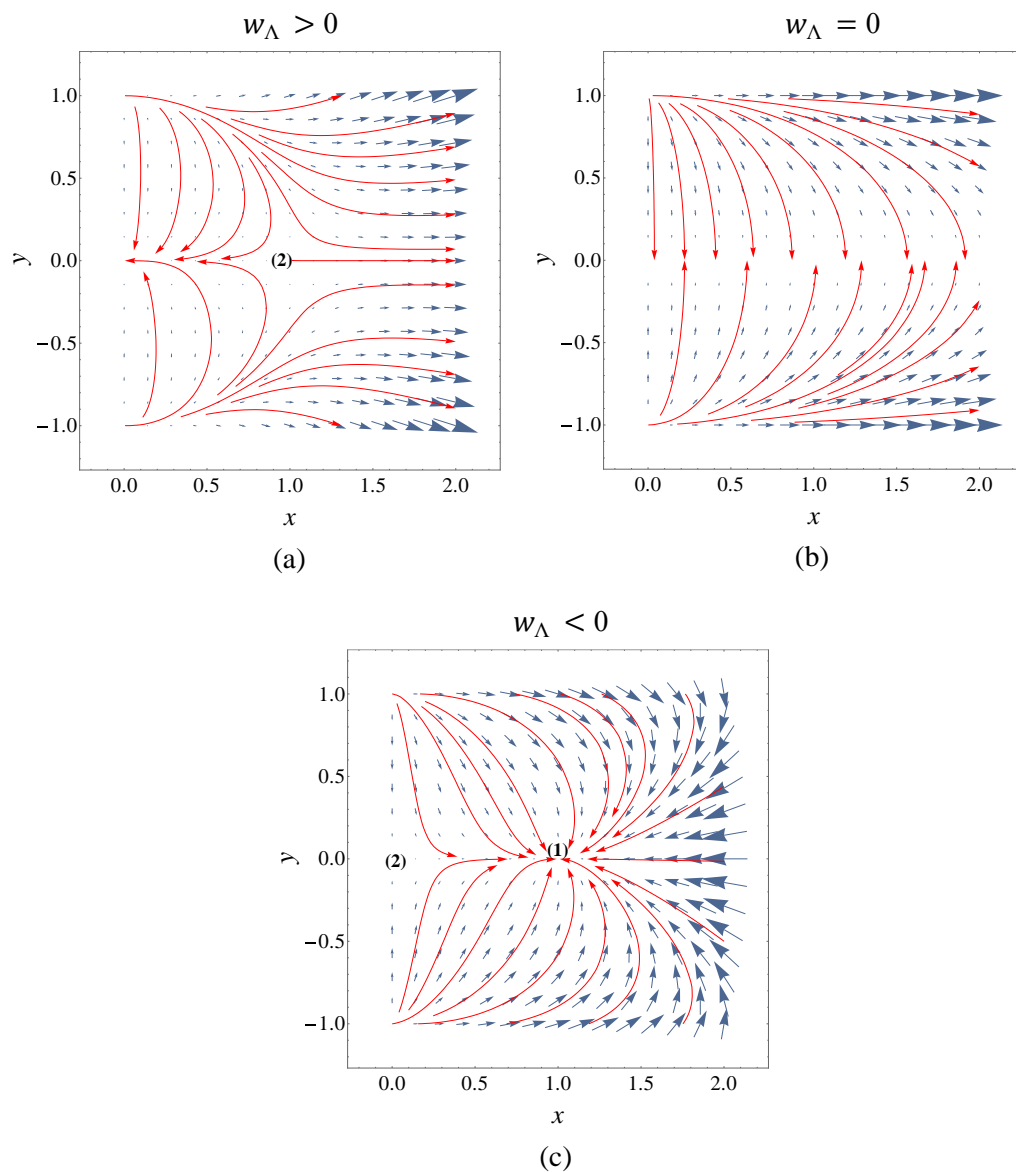
Jika diasumsikan persamaan keadaan untuk energi gelap bervariasi atau berubah terhadap waktu, dan perubahannya bergantung pada volume atau skala alam semesta [44,45], maka  $w_{\Lambda}$  dapat diparameterisasi sebagai fungsi dari faktor skala,  $w_{\Lambda} \equiv w_{\Lambda}(a)$  [33,46]. Oleh sebab itu, dengan menggunakan limit berdasarkan data observasi [33], maka variasi persamaan keadaan energi gelap untuk masa alam semesta didominasi oleh energi gelap dengan titik tetap  $(\Omega_{\Lambda}, \Omega) \cong (1, 0)$  diberikan pada Tabel 5.1 berikut.

**Tabel 5.1** Variasi  $w_{\Lambda}$  pada titik tetap  $(\Omega_{\Lambda}, \Omega) \cong (1, 0)$

Variasi $w_{\Lambda}$	Solusi
$w_{\Lambda} > 0$	<i>Saddle</i>
$w_{\Lambda} = 0$	Tidak Stabil
$w_{\Lambda} < 0$	Stabil
$-4/3 < w_{\Lambda} < -1/3$ (asumsi berdasarkan data observasi)	Stabil

solusi dari variasi persamaan keadaan pada Tabel 5.1 untuk kasus energi gelap dengan titik tetap  $(\Omega_{\Lambda}, \Omega) \cong (1, 0)$  diberikan pada Gambar .2.



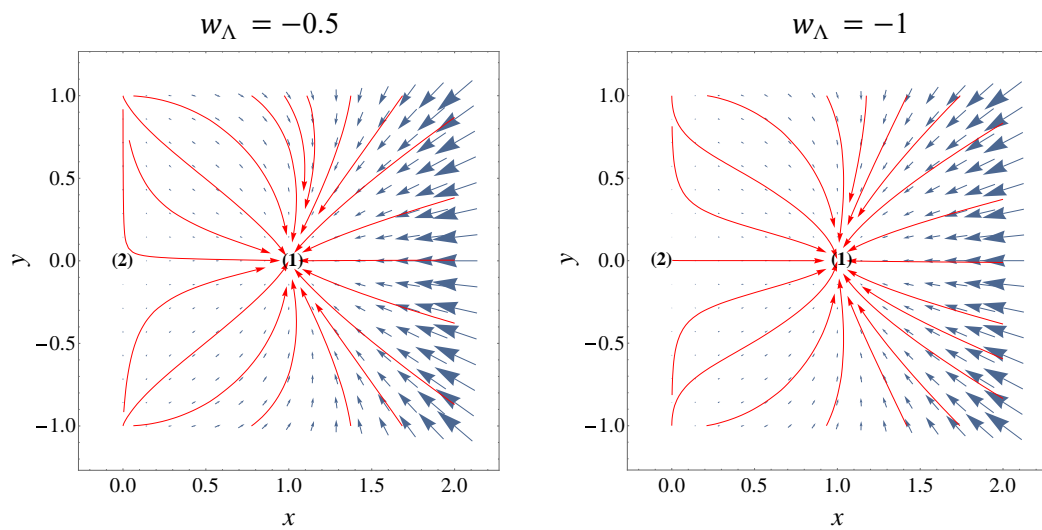


**Gambar 5.1** Lintasan solusi ruang fase untuk persamaan (5.12)-(5.13) pada titik tetap  $(\Omega_\Lambda, \Omega) \cong (1, 0)$  dengan variasi  $w_\Lambda$ . (a) Untuk  $w_\Lambda > 0$ , titik kritis (2) pada titik  $x \equiv x_1 = 1$ ,  $y \equiv x_2 = 0$  adalah titik *saddle*. (b) Untuk  $w_\Lambda = 0$ , solusi menjadi tidak stabil, dan (c) untuk  $w_\Lambda < 0$ , titik kritis (1) pada titik  $x = 1$ ,  $y = 0$  adalah titik stabil, sedangkan titik kritis (2) pada titik  $x = 0$ ,  $y = 0$  adalah titik *saddle*.



Berdasarkan Gambar 5.1 di atas, jelas menunjukkan bahwa agar memenuhi masa alam didominasi oleh energi gelap saat ini, maka persamaan keadaan untuk alam haruslah negatif ( $w_\Lambda < 0$ ), seperti yang ditunjukkan pada Gambar





**Gambar 5.2** Lintasan solusi ruang fase untuk persamaan (5.12)-(5.13) pada titik tetap  $(\Omega_\Lambda, \Omega) \cong (1, 0)$  dengan variasi  $w_\Lambda$  adalah  $-4/3 < w_\Lambda < -1/3$ , dimana titik kritis (1) pada titik  $x \equiv x_1 = 1, y \equiv x_2 = 0$  adalah titik stabil, sedangkan titik kritis (2) pada titik  $x = 0, y = 0$  adalah titik *saddle*.

Berdasarkan data observasi SN Ia, jelas menunjukkan alam semesta berekspansi dipercepat karena keberadaan energi gelap dengan persamaan keadaan,  $w_{DE} < -1/3$  [33]. Sedangkan berdasarkan analisis data kombinasi SN Ia, CMB, dan BAO, menggunakan WMAP, menunjukkan persamaan keadaan untuk energi gelap adalah  $-1.098 < w_{DE} < -0.841$  dan jika  $w_{DE} = -1$  seperti dalam model  $\Lambda$ CDM, parameter rapat energi gelap dari parameter pergeseran CMB diperoleh menjadi  $0.72 < \Omega_{DE}^{(0)} < 0.77$ , sedangkan nilai  $\Omega_{DE}^{(0)}$  menjadi lebih kecil untuk peningkatan  $w_{DE}$  [33]. Dengan demikian, secara observasional untuk memenuhi kasus alam semesta berekspansi dipercepat ( $w_{DE} < -1/3$ ) dengan kontribusi energi gelap  $\Omega_{DE}^{(0)} = 0.726 \pm 0.015$ , maka dapat dipilih persamaan keadaan untuk energi gelap adalah  $-4/3 < w_{DE} < -1/3$  seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.2 dengan  $w_{DE} \equiv w_\Lambda$ . Jika persamaan keadaan energi gelap berubah terhadap waktu, dimana  $w_\Lambda$  diparameterisasi sebagai fungsi dari faktor skala alam semesta  $a$ , maka  $w_\Lambda$  haruslah berbanding terbalik dengan  $a$  ( $w_\Lambda \sim 1/a$ ), sebab perubahan  $a$  semakin cepat terhadap perubahan waktu [31,42,46], sedangkan  $w_\Lambda$  haruslah semakin rendah apabila  $w_\Lambda$  semakin meningkat hingga  $w_\Lambda \geq 0$ , maka solusi yang menjadi tidak stabil seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.1(a) dan



5.1(b), dan tidak memenuhi keadaan alam semesta saat ini. Evolusi dari  $w_\Lambda$  ditentukan dengan menggunakan persamaan (5.20) yang diparameterisasi sebagai fungsi dari  $a$  yaitu [33,46]

$$w_\Lambda(a) = \sum_{n=0}^1 w_n X_n(a) , \quad n \leq 1 \quad (5.19)$$

dimana fungsi ekspansinya diberikan sebagai,  $X_n(a) \equiv \left(1 - \frac{a_0}{a}\right)^n$ , maka persamaan (5.19) dapat diuraikan menjadi

$$w_\Lambda(a) = w_0 + w_1 \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) , \quad -4/3 < w_\Lambda(a) < -1/3 . \quad (5.20)$$

Untuk  $a = a_0 = 1$ , maka  $w_\Lambda(a) \rightarrow w_0$  dan  $w_\Lambda(a) = w_0 + w_1$  untuk  $a \rightarrow \infty$ , sehingga dapat ditentukan bahwa  $w_0 = -1/3$  dan  $w_0 + w_1 = -4/3$ .

### V.3 Dinamika Alam Semesta *Brane*

Dinamika alam semesta *brane* dalam studi ini digambarkan melalui evolusi dari komponen tunggal yang mendominasi alam semesta *brane*. Komponen-komponen yang memiliki masa dominasi tersebut diantaranya adalah radiasi, materi (non-relativistik), dan energi gelap. Evolusi dari komponen-komponen ini untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 5.3.

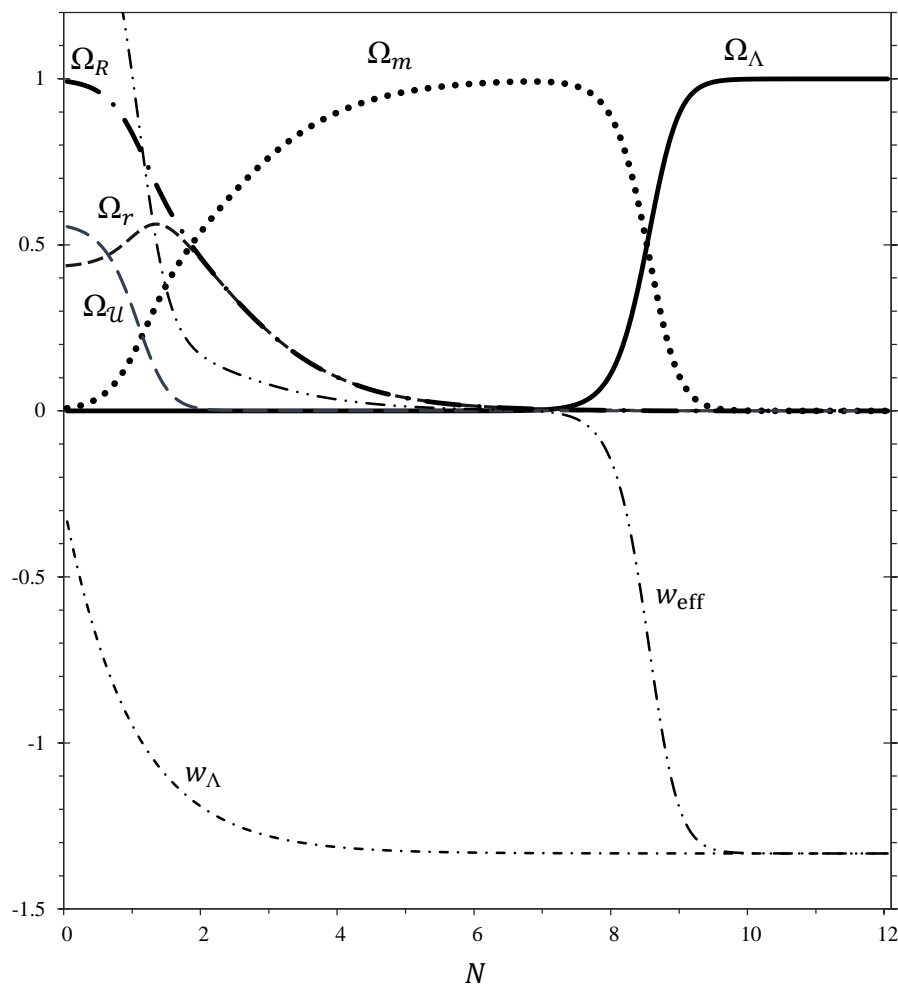
Pada Gambar 5.3 diplot evolusi dari  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_m$ , dan  $\Omega_R$  terhadap  $N$ , yang masing-masing adalah parameter kerapatan energi gelap, materi (non-relativistik), dan radiasi total efektif yang didefinisikan sebagai

$$\Omega_R = \Omega_r + \Omega_u , \quad (5.21)$$

yang dominan pada daerah energi tinggi (awal-awal alam semesta) yang secara rinci dibahas pada Subbab V.4. Pada era radiasi ini, diperoleh persamaan keadaan efektif,  $w_{\text{eff}} > 1/3$  yang timbul karena efek dari suku koreksi energi tinggi yang mengubah dinamika kosmologi standar, khususnya pada awal- awal alam semesta.

energi tinggi (awal-awal alam semesta) dibatasi pada  $N = 0$  hingga  $N \simeq 2$ , dan limit energi rendah dimulai dari masa kesetaraan materi-radiasi, yakni





**Gambar 5.3** Evolusi dari  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_m$ , dan  $\Omega_R$  dengan radiasi total efektif,  $\Omega_R = \Omega_r + \Omega_u$ , seiring dengan evolusi persamaan keadaan total efektif,  $w_{\text{eff}}$  dan persamaan keadaan energi gelap,  $w_\Lambda = -4/3 + e^{-N}$ . Kondisi awal diberikan sebagai  $x_1 = 0.5 \times 10^{-7}$ ,  $x_2 = 0.12$ ,  $x_3 = 0.65$ ,  $x_4 = 0.745$  pada  $N = 0$ .

pada  $N \gtrsim 2$ . Selanjutnya pada era materi, yaitu era dominasi dari materi non-relativistik diperoleh persamaan keadaan efektif,  $w_{\text{eff}} \simeq 0$  yang kompatibel dengan persamaan keadaan materi non-relativistik, yaitu  $w_m = 0$ .

Untuk era dominasi energi gelap, yang menggambarkan keadaan alam semesta saat ini, persamaan keadaan efektif pada persamaan (5.18) setara dengan persamaan keadaan energi gelap ( $w_{\text{eff}} = w_\Lambda$ ), yang mana  $w_\Lambda$  dapat diberikan



$$w_{\Lambda} = -\frac{4}{3} + e^{-N}, \quad (5.22)$$

yang merupakan representasi dari persamaan (5.20), dengan  $N = \ln a$ , dimana untuk  $a = a_0 = 1$  maka  $w_{\text{eff}} = -1/3$ , jika  $a > 1$  maka  $w_{\text{eff}} < -1/3$  yang menunjukkan percepatan ekspansi alam semesta, dan jika  $a \rightarrow \infty$  maka diperoleh  $w_{\text{eff}} \simeq -4/3$ . Jika ditinjau keadaan alam semesta saat ini berdasarkan data observasi yang diberikan pada persamaan (4.45), dari Gambar 5.3 diperoleh

$$\begin{aligned} \Omega_{\Lambda} &\simeq 0.7258, \\ \Omega_m &\simeq 0.2739, \\ \Omega_R &\sim \Omega_r \simeq 0.0003, \\ \Omega_u &\simeq 0.00, \\ w_{\text{eff}} &\simeq -0.97, \end{aligned} \quad (5.23)$$

pada  $N \simeq 8.7$ . Parameter kerapatan energi gelap,  $\Omega_{\Lambda}$  pada persamaan (5.23) menunjukkan angka yang sesuai dengan analisis data kombinasi SN Ia, CMB, dan BAO, menggunakan WMAP, yaitu  $\Omega_{\text{DE}}^{(0)} = 0.726 \pm 0.015$  yang diberikan pada persamaan (4.45). Selain itu,  $w_{\text{eff}}$  pada persamaan (5.23) juga menunjukkan angka yang kompatibel dengan persamaan keadaan energi gelap saat ini yang diberikan pada persamaan (4.46), yaitu  $w_{\text{DE}} = -0.94 \pm 0.1$  atau  $-1.098 < w_{\text{DE}} < -0.841$ .

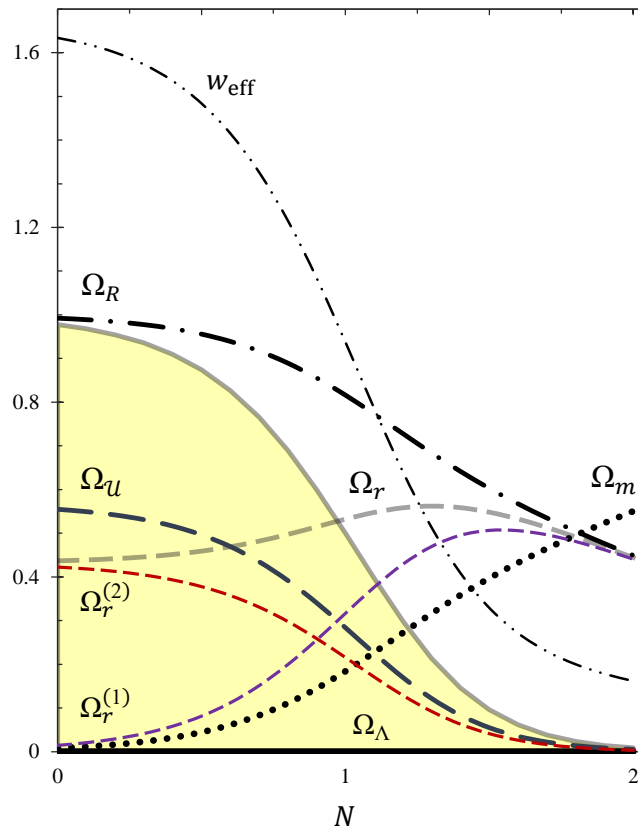
#### V.4 Awal-awal Alam Semesta *Brane*

Pada titik awal, alam semesta didominasi oleh materi relativistik (radiasi),  $\Omega_r$  dan radiasi gelap atau ‘radiasi gravitasi’,  $\Omega_u$  yang menjadi komponen penyusun radiasi total efektif pada *brane* yang diberikan pada persamaan (5.21). Secara spesifik, materi relativistik (radiasi) juga terdiri dari dua komponen penyusun menurut persamaan (5.9) yang dapat dituliskan sebagai

$$\Omega_r \equiv \Omega_r^{(1)} + \Omega_r^{(2)} = x_2^2 + x_3^2, \quad (5.24)$$

$\Omega_r^{(1)} \sim \rho_r$  merupakan radiasi yang tetap *exist* pada limit energi rendah,



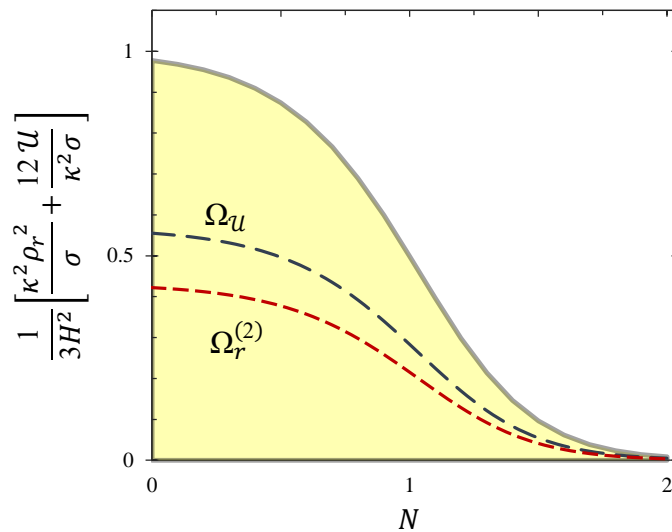


**Gambar 5.4** Evolusi dari komponen penyusun radiasi total efektif  $\Omega_U$ ,  $\Omega_r$ , dengan  $\Omega_r = \Omega_r^{(1)} + \Omega_r^{(2)}$  (kurva putus-putus warna abu-abu), dan  $w_{\text{eff}}$  pada daerah energi tinggi (awal-awal alam semesta).

sedangkan  $\Omega_r^{(2)} \sim \rho_r^2$  merupakan suku koreksi energi tinggi yang bertindak sebagai radiasi yang hanya *exist* pada kondisi paling awal alam semesta. Pada Gambar 5.4 diplot evolusi dari komponen penyusun radiasi total efektif, yaitu  $\Omega_U$ ,  $\Omega_r^{(1)}$ , dan  $\Omega_r^{(2)}$  terhadap  $N$  yang mendominasi pada awal-awal alam semesta. Pada kondisi ini, materi non-relativistik dan energi gelap sangat kecil sampai pada masa kesetaraan materi-radiasi pada  $N \approx 2$ . Dan pada kondisi paling awal alam semesta diperoleh persamaan keadaan efektif  $w_{\text{eff}} > 1/3$  atau lebih tepatnya  $w_{\text{eff}} \approx 5/3$  pada  $N \approx 0$ . Keadaan ini disebabkan oleh dominasi suku koreksi energi tinggi pada

paling awal alam semesta seperti yang terlihat pada Gambar 5.5, yang mana dan Referensi [47], pada titik tetap dimana radiasi gelap dominan,





**Gambar 5.5** Daerah dominasi suku koreksi energi tinggi pada kondisi paling awal alam semesta (era dominasi radiasi) dengan kurva padat warna abu-abu adalah  $\Omega_r^{(2)} + \Omega_u$ .

$(\Omega, \Omega_u) \simeq (0,1)$  menunjukkan solusi stabil ketika persamaan keadaan  $w > 1/3$ . Hal ini juga ditunjukkan pada persamaan (4.67), yang mana diperoleh persamaan keadaan radiasi gelap adalah  $w_u = 5/3$  dan kondisi ini berlaku untuk suku koreksi energi tinggi. Namun,  $\Omega_r^{(1)}$  mulai meningkat seiring dengan menyusutnya suku koreksi energi tinggi, hingga pada titik maksimum  $\Omega_r^{(1)}$  diperoleh  $w_{\text{eff}} \simeq 1/3$ . Pada kondisi ini, suku koreksi energi tinggi menjadi lenyap dan materi-energi pada limit energi rendah mulai mendominasi alam semesta.

Daerah berwarna kuning pada Gambar 5.5 merupakan jumlah dari radiasi gelap dan suku energi tinggi yang berperan sebagai radiasi total yang dominan pada kondisi paling awal alam semesta dan evolusinya terhadap  $N$  menunjukkan peluruhan yang sangat cepat. Pada Gambar 5.5, radiasi gelap atau ‘radiasi gravitasi’ sangat dominan pada daerah energi tinggi, yang menunjukkan bahwa ‘radiasi gravitasi’ yang merupakan gelombang gravitasi 4D sangat dominan pada kondisi paling awal alam semesta dan dapat diasumsikan bahwa: *gelombang gravitasi yang dominan pada daerah energi tinggi, meluruh dan tereksitasi ke dalam bulk graviton 5D pada limit energi rendah* (lihat juga Referensi [48,49]).



## BAB VI

### KONSTANTA KOSMOLOGI NON-LOKAL

#### VI.1 Konstanta Kosmologi “Efektif” dalam Dunia *Brane*

Dalam skenario dunia *brane*, konstanta kosmologi “efektif” pada *brane* yang diberikan oleh persamaan (3.41) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\Lambda_4^{\text{eff}} = -\frac{3}{\ell^2} + \frac{\kappa^2 \lambda}{2}, \quad (6.1)$$

dimana

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{\ell^2}, \quad (6.2)$$

adalah konstanta kosmologi non-lokal mengikuti persamaan (4.61), sedangkan  $\lambda$  merupakan energi vakum yang terlokalisasi pada *brane*. Dengan menggunakan persamaan (4.57) dan (4.62) pada persamaan (6.1), besar skala energi vakum “efektif” dalam model dunia *brane* secara teori diperoleh

$$|\Lambda_4^{\text{eff}}| \sim (10^{-12} \text{ GeV})^2. \quad (6.3)$$

Jika ditinjau sebagai rapat energi vakum

$$\rho_\Lambda^{\text{eff}} = \frac{\Lambda_4^{\text{eff}}}{8\pi G}, \quad (6.4)$$

mengikuti persamaan (2.55) dengan  $\kappa^2 = 8\pi G$ , maka rapat energi vakum “efektif” dari persamaan (6.1)-(6.2) dapat diberikan sebagai

$$\rho_\Lambda^{\text{eff}} = \rho_\ell + \rho_\lambda, \quad (6.5)$$



$$\rho_\Lambda^{(5)} = \frac{\Lambda_5}{2\kappa^2} = -\frac{3}{\kappa^2 \ell^2} \equiv \rho_\ell, \text{ dan} \quad (6.6)$$

$$\rho_\lambda \equiv \frac{\lambda}{2}. \quad (6.7)$$

Sedangkan besar rapat energi vakum “efektif” dalam model dunia *brane* berdasarkan persamaan (6.5) adalah

$$|\rho_\Lambda^{\text{eff}}| \sim 10^{13} \text{ GeV}^4 \sim 10^{-63} M_P^4, \quad (6.8)$$

dimana  $M_P \sim 10^{19} \text{ GeV} = 10^{16} \text{ TeV}$ .

Berdasarkan data observasi pada percepatan ekspansi alam semesta saat ini, rapat energi vakum dalam kosmologi standar  $\rho_\Lambda \propto a^0$  dan konstanta kosmologi  $\Lambda$  sebanding dengan kuadrat dari parameter Hubble  $H_0$  sekarang untuk era dominasi energi gelap. Pada kasus ini, besar skala  $\Lambda$  secara observasi adalah [33]

$$\Lambda \sim H_0^2 = (2.133h \times 10^{-42} \text{ GeV})^2, \quad (6.9)$$

dengan  $h \approx 0.7$  adalah konstanta parameterisasi dari tetapan Hubble sekarang. Jika didefinisikan sebagai rapat energi vakum, maka secara observasi diperoleh

$$\rho_\Lambda \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4 \sim 10^{-123} M_P^4. \quad (6.10)$$

Berdasarkan teori standar untuk energi vakum  $\langle \rho \rangle$  dalam ruang vakum, diperoleh rapat energi vakum  $\rho_{\text{vac}} \simeq 10^{74} \text{ GeV}^4$  yang  $10^{121}$  kali lebih besar daripada nilai observasi (6.10) [33]. Sedangkan rapat energi vakum “efektif” yang diperoleh dalam model dunia *brane* (6.8) masih  $10^{60}$  kali lebih besar daripada nilai  $\rho_\Lambda$  pada persamaan (6.10), namun nilai ini jauh lebih kecil daripada teori standar. Pada kasus lain, untuk skala QCD diperoleh  $\rho_{\text{vac}} \sim 10^{-3} \text{ GeV}^4$  [33], yang juga masih jauh lebih besar daripada  $\rho_\Lambda$  meskipun nilai ini lebih kecil daripada rapat energi vakum “efektif” dalam model dunia *brane*. Sedangkan rapat energi vakum yang mendekati nilai observasi (6.10) diperoleh melalui model Super-Simetri (SUSY) yang dibahas dalam Referensi [33].





## VI.2 Energi Gelap dalam Dunia *Brane*

Dalam studi dinamika kosmologi dunia *brane*, rapat energi vakum “efektif” (6.5) dapat diartikan sebagai rapat energi gelap total pada *brane*. Sehingga, selain variabel-variabel yang didefinisikan pada persamaan (5.8), pada kasus ini juga diperkenalkan variabel baru, yaitu:

$$x_5 \equiv \frac{\kappa\sqrt{\rho_\lambda}}{\sqrt{3}H} = \frac{\kappa\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{6}H}, \quad (6.11)$$

mengikuti definisi  $\rho_\lambda$  pada persamaan (6.7). Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (6.5), maka parameter kerapatan energi gelap total yang diberikan pada persamaan (5.8)-(5.9) dapat didefinisikan sebagai

$$\Omega_\Lambda^{\text{tot}} \equiv \Omega_\Lambda = \Omega_\ell + \Omega_\lambda, \quad (6.12)$$

dimana

$$\Omega_\lambda = x_5^2, \quad (6.13)$$

adalah parameter kerapatan energi vakum yang terlokalisasi pada *brane*, dengan memilih  $\dot{\rho}_\lambda = 0 = \dot{\Lambda}$  atau dianggap bahwa persamaan keadaan untuk energi vakum lokal *brane* adalah konstan dan tidak berubah terhadap waktu, yaitu  $w_\lambda = -1$ . Sedangkan  $\Omega_\ell$  merupakan parameter kerapatan untuk konstanta kosmologi non-lokal yang diberikan sebagai

$$\Omega_\ell \equiv \frac{\Lambda_5}{6H^2} \equiv -(H\ell)^{-2} = \Omega_\Lambda - \Omega_\lambda, \quad (6.14)$$

yang didefinisikan berdasarkan persamaan (6.6).

Jika  $\Lambda_5 = 0$ , maka pada *brane* diperoleh  $\dot{\Lambda}_4 = 0 = \dot{\Lambda}$  dengan  $w_\Lambda = w_\lambda$ , sebab  $\Lambda_4 = \kappa^2\rho_\lambda$  dan keadaan ini memenuhi model  $\Lambda$ CDM yang dengan jelas dibahas pada Referensi [43]. Namun, jika dipilih  $\Lambda_5 \neq 0$  dan kontribusinya memiliki peran yang penting pada evolusi energi gelap, dengan mengasumsikan

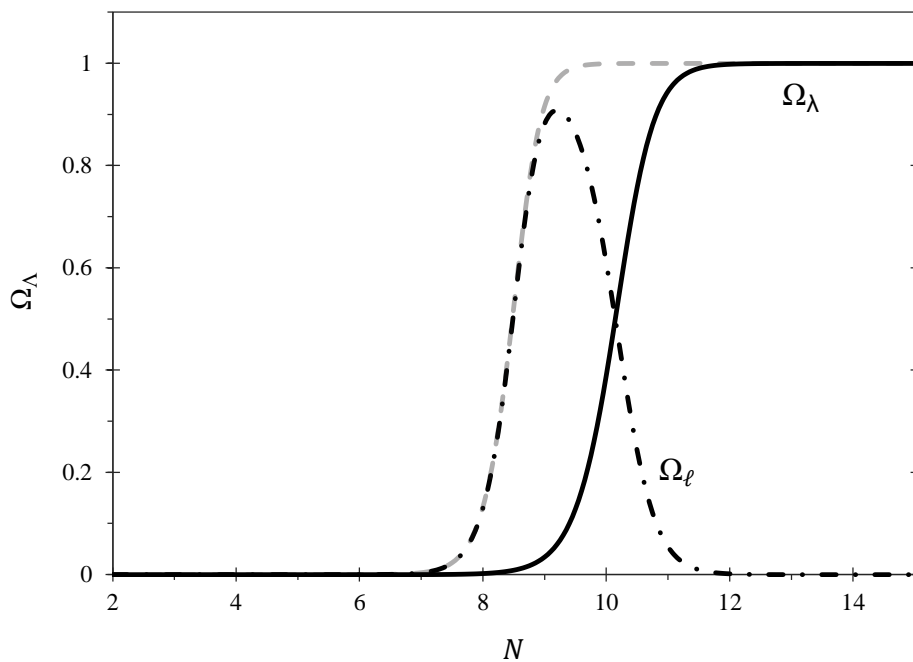
$\Lambda_5 \neq 0$ , sehingga keberadaan dari  $\Lambda_5$  dapat memaksakan  $\dot{\Lambda}_4 \neq 0$  dengan  $w_\lambda = -1$  bahkan  $w_\Lambda$  bervariasi atau berubah terhadap waktu. Dengan



demikian, untuk kondisi awal  $x_5 = x_1$ , maka turunan dari variabel  $x_5$  pada persamaan (6.11) terhadap  $N$  dapat diberikan sebagai

$$\frac{dx_5}{dN} = \frac{x_5}{2} (3 - 3x_5^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2). \quad (6.15)$$

Efek dari kontribusi konstanta kosmologi non-lokal,  $\Lambda_5$  pada dinamika kosmologi dunia *brane* khususnya pada energi gelap dapat dilihat pada Gambar 6.1 berikut.



**Gambar 6.1** Evolusi dari  $\Omega_\rho$  dan  $\Omega_\Lambda$  untuk  $\Omega_\Lambda$  (kurva putus-putus warna abu-abu) memenuhi persamaan (6.12)-(6.14). Kondisi awal diberikan sebagai  $x_5 = x_1 = 0.5 \times 10^{-7}$  pada  $N = 0$ .

Pada Gambar 6.1 diplot evolusi dari  $\Omega_\rho$  dan  $\Omega_\Lambda$  terhadap  $N$  yang merupakan komponen parameter kerapatan energi gelap total  $\Omega_\Lambda$  pada dinamika kosmologi dunia *brane*. Karena energi gelap dominan pada limit energi rendah, maka solusi yang diberikan pada Gambar 6.1 dimulai pada  $N \approx 2$ . Gambar 6.1 menunjukkan

parameter kerapatan energi dari konstanta kosmologi non-lokal  $\Lambda_5$  meningkat seiring meningkatnya parameter kerapatan energi gelap  $\Omega_\Lambda$ , tapi kemudian menurun. Ketika energi vakum lokal *brane*,  $\Omega_\Lambda$  mulai meningkat dan mendominasi alam



semesta. Selain itu, plot evolusi  $\Omega_\ell$  pada Gambar 6.1 juga memiliki nilai perubahan yang serupa dengan evolusi rapat energi suku Gauss-Bonnet yang diberikan oleh Referensi [33,50], dimana suku GB pada kasus ini memiliki peran penting pada skenario ekspansi alam semesta dipercepat. Dengan meninjau keadaan alam semesta saat ini berdasarkan persamaan (5.23), dimana saat  $\Omega_\Lambda \simeq 0.72$ ,  $\Omega_m \simeq 0.27$ , dan  $w_{\text{eff}} \simeq -0.97$  pada  $N \simeq 8.7$ , dari Gambar 6.1 juga diperoleh

$$\Omega_\ell \simeq 0.7106, \quad \Omega_\Lambda \simeq 0.0152, \quad (6.16)$$

yang memenuhi masa sekarang untuk ekspansi alam semesta dipercepat dengan kontribusi energi gelap  $\Omega_\Lambda \sim 72\%$  di alam semesta. Dengan demikian, berdasarkan kontribusi energi pada persamaan (6.16), kontribusi konstanta kosmologi non-lokal  $\Lambda_5$  yang disimbolkan sebagai  $\Omega_\ell$  lebih dominan daripada energi vakum lokal *brane*, sehingga  $\Lambda_5$  sangat mungkin menjadi sumber dari energi gelap yang mengakibatkan alam semesta berekspansi dipercepat pada masa sekarang.

### VI.3 Jari-jari Kelengkungan *Bulk* AdS 5D

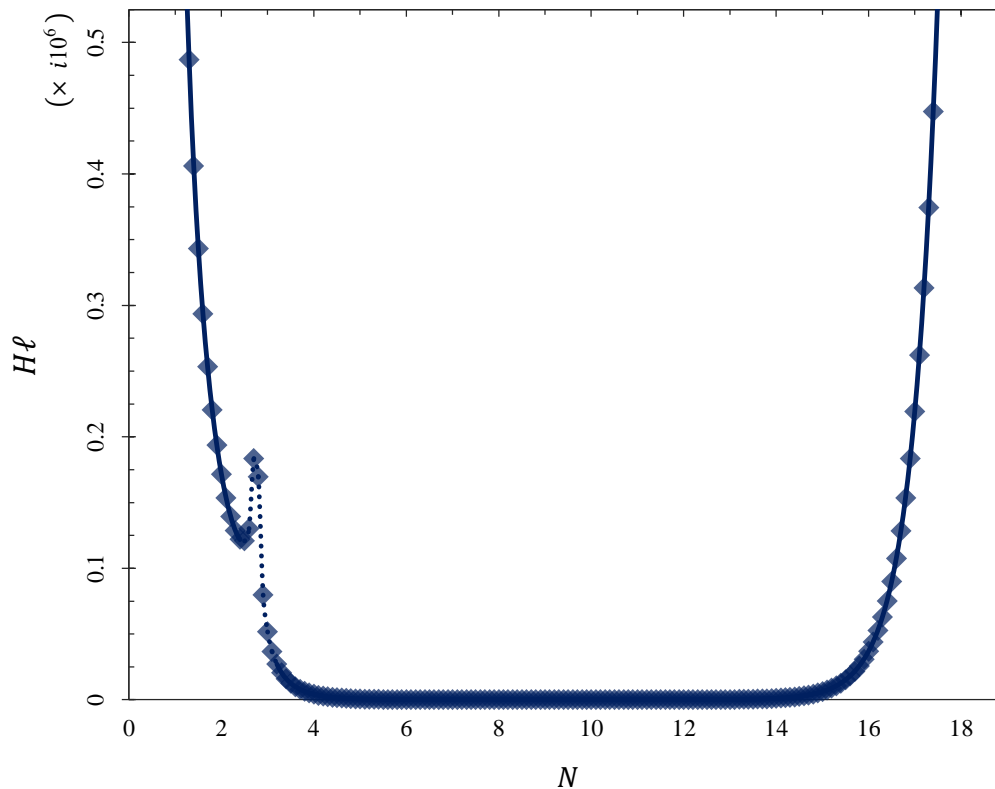
Jari-jari kelengkungan ruang-waktu *bulk* AdS 5D disimbolkan sebagai  $\ell$  dan relasinya dengan konstanta kosmologi non-lokal  $\Lambda_5$  diberikan pada persamaan (6.2). Sebagaimana yang telah dibahas sebelumnya, dimana  $\Lambda_5 \neq 0$  dan kontribusinya memiliki peran yang penting pada masa dominasi energi gelap saat ini, dengan memandang bahwa  $\Lambda_5$  berubah terhadap waktu ( $\dot{\Lambda}_5 \neq 0$ ), maka secara otomatis jari-jari kelengkungan ruang-waktu *bulk* AdS 5D juga berubah terhadap waktu. Secara spesifik, perubahan dari  $\ell$  sangat bergantung pada perubahan  $\Lambda_5$ , dimana untuk  $\Lambda_5 \gg$  maka  $\ell \ll$  dan sebaliknya, untuk  $\Lambda_5 \ll$  dan  $\Lambda_5 \rightarrow 0$  maka  $\ell \gg$  dan  $\ell \rightarrow \infty$ .

Dalam studi dinamika kosmologi, jari-jari kelengkungan ruang-waktu *bulk* AdS 5D dapat pula ditentukan dengan menggunakan persamaan (6.14) yang dapat

sebagai

$$H\ell = \sqrt{-\frac{1}{|\Omega_\ell|}}. \quad (6.17)$$





**Gambar 6.2** Jari-jari skala kelengkungan ruang-waktu *bulk* AdS 5D mengikuti persamaan (6.17) yang bergantung pada evolusi  $\Omega_\ell$  terhadap  $N$ .

Pada Gambar 6.2 diplot jari-jari skala kelengkungan ruang-waktu *bulk* AdS 5D terhadap  $N$  mengikuti persamaan (6.17) yang menunjukkan bahwa perubahannya sangat bergantung pada evolusi  $\Omega_\ell$ , dimana jari-jari skala kelengkungan *bulk* menyusut seiring dengan meningkatnya  $\Omega_\ell$ , tapi meningkat dan bahkan  $\ell \rightarrow \infty$  pada saat  $\Omega_\ell$  menyusut dan  $\Omega_\ell \rightarrow 0$ . Jari-jari kelengkungan ruang-waktu *bulk* AdS 5D yang sangat besar ( $\ell \rightarrow \infty$ ) merupakan realisasi model RS2 [7,51] yang juga kompatibel dengan model DGP dalam skenario dunia *brane* [8], dimana volume dimensi ekstra yang tak-hingga  $V_d \rightarrow \infty$  sebanding dengan jari-jari kelengkungan *bulk* AdS 5D ( $V_d \sim \ell$ ).



lain bergantung pada evolusi  $\Omega_\ell$ , jari-jari skala kelengkungan ruang-  
*bulk* AdS secara rinci juga bergantung pada parameter tetapan Hubble  $H_0$ ,  
 persamaan (6.17) dapat diparameterisasi menjadi

$$\ell = -\frac{1}{iH_0} \sqrt{\frac{1}{|\Omega_\ell|}} \equiv i\ell_0, \quad (6.18)$$

dengan

$$\ell_0 \equiv \frac{1}{H_0} \sqrt{\frac{1}{|\Omega_\ell|}}, \quad (6.19)$$

dimana  $i$  adalah bilangan imajiner yang menunjukkan bahwa  $\ell$  merupakan dimensi ekstra dari sebuah *brane* 4D (permukaan-hiper  $\Sigma$ ), sedangkan  $\ell_0$  adalah besar jari-jari kelengkungan ruang-waktu *bulk* AdS 5D secara lokal. Pada Gambar 6.2, di awal-awal alam semesta untuk  $N \simeq 0$ , jari-jari skala kengkungan *bulk* sangat besar dan menuju tak-hingga, namun jika digunakan persamaan (6.18)-(6.19), dimana evolusi parameter tetapan Hubble sangat besar di awal-awal alam semesta ( $H(t=0) \rightarrow \infty$  pada  $N \simeq 0$ ) dan semakin menyusut pada waktu  $t$  yang semakin besar berdasarkan dari Referensi [42,52], sehingga diperoleh  $\ell \ll$  bahkan  $\ell \rightarrow 0$  di awal-awal alam semesta. Jika ditinjau pada  $N \simeq 8.7$  dengan  $\Omega_\ell \simeq 0.71$  dari persamaan (6.16), maka dengan menggunakan persamaan (6.19) diperoleh jari-jari kelengkungan ruang-waktu *bulk* AdS 5D secara lokal adalah

$$\begin{aligned} \ell_0 &\sim \frac{1.186}{H_0} \sim 10^{42} \text{ GeV}^{-1} \sim 10^{61} l_P \\ &\Rightarrow \ell_0 \sim 10^{26} \text{ m} \sim 10 \text{ Glyr}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

dengan  $H_0 = 100h \text{ km/sMpc} \simeq 2.1332h \times 10^{-42} \text{ GeV}$  dan  $h \approx 0.7$  untuk parameter Hubble sekarang [33].  $\ell_0$  yang diperoleh pada persamaan (6.20) merupakan nilai spesifik dari jari-jari kelengkungan *bulk* saat ini secara observasi yang  $10^{30}$  kali lebih besar daripada  $\ell$  pada persamaan (4.62), dan besar skalanya setara dengan skala jari-jari alam semesta saat ini yaitu  $\sim 46 \text{ Glyr}$  atau sekitar  $\sim 4.4 \times 10^{26} \text{ m}$  [53,54] dan akan terus meningkat hingga  $\ell \rightarrow \infty$  seiring dengan meningkatnya  $\Omega_\ell$  dan  $H_0$ .



## BAB VII

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### VII.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil studi yang telah dilakukan dan dibahas dalam Skripsi ini, maka dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut:

(a) *Persamaan medan Einstein biasa dalam relativitas umum tergeneralisasi dalam model dunia brane.* Generalisasi persamaan medan Einstein biasa dalam dunia brane diberikan oleh persamaan (3.40) yang dinyatakan sebagai persamaan medan Einstein “efektif” pada brane. Pada persamaan ini terdapat beberapa suku koreksi yang men-generalisasikan persamaan medan Einstein biasa, yaitu: suku  $\Pi_{\mu\nu}$  yang relevan dengan energi tinggi, dan suku  $E_{\mu\nu}$  yang relevan dengan graviton 5D, serta tambahan suku  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  yang lenyap apabila tidak ada medan materi lain selain gravitasi dalam bulk.

(b) *Persamaan Friedmann termodifikasi pada pendekatan energi tinggi dalam model dunia brane* yang diberikan oleh persamaan (4.68). Secara spesifik, modifikasi persamaan Friedmann diberikan oleh persamaan (4.53)-(4.54) yang dikenal sebagai persamaan Friedmann “efektif” pada brane. Dalam persamaan ini terdapat suku koreksi energi tinggi dengan  $H \propto \rho$  dan mengubah dinamika kosmologi standar dimana  $H \propto \rho^{1/2}$ . Dengan tambahan suku koreksi energi tinggi, persamaan ini jadi lebih efektif untuk menggambarkan evolusi alam semesta khususnya di awal-awal alam semesta.

(c) *Evolusi di awal-awal alam semesta lebih kompleks melalui pendekatan energi tinggi dalam dinamika kosmologi dunia brane.* Hal ini jelas pada kondisi awal alam semesta dimana  $w_{\text{eff}} > 1/3$  yang memodifikasi dinamika kosmologi standar pada masa dominasi radiasi dengan  $w_r \simeq 1/3$ . Kondisi ini dimodifikasi oleh dominasi suku koreksi energi tinggi di awal-awal alam semesta yang menggantikan dominasi radiasi gelap yang juga dibahas pada Referensi [47].



(d) *Energi gelap yang mendominasi alam semesta di masa sekarang sangat mungkin berasal dari suku konstanta kosmologi non-lokal,  $\Lambda_5$  dalam bulk 5D.* Hal ini ditunjukkan pada Gambar 6.1, dimana ekspansi alam semesta dipercepat terjadi pada masa dominasi konstanta kosmologi non-lokal  $\Omega_\rho \simeq 0.71$  sedangkan energi vakum lokal *brane*  $\Omega_\lambda \simeq 0.01$  dengan  $w_{\text{eff}} \simeq -0.97$ , yang memenuhi data observasi untuk keadaan alam semesta saat ini. Hal ini berlaku karena keberadaan dari  $\Lambda_5$  memberi efek pada  $\Lambda_4^{\text{eff}}$  yang mengharuskan  $w_\Lambda \neq -1$  dan persamaan keadaan energi gelap bervariasi terhadap waktu yang diparameterisasi melalui persamaan (5.19)-(5.20). Dengan demikian, berdasarkan studi dinamika kosmologi dunia *brane* pada limit energi rendah, maka dapat dinyatakan bahwa *energi gelap yang teramati saat ini mungkin merupakan efek dari konstanta kosmologi non-lokal  $\Lambda_5$  yang berasal dari bulk 5D, yang kontribusinya akan menyusut seiring dengan meningkatnya energi vakum lokal brane di alam semesta.*

(e) *Dalam skenario dunia brane, dimensi ekstra sangat besar dengan jari-jari skala kelengkungan bulk AdS 5D menuju tak-hingga ( $\ell \rightarrow \infty$ ).* Hal ini dibuktikan melalui studi dinamika kosmologi dunia *brane* yang ditunjukkan pada Gambar 6.2, dimana jari-jari kelengkungan *bulk* AdS 5D untuk keadaan sekarang cukup besar yaitu setara dengan jari-jari alam semesta saat ini,  $\ell_0 \sim 10^{26}$  m dan terus meningkat hingga  $\ell \rightarrow \infty$  seiring dengan menyusutnya  $\Omega_\rho$  dan  $H_0$ .

## VII.2 Saran

Dalam Skripsi ini, kosmologi dunia *brane* hanya ditinjau pada metrik FRW standar dimana *brane* dipandang statik atau tidak berubah terhadap koordinat normal Gaussian, dengan  $y = 0$  pada *brane*. Selanjutnya pada studi dinamika kosmologi, dimana dipilih persamaan keadaan untuk energi gelap  $w_\Lambda \neq -1$  dan bervariasi terhadap waktu, diperoleh bahwa energi gelap pada *brane* berasal dari efek konstanta kosmologi non-lokal. Namun, keadaan ini belum mampu menunjukkan hubungan sebab-akibat yang jelas mengenai alam semesta yang

nsi dipercepat saat ini, sehingga untuk penelitian yang lebih lanjut dapat metrik FRW untuk *brane* tidak-statik pada kosmologi dunia *brane*, dengan da *brane*. Selain itu, rapat materi non-relativistik dalam studi ini belum



dijabarkan dan didefinisikan secara spesifik antara materi gelap dengan materi lainnya (seperti baryon). Masalah ini perlu menjadi perhatian khusus juga untuk penelitian-penelitian lebih lanjut dalam studi dinamika kosmologi, sebab berdasarkan data observasi alam semesta saat ini, kontribusi materi gelap cukup besar, yaitu  $\Omega_{CDM}^{(0)} \sim 22\%$ , sedangkan sisanya  $\Omega_{b\gamma}^{(0)} \sim 5\%$  adalah kontribusi materi lain (seperti baryon) termasuk juga radiasi [33].

Selanjutnya untuk kasus generalisasi persamaan medan Einstein dalam model dunia *brane*, dapat ditinjau medan materi *bulk* tidak lenyap, dimana  $\mathcal{T}_{AB}^{(5)} \neq 0$  dan bahkan pada prinsip aksinya, Lagrangian materi *bulk*  $\mathcal{L}_m^{(5)}$  dapat diganti dengan Lagrangian medan graviton sehingga  $\mathcal{T}_{AB}^{(5)}$  dapat dinyatakan sebagai tensor energi-momentum graviton dan tinjauan ini juga tidak menyalahi prinsip dasar dari skenario dunia *brane*. Pada kasus ini, interaksi antara partikel model standar dengan graviton dapat ditelusuri dengan menggunakan persamaan (3.46) seperti yang dibahas pada Bab 3. Selain itu, untuk penelitian yang lebih lanjut, linearisasi persamaan medan Einstein “efektif” pada *brane* dengan meninjau *brane* yang vakum, maka dapat ditelusuri hubungan gelombang gravitasi dengan sumber berupa tensor Weyl dan atau medan materi *bulk* (jika  $\mathcal{T}_{AB}^{(5)} \neq 0$ ) seperti yang dibahas pada Lampiran B. Kasus ini mungkin dapat menggambarkan gravitasi secara natural. Selain itu, kedua tinjauan ini mungkin dapat menjelaskan secara rinci hubungan sebab-akibat antara interaksi partikel model standar-graviton-gelombang gravitasi secara natural yang terjadi pada kondisi paling awal alam semesta. Hal ini dapat menuntun pada penjelasan interaksi gaya-gaya fundamental secara natural dan hubungan sebab-akibatnya dalam TOE, sehingga sangat penting melanjutkan penelitian ini pada tingkatan yang lebih lanjut untuk menjawab semua pertanyaan-pertanyaan yang masih misteri di alam semesta ini.





## LAMPIRAN A

### PERHITUNGAN DETAIL

#### A.1 Penurunan Persamaan Gauss-Codazzi-Mainardi

Suatu tensor  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  dari  $\mathcal{M}$  di titik  $p$  pada  $\Sigma$  merupakan sebuah tensor komponen ruang tangen pada  $\Sigma$  di titik  $p$  jika [12,38]

$$T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = q^{a_1}_{c_1} \dots q^{a_k}_{c_k} q_{b_1}^{d_1} \dots q_{b_l}^{d_l} T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l}, \quad (\text{A.1})$$

dimana  $q^a_b$  berperan sebagai operator proyeksi ruang tangen dari  $\mathcal{M}$  di titik  $p$  terhadap ruang tangen pada  $\Sigma$  di titik  $p$ . Hal ini menuntun pada definisi dari operator turunan  $D_a$  pada  $\Sigma$ , hanya dengan memproyeksikan indeks-indeksnya pada  $\Sigma$  menggunakan  $q^a_b$  [12,38]

$$D_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = q^{a_1}_{d_1} \dots q^{a_k}_{d_k} q_{b_1}^{e_1} \dots q_{b_l}^{e_l} q_c^f \nabla_f T^{d_1 \dots d_k}_{e_1 \dots e_l}, \quad (\text{A.2})$$

dengan  $\nabla_a$  adalah operator turunan terkait  $g_{ab}$ , selain itu

$$D_a q_{bc} = q_a^d q_b^e q_c^f \nabla_d (g_{ef} - n_e n_f) = 0, \quad (\text{A.3})$$

dengan  $\nabla_d g_{ef} = 0$  dan  $q_a^b n_b = 0$ , hal ini menunjukkan bahwa  $D_a$  adalah operator turunan terkait  $q_{ab}$ , atau dengan kata lain  $D_a$  adalah operator turunan kovarian pada  $\Sigma$  dan  $\nabla_a$  adalah operator turunan kovarian dalam  $\mathcal{M}$  yang memiliki hubungan [12,38]

$$D_a = q_a^b \nabla_b. \quad (\text{A.4})$$

Kelengkungan ekstrinsik dari  $\Sigma$  didefinisikan sebagai [38]

$$K_{ab} = q_a^c q_b^d \nabla_c n_d = q_a^c \nabla_c n_b = D_a n_b. \quad (\text{A.5})$$

catatan bahwa kelengkungan ekstrinsik memiliki simetri,  $K_{ab} = K_{(ab)}$  [37]



$$K_{(ab)} = q_{(a}{}^c q_b) {}^d \nabla_c n_d = q_a^c q_b^d \nabla_{(c} n_{d)} = D_{(a} n_{b)}$$

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_n q_{ab} . \quad (\text{A.6})$$

### A.1.1 Persamaan Gauss

Persamaan Gauss-Codazzi-Mainardi terkait kuantitas  $D$ -dimensi dibangun dari metrik penuh,  $g_{ab}$  pada kuantitas  $(D - 1)$ -dimensi yang dibangun dari metrik induksi,  $q_{ab}$ . Dari definisi tersebut, kelengkungan pada  $\Sigma$  diberikan sebagai [38]

$${}^{(D-1)}R_{abc}{}^d \omega_d = 2 D_{[a} D_{b]} \omega_c = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c , \quad (\text{A.7})$$

sedangkan kelengkungan dari  $\mathcal{M}$  didefinisikan sebagai

$${}^{(D)}R_{abc}{}^d \omega_d = 2 \nabla_{[a} \nabla_{b]} \omega_c , \quad (\text{A.8})$$

dimana  $\omega_a$  adalah sebuah dual vektor bidang pada  $\Sigma$ , dan sejatinya untuk vektor bidang (yang tidak ditentukan nilainya secara spesifik) pada  $\Sigma$  memenuhi sifat

$$\omega_a = q_a^d \omega_d , \text{ dan } n^a \omega_a = 0 , \quad (\text{A.9})$$

karena  $\omega_a$  terletak pada  $\Sigma$ .

Dengan menggunakan definisi persamaan (A.2), maka persamaan (A.7) dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} D_a D_b \omega_c &= q_a^f \nabla_f (q_b^e \nabla_e \omega_c) = q_a^f q_b^g q_c^h \nabla_f (q_g^e q_h^d \nabla_e \omega_d) \\ &= q_a^f q_b^e q_c^d \nabla_f \nabla_e \omega_d + q_a^f q_b^e q_c^h \nabla_f q_h^d \nabla_e \omega_d \\ &\quad + q_a^f q_b^g q_c^d \nabla_f q_g^e \nabla_e \omega_d , \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

dimana

$$\begin{aligned} q_a^f q_c^h \nabla_f q_h^d &= q_a^f q_c^h \nabla_f (g_h^d - n_h n^d) = -q_a^f q_c^h n^d \nabla_f n_h \\ &= -K_{ac} n^d . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Persamaan (A.10) dapat dituliskan menjadi

$$D_a D_b \omega_c = q_a^f q_b^e q_c^d \nabla_f \nabla_e \omega_d - q_b^e K_{ac} n^d \nabla_e \omega_d - q_c^d K_{ab} n^e \nabla_e \omega_d , \quad (\text{A.12})$$



dimana

$$q_b^e n^d \nabla_e \omega_d = q_b^e \nabla_e (n^d \omega_d) - q_b^e \nabla_e n^d \omega_d = -K_b^d \omega_d, \quad (\text{A.13})$$

sehingga diperoleh

$$D_a D_b \omega_c = q_a^f q_b^e q_c^d \nabla_f \nabla_e \omega_d + K_{ac} K_b^d \omega_d + K_{ab} K_c^d \omega_d. \quad (\text{A.14})$$

Selanjutnya, dengan meninjau anti-simetri pada indeks  $a$  dan  $b$  persamaan (A.14), dimana  $K_{ab}$  simetri ( $K_{ab} = K_{ba} = K_{(ab)}$ ), sehingga  $K_{[ab]} = 0$  (lenyap karena sifat simetri). Dengan memasukkan anti-simetri dari persamaan (A.14) ke dalam persamaan (A.7), maka diperoleh

$$\begin{aligned} {}^{(D-1)}R_{abc}{}^d \omega_d &= 2 q_{[a}^f q_{b]}^e q_c^d \nabla_f \nabla_e \omega_d + 2 K_{c[a} K_{b]}^d \omega_d \\ &= 2 q_a^f q_b^e q_c^h \nabla_{[f} \nabla_{e]} \omega_h + 2 K_{c[a} K_{b]}^d \omega_d \\ &= q_a^f q_b^e q_c^h q_g^d {}^{(D)}R_{feh}{}^g \omega_d + 2 K_{c[a} K_{b]}^d \omega_d, \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

dimana

$$2 \nabla_{[f} \nabla_{e]} \omega_h = {}^{(D)}R_{feh}{}^g \omega_g.$$

Dari persamaan (A.15), diperoleh persamaan Gauss untuk  $D$ -dimensi:

$${}^{(D-1)}R_{abc}{}^d = q_a^e q_b^f q_c^g q_h^d {}^{(D)}R_{efg}{}^h + K_{ac} K_b^d - K_{bc} K_a^d. \quad (\text{A.16})$$

Dengan mengontraksikan indeks  $b$  dan  $d$  pada persamaan (A.16), maka diperoleh persamaan Gauss dalam sajian tensor Ricci yang diberikan sebagai

$$\begin{aligned} q_d^b {}^{(D-1)}R_{abc}{}^d &= q_d^b q_a^e q_b^f q_c^g q_h^d {}^{(D)}R_{efg}{}^h + q_d^b K_{ac} K_b^d - q_d^b K_{bc} K_a^d \\ {}^{(D-1)}R_{ac} &= q_a^e q_c^g q_h^f {}^{(D)}R_{efg}{}^h + K K_{ac} - K_{cd} K_a^d \\ {}^{(D-1)}R_{ac} &= q_a^e q_c^g {}^{(D)}R_{eg} - q_a^e n^f q_c^g n_h {}^{(D)}R_{efg}{}^h + K K_{ac} - K_{cd} K_a^d, \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

dimana

$$n^b n_d {}^{(D-1)}R_{abc}{}^d = 0, \text{ dan}$$

$$q_d^b K_b^d = (g_d^b - n^b n_d) K_b^d = g_d^b K_b^d = K_d^d = K,$$



adalah *trace* dari bentuk fundamental kedua.

Jika persamaan (A.17) dikontraksikan lagi pada indeks  $a$  dan  $c$ , maka diperoleh persamaan Gauss dalam sajian skalar Ricci yang diberikan sebagai

$$\begin{aligned}
q^{ac} {}^{(D-1)}R_{ac} &= q^{ac} q_a^e q_c^g {}^{(D)}R_{eg} - q^{ac} q_a^e n^f q_c^g n_h {}^{(D)}R_{efg}{}^h \\
&\quad + q^{ac} K K_{ac} - q^{ac} K_{cd} K_a^d \\
{}^{(D-1)}R &= q^{eg} {}^{(D)}R_{eg} - q^{eg} n^f n_h {}^{(D)}R_{efg}{}^h + K^2 - K_{cd} K^{cd} \\
{}^{(D-1)}R &= {}^{(D)}R - n^e n^g {}^{(D)}R_{eg} - n^f n_h {}^{(D)}R_f{}^h + {}^{(D)}R_{efg}{}^h n^e n^f n^g n_h \\
&\quad + K^2 - K_{cd} K^{cd} \\
{}^{(D-1)}R &= {}^{(D)}R - 2 n^e n^g {}^{(D)}R_{eg} + K^2 - K_{cd} K^{cd} , \tag{A.18}
\end{aligned}$$

mengingat bahwa,

$$q_{ab} q_\mu^a q_\nu^b = g_{ab} q_\mu^a q_\nu^b = q_{\mu\nu} , \text{ dan } {}^{(D)}R_{abcd} n^a n^b n^c n^d = 0 .$$

### A.1.2 Persamaan Codazzi

Dengan menggunakan definisi pada persamaan (A.2), (A.5), dan (A.11), maka turunan kovarian dari bentuk fundamental kedua pada  $\Sigma$  adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
D_a K_{bc} &= q_a^d \nabla_d K_{bc} = q_a^d q_b^e q_c^f \nabla_d K_{ef} \\
&= q_a^d q_b^e q_c^f \nabla_d (q_e^g \nabla_g n_f) \\
&= q_a^d q_b^g q_c^f \nabla_d \nabla_g n_f + q_a^d q_b^e q_c^f \nabla_d q_e^g \nabla_g n_f \\
&= q_a^d q_b^g q_c^f \nabla_d \nabla_g n_f - K_{ab} n^g q_c^f \nabla_g n_f . \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan meninjau anti-simetri pada indeks  $a$  dan  $b$  persamaan (A.19), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
D_{[a} K_{b]c} &= q_{[a}^d q_{b]}^g q_c^f \nabla_d \nabla_g n_f - K_{[ab]} n^g q_c^f \nabla_g n_f \\
D_{[a} K_{b]c} &= q_a^d q_b^g q_c^f \nabla_{[d} \nabla_{g]} n_f , \tag{A.20}
\end{aligned}$$



mengingat bahwa  $K_{[ab]} = 0$ , dan dengan meninjau definisi pada persamaan (A.8) dimana

$$2 \nabla_{[d} \nabla_{g]} n_f = {}^{(D)}R_{dgfe} n^e ,$$

maka dari persamaan (A.20) diperoleh persamaan Codazzi untuk kasus  $D$ -dimensi yang diberikan sebagai

$$\begin{aligned} 2 D_{[a} K_{b]c} &= q_a^d q_b^g q_c^f {}^{(D)}R_{dgfe} n^e \\ D_a K_{bc} - D_b K_{ac} &= q_a^d q_b^e q_c^f {}^{(D)}R_{defg} n^g . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Jika persamaan (A.21) dikontraksikan pada indeks  $a$  dan  $c$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} q^{ac} D_a K_{bc} - q^{ac} D_b K_{ac} &= q^{ac} q_a^d q_b^e q_c^f {}^{(D)}R_{defg} n^g \\ D_a K_b^a - D_b K &= q^{df} {}^{(D)}R_{defg} n^g q_b^e \\ &= (g^{df} - n^d n^f) {}^{(D)}R_{defg} n^g q_b^e \\ &= {}^{(D)}R_{eg} n^g q_b^e - {}^{(D)}R_{defg} n^d n^f n^g q_b^e , \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

dimana  ${}^{(D)}R_{defg} n^d n^f n^g = 0$ , sehingga persamaan (A.22) menjadi

$$D_a K_b^a - D_b K = {}^{(D)}R_{cd} n^d q_b^c . \quad (\text{A.23})$$

Persamaan (A.23) dikenal juga sebagai persamaan Codazzi dalam sajian tensor Ricci  $D$ -dimensi

### A.1.3 Persamaan Mainardi

Dengan meninjau sifat dari turunan Lie sebuah medan tensor,  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  sepanjang vektor satuan normal,  $n$  [37,55]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} &= n^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \\ &\quad - \nabla_c n^{a_1} T^{ca_2 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \dots - \nabla_c n^{a_k} T^{a_1 \dots a_{k-1} c}_{b_1 \dots b_l} \\ &\quad + \nabla_{b_1} n^c T^{a_1 \dots a_k}_{cb_2 \dots b_l} + \dots + \nabla_{b_l} n^c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_{l-1} c} . \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$



Dengan menggunakan definisi pada persamaan (A.1), (A.5), dan (A.24), maka turunan Lie dari bentuk fundamental kedua adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n K_{ab} &= n^c \nabla_c K_{ab} + \nabla_a n^c K_{cb} + \nabla_b n^c K_{ac} \\
&= \nabla_n K_{ab} + q_b^a \nabla_a n^c K_{ac} + q_a^b \nabla_b n^c K_{bc} \\
&= \nabla_n K_{ab} + K_{ac} K_b^c + K_{bc} K_a^c \\
&= \nabla_n K_{ab} + 2 K_{ac} K_b^c, \tag{A.25}
\end{aligned}$$

dimana  $K_{ac} K_b^c = K_{bc} K_a^c$  karena sifat simetri  $K_{ab} = K_{(ab)}$ . Selanjutnya, dengan meninjau definisi pada persamaan (A.5) dan (A.8), maka dapat ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}
q_a^e n^f q_b^g {}^{(D)}R_{efgh} n^h &= 2 q_a^e n^f q_b^g \nabla_{[e} \nabla_{f]} n_g \\
&= q_a^e n^f q_b^g (\nabla_e \nabla_f n_g - \nabla_f \nabla_e n_g) \\
&= -q_a^e n^f q_b^g \nabla_f \nabla_e n_g + q_a^e n^f q_b^g \nabla_e \nabla_f n_g, \tag{A.26}
\end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned}
q_a^e n^f q_b^g \nabla_f \nabla_e n_g &= n^f \nabla_f (q_a^e q_b^g \nabla_e n_g) - n^f q_b^g q_a^h q_i^e \nabla_f q_h^i \nabla_e n_g \\
&\quad - n^f q_a^e q_b^j q_k^g \nabla_f q_j^k \nabla_e n_g \\
q_a^e n^f q_b^g \nabla_f \nabla_e n_g &= n^f \nabla_f (q_a^e q_b^g \nabla_e n_g) = n^f \nabla_f K_{ab}, \tag{A.27}
\end{aligned}$$

dengan  $q_a^b q_d^e \nabla_f q_b^d = q_a^b q_d^e \nabla_f (g_b^d - n_b n^d) = 0$ , karena  $\nabla_f g_b^d = 0$  dan  $q_a^b n_b = 0$ , kemudian untuk suku kedua

$$n^f \nabla_e \nabla_f n_g = \nabla_e (n^f \nabla_f n_g) - \nabla_e n^f \nabla_f n_g = -\nabla_e n^f \nabla_f n_g, \tag{A.28}$$

dimana dipilih  $n^f \nabla_f n_g = \nabla_n n_g = 0$ . Dengan menggunakan persamaan (A.27) dan (A.28), maka persamaan (A.26) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
q_a^e n^f q_b^g {}^{(D)}R_{efgh} n^h &= -n^f \nabla_f K_{ab} - q_a^e q_b^g \nabla_e n^f \nabla_f n_g \\
&= -\nabla_n K_{ab} - q_b^g K_a^f \nabla_f n_g \\
&= -\nabla_n K_{ab} - q_b^g K_a^c q_c^f \nabla_f n_g
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -\nabla_n K_{ab} - q_b^g K_a^c K_{cg} \\
q_a^e n^f q_b^g {}^{(D)}R_{efgh} n^h &= -\nabla_n K_{ab} - K_{ac} K_b^c . \tag{A.29}
\end{aligned}$$

Dengan memasukkan persamaan (A.29) ke dalam persamaan (A.25), diperoleh persamaan Mainardi  $D$ -dimensi yang diberikan sebagai

$$\mathcal{E}_n K_{ab} = -q_a^e n^f q_b^g {}^{(D)}R_{efgh} n^h + K_{ac} K_b^c . \tag{A.30}$$

Jika sajian tensor Ricci pada persamaan (A.17) dimasukkan ke dalam persamaan (A.30), dapat diperoleh hubungan sebagai berikut

$${}^{(D-1)}R_{ab} = q_a^e q_b^g {}^{(D)}R_{eg} + \mathcal{E}_n K_{ab} + K K_{ab} - 2 K_{ac} K_b^c , \tag{A.31}$$

dimana memenuhi sifat simetri  $K_{ab} = K_{(ab)}$ , dan

$$\begin{aligned}
q_a^e q_b^g {}^{(D)}R_{eg} &= g_{eg} q_a^e q_b^g {}^{(D)}R \\
&= q_{ab} {}^{(D)}R \\
&= (g_{ab} - n_a n_b) {}^{(D)}R \\
&= {}^{(D)}R_{ab} - n_a n_b {}^{(D)}R ,
\end{aligned}$$

sehingga persamaan (A.31) dapat dituliskan menjadi

$${}^{(D-1)}R_{ab} = {}^{(D)}R_{ab} - n_a n_b {}^{(D)}R + \mathcal{E}_n K_{ab} + K K_{ab} - 2 K_{ac} K_b^c . \tag{A.32}$$

Jika kelengkungan yang ditinjau hanya terbatas pada  $\Sigma$  dengan kuantitas  $(D - 1)$ -dimensi, maka dapat dipilih  $n_a n_b {}^{(D)}R = 0$ .

## A.2 Penguraian Proyeksi Tensor Riemann 5D: $\mathcal{E}_{\mu\nu}$

Pada penguraian proyeksi tensor Riemann 5D,  $\mathcal{E}_{\mu\nu}$  persamaan (3.29) dimana pada kasus ini, tensor Riemann 5D dapat diuraikan secara lengkap dengan sajian tensor kelengkungan Weyl, tensor Ricci dan skalar Ricci diberikan pada persamaan (3.30),

at pula dituliskan menjadi:

$$= {}^{(5)}C_{\alpha\beta\rho\sigma} + \frac{2}{3} \left( g_{\alpha[\rho} {}^{(5)}R_{\sigma]\beta} - g_{\beta[\rho} {}^{(5)}R_{\sigma]\alpha} \right) - \frac{1}{6} g_{\alpha[\rho} g_{\sigma]\beta} {}^{(5)}R . \tag{A.33}$$



Dengan mengalikan persamaan (A.33)  $n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma$  dari kanan, maka persamaan (A.33) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} {}^{(5)}R_{\alpha\beta\rho\sigma} n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma &= {}^{(5)}C_{\alpha\beta\rho\sigma} n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma + \frac{1}{3}[(g_{\alpha\rho} {}^{(5)}R_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma} {}^{(5)}R_{\beta\rho}) \\ &\quad - (g_{\beta\rho} {}^{(5)}R_{\alpha\sigma} - g_{\beta\sigma} {}^{(5)}R_{\alpha\rho})] n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma \\ &\quad - \frac{1}{12}(g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma} g_{\beta\rho}) {}^{(5)}R n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma, \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

dimana  $A_{\mu[\nu} B_{\gamma]\delta}$  adalah sifat anti-simetri yang didefinisikan sebagai

$$A_{\mu[\nu} B_{\gamma]\delta} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} B_{\gamma\delta} - A_{\mu\gamma} B_{\nu\delta}). \quad (\text{A.35})$$

Suku pertama persamaan (A.34) didefinisikan sebagai  $E_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}C_{\alpha\beta\rho\sigma} n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma$  yang merupakan proyeksi tensor kelengkungan Weyl. Maka persamaan (A.34) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mu\nu} &= E_{\mu\nu} + \frac{1}{3}(g_{\alpha\rho} {}^{(5)}R_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma} {}^{(5)}R_{\beta\rho}) n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma \\ &\quad - \frac{1}{3}(g_{\beta\rho} {}^{(5)}R_{\alpha\sigma} - g_{\beta\sigma} {}^{(5)}R_{\alpha\rho}) n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma \\ &\quad - \frac{1}{12}(g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma} g_{\beta\rho}) {}^{(5)}R n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Dengan meninjau suku ke-2, ke-3, dan ke-4 pada persamaan (A.36), yang kemudian masing-masing dapat diuraikan dan disederhanakan menjadi

$$(g_{\alpha\rho} {}^{(5)}R_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma} {}^{(5)}R_{\beta\rho}) n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma = {}^{(5)}R_{\beta\sigma} q_\mu^\beta q_\nu^\sigma, \quad (\text{A.37})$$

$$(g_{\beta\rho} {}^{(5)}R_{\alpha\sigma} - g_{\beta\sigma} {}^{(5)}R_{\alpha\rho}) n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma = - {}^{(5)}R_{\alpha\rho} n^\alpha n^\rho q_{\mu\nu}, \quad \text{dan} \quad (\text{A.38})$$

$$(g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma} g_{\beta\rho}) {}^{(5)}R n^\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma = g_{\beta\sigma} {}^{(5)}R q_\mu^\beta q_\nu^\sigma = {}^{(5)}R q_{\mu\nu}. \quad (\text{A.39})$$

at bahwa  $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 1$  dan  $q_{\mu\nu} n^\nu = 0$ , serta juga memenuhi persyaratan  $q_{\mu\nu} = q_{\rho\sigma} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma \cong g_{\rho\sigma} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma$ . Dengan memasukkan persamaan





(A.37)-(A.39) ke dalam persamaan (A.36), dan dengan mengganti indeks  $\beta \rightarrow \rho$  dan  $\alpha \rightarrow \sigma$ , maka persamaan (A.36) dapat dituliskan menjadi

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} + \frac{1}{3} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} q_{\mu}^{\rho} q_{\nu}^{\sigma} + \frac{1}{3} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^{\rho} n^{\sigma} q_{\mu\nu} - \frac{1}{12} {}^{(5)}R q_{\mu\nu} , \text{ atau (A.40)}$$

$$E_{\mu\nu} = \mathcal{E}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} q_{\mu}^{\rho} q_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{3} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^{\rho} n^{\sigma} q_{\mu\nu} + \frac{1}{12} {}^{(5)}R q_{\mu\nu} . \quad (\text{A.41})$$

Persamaan (A.41) merupakan persamaan proyeksi tensor kelengkungan Weyl pada *brane* dalam *bulk* 5D.

### A.3 Kondisi Israel Junction

Setiap keadaan fisis yang menggambarkan sebuah permukaan dengan batas permukaan memerlukan formulasi kondisi *junction* yang tepat untuk menyambungkan sisi luar permukaan tersebut yang diskontinu (tak kontinu). Turunan kovarian kondisi *junction* untuk menafsirkan suatu permukaan-hiper tunggal dan kerangka tipis dalam relativitas umum diberikan oleh Israel pada tahun 1966 [56]. Kondisi Israel *junction* ini ternyata sangat relevan dengan skenario dunia *brane* dimana alam semesta 4D digambarkan sebagai suatu sumber yang juga berkontribusi dalam persamaan medan Einstein 5D seperti pada persamaan (3.36). Jika ditinjau bahwa hanya kontribusi dari sumber materi pada *brane* yang menyebabkan kelengkungan dalam *bulk*, dengan asumsi bahwa medan materi lain selain gravitasi dalam *bulk* lenyap sebab medan materi partikel model standar terkurung pada *brane*, maka persamaan (3.36) dapat dituliskan menjadi:

$${}^{(5)}G_{AB} = \kappa_5^2 T_{AB}^{\text{brane}} \delta(y) . \quad (\text{A.42})$$

Berdasarkan turunan pada koordinat normal Gaussian, yang mana pada keadaan tersebut dapat ditunjukkan bahwa  ${}^{(5)}G_{yy}$  dan  ${}^{(5)}G_{\mu y}$  kontinu dalam *bulk* (pada permukaan-hiper  $\Sigma, y = 0$ ). Sedangkan medan materi yang bersumber dari *brane*,  $T_{\mu\nu}^{\text{brane}} = T_{\mu y}^{\text{brane}} = 0$  dan diskontinuitas pada persamaan (A.42) hanya disajikan

komponen- $\mu\nu$  saja, sehingga persamaan (A.42) dapat dituliskan kembali dengan substitusi tensor Ricci 5D sebagai



$${}^{(5)}R_{\mu\nu} = \kappa_5^2 \left( T_{\mu\nu}^{\text{brane}} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} T^{\text{brane}} \right) \delta(y), \quad (\text{A.43})$$

dimana diambil  $T_{\mu\nu}^{\text{brane}} n^\mu n^\nu = 0$  dan  $T^{\text{brane}} = q^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{\text{brane}}$ . Pada koordinat normal Gaussian, kelengkungan ekstrinsik didefinisikan pada persamaan (3.23), dan dari persamaan (A.32) sajian proyeksi tensor Ricci 5D diberikan sebagai

$${}^{(5)}R_{\mu\nu} = -\partial_y K_{\mu\nu} + {}^{(4)}R_{\mu\nu} + 2 K_{\mu\sigma} K_\nu^\sigma - K K_{\mu\nu}, \quad (\text{A.44})$$

$${}^{(5)}R_{\mu\nu} = -\partial_y K_{\mu\nu} + \mathcal{Z}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.45})$$

dimana  $\mathcal{Z}_{\mu\nu} \equiv {}^{(4)}R_{\mu\nu} + 2 K_{\mu\sigma} K_\nu^\sigma - K K_{\mu\nu}$  didefinisikan sebagai kelengkungan yang hanya terbatas pada *brane*. Dengan memasukkan persamaan (A.45) ke dalam persamaan (A.43), maka integrasi persamaan (A.43) sepanjang dimensi ekstra dari  $y = -\epsilon$  hingga  $y = +\epsilon$  dengan limit  $\epsilon \rightarrow 0$  diperoleh [38]

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dy (-\partial_y K_{\mu\nu} + \mathcal{Z}_{\mu\nu}) &= \kappa_5^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dy \left( T_{\mu\nu}^{\text{brane}} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} T^{\text{brane}} \right) \delta(y) \\ \Rightarrow [K_{\mu\nu}] &= -\kappa_5^2 \left( T_{\mu\nu}^{\text{brane}} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} T^{\text{brane}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

dimana  $[K_{\mu\nu}] = K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^-$  merupakan kelengkungan ekstrinsik yang menyebar pada sisi luar permukaan. Jika simetri  $Z_2$  diterapkan pada kasus ini, maka kelengkungan ekstrinsik  $K_{\mu\nu}^+ = -K_{\mu\nu}^-$  (sebab arah vektor normal sisi lain permukaan terbalik) dan kondisi Israel *junction* (A.46) menjadi

$$2 K_{\mu\nu}^+ = -\kappa_5^2 \left( T_{\mu\nu}^{\text{brane}} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} T^{\text{brane}} \right). \quad (\text{A.47})$$

#### A.4 Simbol Christoffel, Tensor Ricci, dan Skalar Ricci Metrik FRW pada *Brane*

Berdasarkan sajian metrik FRW pada *brane* (4.4), dimana metrik ini memenuhi metrik 4D  $q_{\mu\nu}$  pada permukaan-hiper  $\Sigma$ , maka tensor metrik untuk metrik FRW pada *brane* diberikan sebagai

$$q_{\mu\nu} = \text{diag} \left( -1, \frac{a^2}{1 - kr^2}, a^2 r^2, a^2 r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (\text{A.48})$$



Dan tensor metrik kontravariannya diberikan sebagai

$$q^{\mu\nu} = (q_{\mu\nu})^{-1} = \text{diag}\left(-1, \frac{1-kr^2}{a^2}, \frac{1}{a^2r^2}, \frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\right). \quad (\text{A.49})$$

#### A.4.1 Simbol Christoffel untuk metrik FRW pada brane

Dengan menggunakan tensor metrik pada persamaan (A.48) dan (A.49), maka simbol Christoffel untuk metrik FRW yang tidak nol dapat ditentukan, dimana secara umum simbol Christoffel didefinisikan sebagai

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} q^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} q_{\nu\beta} + \partial_{\nu} q_{\beta\mu} - \partial_{\beta} q_{\nu\mu}). \quad (\text{A.50})$$

Agar diperoleh simbol Christoffel yang tidak nol, maka dapat diambil  $\alpha = \beta$  dan harus memenuhi syarat-syarat sebagai berikut

(i) Untuk  $\mu = \nu = \alpha$  ;

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha} &= \frac{1}{2} q^{\alpha\alpha} (\partial_{\alpha} q_{\alpha\alpha} + \partial_{\alpha} q_{\alpha\alpha} - \partial_{\alpha} q_{\alpha\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} q^{\alpha\alpha} \partial_{\alpha} q_{\alpha\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

(ii) Untuk  $\mu = \nu \neq \alpha$  ;

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} q^{\alpha\alpha} (\partial_{\nu} q_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} q_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} q_{\nu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} q^{\alpha\alpha} \partial_{\alpha} q_{\nu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

(iii) Untuk  $\mu \neq \nu = \alpha$  ;

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} &= \frac{1}{2} q^{\alpha\alpha} (\partial_{\mu} q_{\alpha\alpha} + \partial_{\alpha} q_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} q_{\alpha\mu}) \\ &= \frac{1}{2} q^{\alpha\alpha} \partial_{\mu} q_{\alpha\alpha}, \text{ dan} \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha}. \quad (\text{A.54})$$

simbol Christoffel yang tidak nol untuk metrik FRW pada *brane* yang memenuhi syarat-syarat tersebut adalah sebagai berikut



$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, \\
\Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta.
\end{aligned} \tag{A.55}$$

#### A.4.2 Tensor Ricci untuk metrik FRW pada brane

Dengan menggunakan simbol Christoffel yang tidak nol pada persamaan (A.55), maka dapat diturunkan pula tensor Ricci yang tidak nol untuk metrik FRW pada *brane*. Dimana tensor Ricci didefinisikan sebagai

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}. \tag{A.56}$$

Maka dengan menggunakan definisi tensor Ricci (A.56) dan sajian simbol Christoffel yang tidak nol (A.55) diperoleh tensor Ricci yang tidak nol untuk metrik FRW pada *brane* sebagai berikut

(i) Untuk  $\mu = \nu = 0$  ;

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{00} - \partial_0 \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0} + \Gamma^{\beta}_{00} \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{0\beta} \Gamma^{\beta}_{\alpha 0} \\
&= 0 - \partial_0 \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0} + 0 - \Gamma^{\alpha}_{0\beta} \Gamma^{\beta}_{\alpha 0} \\
&= -(\partial_0 \Gamma^1_{01} + \partial_0 \Gamma^2_{02} + \partial_0 \Gamma^3_{03}) - (\Gamma^1_{01})^2 - (\Gamma^2_{02})^2 - (\Gamma^3_{03})^2 \\
&= -3 \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\
R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a},
\end{aligned} \tag{A.57}$$

Untuk  $\mu = \nu = 1$  ;

$$\partial_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{11} - \partial_1 \Gamma^{\alpha}_{\alpha 1} + \Gamma^{\beta}_{11} \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{1\beta} \Gamma^{\beta}_{\alpha 1}$$



$$\begin{aligned}
&= (\partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1) - (\partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \partial_1 \Gamma_{13}^3) \\
&\quad + \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\
&\quad - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
&= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - (\partial_1 \Gamma_{12}^2 + \partial_1 \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \\
&\quad + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - (\Gamma_{12}^2)^2 - (\Gamma_{13}^3)^2 \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \right) - 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) + 2 \left( \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \right) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) + 2 \left( \frac{kr}{1-kr^2} \right) \left( \frac{1}{r} \right) \\
&\quad - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \left( \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \right) - 2 \left( \frac{1}{r^2} \right) \\
R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \tag{A.58}
\end{aligned}$$

(iii) Untuk  $\mu = \nu = 2$  ;

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{\alpha 2}^\alpha + \Gamma_{22}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{2\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha 2}^\beta \\
&= (\partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1) - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \\
&\quad + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 \\
&\quad - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
&= (\partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1) - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{03}^3) \\
&\quad + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{23}^3)^2 \\
&= \frac{d}{dt} (a\dot{a}r^2) - \frac{d}{dr} (r(1-kr^2)) - \frac{d}{d\theta} (\cot \theta) + 2(a\dot{a}r^2) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \\
&\quad - r(1-kr^2) \left( \frac{kr}{1-kr^2} + \frac{1}{r} \right) - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) (a\dot{a}r^2) + r(1-kr^2) \left( \frac{1}{r} \right) \\
&\quad - \cot^2 \theta \\
R_{22} &= r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \tag{A.59}
\end{aligned}$$

Untuk  $\mu = \nu = 3$  ;

$$\partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{\alpha 3}^\alpha + \Gamma_{33}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{3\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\beta$$



$$\begin{aligned}
&= (\partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2) - 0 + \Gamma_{33}^0 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \\
&\quad + \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 \\
&\quad - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
&= \frac{d}{dt} (a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta) - \frac{d}{dr} (r (1 - kr^2) \sin^2 \theta) - \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \cos \theta) \\
&\quad + (a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - r (1 - kr^2) \left( \frac{kr}{1 - kr^2} \right) \sin^2 \theta \\
&\quad + (\sin \theta \cos \theta) (\cot \theta)
\end{aligned}$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a \ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) , \text{ atau} \quad (\text{A.60})$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta . \quad (\text{A.61})$$

#### A.4.3 Skalar Ricci untuk metrik FRW pada brane

Adapun skalar Ricci untuk metrik FRW pada *brane* diberikan sebagai

$$\begin{aligned}
R &= q^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = q^{00} R_{00} + q^{11} R_{11} + q^{22} R_{22} + q^{33} R_{33} \\
&= (-1) \left( -3 \frac{\ddot{a}}{a} \right) + \left( \frac{1 - kr^2}{a^2} \right) \left( \frac{a \ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{a^2 r^2} \right) [r^2 (a \ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)] \\
&\quad + \left( \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) [r^2 \sin^2 \theta (a \ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)] \\
&= 3 \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left( \frac{a \ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2} \right) \\
R &= 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] . \quad (\text{A.62})
\end{aligned}$$



### A.5 Persamaan Konservatif dan Kontinuitas

Dengan meninjau sifat identitas dari persamaan konservatif materi-energi,  $D^\nu T_{\mu\nu} = 0$ , dimana  $T_{\mu\nu}$  memenuhi persamaan (4.10) untuk kasus materi-energi sebagai fluida ideal. Dengan menggunakan definisi dari  $h_{\mu\nu}$  pada persamaan (4.11), maka persamaan (4.10) dapat dituliskan menjadi

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu + P q_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu, \quad (\text{A.63})$$

dimana

$$h_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu, \quad h_{\mu\nu} = (0, 1, 1, 1), \quad u^\mu = (1, \vec{0}),$$

dengan

$$u^\mu u_\mu = -1,$$

$$h_{\mu\nu} u^\mu = 0,$$

$$q_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1, \text{ dan } q_{\mu\nu} u^\mu = u_\nu.$$

Jadi, persamaan konservatif materi-energi pada kasus ini dapat dinyatakan sebagai

$$D^\nu T_{\mu\nu} = D^\nu [(\rho + P) u_\mu u_\nu + P q_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu] = 0. \quad (\text{A.64})$$

Dengan mengalikan persamaan (A.64) dengan  $u^\mu$  dari arah kiri ( $u^\mu D^\nu T_{\mu\nu} = 0$ ), maka diperoleh persamaan berikut

$$u^\mu D^\nu [(\rho + P) u_\mu u_\nu + P q_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu] = 0. \quad (\text{A.65})$$

Jika ditinjau terlebih dahulu suku pertama persamaan (A.65), yaitu

$$\begin{aligned} u^\mu D^\nu [(\rho + P) u_\mu u_\nu] &= u^\mu D^\nu (\rho u_\mu u_\nu) + u^\mu D^\nu (P u_\mu u_\nu) \\ &= u^\mu u_\mu u_\nu D^\nu \rho + u^\mu \rho u_\nu D^\nu u_\mu + u^\mu \rho u_\mu D^\nu u_\nu \\ &\quad + u^\mu u_\mu u_\nu D^\nu P + u^\mu P u_\nu D^\nu u_\mu + u^\mu P u_\mu D^\nu u_\nu \\ &= -q^{\mu\nu} u_\nu \nabla_\mu \rho + q_\mu^\nu u^\mu \rho u_\nu \nabla^\mu u_\mu + q_\mu^\nu u^\mu \rho u_\mu \nabla^\mu u_\nu \\ &\quad - u_\nu D^\nu P + q_\mu^\nu u^\mu P u_\nu \nabla^\mu u_\mu + q_\mu^\nu u^\mu P u_\mu \nabla^\mu u_\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

$q_\mu^\nu u^\mu \nabla^\mu u_\nu = u^\nu \nabla^\mu u_\nu = 0$ , maka diperoleh



$$\begin{aligned}
u^\mu D^\nu [(\rho + P) u_\mu u_\nu] &= -u^\mu \nabla_\mu \rho - \rho \nabla^\mu u_\mu - u_\nu D^\nu P - P \nabla^\mu u_\mu \\
&= -\dot{\rho} - \Theta (\rho + P) - u_\nu D^\nu P, \tag{A.67}
\end{aligned}$$

dengan  $u^\mu \nabla_\mu$  didefinisikan sebagai operator turunan terhadap waktu, dan  $\nabla_\mu u^\mu = \nabla^\mu u_\mu \equiv \Theta$ .

Selanjutnya untuk suku kedua persamaan (A.65), diperoleh

$$\begin{aligned}
u^\mu D^\nu (P q_{\mu\nu}) &= q_{\mu\nu} u^\mu D^\nu P + P u^\mu D^\nu q_{\mu\nu} \\
&= u_\nu D^\nu P, \tag{A.68}
\end{aligned}$$

dimana  $D^\nu q_{\mu\nu} = q_{\mu\nu ; \nu} = 0$ . Dan untuk suku ketiga persamaan (A.65) diperoleh

$$\begin{aligned}
u^\mu D^\nu \pi_{\mu\nu} &= D^\nu (u^\mu \pi_{\mu\nu}) - D^\nu u^\mu \pi_{\mu\nu} \\
&= -D^\nu u^\mu \pi_{\mu\nu}, \tag{A.69}
\end{aligned}$$

dimana  $u^\mu \pi_{\mu\nu} = 0$ . Jika ditinjau sifat simetrinya, dimana  $u^\mu D^\nu \pi_{\mu\nu} = u^{\langle\mu} D^{\nu\rangle} \pi_{\mu\nu}$ , maka persamaan (A.69) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
u^\mu D^\nu \pi_{\mu\nu} &= u^{\langle\mu} D^{\nu\rangle} \pi_{\mu\nu} = -D^{\langle\mu} u^{\nu\rangle} \pi_{\mu\nu} \\
&= -\sigma^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu}, \tag{A.70}
\end{aligned}$$

dengan  $D^{\langle\mu} u^{\nu\rangle} = \sigma^{\mu\nu}$ .

Sedangkan untuk dua suku terakhir persamaan (A.65) diperoleh

$$\begin{aligned}
u^\mu D^\nu (q_{\mu} u_\nu + q_{\nu} u_\mu) &= D^\nu [u^\mu (q_{\mu} u_\nu + q_{\nu} u_\mu)] - (q_{\mu} u_\nu + q_{\nu} u_\mu) D^\nu u^\mu \\
&= -D^\nu q_\nu - q^{\mu\nu} u_\nu \nabla_\mu u^\mu q_\mu - q^{\mu\nu} u_\mu \nabla_\mu u^\mu q_\nu \\
&= -D^\nu q_\nu - u^\mu \nabla_\mu u^\mu q_\mu - u^\nu \nabla_\mu u^\mu q_\nu \\
&= -D^\mu q_\mu - 2 u^\mu \nabla_\mu u^\mu q_\mu \\
&= -D^\mu q_\mu - 2 A^\mu q_\mu, \tag{A.71}
\end{aligned}$$

$u^\mu q_\mu = 0$ , dengan  $q_\mu u_\nu = q_{(\mu} u_{\nu)}$  memenuhi sifat simetri dan  $A^\mu = \dot{u}^\mu$ .





Dengan memasukkan persamaan (A.67)-(A.71) ke dalam persamaan (A.65), maka diperoleh hasil penurunan persamaan (A.65) adalah sebagai berikut

$$-\dot{\rho} - \Theta(\rho + P) - u_\nu D^\nu P + u_\nu D^\nu P - D^\mu q_\mu - 2A^\mu q_\mu - \sigma^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu} = 0$$

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + P) + D^\mu q_\mu + 2A^\mu q_\mu + \sigma^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.72})$$

Untuk kasus fluida ideal dan kosmologi FRW *brane*, tiga suku terakhir pada persamaan (A.72) menjadi lenyap, sehingga diperoleh persamaan konservatif energi yang dikenal juga sebagai persamaan kontinuitas:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (\text{A.73})$$

dengan  $\Theta = 3H$  dimana  $H = \dot{a}/a$  adalah parameter tetapan Hubble.



## LAMPIRAN B

### TENSOR KELENGKUNGAN WEYL: $C_{\mu\nu\rho\sigma}$

Tensor kelengkungan Weyl atau tensor konformal (*Conformal tensor*) disimbolkan sebagai  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Tensor Weyl yang diberikan pada persamaan (3.30) merupakan tensor Weyl pada ruang-waktu 5D. Sedangkan pada  $d$ -Dimensi, tensor Weyl didefinisikan sebagai

$${}^{(d)}C_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = {}^{(d)}R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} - \frac{4}{d-2} {}^{(d)}R_{[\mu}{}^{[\rho} g_{\nu]}{}^{\sigma]} + \frac{2}{(d-1)(d-2)} {}^{(d)}R g_{\mu}{}^{[\rho} g_{\nu]}{}^{\sigma]}. \quad (\text{B.1})$$

Secara umum, tensor kelengkungan Weyl lenyap pada dimensi  $\leq 3D$ , sama halnya tensor Riemann yang lenyap pada permukaan 2D. Namun, pada dimensi  $\geq 4D$  tensor Weyl tidak nol. Selanjutnya, layaknya kelengkungan Riemann yang lenyap hanya pada ruang-waktu Minkowski, tensor Weyl juga lenyap hanya pada ruang-waktu datar (Minkowski) secara konformal (*Conformally flat*), yakni ruang-waktu Minkowski yang diberikan transformasi konformal (lihat Gambar B.1) [37]. Transformasi konformal memenuhi bentuk transformasi skala lokal pada  $d$ -Dimensi, yaitu

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.2})$$

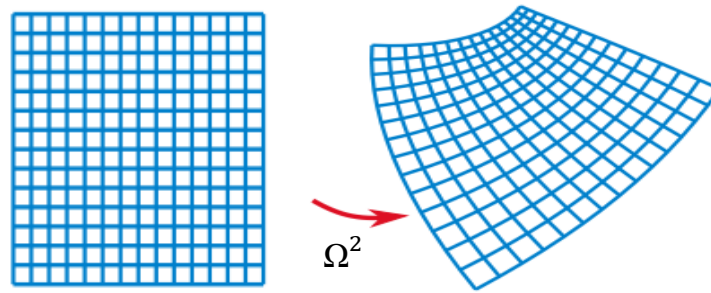
dimana  $\Omega^2$  adalah faktor konformal. Metrik suatu *manifold* pada persamaan (B.2) adalah konformal, jika sudut yang ditunjukkan antara vektor adalah sama pada tiap metrik. Sedangkan, suatu metrik *manifold* dinyatakan sebagai *conformally flat* jika dan hanya jika

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{B.3})$$

$\eta_{\mu\nu}$  adalah metrik datar atau metrik Minkowski. Tensor Weyl lenyap, 0 jika ruang-waktu  $d$ -Dimensi memenuhi persamaan (B.3).



Pada relativitas umum, tensor Weyl jelas memberi kontribusi kelengkungan pada ruang-waktu ketika tensor Ricci nol atau pada kondisi vakum. Pada kasus ini, ruang-waktu tidak selalu datar karena kontribusi kelengkungan tensor Weyl dalam tensor kelengkungan Riemann, sehingga medan gravitasi tidak nol dalam ruang vakum. Hal ini kemudian berpengaruh pada perambatan gelombang gravitasi dalam ruang vakum.



**Gambar B.1** Transformasi konformal dengan faktor  $\Omega^2$

### B.1 Suku ‘*Electric*’ dan ‘*Magnetic*’ Weyl

Pada kasus  $d$ -Dimensi, tensor Weyl pada persamaan (B.1) dapat diuraikan menjadi suku ‘*electric*’ dan ‘*magnetic*’ yang masing-masing didefinisikan sebagai [5,10]

$$E_{\mu\nu} \equiv q_\mu^\alpha q_\nu^\beta {}^{(d)}C_{\alpha\rho\beta\sigma} n^\rho n^\sigma, \quad (\text{B.4})$$

dan

$$B_{\mu\nu\rho} \equiv q_\mu^\alpha q_\nu^\beta q_\rho^\gamma {}^{(d)}C_{\alpha\beta\gamma\sigma} n^\sigma, \quad (\text{B.5})$$

dimana  $B_{\mu\nu\rho}$  dan  $E_{\mu\nu}$  memenuhi sifat simetri sebagai berikut

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu\rho} &= -B_{\nu\mu\rho}, & B_{[\mu\nu\rho]} &= 0 = B^\mu{}_{\rho\mu}. \\ E_{\mu\nu} &= E_{\nu\mu}, & E^\mu{}_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Tensor Weyl  $d$ -Dimensi pada persamaan (B.1) dapat juga dituliskan dalam sajian tensor Weyl  $(d-1)$ -Dimensi  ${}^{(d-1)}C_{\mu\rho\nu\sigma}$ ,  $E_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu\rho}$ , dan kelengkungan

$K_{\mu\nu}$  yang diberikan sebagai [5,10]

$$= {}^{(d-1)}C_{\mu\rho\nu\sigma} + 2(B_{\mu\nu[\rho} n_{\sigma]} + B_{\rho\sigma[\mu} n_{\nu]})$$



$$\begin{aligned}
& + 2 (E_{\mu[\rho} n_{\sigma]} n_{\nu} - E_{\nu[\rho} n_{\sigma]} n_{\mu}) - \frac{2}{d-3} (E_{\mu[\rho} q_{\sigma]\nu} - E_{\nu[\rho} q_{\sigma]\mu}) \\
& - f_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{2}{d-3} (q_{\mu[\rho} f_{\sigma]\nu} - q_{\nu[\rho} f_{\sigma]\mu}) - \frac{2}{(d-2)(d-3)} f q_{\mu[\rho} q_{\sigma]\nu}, \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned}
f_{\mu\nu\rho\sigma} & \equiv K_{\mu\rho} K_{\nu\sigma} - K_{\mu\sigma} K_{\nu\rho}, \\
f_{\mu\nu} & \equiv f^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} = f_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu\sigma} = K K_{\mu\nu} - K_{\mu\sigma} K^{\sigma}{}_{\nu} = f_{\nu\mu}, \\
f & \equiv f^{\mu}{}_{\mu} = f^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = K^2 - K^{\mu\nu} K_{\mu\nu}. \quad (\text{B.8})
\end{aligned}$$

Pada kasus 5D, juga didefinisikan suku  $\bar{E}_{\mu\nu}$  dan  $\bar{B}_{\mu\nu\rho}$  dalam sajian tensor Riemann, sebagai [5,10]

$$\bar{E}_{\mu\nu} \equiv q_{\mu}{}^{\alpha} q_{\nu}{}^{\beta} {}^{(5)}R_{\alpha\rho\beta\sigma} n^{\rho} n^{\sigma} = -\epsilon_n K_{\mu\nu} + K_{\mu\alpha} K_{\nu}^{\alpha}, \quad (\text{B.9})$$

$$\bar{B}_{\mu\nu\rho} \equiv q_{\mu}{}^{\alpha} q_{\nu}{}^{\beta} q_{\rho}{}^{\gamma} {}^{(5)}R_{\alpha\beta\gamma\sigma} n^{\sigma} = 2 D_{[\mu} K_{\nu]\rho}. \quad (\text{B.10})$$

Dengan menggunakan persamaan tensor Weyl (B.1) pada 5D, maka  $E_{\mu\nu}$  dan  $B_{\mu\nu\rho}$  masing-masing dapat direlasikan dengan  $\bar{E}_{\mu\nu}$  dan  $\bar{B}_{\mu\nu\rho}$  yang diberikan sebagai

$$\begin{aligned}
E_{\mu\nu} & = \bar{E}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} {}^{(5)}R_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta} - \frac{1}{3} q_{\mu}{}^{\alpha} q_{\nu}{}^{\beta} {}^{(5)}R_{\alpha\beta} + \frac{1}{12} q_{\mu\nu} {}^{(5)}R \\
& = -\frac{1}{3} \left( {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} q_{\mu\nu} {}^{(4)}R \right) - \frac{2}{3} \epsilon_n \left( K_{\mu\nu} - \frac{1}{4} q_{\mu\nu} K \right) \\
& \quad + \frac{1}{3} K_{\mu\alpha} K_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{4} q_{\mu\nu} \left( K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} K^2 \right), \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{\mu\nu\alpha} & = \bar{B}_{\mu\nu\alpha} + \frac{2}{3} \left( D_{\beta} K_{[\mu}^{\beta} - D_{[\mu} K \right) q_{\nu]\alpha} \\
& = 2 D_{[\mu} K_{\nu]\alpha} + \frac{2}{3} \left( D_{\beta} K_{[\mu}^{\beta} - D_{[\mu} K \right) q_{\nu]\alpha}. \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

Dengan menerapkan kondisi Israel *junction* dan simetri  $Z_2$  pada persamaan (B.12),

teroleh nilai  $B_{\mu\nu\alpha}$  pada *brane* yang ditentukan sebagai

$$B_{\mu\nu\alpha}^+ = \bar{B}_{\mu\nu\alpha}^+ = \bar{B}_{\mu\nu\alpha}^- = -\kappa_5^2 D_{[\mu} \left( T_{\nu]\alpha} - \frac{1}{3} q_{\nu]\alpha} T \right). \quad (\text{B.13})$$



Selanjutnya, dengan menerapkan identitas Bianchi pada tensor Riemann 5D,

$$\nabla_{[\mu} {}^{(5)}R_{\nu\alpha]\beta\sigma} = 0 , \quad (\text{B.14})$$

maka diperoleh 4 ketentuan identitas berikut:

$$D_{[\mu} \bar{\mathbf{B}}_{\nu\alpha]}{}^\beta + K_{[\mu}{}^\sigma {}^{(4)}R_{\nu\alpha]\sigma}{}^\beta = 0 , \quad (\text{B.15})$$

$$\mathcal{E}_n \bar{\mathbf{B}}_{\mu\nu\alpha} + 2 D_{[\mu} \bar{\mathbf{E}}_{\nu]\alpha} - K_\alpha{}^\sigma \bar{\mathbf{B}}_{\mu\nu\sigma} + 2 \bar{\mathbf{B}}_{\alpha\sigma[\mu} K_{\nu]}{}^\sigma = 0 , \quad (\text{B.16})$$

$$\mathcal{E}_n {}^{(4)}R_{\mu\nu\alpha\beta} + 2 {}^{(4)}R_{\mu\nu\sigma[\alpha} K_{\beta]}{}^\sigma + 2 D_{[\mu} \bar{\mathbf{B}}_{|\alpha\beta| \nu]} = 0 , \quad (\text{B.17})$$

$$D_{[\mu} {}^{(4)}R_{\nu\alpha]\beta\sigma} = 0 . \quad (\text{B.18})$$

Persamaan-persamaan di atas memberikan kondisi batas pada *brane* di salah satu penyelesaian evolusi  $E_{\mu\nu}$  dalam 5D. Sedangkan pada kasus 4D, persamaan (B.4) dan (B.5) dapat dituliskan menjadi [15,57]

$$\mathbf{E}_{\mu\nu} = \mathbf{E}_{\langle\mu\nu\rangle} = C_{\mu\rho\nu\sigma} u^\rho u^\sigma , \quad (\text{B.19})$$

yang dikenal sebagai medan ‘*gravitoelectric*’ dan

$$\mathbf{H}_{\mu\nu} = \mathbf{H}_{\langle\mu\nu\rangle} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\rho\sigma} C^{\rho\sigma}{}_{\nu\alpha} u^\alpha , \quad (\text{B.20})$$

adalah medan ‘*gravitomagnetic*’, dimana  $u^\mu$  adalah medan vektor kecepatan pada ruang-waktu 4D, dengan medan vektor satuan  $u^\mu u_\mu = -1$ . Pada kasus ini, metrik ruang (tensor proyeksi) didefinisikan sebagai  $h_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ , sedangkan  $\epsilon_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\nu\rho\sigma} u^\sigma$  merupakan tensor Levi-Civita.

Persamaan-persamaan yang menunjukkan evolusi  $E_{\mu\nu}$  dalam *bulk* (yakni ruang-waktu yang sangat jauh dari *brane*) diberikan sebagai berikut. Dari persamaan (B.16) diperoleh

$$\mathcal{E}_n \mathbf{B}_{\mu\nu\alpha} = -2 D_{[\mu} \mathbf{E}_{\nu]\alpha} + K_\alpha{}^\sigma \mathbf{B}_{\mu\nu\sigma} - 2 \mathbf{B}_{\alpha\sigma[\mu} K_{\nu]}{}^\sigma , \quad (\text{B.21})$$

l. Selanjutnya dengan menghitung turunan Lie pada persamaan (B.17),  
eroleh



$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n \mathbf{E}_{\alpha\beta} = & D^\mu \mathbf{B}_{\mu(\alpha\beta)} + \frac{1}{6} \Lambda_5 (K_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta} K) + K^{\mu\nu} {}^{(4)}R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ & + 3 K_{(\alpha}^\mu \mathbf{E}_{\beta)\mu} - K \mathbf{E}_{\alpha\beta} + (K_{\alpha\mu} K_{\beta\nu} - K_{\alpha\beta} K_{\mu\nu}) K^{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

dalam *bulk*. Sama halnya dengan persamaan medan Einstein 4D dalam *bulk*, persamaan (B.21) dan (B.22) juga merupakan persamaan untuk sistem tertutup. Namun secara khusus, salah satunya mungkin dapat mengenali karakteristik rupa-gelombang (yakni gelombang gravitasi 4D) dari suku *transverse-traceless*  $E_{\mu\nu}$ , yang terpancar sebagai graviton dalam *bulk* 5D.

## B.2 Suku *Transverse-Traceless* Weyl dan Polarisasi Gelombang Gravitasi

Pada kasus ruang-waktu 4D, dengan meninjau divergensi dari identitas Bianchi (B.14), maka divergensinya adalah

$$R^{\sigma}{}_{\mu\nu[\alpha\beta;\sigma]} = \nabla^\sigma \nabla_\sigma R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 . \quad (\text{B.23})$$

Persamaan ini menyerupai persamaan gelombang standar yang dikenal sebagai persamaan gelombang kovarian. Jika ditinjau persamaan (B.23) sebagai suatu persamaan gangguan pada kelengkungan, dimana dapat diubah ke limit ruang-waktu datar, dengan  $\nabla \rightarrow \partial$ , maka diperoleh [58]

$$\partial^\sigma \partial_\sigma R_{\mu\nu\alpha\beta} = \square R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 , \quad (\text{B.24})$$

dimana  $\square = \partial_c \partial^c = \nabla^2 - \partial_t^2$  adalah operator gelombang yang umumnya dikenal sebagai operator d'Alembert. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (B.24) maka tensor Weyl,  $C_{\mu\nu\alpha\beta}$  yang memenuhi identitas Bianchi dan *trace-free* dapat dituliskan sebagai

$${}^c \square C_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 , \quad (\text{B.25})$$

dimana operator gelombang kovarian,  ${}^c \square$  berperan pada tensor Weyl sepenuhnya,  $\square$  berperan pada operator gelombang pada ruang-waktu datar,  $\square$  berperan pada  $h_{\mu\nu}$  (pada orde pertama  $h_{\mu\nu}$ ) tensor Weyl. Persamaan (B.25) mungkin memberikan gelombang gravitasi yang lebih akurat, sehingga solusi gelombang



gravitasi pada persamaan medan Einstein juga harus memenuhi persamaan (B.25), dan karakteristik tensor Weyl juga menjadi karakteristik gelombang gravitasi.

**Linearisasi-Gravitasi.** Jika ditinjau linearisasi tensor Einstein, dimana metrik ruang-waktu,  $q_{\mu\nu}$  didekati pada ruang-waktu datar, yang diberikan sebagai  $q_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , dengan  $\eta_{\mu\nu}$  adalah metrik datar dan  $h_{\mu\nu}$  adalah metrik kelengkungan/ perturbasi yang sangat kecil,  $\|h_{\mu\nu}\| \ll 1$ . Dengan menurunkan tensor Einstein pada kasus ini, maka diperoleh tensor Einstein menjadi [58,59]

$$G_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left( \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha + \partial^\alpha \partial_\mu h_{\nu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h \right. \\ \left. - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\beta h_\beta^\alpha + \eta_{\mu\nu} \square h \right) . \quad (\text{B.26})$$

Dengan menggunakan metrik perturbasi bentuk *trace-reversed* yang didefinisikan sebagai  $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$ , maka persamaan (B.26) dapat dituliskan kembali menjadi

$$G_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left( \partial_\alpha \partial_\nu \bar{h}_\mu^\alpha + \partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\nu\alpha} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\beta \bar{h}_\beta^\alpha \right) . \quad (\text{B.27})$$

Selanjutnya dengan menerapkan kondisi teraan Lorentz (*Lorentz gauge*), yaitu  $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  pada tensor Einstein persamaan (B.27), maka diperoleh

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} , \quad (\text{B.28})$$

atau jika kontribusi kelengkungan tidak diabaikan, maka persamaan (B.28) dapat di-generalisasikan menjadi [58]

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} + {}^0R_{\mu\nu\alpha\beta} h^{\alpha\beta} . \quad (\text{B.29})$$

Pada *Lorentz gauge*, tensor Einstein tereduksi menjadi operator gelombang yang bekerja pada metrik perturbasi *trace-reversed*, sehingga linearisasi tensor Einstein menjadi

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} , \quad (\text{B.30})$$



sedangkan pada kondisi vakum, persamaan (B.30) menjadi

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{B.31})$$

Pada kondisi vakum (yaitu  $T_{\mu\nu} = 0$ ), secara asimtotik ruang-waktu adalah datar. Jika ruang-waktu datar, metrik perturbasi menjadi murni spasial, dengan  $h_{tt} = h_{ti} = h_{it} = 0$  dan *traceless*,  $\bar{h} = h_i^i = h = 0$ . Dan jika kondisi Lorentz *gauge* diterapkan, maka metrik perturbasi spasial menjadi *transverse*,

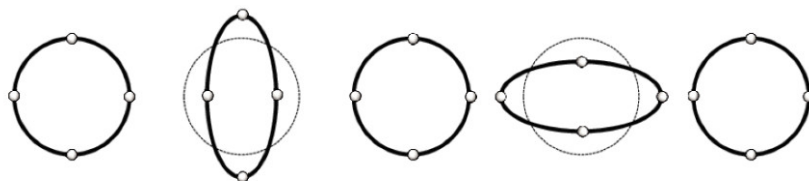
$$\partial_i \bar{h}^{ij} = \partial_i h^{ij} = 0 . \quad (\text{B.32})$$

Kondisi ini dikenal sebagai *Transverse-Traceless gauge (TT gauge)*. Metrik perturbasi kemudian dimasukkan dalam *TT gauge* yang dituliskan menjadi  $h_{\mu\nu}^{TT}$ . Karena *traceless*, maka tidak ada perbedaan antara  $h_{\mu\nu}^{TT}$  dan  $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT}$ .

*TT gauge* juga dapat menunjukkan bahwa gelombang gravitasi memiliki dua komponen polarisasi. Jika ditinjau suatu gelombang gravitasi yang merambat pada arah- $\hat{z}$ , maka  $h_{ij}^{TT} \equiv h_{ij}^{TT}(\hat{t} - \hat{z})$  adalah solusi yang tepat untuk persamaan gelombang  $\square h_{ij}^{TT} = 0$ . Pada kondisi Lorentz *gauge*  $\partial_z h_{zj}^{TT} = 0$  menunjukkan bahwa  $h_{zj}^{TT}(\hat{t} - \hat{z}) = \text{konstan}$ . Dimana pada kasus ini harus nol agar memenuhi keadaan ruang-waktu datar ( $h_{\mu\nu} \rightarrow 0$  karena  $r \rightarrow \infty$ ). Dengan meninjau sifat simetri dan *trace-free* metrik perturbasi, maka komponen bebas  $h_{ij}^{TT}$  yang tidak nol diberikan sebagai

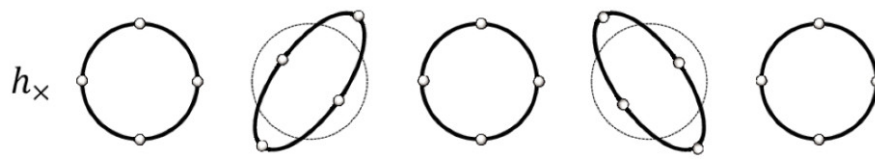
$$h_{\mu\nu}^{TT} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(\hat{t} - \hat{z}) & h_\times(\hat{t} - \hat{z}) & 0 \\ 0 & h_\times(\hat{t} - \hat{z}) & -h_+(\hat{t} - \hat{z}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{B.33})$$

dimana  $h_+$  dan  $h_\times$  adalah dua komponen bebas yang menggambarkan dua bentuk polarisasi gelombang gravitasi yang ditunjukkan pada Gambar B.2.

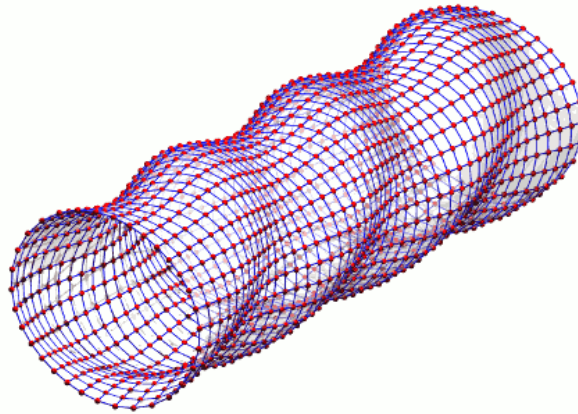


(a) Polarisasi gelombang gravitasi pada kuantitas  $h_+$





(b) Polarisasi gelombang gravitasi pada kuantitas  $h_x$



**Gambar B.2** Polarisasi gelombang gravitasi penuh pada kuantitas  $h_{\mu\nu}^{TT}$

Pada  $TT$  gauge, terdapat satu pendekatan relasi antara metrik perturbasi dengan linearisasi tensor Riemann  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ , yang mana dapat dituliskan sebagai [58]

$$R_{itjt} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT}. \quad (\text{B.34})$$

Pada kasus ini, persamaan (B.34) dapat dituliskan kembali dalam sajian tensor Weyl, sehingga diperoleh relasi antara metrik perturbasi dengan tensor Weyl orde-1 *gauge-invariant* yang diberikan sebagai [58]

$$C_{itjt}^{(1)} \equiv -\frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT}. \quad (\text{B.35})$$

Sebagaimana yang telah dibahas sebelumnya, pada kondisi vakum tensor Weyl berperan sebagai suku tunggal dari kelengkungan ruang-waktu yang mungkin berevolusi sebagai gelombang gravitasi, yang masuk akal bila ditinjau definisi pada persamaan (B.35). Studi mengenai tensor Weyl ini sangat menarik untuk

lebih lanjut, khususnya pada unifikasi gravitasi dengan gaya-gaya fundamental lainnya melalui generalisasi persamaan medan gravitasi dalam bentuk umum.



## LAMPIRAN C

### SATUAN

#### C.1 Tetapan Fisis dan Satuan Alami

Laju cahaya dalam vakum  $c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$  (C.1)

Tetapan gravitasi Newton  $G_N = 6.67408(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  (C.2)

Tetapan Planck tereduksi  $\hbar = 6.582119514(40) \times 10^{-25} \text{ GeV s}$  (C.3)

Tetapan Boltzmann  $k_B = 8.6173303(50) \times 10^{-14} \text{ GeV K}^{-1}$  (C.4)

Massa Planck  $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 2.176470(51) \times 10^{-8} \text{ kg}$  (C.5)

Panjang Planck  $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} = 1.616229(38) \times 10^{-35} \text{ m}$  (C.6)

Waktu Planck  $t_P = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}} = 5.39116(13) \times 10^{-44} \text{ s}$  (C.7)

Suhu Planck  $T_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N k_B^2}} = 1.416808(33) \times 10^{32} \text{ K}$  (C.8)

konstanta Hubble  $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$   
 $= 2.1332h \times 10^{-42} \text{ GeV}$  (C.9)



**Parameter alam semesta yang teramati saat ini dan penyeteraan dengan satuan Planck**

$$\text{Umur} \quad 8.08 \times 10^{60} t_P = 4.35 \times 10^{17} \text{ s, atau } 13.8 \text{ Gyr} \quad (\text{C.10})$$

$$\text{Diameter} \quad 5.4 \times 10^{61} l_P = 8.8 \times 10^{26} \text{ m, atau } 92 \text{ Glyr} \quad (\text{C.11})$$

$$\text{Massa} \quad \sim 10^{60} M_P = 3 \times 10^{52} \text{ kg, atau } 1.5 \times 10^{22} \text{ kali massa Matahari} \quad (\text{C.12})$$

$$\text{Rapat kritis} \quad 1.8 \times 10^{-123} \rho_P = 9.9 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3} \quad (\text{C.13})$$

$$\text{Suhu} \quad 1.9 \times 10^{-32} T_P = 2.725 \text{ K (Suhu radiasi CMB)} \quad (\text{C.14})$$

$$H_0 \quad 1.2(57) \times 10^{-61} t_P^{-1} \approx 72.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{C.15})$$

**C.2 Konversi Satuan**

$$1 \text{ parsec (pc)} = 3.085(68) \times 10^{16} \text{ m} = 3.261(56) \text{ lyr} \quad (\text{C.16})$$

$$1 \text{ m} = 1.057 \times 10^{-16} \text{ light years (lyr)} \quad (\text{C.17})$$

$$1 \text{ m} = 5.068 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1} \hbar \quad (\text{C.18})$$

$$1 \text{ s} = 1.519 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1} \hbar/c \quad (\text{C.19})$$

$$1 \text{ kg} = 5.608 \times 10^{28} \text{ GeV}/c^2 \quad (\text{C.20})$$

$$1 \text{ K} = 8.618 \times 10^{-14} \text{ GeV}/k_B \quad (\text{C.21})$$

Dalam Skripsi ini, digunakan sistem satuan alami dimana  $\hbar = c = k_B = 1$ . Dengan demikian, besaran-besaran standar seperti massa, panjang, waktu, dan suhu dapat dinyatakan dalam dimensi energi dengan satuan GeV, dimana  $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$  sedangkan  $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ . Selain itu, dalam Skripsi ini juga digunakan satuan

Glyr serta Gyr, dimana  $1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}$  dan  $1 \text{ Glyr} = 10^9 \text{ lyr}$  (tahun yang menyatakan satuan panjang untuk skala yang sangat besar, dan  $1 \text{ Gyr} = 10^9 \text{ yr}$  (tahun), yang menyatakan satuan waktu.



## DAFTAR PUSTAKA

- [1] B. Greene. *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory*. W. W. Norton & Company (Oct. 20<sup>th</sup> 2003).
- [2] F. P. Zen, B. E. Gunara, *et al.* Kompaktifikasi dari Teori Superstring dan Teori-M. *Indonesian Journal of Phys., IJP* **14**(4): 157-163 (2003).
- [3] P. Horava, E. Witten. Heterotic and Type I String Dynamics from Eleven Dimensions. *Nucl. Phys. B* **460**: 506-529 (1996).
- [4] P. Horava, E. Witten. Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary. *Nucl. Phys. B* **475**: 94-118 (1996).
- [5] K. Maeda. The Einstein Equations on a Brane World. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **148**: 59-90 (2002).
- [6] L. Randall, R. Sundrum. A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. *Phys. Rev. Lett.* **83**(17), 3370: 1-9 (1999).
- [7] L. Randall, R. Sundrum. An Alternative to Compactification. *Phys. Rev. Lett.* **83**(23), 4690: 1-10 (1999).
- [8] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati. Metastable Gravitons and Infinite Volume Extra Dimensions. *Phys. Lett. B* **484**: 112-120 (2000).
- [9] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati. 4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space. *Phys. Lett. B* **485**: 208-218 (2000).
- [10] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki. The Einstein Equations on the 3-Brane World. *Phys. Rev. D* **62**(2), 024012: 1-8 (2000).

Durrer. Braneworlds. *AIP Conf. Proc.* **782**(1): 202-240 (2005).



- [12] Bansawang BJ. Teori Relativitas Umum dan Persamaan Einstein Efektif 4-Dimensi dalam Duniabrane. *Makalah Kolokium*. Departemen Fisika, Universitas Hasanuddin. 1-20 (2014).
- [13] S. Kanno, J. Soda. Brane World Effective Action at Low Energies and AdS/CFT Correspondence. *Phys. Rev. D* **66**(4), 043526: 1-12 (2002).
- [14] R. Maartens. Brane-World Gravity. *Living Rev. Rel.* **7**(7): 1-99 (2004).
- [15] R. Maartens, K. Koyama. Brane-World Gravity. *Living Rev. Rel.* **13**(5): 1-124 (2010).
- [16] A. Perez-Lorenzana. An introduction to the brane world. *Rev. Mex. Fis. S* **53**(2): 85-102 (2005).
- [17] Arianto. Gravitasi Einstein dan *braneworld* dalam daerah efektif energi rendah dan dimensi ekstra. *Ph.D. Thesis*. Institut Teknologi Bandung (2007).
- [18] R. Maartens. Cosmological dynamics on the brane. *Phys. Rev. D* **62**(8), 084023: 1-25 (2000).
- [19] E. Papantonopoulos. Brane Cosmology. *Lect. Notes Phys.* **592**: 458-481 (2002).
- [20] D. Langlois. Brane cosmology: an introduction. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **148**: 181-212 (2002).
- [21] A. A. Coley. The dynamics of brane-world cosmological models<sup>1</sup>. *Can. J. Phys.* **83**: 475-525 (2005).
- [22] M. A. Garcia-Aspeitia, J. A. Magana, T. Matos. Braneworld Model of Dark Matter: Structure Formation. *Gen. Rel. Grav.* **44**(3): 581-601 (2012).
- [23] V. Sahni, Y. Shtanov. Braneworld model of dark energy. *JCAP* **0311**, 014: 1-16 (2003).
- [24] R. Maartens. Dark Energy from Brane-world Gravity. *J. Phys. Conf. Ser.* **68**: 046. *Lect. Notes Phys.* **720**: 323-332 (2007).

Cartier, R. Durrer, M. Ruser. On graviton production in braneworld cosmology. *Phys. Rev. D* **72**(10), 104018: 1-9 (2006).



- [26] A. G. Riess, *et al.* Observational evidence from Supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Ap J.* **116**: 1009-1038 (1998).
- [27] S. Perlmutter, *et al.* Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift Supernovae. *Ap J.* **517**: 565-586 (1999).
- [28] S. Perlmutter, B. P. Schmidt. Measuring cosmology with Supernovae. *Lect. Notes Phys.* **598**: 195-217 (2003).
- [29] A. G. Riess, S. Perlmutter, B. P. Schmidt. The Accelerating Universe. *Scientific background on the Nobel Prize in Phys.* 2011. (The Royal Swedish Academy of Sciences, Kungl. Vetenskaps-Akademien, Oct. 4<sup>th</sup> 2011).
- [30] M. Carmeli. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New York: John Wiley & Sons. (1982).
- [31] S. E. Gautama. *Pengantar Teori Relativitas Umum dan Kosmologi*. 2nd ed. Paradoks Softbook Publisher. (2016).
- [32] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity*. San Fransisco: Addison Wesley. (2004).
- [33] L. Amendola, S. Tsujikawa. *Dark Energy: Theory and Observation*. Cambridge: Cambridge University Press. (2010).
- [34] J. N. Islam. *An Introduction to Mathematical Cosmology*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press. (2001).
- [35] P. D. Mannheim. *Brane-Localized Gravity*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2005).
- [36] M. D. Maia, E. M. Monte, J.M.F. Maia. The accelerating universe in brane-world cosmology. *Phys. Lett. B* **585**: 11-16 (2004).
- [37] T. Ortín. *Gravity and Strings*. Cambridge: Cambridge University Press. (2004).

Whisker. Braneworld Black Holes. *Ph.D. Thesis*. University of Durham, England (2006).



- [39] T. Kobayashi. Braneworld Cosmological Perturbations. *Ph.D. Thesis*. Kyoto University (2006).
- [40] D. Ida. Brane-world cosmology. *JHEP* **0009**, 014: 1-4 (2000).
- [41] R. Maartens. Geometry and Dynamics of the Brane-World. *Reference Frame and Gravitomagnetism, Proc. of the XXIII Spanish Rel. Meet*: 93-119 (2001).
- [42] S. E. Gautama, T. Surungan, Bansawang BJ. Tinjauan Inflasi Alam Semesta Berdasarkan Model  $\Lambda$ CDM. *Repository UNHAS*: 1-11 (2014). [[repository.unhas.ac.id/handle/123456789/10970](http://repository.unhas.ac.id/handle/123456789/10970)].
- [43] M. N. Gazali Yunus, *et al.* Pendekatan Sistem Dinamik Kosmologi Dunia *Brane* pada Limit Energi Rendah dengan Model  $\Lambda$ CDM. *Prosiding SNF-Makassar 2018*: 42-46 (2018).
- [44] J. A. Frieman, M. S. Turner, D. Huterer. Dark Energy and the Accelerating Universe. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **46**: 1-53 (2008).
- [45] R. D. Sorkin. Is the Cosmological “Constant” a Nonlocal Quantum Residue of Discreteness of the Causal Set Type?. *AIP Conf. Proc.* **957**: 142-153 (2007).
- [46] E. V. Linder. Exploring the Expansion History of the Universe. *Phys. Rev. Lett.* **90**(9), 091301: 1-4 (2003).
- [47] K. S. F. Pardede, A. Suroso, F. P. Zen. Modified Friedmann equations in braneworld scenario. *Journal of Physics: Conf. Series* **988** 012007: 1-10 (2018)
- [48] D. Langlois, L. Sorbo, M. Rodríguez-Martínez. Cosmology of a Brane Radiating Gravitons into the Extra Dimension. *Phys. Rev. Lett.* **89**(17), 171301: 1-12 (2002).
- [49] D. Langlois, L. Sorbo. Bulk gravitons from a cosmological brane. *Phys. Rev. D* **68**(8), 084006: 1-27 (2003).

Tsujikawa, M. Sami. String-inspired cosmology: Late time transition from matter era to dark energy universe caused by a Gauss-Bonnet coupling. *JCAP* **0701**, 006: 1-19 (2007).



- [51] S. Pichler. Scalar fields and higher-derivative gravity in brane worlds. *Ph.D. Thesis*. Ludwig-Maximilians-Universität München (Nov. 30, 2004).
- [52] G. A. Ramanujam, K. Fitzcharles, S. Muralidharan. An Extended Version of Hubble's Law. *Journal of Mod. Phys.* **8**: 1067-1071 (2017).
- [53] T. M. Davis, C. H. Lineweaver. Expanding Confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. *Publication of the Astronomical Society of Australia* **21**(1): 97-109 (2004).
- [54] I. Bars, J. Terning. *Extra Dimensions in Space and Time*. New York: Springer Science+Business Media, LLC (2010).
- [55] K. Yano. *The Theory of Lie Derivative and Its Applications*. Groningen: North-Holland Publishing Co. (1957).
- [56] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *IL Nuovo Cimento B* **44**(1): 1-14 (1966).
- [57] A. Danekar. On the significance of the Weyl curvature in a relativistic cosmological model. *Mod. Phys. Lett. A* **24**(38): 3113-3127 (2009).
- [58] A. R. Philip. Theoretical Foundations and Experimental Detection of Gravitational Radiation. *Thesis*. Royal Institute of Technology, KTH (2017).
- [59] É. É. Flanagan, S. A. Hughes. The basics of gravitational wave theory. *New J. Phys.* **7**(204): 1-52 (2005).

