KEBERADAAN DAN KETUNGGALAN SOLUSI NONTRIVIAL DARI PERSAMAAN MATRIKS NONLINEAR

UPT PERPUSTAKAAN HASANUDDIN
Tgl. Terima : 13-12-06
Asal Dari : Ujian
Banyaknya : 1 exp
Harga : Hadiah
No. Invent. : 1312869
No. Klas : 134994

DISUSUN OLEH :

LUKMAN MASNUR
H 111 02 017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2006

Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Nontrivial

dari Persamaan Matriks Nonlinear

Skripsi ini diajukan :
Untuk melengkapi tugas-tugas dan memenuhi syarat-syarat
untuk mencapai
gelar Sarjana Matematika

OLEH :

LUKMAN MASNUR
H 111 02 017

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar
2006

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguh-sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Nontrivial
dari Persamaan Matriks Nonlinear

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun

Makassar, 16 November 2006

LUKMAN MASNUR
H 111 02 017

Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Nontrivial dari Persamaan Matriks Nonlinear

Disetujui Oleh:

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc	**Jusmawati M, S.Si, M.Si**
NIP. 131 992 471	**NIP. 132 133 694**

Pada hari ini, kamis 16 November 2006, panitia ujian skripsi

Menerima dengan baik skripsi yang berjudul:

Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Nontrivial dari Persamaan Matriks Nonlinear

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Makassar, 16 November 2006

Panitia Ujian Skripsi		Tanda Tangan
1. Ketua	: DR. Hj. Aidawayati R, M.S	(..........................)
2. Sekretaris	: Anisa, S.Si, M.Si	(..........................)
3. Anggota	: Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc	(..........................)
4. Anggota	: Jusmawati M, S.Si, M.Si	(..........................)
5. Anggota	: Drs. Muh. Hasbi, M.Sc	(..........................)

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Segala puji syukur penulis panjatkan kehadirat **Ilahi Rabbi** atas segala limpahan nikmat, rahmat dan hidayah-Nya, pertolongan serta kesehatan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Salam serta shalawat semoga tetap tercurah kepada **Nabi Muhammad SAW** sebagai teladan untuk seluruh ummat manusia yang maha sempurna akhlaknya.

Penulis menyadari bahwa sejak penyusunan proposal sampai skripsi ini banyak hambatan, rintangan dan halangan namun berkat bantuan dan motivasi dari berbagai pihak semua ini dapat teratasi dengan baik.

Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang konstruktif dari pembaca demi kesempurnaan skripsi ini.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan penghargaan dan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada **Ayahanda Massaressung** dan **Ibunda Nurhaedah** yang telah melahirkan dan membesarkanku dengan penuh kasih sayang serta iringan doa-doa mereka demi keberhasilan pendidikan penulis, juga untuk adik-adikkku tercinta **Rahmawati Masnur, M. Luthfi Masnur, M. Agus Salim Masnur, Rahmi Masnur, Ahmad Dahlan Masnur dan M. Ilham Masnur (semoga adik diterima disisiNya)** atas segala pengorbanan, kesabaran, dan pengertiannya serta bantuan moril dan materil sehingga penulis dapat menyelesaikan studi. *Kalian adalah harta paling berharga yang kumiliki.*

Demikian pula penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak **Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc,** selaku pembimbing utama dan **Ibu Jusmawati M, S.Si M.Si** selaku pembimbing pertama yang penuh kesabaran, kesungguhan dan kebaikan hatinya telah banyak memberikan petunjuk serta bimbingan sehingga kesulitan penulis dapat teratasi dan akhirnya dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
2. Bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si** selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, dan Bapak **Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, para Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmunya selama perkuliahan serta para staf yang telah memberikan bantuan dan dorongan selama penulis menjalani perkuliahan.
3. Bapak **Drs. La Podje Talangko** selaku penasehat akademik yang telah memberikan perhatiannya selama perkuliahan.
4. Ibu **DR. Hj. Aidawayati R, M.S,** ibu **Anisa, S.Si, M.Si** dan bapak **Drs. Muh. Hasbi, M.Sc** selaku penguji yang selalu bersedia meluangkan waktunya.
5. Bapak **Pimpinan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam** beserta seluruh stafnya yang telah banyak memberikan bantuan selama penulis menjalankan perkuliahan.
6. Para pegawai jurusan Matematika : **Pak Sutamin, Pak Nasir, dan Pak Amin** terima kasih atas bantuannya selama ini .

7. *Buat sahabatku* ***Komputasi Crew*** : **Alim (Big Boss), Heriawan (Master Flash, syukron persentasenya), Mahdillah"AO"(Mr. Chatt), Accung(Gamer & programmer), Philip (Statistikawan), Didin(Mr. Download), Amin(Master Graphic)** yang telah memberikan dorongan, dukungan, doa dan kebersamaannya melewati hari-hari yang telah berlalu di laboratorium komputasi yang tidak bisa penulis lupakan. *Kalian akan tetap jadi sahabat dalam hidupku.*
8. *Sahabatku di KRAMNUT* : **Nanang, Ichal, Karim dan Dhani.** Terima kasih atas dukungan dan doanya selama ini,
9. *Buat teman jalan dan bercandaku* : **Rara (*you always be our brother*), Warda, Acho, Tyny S.Si, Uki, Ayu , Fifi, Yani, Mina, Udhu, Uni S.Si, Widya S.Si** thank's atas kebersamaannya selama ini.
10. Buat "*sahabat setiaku*" di *HIMATIKA*,: **KamBas, LumBa, Cuttang, Acha, Ikrar** banyak hal yang aku dapatkan dari kalian.
11. *For my all friends Angkatan 2002 Matematika* : **Jo, Idot S.Si, Narti, Afif, Lela, Oa, Fadho, Jannah S.Si, Chetoss, Yiz, Seftie, Ebhi, Indah, Salma, Hera, Nugie, Pitto, Noni, Tika, Uthe.** ***see you next time frends.***
12. "*Saudaraku*" **Mauliddin S.Si** terima kasih atas semangat dan motivasinya selama ini, semoga Allah S.W.T menilainya sebagai ibadah
13. *Adik-adikku* **Angkatan 03, 04, dan 05, serta senior-seniorku**, atas dukungan dan kebersamaannya melalui fase kehidupan kampus.
14. Kepada semua pihak yang telah membantu tapi tidak bisa saya sebutkan satu-persatu.

Semoga segenap bantuan dan partisipasinya bernilai ibadah dan mendapat pahala yang setimpal di sisi Allah SWT. Akhirnya semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat kepada semua pihak yang membutuhkannya. Amin.

Makassar, 16 November 2006

Penulis

ABSTRAK

Tulisan ini menguraikan tentang keberadaan dan ketunggalan solusi yang dibentuk dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ dan Kekonvergenan barisan matriks $\{X_i\}$ yang didefnisikan melalui relasi rekursif $X_{n+k} = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X_{n+l}^{\alpha_l} P_l$, $n \geq 0$ dimana $|\alpha_l| \leq 1$ untuk $0 \leq l \leq k-1$ dan $X_0, X_1, \cdots, X_{k-1}$ adalah matriks definit positif awal.

Kata Kunci : Matriks Definit Positif , Matriks Semidefinit Positif dan Barisan Rekursif.

ABSTRACT

In this paper we explain the existence and uniqueness of solutions of the following nonlinear matrix equations $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$, and the convergence of the matrix sequences $\{X_i\}$ recursively defined by $X_{n+k} = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X_{n+l}^{\alpha_l} P_l$, $\quad n \geq 0$, where $|\alpha_l| \leq 1$ for $0 \leq l \leq k-1$ and $X_0, X_1, \cdots, X_{k-1}$ are initial positive definite matrices.

Keywords: Positive definite matrix, Positif semidefinite matrix and Recursively defined sequence.

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Arti
α	Alfa
δ	Delta
λ	Lamda
ε	Epsilon
$\rightarrow$	Mendekati/menuju
∞	Takhingga
$\leq$	Lebih kecil atau sama
$\geq$	Lebih besar atau sama

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam merumuskan suatu model matematika, seringkali jumlah persamaan yang muncul lebih dari satu dan harus diselesaikan secara serempak atau simultan. Persamaan yang dibentuk akan memberikan sebuah solusi yang sangat berguna bagi para ahli dalam bidang sains dan rekayasa. Beberapa persamaan linear tentunya akan sangat mudah untuk mencari solusi analitiknya karena suatu persamaan linear tidak melibatkan hasil kali atau akar peubah. Semua peubah hanya muncul sekali dengan pangkat satu dan tidak mucul sebagai peubah bebas dari sebuah fungsi trigonometri, logaritma, atau eksponensial.

Di dalam persoalan matematika sering dijumpai analisa-analisa yang menyangkut fungsi nonlinear, misalnya fungsi kuadrat. Setiap persamaan kuadrat dapat dihubungkan dengan suatu fungsi vektor $f(x) = x^T Ax$, fungsi vektor yang demikian dinamakan bentuk kuadratik. Suatu bentuk kuadratik sangat berhubungan dengan bentuk definit positif. (Steven J. Leon, 2001)

Salah satu aplikasi yang sangat penting dari bentuk definit positif adalah menentukan solusi matriks definit positif yang dibentuk dari sebuah sistem persamaan nonlinear. Jika solusi yang dibentuk melibatkan matriks definit positif dan matriks semidefinit positif yang berbentuk:

$$X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

dimana P_l dan α_l masing-masing merupakan matriks real dan bilangan real $\forall\ 0 \le l \le k-1$, maka dalam menentukan solusi tersebut diperlukan syarat atau kondisi yang harus dipenuhi oleh persamaan matriks nonlinear sehingga mempunyai solusi dan solusi yang dibentuk adalah tunggal. (Frank Gibson, 2001)

Berdasarkan uraian diatas, maka penulis tertarik untuk mengkaji solusi nontrivial dari persamaan matriks nonlinear dalam tugas akhir yang berjudul **"Keberadaan dan Ketunggalan Solusi Nontrivial dari Persamaan Matriks Nonlinear"**

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang akan dibahas adalah

1) Bagaimana menentukan syarat atau kondisi yang harus dipenuhi oleh suatu persamaan matriks nonlinear yang melibatkan matriks definit positif atau matriks semidefinit positif sehingga persamaan yang dibentuk mempunyai sebuah solusi.
2) Bagaimana membuktikan ketunggalan solusi matriks definit positif dan matriks semidefinit positif melalui relasi rekursif dari suatu barisan matriks.

1.3 Batasan Masalah

Pada penulisan ini akan dibatasi pada bentuk kuadratik untuk matriks definit positif dan matriks semidefinit positif yang simetri.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan adalah untuk membuktikan keberadaan dan ketunggalan solusi nontrivial dari persamaan matriks nonlinear yang dibentuk dari matriks definit positif dan matriks semidefinit positif.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Bentuk-Bentuk Kuadratik

Suatu bentuk kuadratik dalam dua peubah x dan y, didefinisikan sebagai suatu ekspresi yang biasa ditulis sebagai

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Bentuk-bentuk kuadratik tidak dibatasi pada dua peubah. Suatu bentuk kuadrat umum didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1

Suatu bentuk kuadratik dalam n peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah suatu ekspresi yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Dimana A adalah suatu matriks n x n yang simetris. (Howard Anton, 2002)

Teorema 1.

Misalkan A adalah suatu matriks simetri $n \times n$ yang nilai eigennya $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Jika x dibatasi sehingga $\|x\| = 1$ relatif terhadap hasil kali dalam Euclidean pada R^n, maka:

a) $\lambda_1 \geq x^T Ax \geq \lambda_n$

b) $x^T Ax = \lambda_n$ jika x adalah suatu vektor-eigen dari A yang berpadanan dengan λ_n dan $x^T Ax = \lambda_1$ jika x adalah suatu vektor-eigen dari A yang berpadanan dengan λ_1 .(Howard Anton, 2002)

2.2 Matriks Definit Positif

Definisi 2. Matriks Definit Positif

Suatu bentuk kuadratik $x^T Ax$ disebut definit positif jika $x^T Ax > 0$ untuk semua $x \neq 0$. Matriks simetri A disebut definit positif jika $x^T Ax$ adalah definit positif. (Howard Anton, 2002)

Definisi 3. Matriks Semidefinit Positif

Suatu bentuk kuadratik $x^T Ax$ disebut semidefinit positif jika $x^T Ax \geq 0$ untuk semua x. Matriks simetri A disebut semidefenit positif jika $x^T Ax$ adalah semidefinit positif. (Howard Anton, 2002)

Sifat-sifat matriks definit positif

Sifat 1. Jika A adalah matriks simetri dan definit positif, maka A taksingular

Contoh: $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Karena nilai-nilai eigen dari A semuanya positif yaitu $\lambda=2$ dan $\lambda=8$ maka A taksingular

Sifat 2. Jika A adalah suatu matriks simetri dan definit positif, maka det(A)>0

Contoh: $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Sifat 3.Jika A adalah suatu matriks simetris dan definit positif, maka sub matriks utama $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dari A semuanya adalah definit positif

Contoh : $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Submatriks utama dari A adalah :

$$A_1=[2],\ A_2=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } A_3=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

yang semuanya definit positif

Sifat 4. Jika A adalah suatu matriks simetri dan definit positif, maka A dapat direduksi menjadi matriks segitiga atas hanya dengan menggunakan operasi baris III

Sifat 5. Jika A adalah suatu matriks simetri dan definit positif, maka A dapat difaktorkan kedalam hasil kali LDL^T, di mana L adalah suatu matriks segitiga bawah dengan elemen-elemen 1 sepanjang diagonal dan D

adalah suatu matriks diagonal yang semua entri-entri diagonalnya positif

Sifat 6.(Dekomposisi Cholesky) Jika A adalah matriks simetri dan definit positif, maka A dapat difaktorkan ke dalam suatu hasil kali LL^T, di mana L adalah matriks segitiga bawah dengan elemen-elemen diagonal positif. (Steven J. Leon, 2001)

Teorema 3.

Misalkan A adalah matriks simetris real berorde $n \times n$. Maka A adalah definit positif jika dan hanya jika semua nilai-nilai eigennya positif. (Steven J. Leon, 2001)

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

karena

$$\begin{aligned} X^T AX &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + \left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) + \left(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2\right) + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

$$\forall\, (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$$

maka disimpulkan bahwa matriks A bersifat definit positif.

2.3 Barisan Rekursif

Definisi 4. Barisan

Barisan adalah fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Barisan dengan suku ke-n adalah a_n biasa dinotasikan dengan $\{a_n\}$. (Sumantri Slamet, 1991)

Definisi 5. Barisan Rekursif

Sebuah barisan $\{a_n\}$ dengan $a_{n+1} = f(a_n)$ dinamakan barisan rekursif.

Pada barisan rekursif, suku ke-n+1 yaitu a_{n+1} diperoleh melalui kondisi sebelumnya yaitu a_n.(Sumantri Slamet, 1991)

BAB III

KEBERADAAN DAN KETUNGGALAN SOLUSI NONTRIVIAL DARI PERSAMAAN MATRIKS NONLINEAR

3.1 Keberadaan Solusi Nontrivial dari Persamaan Matriks Nonlinear

Persamaan matriks nonlinear yang dikaji dalam tulisan ini memiliki bentuk sebagai berikut:

$$X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l \tag{3.1}$$

dimana :

k = bilangan terhitung (counting number)

P_l = Matriks riil sxs dengan $0 \leq l \leq k-1$

α_l = Bilangan riil dengan $0 \leq l \leq k-1$ dan $|\alpha_l| \leq 1$ untuk $0 \leq l \leq k-1$

Pembuktian keberadaan solusi dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ diawali dengan Teorema Titik Tetap Brouwer's sebagai berikut:

Lemma 3.1.1 (Teorema Titik Tetap Brouwer's)

Setiap pemetaan kontinu $f: D \to D$ dari suatu himpunan kompak, konveks dan tidak kosong dalam $\Re^s$ mempunyai titik tetap.

Untuk membuktikan Teorema Titik Tetap Brouwer's beberapa notasi yang penting sebagai berikut :

$\Re_+ = \{X \in \Re^{sxs}\ ;\ \ X\ \textit{adalah matriks definit positif sxs}\}$,dimana $\Re_+$ merupakan himpunan konveks dari $\Re^{sxs}$. Untuk matriks P_l dan bilangan riil

$\alpha_l \quad 0 \le l \le k-1$ didefinisikan suatu fungsi yang kontinu $f(X) = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l, \quad X \in \Re_+$

Didefinisikan pula

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \max\{|\alpha_i|, 0 \le i \le k-1\} \\
b &= \min\{\lambda_{\min}, \lambda_{\max}^{-1}\} \\
B &= \max\{\lambda_{\max}, \lambda_{\min}^{-1}\} \\
b &= B^{-1} \le 1
\end{aligned}
$$

dimana $\lambda_{\min}$ dan $\lambda_{\max}$ masing-masing merupakan nilai eigen terkecil dan terbesar dari matriks definit positif $C = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T P_l$. Sedangkan himpunan bagian D didefinisikan sebagai berikut :

$$D = \{X \in \Re_+ ; E_b \le X \le E_B\}$$

dimana

$$E_a = a^{\frac{1}{1-\alpha}} I$$

Teorema 3.1.2

Jika $C = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T P_l$ adalah matriks definit positif maka persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ mempunyai solusi matriks definit positif.

Untuk membuktikan teorema 3.1.2 akan diperhatikan beberapa lemma berikut :

Lemma 3.1.3

Jika $C = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T P_l$ adalah matriks definit positif maka pemetaan fungsi f kontinu dari $\Re_+$ ke $\Re_+$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa fungsi f dipetakan dari $\Re_+$ ke $\Re_+$

misalkan $\delta \geq 0$, dan I adalah matriks identitas $\forall X \in \Re_+$. karena $X \geq \delta I$ dan f adalah fungsi yang kontinu $\forall X \in \Re_+$ maka

$$
\begin{aligned}
f(X) = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l &\geq \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T (\delta I)^{|\alpha_l|} P_l \\
&\geq \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T (\delta I)^{\alpha} P_l \\
&= \delta^{\alpha} C
\end{aligned}
$$

Hal ini berarti terdapat $\delta \geq 0 \quad \forall X \in \Re_+$ sedemikian sehingga pemetaan f kontinu dari $\Re_+$ ke $\Re_+$.

Dengan demikian teorema titik tetap Brouwer's untuk pemetaan f telah digunakan.

Lemma 3.1.4

Misalkan D tutup, konveks dan terbatas di $\Re_+$ jika $C = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T P_l$ adalah definit positif, maka f adalah pemetaan dari D ke D atau ditulis $f: D \to D$

Bukti :

Diketahui bahwa D merupakan himpunan tutup, konveks dan terbatas pada $\Re_+$. Akan dibuktikan $f: D \to D$

Jika $X \in D$ maka $f(X) \geq E_b$ dan $f(X) \leq E_B$ yang berarti

$$P_l^T X^{\alpha_l} P_l \geq P_l^T \left(b^{\frac{1}{1-\alpha}} I \right)^{|\alpha_l|} P_l \geq b^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} I P_l^T P_l$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l \\ &\geq \sum_{l=0}^{k-1} b^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} P_l^T P_l \\ &= b^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} C \\ &\geq b^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} bI \\ &= b^{\frac{1}{1-\alpha}} I \\ &= E_b \end{aligned}$$

Selanjutnya

$$P_l^T X^{\alpha_l} P_l \leq P_l^T \left(B^{\frac{1}{1-\alpha}} I \right)^{|\alpha_l|} P_l \leq B^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} I P_l^T P_l$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l \\ &\leq \sum_{l=0}^{k-1} B^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} P_l^T P_l \end{aligned}$$

$$= B^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} C$$

$$\leq B^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} BI$$

$$= B^{\frac{1}{1-\alpha}} I$$

$$= E_B$$

Karena $f(X) \in D$ maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f adalah pemetaan dari D ke D atau $f : D \to D$.

Bukti teorema 3.1.2

Dari lemma 3.1.3 dan lemma 3.1.4 serta asumsi yang dibangun dari teorema titik tetap Brouwer's adalah memenuhi bahwa pemetaan f mempunyai titik tetap dalam D sehingga D merupakan solusi dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ karena untuk setiap matriks dalam D adalah definit positif

Akibatnya persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ mempunyai solusi definit positif .

Teorema 3.1.5

Jika $C = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T P_l$ adalah matriks semidefinit positif , tetapi bukan matriks definit positif maka persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ merupakan solusi matriks semidefinit positif

Bukti :

Dengan induksi Matematika dalam s, untuk ukuran matriks C.

- *Untuk s=1*

Karena $C = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T P_l$ adalah matriks semidefinit positif , tetapi bukan matriks definit positif maka $P_l = 0,\ 0 \le l \le k-1$ akibatnya

$$\begin{aligned} C &= \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T P_l \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} P_l^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

dimana P_l adalah matriks berukuran 1x1. Dengan demikian persamaan matriks $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ mempunyai sebuah solusi.

Jadi berlaku untuk s=1

- *Asumsikan teorema 3.1.5 benar untuk s = t-1, akan dibuktikan juga benar untuk s=1*

Karena $C = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T P_l$ adalah matriks semidefinit positif, maka C singular.

Berarti salah satu nilai eigen dari C adalah nol ,yaitu terdapat vektor eigen satuan $v \in \Re^t$ sedemikian hingga $Cv = 0$ .Oleh karena itu :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-1} \|P_l v\|^2 &= \sum_{l=0}^{k-1} (P_l v)^T P_l v \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} v^T P_l^T P_l v \\ &= v^T C v \\ &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $P_l v = 0, \quad 0 \le l \le k-1$. Karena v adalah vektor eigen satuan dari $P_l, 0 \le l \le k-1$, maka dapat dibentuk matriks orthogonal $Q = (v_1 \; v_2 \cdots v_t)$ dari vektor kolom $v_1 = v, v_2, \cdots, v_t$ sedemikian sehingga berlaku

$$P_l = Q \hat{P}_l Q^T, \; 0 \le l \le k-1 \tag{3.2}$$

dengan

$$\hat{P}_l = \begin{pmatrix} 0 & P_l^* \\ 0 & \overline{P}_l \end{pmatrix}$$

dimana :

P_l^* adalah vektor baris $(t - 1)$

$\overline{P}_l$ adalah matriks $(t - 1)\, x\, (t - 1)$

Misalkan $\hat{X} = Q^T X Q$, maka persamaan matriks $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ ekivalen dengan bentuk

$$\hat{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \hat{P}_l^T \hat{X}^{\alpha_l} \hat{P}_l \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \hat{X} &= Q^T X Q \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} Q^T P_l^T X^{\alpha_l} P_l Q \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} Q^T \left(Q \hat{P}_l Q^T\right)^T \left(Q \hat{X}^{\alpha_l} Q^T\right)\left(Q \hat{P}_l Q^T\right) Q \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} Q^T \left(Q^T \hat{P}_l^T Q^T\right)\left(Q \hat{X}^{\alpha_l} Q^T\right)\left(Q \hat{P}_l Q^T\right) Q$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} Q^T Q \left(\hat{P}_l^T \hat{X}^{\alpha_l} \hat{P}_l\right) Q Q^T$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \hat{P}_l^T \hat{X}^{\alpha_l} \hat{P}_l$$

dimana $QQ^T = I$

Karena $X = Q\hat{X}^{\alpha_l} Q^T$ maka $X = \hat{X}^{\alpha_l}$

Dengan demikian $\hat{X} = Q^T X Q$ ekivalen dengan bentuk $\hat{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \hat{P}_l^T \hat{X}^{\alpha_l} \hat{P}_l$

Menurut teorema 3.1.1, jika $\overline{C} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{P}_l$ adalah definit positif maka

$$\overline{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{X}^{\alpha_l} \overline{P}_l \tag{3.4}$$

yang merupakan solusi matriks definit positif. Jika $\overline{C} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{P}_l$ adalah semidefinit positif, tetapi bukan definit positif , maka persamaan $\overline{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{X}^{\alpha_l} \overline{P}_l$ juga merupakan solusi matriks semidefinit positif. Jika $\overline{X}$ adalah solusi dari persamaan $\overline{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{X}^{\alpha_l} \overline{P}_l$ maka solusi dari persamaan $\hat{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \hat{P}_l^T \hat{X}^{\alpha_l} \hat{P}_l$ berbentuk

$$\hat{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \hat{P}_l^T \hat{X}^{\alpha_l} \hat{P}_l$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (P_l^*)^T & (\overline{P}_l)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{X}^{\alpha_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P_l^* \\ 0 & \overline{P}_l \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\overline{P}_l)^T \overline{X}^{\alpha_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P_l^* \\ 0 & \overline{P}_l \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{P}_l^T \overline{X}^{\alpha_l} \overline{P}_l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{X}^{\alpha_l} \overline{P}_l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{X} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, $X = Q \hat{X} Q^T$

$$X = Q \hat{X} Q^T$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} Q \hat{P}_l^T \hat{X}^{\alpha_l} \hat{P}_l Q^T$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} Q \left(Q P_l Q^T\right)^T \left(Q X^{\alpha_l} Q^T\right) \left(Q P_l Q^T\right) Q^T$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} Q \left(Q^T P_l^T Q\right) \left(Q X^{\alpha_l} Q^T\right) \left(Q P_l Q^T\right) Q^T$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} Q^T Q \left(P_l^T X^{\alpha_l} P_l\right) Q Q^T$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

merupakan solusi semidefinit positif yang dibentuk oleh persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$.

Jadi asumsi bahwa teorema 3.1.5 benar untuk $s = t\text{-}1$ benar pula untuk matriks berukuran $s=t$

Teorema 3.1.5 memberikan asumsi bawah terdapat solusi nontrivial yang dibangun dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$. Hal ini dikarenakan apabila $\overline{X}$ merupakan solusi nontrivial dari persamaan $\overline{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P_l}^T \overline{X}^{\alpha_l} \overline{P_l}$ maka persamaan $\hat{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \hat{P}_l^T \hat{X}^{\alpha_l} \hat{P}_l$ juga merupakan solusi nontrivial

Contoh:

Diketahui matriks semidefinit positif

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

dengan $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ dan $\alpha_2 = 2$. Untuk k=3 diperoleh solusi yang berbentuk :

$$X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$X = \sum_{l=0}^{2} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$= P_0^T P_0 + P_1^T X P_1 + P_2^T X^2 P$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X & -X \\ -X & X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4X^2 & -4X^2 \\ -4X^2 & 4X^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X + 4X^2 & -X - 4X^2 \\ -X - 4X^2 & X + 4X^2 \end{pmatrix}$$

atau solusi dari X dapat ditulis dalam berbentuk :

$$= \begin{pmatrix} 4X^2 + X & -4X^2 - X \\ -4X^2 - X & 4X^2 + X \end{pmatrix}$$

Untuk matriks semidefinit positif P_0 , P_1 , P_2 dapat dibentuk sebuah basis untuk ruang eigen. Karena P_0 , P_1 , P_2 adalah matriks semidefinit positif, maka salah satu nilai eigen dari matriks tersebut adalah 0.

- Untuk Matriks P_0

$$\hat{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Untuk Matriks P_1

$$\det(\lambda I - P_1) = \det\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$0 \quad = \det\left\{\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$0 \quad = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\lambda = 0 \quad \text{dan} \quad \lambda = 2$$

- Untuk $\lambda = 0$, maka

$$\lambda I - P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

diperoleh basis untuk ruang eigen yaitu

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda = 2$, maka

$$\lambda I - P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

diperoleh basis untuk ruang eigen yaitu

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga terdapat vektor eigen satuan v yang diperoleh dari basis untuk ruang vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena terdapat vektor kolom v_1 maka dapat dibentuk matriks orthogonal

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya,

$$P_i = Q\,\hat{P}_i\,Q^T$$

$$P_1 = Q\,\hat{P}_1\,Q^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \hat{P}_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Untuk Matriks P_2

$$\det(\lambda I - P_2) = \det\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$0 = \det\left\{\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$0 = \lambda^2 - 4\lambda$$

$$\lambda = 0 \text{ dan } \lambda = 4$$

- Untuk $\lambda = 0$, maka

$$\lambda I - P_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

diperoleh basis untuk ruang eigen yaitu

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda = 4$, maka

$$\lambda I - P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

diperoleh basis untuk ruang eigen yaitu

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga terdapat vektor eigen satuan v yang diperoleh dari basis untuk ruang vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena terdapat vektor kolom v_1 maka dapat dibentuk matriks orthogonal

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya,

$$P_l = Q\, \hat{P}_l\, Q^T$$

$$P_2 = Q\, \hat{P}_2\, Q^T$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \hat{P}_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \hat{P}_l^T \hat{X}^{\alpha_l} \hat{P}_l$$

$$= \sum_{l=0}^{2} \hat{P}_l^T \hat{X}^{\alpha_l} \hat{P}_l$$

$$= \hat{P}_0^T \hat{P}_0 + \hat{P}_1^T X \hat{P}_1 + \hat{P}_2^T X^2 \hat{P}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4X^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X + 4X^2 \end{pmatrix}$$

Sehingga solusi untuk persamaan matriks nonliner

$$X = Q \hat{X} Q^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X + 4X^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X + 4X^2 & -X - 4X^2 \\ -X - 4X^2 & X + 4X^2 \end{pmatrix}$$

atau solusi dari X dapat ditulis berbentuk

$$= \begin{pmatrix} 4X^2 + X & -4X^2 - X \\ -4X^2 - X & 4X^2 + X \end{pmatrix}$$

Jadi persamaan $X = Q \hat{X} Q^T$ merupakan solusi matriks semidefinit positif yang dibentuk dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$

Teorema 3.1.6

Persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ mempunyai solusi trivial $X = 0$ jika dan hanya jika terdapat matriks orthogonal Q dan matriks segitiga atas U_l, $0 \le l \le k-1$ sedemikian sehingga $P_l = Q U_l Q^T$, $0 \le l \le k-1$

Bukti :

Dengan induksi Matematika dalam *s*, untuk ukuran matriks *C*.

$\Rightarrow$

- *Untuk s = 1*

  Karena $X = 0$ maka $P_l = 0$, $0 \le l \le k-1$, dengan demikian $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ mempunyai sebuah solusi trivial. *Jadi benar untuk s=1*

- *Asumsikan benar untuk s = t-1. Akan dibuktikan juga benar untuk s = t.*

  Dari teorema 3.1.5 terdapat matriks orthogonal Q dan matriks $\hat{P}_l$, dan $\overline{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{X}^{\alpha_l} \overline{P}_l$ mempunyai solusi trivial yang dibentuk dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$. Menurut induksi matematika untuk $s = t$-1 terdapat matriks orthogonal $\overline{Q}$ $(t\text{-}1)$ x $(t\text{-}1)$ sedemikian hingga $\overline{P}_l = \overline{Q}\,\overline{U}_l \overline{Q}^T$, $0 \le l \le k-1$ dimana $\overline{U}_l$ adalah matriks segitiga atas

$$
\begin{aligned}
P_l &= Q\hat{P}_l Q^T \\
&= Q\begin{pmatrix} 0 & P_l^* \\ 0 & \overline{P}_l \end{pmatrix} Q^T \\
&= Q\begin{pmatrix} 0 & P_l^* \\ 0 & \overline{Q}\,\overline{U}_l\overline{Q}^T \end{pmatrix} Q^T \\
&= Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{Q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & P_l^* \\ 0 & \overline{U}_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{Q}^T \end{pmatrix} Q^T
\end{aligned}
$$

Jadi asumsi ini juga benar untuk ukuran matriks $s=t$ (Syarat perlu terbukti).

⇐

❖ *Untuk s = 1*

Terdapat matriks orthogonal Q dan matriks segitiga atas U_l sehingga $P_l = QU_lQ^T$, $0 \le l \le k-1$.Hal ini berarti $P_l = 0$, $\forall\ 0 \le l \le k-1$. Akibatnya persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ mempunyai solusi trivial(X=0). *Jadi benar untuk s=1*

❖ *Asumsikan benar untuk s = t-1 akan dibuktikan juga benar* untuk $s = t$.

Misal $P_l = QU_lQ^T$, $0 \le l \le k-1$. Jika X adalah solusi dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ kemudian $X = Q^T XQ$ merupakan solusi yang dibentuk dari persamaan $\hat{X} = \sum_{l=0}^{k-1} U_l^T \hat{X}^{\alpha_l} U_l$

Karena U_l adalah matriks segitiga atas, diperoleh

$$U_l = \begin{pmatrix} 0 & U_l^* \\ 0 & \overline{U}_l \end{pmatrix}, \quad 0 \le l \le k-1$$

dimana :

U_l^* adalah vektor kolom $(t - 1)$

$\overline{U_l}$ adalah matriks $(t - 1) \, x \, (t - 1)$

Selanjutnya,

$$\hat{X} = \sum_{l=0}^{k-1} U_l^T \hat{X}^{\alpha_l} U_l$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (U_l^*)^T & (\overline{U_l})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{X}^{\alpha_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & U_l^* \\ 0 & \overline{U_l} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{U_l}^T \, \overline{X}^{\alpha_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & U_l^* \\ 0 & \overline{U_l} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{U_l}^T \, \overline{X}^{\alpha_l} \overline{U_l} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{l=0}^{k-1} \overline{U_l}^T \, \overline{X}^{\alpha_l} \overline{U_l} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{X} \end{pmatrix}$$

dimana

$$\overline{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{U_l}^T \, \overline{X}^{\alpha_l} \overline{U_l} \tag{3.5}$$

Sehingga menurut asumsi untuk $s = t\text{-}1$ persamaan $\overline{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{U_l}^T \, \overline{X}^{\alpha_l} \overline{U_l}$ mempunyai solusi trivial. Akibatnya persamaan $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ juga mempunyai solusi trivial.

Teorema 3.1.7

Jika terdapat matriks orthogonal Q dan matriks diagonal $\Lambda_l = diag(\lambda_{l,1}, \cdots, \lambda_{l,s})$, $0 \le l \le k-1$ sedemikian sehingga $P_l = Q\Lambda_l Q^T$, $0 \le l \le k-1$ maka $X = Q\Lambda Q^T$ merupakan solusi dari $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$, dimana $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$

Bukti:

Karena terdapat matriks orthogonal Q dan matriks diagonal $\Lambda_l = diag(\lambda_{l,1}, \cdots, \lambda_{l,s})$, $0 \le l \le k-1$ sedemikian sehingga $P_l = Q\Lambda_l Q^T$ $0 \le l \le k-1$, maka dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ diperoleh solusi yang berbentuk:

$$
\begin{aligned}
X &= \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} \left(Q\Lambda_l Q^T\right)^T \left(Q\Lambda^{\alpha_l} Q^T\right)\left(Q\Lambda_l Q^T\right) \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} \left(Q^T \Lambda_l Q\right)\left(Q\Lambda^{\alpha_l} Q^T\right)\left(Q\Lambda_l Q^T\right) \\
&= Q \sum_{l=0}^{k-1} \Lambda_l \Lambda^{\alpha_l} \Lambda_l Q^T
\end{aligned}
$$

dimana

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{k-1}\Lambda_l\Lambda^{\alpha_l}\Lambda_l &= \sum_{l=0}^{k-1} diag\,(\lambda_{l,1}\,,\cdots,\lambda_{l,s})\; diag\left(\lambda_1^{\alpha_l}\,,\cdots,\lambda_s^{\alpha_l}\right) diag\left(\lambda_{l,1}\,,\cdots,\lambda_{l,s}\right)\\
&= \sum_{l=0}^{k-1} diag\left(\lambda_{l,1}^2\,,\cdots,\lambda_{l,s}^2\right) diag\left(\lambda_1^{\alpha_l}\,,\cdots,\lambda_s^{\alpha_l}\right)\\
&= diag\left(\sum_{l=0}^{k-1}\lambda_{l,1}^2\,\lambda_1^{\alpha_l}\,,\cdots,\sum_{l=0}^{k-1}\lambda_{l,s}^2\,\lambda_s^{\alpha_l}\right)\\
&= diag\left(\lambda_1\,,\cdots,\lambda_s\right) = \Lambda
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh solusi

$$X = Q\Lambda Q^T$$

Jadi $X = Q\Lambda Q^T$ merupakan solusi yang dibentuk dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$.

3.2 Ketunggalan Solusi Nontrivial dari Persamaan Matriks Nonlinear

Untuk membahas ketunggalan solusi dari persamaan $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$, akan dipertimbangkan sebuah bentuk relasi rekursif untuk barisan matriks yang diperoleh dari persamaan matriks nonlinear

$$X_{n+k} = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X_{n+l}^{\alpha_l} P_l\,, \quad n \geq 0 \tag{3.6}$$

dimana $X_0\,, X_1\,,\cdots, X_{k-1}$ adalah matriks definit positif awal.

Teorema 3.2.1

Jika $C = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T P_l$ adalah definit positif, kemudian matriks definit positif awal $X_i > 0$, $0 \le i \le k-1$ maka barisan matriks $\{X_i : i \ge 1\}$ konvergen ke $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ akibatnya solusi dari persamaan $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ adalah tunggal.

Bukti:

Menurut teorema 3.1.2, persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ mempunyai solusi matriks definit positif $X > 0$. Oleh karena itu, terdapat bilangan positif $0 < a_0 \le 1$ dan $a_1 \ge 1$ sehingga matriks awal akan membentuk ketidaksamaan berikut

$$a_0 X \le X_i \le a_1 X, \quad 0 \le i \le k-1 \tag{3.7}$$

Misal $\alpha = \max\{|\alpha_i|, 0 \le i \le k-1\}$, $n = mk + r$, $0 \le r < k$ dan m adalah bilangan bulat positif. Akan dibuktikan ketidaksamaan berikut:

$$(a_0)^{\alpha^m} X \le X_n \le (a_1)^{\alpha^m} X, \quad 0 \le r < k \tag{3.8}$$

Dengan menggunakan limit untuk $m \to \infty$ untuk ketidaksamaan (3.8) diperoleh

$$\lim_{m \to \infty} \alpha^m = 0 \text{ dimana } 0 \le \alpha < 1$$

$$\lim_{m \to \infty} (a_0)^{\alpha^m} = 1 \text{, mengakibatkan } \lim_{m \to \infty} (a_0)^{\alpha^m} X = X$$

$$\lim_{m \to \infty} (a_1)^{\alpha^m} = 1 \text{, mengakibatkan } \lim_{m \to \infty} (a_1)^{\alpha^m} X = X$$

Untuk barisan matriks $\{X_n : n \ge 1\}$ diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X$$

Hal ini berarti solusi matriks definit positif dari persamaan matriks

nonlinear $X = \sum_{i=0}^{k-1} P_i^T X^{\alpha_i} P_i$ adalah tunggal karena limit dari barisan

matriks $\{X_n : n \geq 1\}$ adalah tunggal.

Bukti lengkap diperoleh dengan melalui pembuktian ketidaksamaan (3.8). Ketidaksamaan (3.8) dibuktikan dengan induksi matematika sebagai berikut :

- Untuk m=0

  Karena m=0 maka dari ketidaksamaan $(a_0)^{\alpha^m} X \leq X_n \leq (a_1)^{\alpha^m} X$, $0 \leq r < k$ serupa dengan $a_0 X \leq X_i \leq a_1 X$, $0 \leq i \leq k-1$ untuk barisan matriks $\{X_i : i \geq 1\}$ (benar)

- Asumsikan benar untuk $m = p$-1

  Karena $n = mk + r$, $0 \leq r < k$ maka $n = (p-1)k + r$, $0 \leq r < k$ sehingga

$$(a_1)^{\alpha^{p-1}} X \geq X_n \geq (a_0)^{\alpha^{p-1}} X, \ 0 \leq r < k \qquad (3.9)$$

Akan dibuktikan benar juga *untuk* $m = p$.

Kasus I

Jika $\alpha_i \geq 0$, maka $X_{(p-1)k+1}^{\alpha_i} \geq (a_0)^{\alpha^{p-1}\alpha_i} X^{\alpha_i}$ dan jika $\alpha_i < 0$, maka

$X_{(p-1)k+1}^{\alpha_i} \geq \left((a_1)^{\alpha^{p-1}} X\right)^{\alpha_i} = (a_0)^{\alpha^{p-1}|\alpha_i|} X^{\alpha_i}$ karena $a_1 = a_0^{-1}$

Selanjutnya dari ketidaksamaan (3.9) untuk $r = 0$, diperoleh

$$X_{pk} = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X_{(p-1)k+1}^{\alpha_l} P_l$$

$$\geq \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T (a_0)^{\alpha^{p-1}|\alpha_l|} X^{\alpha_l} P_l$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} (a_0)^{|\alpha_l|\alpha^{p-1}} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$\geq (a_1)^{\alpha^{p-1}\alpha} \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$\geq (a_0)^{\alpha^p} \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$= (a_0)^{\alpha^p} X$$

Karena $a_0 \leq 1,\ \ \alpha_l \leq \alpha,\ \ 0 \leq l < k$ dan X adalah solusi matriks definit positif

dari persamaan $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$

Selanjutnya dengan menggunakan $X_{pk} \geq (a_0)^{\alpha^p} X$ untuk $r = 1$ diperoleh

$$X_{pk+1} = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X_{(p-1)k+l+1}^{\alpha_l} P_l$$

$$= \sum_{l=0}^{k-2} P_l^T X_{(p-1)k+l+1}^{\alpha_l} P_l + P_{k-1}^T X_{(p-1)k+(k-1)+1}^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-2} P_l^T X_{(p-1)k+l+1}^{\alpha_l} P_l + P_{k-1}^T X_{pk}^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\geq \sum_{l=0}^{k-2} P_l^T (a_0)^{\alpha^{p-1}|\alpha_l|} X^{\alpha_l} P_l + P_{k-1}^T (a_0)^{\alpha^p|\alpha_{k-1}|} X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-2} (a_0)^{|\alpha_l|\alpha^{p-1}} P_l^T X^{\alpha_l} P_l + (a_0)^{|\alpha_{k-1}|\alpha^p} P_{k-1}^T X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\geq (a_0)^{\alpha^p} \sum_{l=0}^{k-2} P_l^T X^{\alpha_l} P_l + P_{k-1}^T X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\geq (a_0)^{\alpha^p} \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$= (a_0)^{\alpha^p} X$$

Karena $a_0^{|\alpha_{k-1}|\,\alpha^p} \geq (a_0)^{\alpha^p}$

Selanjutnya dengan menggunakan $X_{pk} \geq (a_0)^{\alpha^p} X$ dan $X_{pk+1} \geq (a_0)^{\alpha^p} X$ dan

untuk $r = 2$ diperoleh

$$X_{pk+2} = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X_{(p-1)k+l+2}^{\alpha_l} P_l$$

$$= \sum_{l=0}^{k-3} P_l^T X_{(p-1)k+l+2}^{\alpha_l} P_l + P_{k-2}^T X_{(p-1)k+(k-2)+1}^{\alpha_{k-2}} P_{k-2}$$
$$+ P_{k-1}^T X_{(p-1)k+(k-1)+1}^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-3} P_l^T X_{(p-1)k+l+2}^{\alpha_l} P_l + P_{k-2}^T X_{pk-1}^{\alpha_{k-2}} P_{k-2}$$
$$+ P_{k-1}^T X_{pk}^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\geq \sum_{l=0}^{k-3} P_l^T (a_0)^{\alpha^{p-1}|\alpha_l|} X^{\alpha_l} P_l + P_{k-2}^T (a_0)^{\alpha^p|\alpha_{k-2}|} X^{\alpha_{k-2}} P_{k-2}$$
$$+ P_{k-1}^T (a_0)^{\alpha^p|\alpha_{k-1}|} X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-3} (a_0)^{|\alpha_l|\,\alpha^{p-1}} P_l^T X^{\alpha_l} P_l + (a_0)^{|\alpha_{k-2}|\,\alpha^p} P_{k-2}^T X^{\alpha_{k-2}} P_{k-2}$$
$$+ (a_0)^{|\alpha_{k-1}|\,\alpha^p} P_{k-1}^T X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\geq (a_0)^{\alpha^p} \sum_{l=0}^{k-3} P_l^T X^{\alpha_l} P_l + P_{k-2}^T X^{\alpha_{k-2}} P_{k-2}$$
$$+ P_{k-1}^T X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\geq (a_0)^{\alpha^p} \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$= (a_0)^{\alpha^p} X$$

Karena $a_0^{|\alpha_{k-1}|\,\alpha^p} \geq (a_0)^{\alpha^p}$ dan $a_0^{|\alpha_{k-2}|\,\alpha^p} \geq (a_0)^{\alpha^p}$

Jika dilakukan dengan cara yang sama maka untuk kasus I diperoleh bentuk umum sebagai berikut :

$$X_{pk+r} \geq (a_0)^{\alpha^p} X\,, \quad 0 \leq r < k$$

Kasus II

Jika $\alpha_l \geq 0$, maka $X_{(p-1)k+1}^{\alpha_l} \leq (a_1)^{\alpha^{p-1}\alpha_l} X^{\alpha_l}$ dan jika $\alpha_l < 0$, maka $X_{(p-1)k+1}^{\alpha_l} \leq \left((a_0)^{\alpha^{p-1}} X\right)^{\alpha_l} = (a_1)^{\alpha^{p-1}|\alpha_l|} X^{\alpha_l}$ karena $a_1 = a_0^{-1}$

Selanjutnya dari ketidaksamaan (3.9) untuk $r = 0$, diperoleh

$$X_{pk} = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X_{(p-1)k+1}^{\alpha_l} P_l$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T (a_1)^{\alpha^{p-1}|\alpha_l|} X^{\alpha_l} P_l$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} (a_1)^{|\alpha_l|\,\alpha^{p-1}} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$\leq (a_1)^{\alpha^{p-1}\alpha} \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$\leq (a_1)^{\alpha^p} \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$= (a_1)^{\alpha^p} X$$

Karena $a_1 \le 1$, $\alpha_l \le \alpha$, $0 \le l < k$ dan X adalah solusi matriks definit positif

dari persamaan $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$

Selanjutnya dengan menggunakan $X_{pk} \le (a_1)^{\alpha^r} X$ untuk $r = 1$ diperoleh

$$X_{pk+1} = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X_{(p-1)k+l+1}^{\alpha_l} P_l$$

$$= \sum_{l=0}^{k-2} P_l^T X_{(p-1)k+l+1}^{\alpha_l} P_l + P_{k-1}^T X_{(p-1)k+(k-1)+1}^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-2} P_l^T X_{(p-1)k+l+1}^{\alpha_l} P_l + P_{k-1}^T X_{pk}^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\le \sum_{l=0}^{k-2} P_l^T (a_1)^{\alpha^{p-1}|\alpha_l|} X^{\alpha_l} P_l + P_{k-1}^T (a_1)^{\alpha^p|\alpha_{k-1}|} X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-2} (a_1)^{|\alpha_l|\alpha^{p-1}} P_l^T X^{\alpha_l} P_l + (a_1)^{|\alpha_{k-1}|\alpha^p} P_{k-1}^T X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\le (a_1)^{\alpha^r} \sum_{l=0}^{k-2} P_l^T X^{\alpha_l} P_l + P_{k-1}^T X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\le (a_1)^{\alpha^r} \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$= (a_1)^{\alpha^r} X$$

Karena $a_1^{|\alpha_{k-1}|\alpha^p} \le (a_1)^{\alpha^p}$

Selanjutnya dengan menggunakan $X_{pk} \le (a_1)^{\alpha^r} X$ dan $X_{pk+1} \ge (a_1)^{\alpha^r} X$ dan

Untuk r=2 diperoleh:

$$X_{pk+2} = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X_{(p-1)k+l+2}^{\alpha_l} P_l$$

$$= \sum_{l=0}^{k-3} P_l^T X_{(p-1)k+l+2}^{\alpha_l} P_l + P_{k-2}^T X_{(p-1)k+(k-2)+1}^{\alpha_{k-2}} P_{k-2}$$
$$+ P_{k-1}^T X_{(p-1)k+(k-1)+1}^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-3} P_l^T X_{(p-1)k+l+2}^{\alpha_l} P_l + P_{k-2}^T X_{pk-1}^{\alpha_{k-2}} P_{k-2}$$
$$+ P_{k-1}^T X_{pk}^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k-3} P_l^T (a_1)^{\alpha^{p-1}|\alpha_l|} X^{\alpha_l} P_l + P_{k-2}^T (a_1)^{\alpha^p|\alpha_{k-2}|} X^{\alpha_{k-2}} P_{k-2}$$
$$+ P_{k-1}^T (a_1)^{\alpha^p|\alpha_{k-1}|} X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{k-3} (a_1)^{|\alpha_l|\,\alpha^{p-1}} P_l^T X^{\alpha_l} P_l + (a_1)^{|\alpha_{k-2}|\,\alpha^p} P_{k-2}^T X^{\alpha_{k-2}} P_{k-2}$$
$$+ (a_1)^{|\alpha_{k-1}|\,\alpha^p} P_{k-1}^T X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\leq (a_1)^{\alpha^p} \sum_{l=0}^{k-3} P_l^T X^{\alpha_l} P_l + P_{k-2}^T X^{\alpha_{k-2}} P_{k-2}$$
$$+ P_{k-1}^T X^{\alpha_{k-1}} P_{k-1}$$

$$\leq (a_1)^{\alpha^p} \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$$

$$= (a_1)^{\alpha^p} X$$

Karena $a_0^{|\alpha_{k-1}|\,\alpha^p} \geq (a_0)^{\alpha^p}$ dan $a_0^{|\alpha_{k-2}|\,\alpha^p} \geq (a_0)^{\alpha^p}$

Jika dilakukan dengan cara yang sama maka untuk kasus II diperoleh bentuk umum sebagai berikut :

$$X_{pk+r} \leq (a_1)^{\alpha^p} X, \quad 0 \leq r < k$$

Ketidaksamaan (3.8) terbukti, mengakibatkan solusi matriks definit positif dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$ adalah tunggal karena limit dari barisan matriks juga tunggal.

Teorema 3.2.2

Jika $\overline{C} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{P}_l$ adalah definit positif, kemudian matriks definit positif awal $\hat{X}_i > 0$, $0 \le i \le k-1$ maka barisan matriks $\{X_i : i \ge 1\}$ konvergen ke

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{X} \end{pmatrix}$$

dimana $\overline{X}$ merupakan solusi matriks definit positif dari persamaan

$$\overline{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{X}^{\alpha_l} \overline{P}_l \tag{3.10}$$

Bukti:

$\overline{C} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{P}_l$ adalah definit positif, dari bentuk teorema 3.1.6 terdapat sebuah matriks orthogonal Q sedemikian hingga

$$\hat{P}_l = \begin{pmatrix} U_l & V_l \\ 0 & \overline{P}_l \end{pmatrix}, \quad 0 \le l \le k-1$$

Dimana $P_l = Q \hat{P}_l Q^T$, $0 \le l \le k-1$, U_l adalah matriks segitiga atas *r x r* dan V_l adalah matriks *r x (s-r)*.

Misalkan dibangun barisan matriks

$$\hat{X}_{n+k} = \sum_{l=0}^{k-1} \hat{P}_l^T \hat{X}_{n+l}^{\alpha_l} \hat{P}_l, \quad n \geq 0$$

dimana untuk barisan matriks $\{X_i : i \geq 1\}$ yang dibentuk dari relasi rekursif

$\hat{X}_{n+k}$ diperoleh hubungan berikut

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{n+k} &= \sum_{l=0}^{k-1} \hat{P}_l^T \hat{X}_{n+l}^{\alpha_l} \hat{P}_l \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} \begin{pmatrix} U_l^T & 0 \\ V_l^T & \overline{P}_l^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{X}_{n+l} \end{pmatrix}^{\alpha_l} \begin{pmatrix} U_l & V_l \\ 0 & \overline{P}_l \end{pmatrix} \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} \begin{pmatrix} U_l^T & 0 \\ V_l^T & \overline{P}_l^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{X}_{n+l}^{\alpha_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_l & V_l \\ 0 & \overline{P}_l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{X}_{n+l}^{\alpha_l} \overline{P}_l \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\overline{X}_{n+k} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{X}_{n+l}^{\alpha_l} \overline{P}_l$$

Karena $\overline{C} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{P}_l$ adalah matriks definit positif, maka menurut teorema 3.2.1 barisan matriks $\{\overline{X}_n\}$konvergen ke $\overline{X}$. Dengan kata lain bahwa untuk barisan matriks $\{X_i : i \geq 1\}$yang dibentuk dari relasi rekursif akan konvergen ke

$$\hat{X}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{X}_i \end{pmatrix}$$

BAB IV

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa

1. Persamaan matriks nonlinear yang dibentuk dari matriks definit positif dan matriks semidefinit positif mempunyai solusi:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{X} \end{pmatrix}$$

Dimana $\overline{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{X}^{\alpha_l} \overline{P}_l$ juga merupakan solusi yang dibangun oleh persamaan matriks $X = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X^{\alpha_l} P_l$

2. Untuk setiap matriks definit positif awal $X_i > 0$, barisan matriks $\{X_i : i \geq 1\}$ yang didefinisikan oleh $X_{n+k} = \sum_{l=0}^{k-1} P_l^T X_{n+l}^{\alpha_l} P_l$, $\quad n \geq 0$

konvergen ke

$$X = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{X} \end{pmatrix} Q^T$$

Dimana $\overline{X}$ adalah solusi matriks definit positif tunggal dari $\overline{X} = \sum_{l=0}^{k-1} \overline{P}_l^T \overline{X}^{\alpha_l} \overline{P}_l$

3. Karena limit dari barisan matriks $\{X_i : i \geq 1\}$ adalah tunggal maka solusi nontrivial dari persamaan matriks nonlinear $X = \sum_{i=0}^{k-1} P_i^T X^{\alpha_i} P_i$ yang dibentuk dari matriks definit positif dan matriks semidefinit positif seperti pada teorema 3.1.2 dan 3.1.5 adalah tunggal.

B. SARAN

Dalam penulisan skripsi ini penulis sampai pada tahap pembuktian keberadaan dan ketunggalan solusi dari persamaan matriks nonlinear yang dibangun dari bentuk matriks positif definit dan matriks positif semidefinit. Dalam kasus lain apakah persamaan $X = \sum_{i=0}^{k-1} P_i^T X^{\alpha_i} P_i$ masih mempunyai solusi dan solusi yang dibentuk itu tunggal untuk kasus matriks negatif definit dan negatif semidefinit Oleh karena itu, tulisan ini dapat dikembangkan dalam beberapa kasus diantaranya matriks definit negatif dan semidefinit negatif.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2002. ***Dasar-dasar Aljabar Linear. Edisi Ketujuh, Jilid II.*** Erlangga, Jakarta.

Gibson, Frank., Umoh, Hanson., Liu Fengshan., Shi, Xiquan. 2001. ***Two Kinds of Nonlinear Matrix Equations and their Corresponding Matrix Sequences.*** AMS.

Leon J. Steven. 2001. ***Aljabar Linear dan Aplikasinya.*** Erlangga, Jakarta.

Slamet, Sumantri., Hendrik, Makaliwe. 1991. ***Matematika Kombinatorik.*** PT. Elex Media Komputindo Kelompok Gramedia, Jakarta.

Supranto, J.M.A. 1974. ***Pengantar Matrix.*** Lembaga Penerbit Fakultas Ekonimi Universitas Indonesia, Jakarta.