MASALAH NILAI PRIBADI PADA SUATU OPERATOR DAN PENGGUNAANNYA DALAM MEKANIKA KUANTUM

MANSYUR GANI

8 1 0 3 0 1 7

FAKULTAS
MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

1987

T E S I S

MANSYUR GANI

8 1 0 3 0 1 7

F A K U L T A S

MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

1987

MASALAH NILAI PRIBADI PADA SUATU OPERATOR DAN PENGGUNAANNYA DALAM MEKANIKA KUANTUM

TESIS

Untuk melengkapi tugas-tugas dan memenuhi syarat-syarat untuk mencapai gelar sarjana matematika

MANSYUR GANI

8 1 0 3 0 1 7

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

1987

MASALAH NILAI PRIBADI PADA SUATU
OPERATOR DAN PENGGUNAANNYA DALAM
MEKANIKA KUANTUM

Disetujui oleh :

Pembimbing utama

(Dra. Nurul Muchlisah, MS.)

Pembimbing Pertama

(Drs. H.A. Renreng)

Pembimbing kedua

(Dra. Dewi Pabittei)

Pada tanggal 5 Februari 1988

ABSTRAK

Suatu uraian mengenai masalah nilai pribadi suatu operator dan penggunaannya dalam mekanika kuantum telah dibahas.

Secara teori kuantum, setiap besaran fisis memperoleh sajian sebagai operator yang bekerja pada fungsi gelombang yang berperan sebagai basis dalam ruang Hilbert.

Nilai pribadi operator sebagai besaran yang terukur secara fisis memperoleh sajian sebagai besaran <u>tercatu</u> (quantized) di mana di dalamnya terpaut tetapan Plank $\hbar$.

KATA PENGANTAR

Syukur dan puji penulis panjatkan kehadirat Allah Subhanah Wataala, karena Rahmat-Nya jualah sehingga penulisan tesis ini dapat terselesaikan untuk memenuhi salah satu syarat dalam penyelesaian program sarjana pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Ujung Pandang.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang tulus ikhlas kepada :
Ibu Dra. Nurul Muchlisah MS. sebagai pembimbing utama yang telah memberikan pengarahan dan nasehat serta bimbi- ngan kepada penulis dalam penyusunan dan penyelesaian te- sis ini, juga kepada bapak Drs. H.A. Renreng sebagai pembimbing pertama yang selalu membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan dan penyelesaian tesis ini, de- mikian pula kepada Ibu Dra. Dewi Pabittei sebagai pembim- bing kedua yang juga membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan dan penyelesaian tesis ini.

Ucapan terima kasih yang sama penulis haturkan kepada segenap staf pengajar Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada umumnya dan jurusan Matematika pada khususnya yang telah membina dan mendidik penulis dalam penyelesaian program studi, dan tak lupa penulis haturkan terima kasih kepada Ayahanda dan Ibunda penulis serta segenap sanak keluarga yang senantiasa memberi bantuan materil maupun moril sehingga segala sesuatunya dapat berjalan dengan lancar.

DAFTAR ISI

B A B I

P E N D A H U L U A N

I.1. Latar belakang

Dalam mekanika kuantum, besaran-besaran dinamis seperti momentum, tenaga dan momentum sudut memperoleh sajian sebagai operator yang bekerja terhadap fungsi-fungsi gelombang yang merupakan basis dalam ruang Hilbert.

Adapun besaran terukur dalam pengamatan experimental ialah nilai pribadi dari pada operator yang bersangkutan; di mana setiap nilai pribadi bersangkutan dengan suatu fungsi pribadi yang lazim juga disebut sebagai vektor pribadi dalam ruang Hilbert yang berperan sebagai basis.

Dengan demikian, masalah dasar dalam mekanika kuantum adalah menemukan nilai pribadi sajian operator dari setiap besaran fisis, karena nilai pribadi-pribadi itulah yang merupakan besaran yang terukur dalam pengamatan experimental.

Tentu saja masalah-masalah fisika pada daerah makroskopis, tidak perlu besaran-besaran fisis yang bersangkutan disajikan sebagai operator. Ini disebabkan, karena pada daerah skala makroskopis besaran-besaran bersifat malar. Dalam hubungan ini, lazimnya pada nilai pribadi suatu operator dari suatu besaran fisis terpaut adanya bilangan kuantum dan tetapan Plank h yang sangat kecil ($h \approx 6,63 \times 10^{-27}$ erg detik). Karena kecilnya tetapan Plank, untuk dapat memberikan hubungan dengan besaran makroskopis maka besaran terkuantisasi yang bersangkutan berkaitan dengan bilangan kuantum yang sangat besar. Mengingat besarnya angka bilangan kuantum pada daerah makroskopis, maka antara besaran kuantum yang berdekatan bilangan kuantumnya sudah sulit dipisahkan dan mereka satu sama lain hampir berhimpitan, sehingga dalam pengamatan tampak seperti dalam keadaan malar (continu). Demikianlah gambaran fisis hubungan antara besaran mikroskopis yang terkuantisasi (quatized= tercatu).

Pokok-pokok pikiran yang disebutkan diatas, dalam uraian-uraian selanjutnya akan dirumuskan secara kuantitatip dengan memanfaatkan teori-teori matematika yang bersangkutan dengan masalah nilai pribadi suatu operator.

I.2. Tujuan Pembahasan

1. Menyajikan dasar-dasar teori operator dan pemakaiannya dalam mekanika kuantum.
2. Merumuskan sajian operator besaran-besaran fisis dalam mekanika kuantum.
3. Menyajikan contoh-contoh perhitungan nilai pribadi suatu operator besaran fisis dengan metode aljabar.

I.3. Ruang Lingkup Permasalahan

Menyajikan perumusan matematika yang baku terhadap kenyataan-kenyataan empiris yang melandasi mekanika kuantum. Hal ini meliputi penyajian dasar-dasar teori operator dalam ruang Hilbert, sajian operator besaran-besaran fisis dalam mekanika kuantum dan metode penghitungan nilai pribadi operator yang bersangkutan dengan metode aljabar.

Untuk itu dikembangkan cara-cara men-diagonalisasi operator-operator fisis tertentu yang pada hakekatnya adalah merupakan generator dari suatu sajian grup Lie dari teori grup malar. Dan karena itu disajika pula uraian elementer mengenai teori grup Lie; khususnya yang bersangkutan dengan grup O(3) dan SU(2).

I.4. Sistematika bahasan ini meliputi,

Bab I. Pendahuluan

Dalam bab ini dibahas :

1. Latar belakang
2. Tujuan pembahasan
3. Ruang lingkup permasalahan
4. Sistematika penulisan

Bab II. Dasar-dasar matematis teori Operator

Dalam bab ini dibahas :

1. Ruang vektor Hilbert

2. Nilai pribadi operator Hermitian dalam ruang Hilbert
3. Sajian operator besaran-besaran fisis dalam mekanika kuantum.

Bab III. Beberapa contoh penghitungan nilai pribadi dalam mekanika kuantum.

Dalam bab ini dibahas :

1. Sajian komutasi Operator momentum sudut dan penghitungan nilai pribadinya
2. Penghitungan nilai pribadi tenaga atom Hidrogen
3. Penghitungan nilai pribadi oscilator isotrop dimensi-tiga.

II. DASAR-DASAR MATEMATIKA TEORI OPERATOR

II.1. Ruang vektor Hilbert

Untuk memberi landasan kearah perumusan matematis teori operator, maka sebelumnya perlu disajikan konsep dasar apa yang dinamakan ruang vektor Hilbert. Sebagai langkah awal ke arah perumusan ruang Hilbert itu, maka terlebih dahulu perlu di definisikan pengertian ruang vektor pada umumnya. Dalam hubungan ini ruang vektor tiada lain dari pada himpunan vektor-vektor yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Misalkan ruang vektor yang dimaksud ditandai dengan R yang dimensinya sembarang, dan misalkan terdapat vekter-vektor f_1, f_2, f_3 sebagai anggota dari R, maka aksioma-aksioma yang dimaksud didefinisikan memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

A) Terhadap penjumlahan

1) $(f_1 + f_2) \in R$ yang melukiskan sifat ketertutupan (closure); sedang lambang $\in$ menyatakan " anggota dari".
2) $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$, $\forall f_1, f_2 \in R$; yang melukiskan sifat komutatifitas (comutatifity) ; dengan lambang $\forall$ menyatakan "untuk semua".
3) $\exists (-f_1) \in R \ni f_1 + (-f_1) = 0$;
di mana $-f_1$ menyatakan invers f_1; sedang lambang $\exists$ menyatakan "terdapat" dan lambang $\ni$ menyatakan "sedemikian sehingga".

4) $\exists\, 0 \in R \ni f_1 + 0 = 0 + f_1 = f_1 \;\; \forall\, f_1 \in R$; di mana 0 menyatakan anggota identitas.

5) $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3) \;\forall\, f_1, f_2, f_3 \in R$ yang melukiskan sifat kesekawanan(assosiativic).

B) Terhadap perkalian

1). $\exists$ skalar $\alpha, \beta \ni \alpha f_1 \in R, \;\; \forall\, f_1 \in R$

2). $\alpha(f_1 + f_2) = \alpha f_1 + \alpha f_2\,, \;\; \forall\, f_1,\, f_2 \in R$, yang melukiskan sifat ke-linearan (linearity).

3). $\exists$ skalar $\alpha, \beta \ni \;\; (\alpha + \beta)\, f_1 = \alpha f_1 + \beta f_1, \;\forall\, f_1 \in R$, yang melukiskan sifat distributif

4). $\alpha(\beta f_1) = (\alpha\beta)\, f_1\,, \;\forall\, f_1 \in R$; yang melukiskan sifat kesekawanan.

5). $\exists$ 1 anggota skalar $\ni 1.f_1 = f_1$ dan

$\exists\, 0 \ni 0.f_1 = 0, \;\; \forall\, f_1 \in R.$

Sekarang kita tinjau penerapan aksioma-aksioma yang telah dikemukakan. Yang pertama kita tinjau ialah pengertian kombinasi linear vektor-vektor.

Definisi 1. Bila terdapat $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots\ldots, f_n \in R$ dan skalar $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_m$, maka $\sum_{i=1}^{m} a_i f_i$ ....(2.1) disebut kombinasi linear dari $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots\ldots f_n$.

Bertolak dari definisi 1 di atas, berikut ini di definisikan pula pengertian apa yang dinamakan vektor-vektor yang <u>bebas linear</u>(independent linear) satu sama lain.

Definisi 2. Himpunan vektor-vektor $f_1, f_2, \ldots, f_n \in R$ dikatakan bebas linear satu sama lain bila kombinasi linear $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$ maka diperoleh semua $a_i = 0$. ....(2.2)

Akibat dari definisi 2 diatas, bila terdapat $a_i \neq 0$ yang memenuhi persamaan (2.2), maka vektor-vektor $f_1, f_2, \ldots f_n$ disebut bergantungan linear. Selain sifat tersebut, bila suatu vektor yang bergantungan terhadap vektor-vektor yang lain, maka vektor yang bersangkutan akan merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Hal ini dapat diperlihatkan dengan meninjau kembali kombinasi linear

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

Dalam hal ini misalkan $a_k \neq 0$, $k \leq n$, maka,

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots\ldots a_{k-1} f_{k-1} + a_k f_k + a_{k+1} f_{k+1} + \ldots\ldots a_n f_n = 0$$

atau $a_k f_k = -(a_1 f_1 + \ldots\ldots + a_{k-1} f_{k-1} + a_{k+1} f_{k+1} + \ldots\ldots a_n f_n)$

sehingga, $f_n = -\left(\frac{a_1}{a_k} f_1 + \ldots \frac{a_{k-1}}{a_k} f_{k-1} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{a_k} f_n\right)$

Suatu ruang vektor R disebut berdimensi-n, jika

R memuat maksimum n vektor yang bebas linear dan mem - bentang ruang vektor yang bersangkutan. Akibatnya, jika terdapat lebih dari n vektor dalam R, maka di antara vektor-vektor tersebut akan bergantungan linear satu sama lain. Sehubungan dengan itu, vektor-vektor yang bebas satu sama lain dan membentang ruang, selanjutnya berperan sebagai basis ruang yang ditinjau.

Definisi 3. Jika suatu ruang vektor mempunyai tak hingga banyak anggota yang bebas linear dan membentang ruang vektor, maka ruang yang bersang - kutan dikatakan dimensinya tak hingga.

Selanjutnya setiap vektor dalam ruang dapat disusun atas komponen-komponennya sebagai,

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \xi_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

di mana f_i menyatakan sebagai komponen f terhadap basis ξ_i karena peranannya sebagai basis itu, maka diantara semua ξ_i jelas haruslah bersifat bebas linear satu sama lain (dalam hal ini ξ_i mengganti peranan f_i pada persamaan .....(2.2)).

Yang menarik untuk dicatat di sini, kita dapat berpindah dari satu himpunan basis $\{\xi_i\}$ ke himpunan ba - sis lain $\{\xi'_j\}$ tanpa mengubah keadaan vektor f. ini ditandai melalui pernyataan ,

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \xi_i = \sum_{j=1}^{n} f'_j \xi'_j \quad \text{..........(2.5)}$$

Supaya (2.5) terpenuhi, maka yang menjadi pertanyaan, bagaimana sifat transformasi yang menghubungkan antara $\{\xi_i\}$ dan $\{\xi'_j\}$. Transformasi itu secara timbal balik diberikan oleh,

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} \xi'_j \quad \text{................(2.6a)}$$

$$\xi'_j = \sum_{k=1}^{n} R_{jk} \xi_k \quad \text{...............(2.6b)}$$

berdasarkan pernyataan (2.6) ini, maka kita dapat menuliskan,

$$\xi_i = \sum_j \sum_k R'_{ij} R_{jk} \xi_k = \sum_k (\sum_j R'_{ij} R_{jk}) \xi_k =$$

$$= \sum_k \delta_{ik} \xi_k = \xi_i.$$

di mana δ_{ik} menyatakan lambang kronecker, dengan demikian kita dapatkan,

$$\sum_j R'_{ij} R_{jk} = \delta_{ik} ; \quad \text{......................(2.7)}$$

di mana $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ untuk } i = k \\ 0 \text{ untuk } i \neq k. \end{cases}$

Setelah diperkenalkan pengertian mengenai vektor-vektor yang bebas linear satu sama lain, maka untuk membangun suatu ruang vektor diperlukan adanya basis-basis yang membentang ruang vektor itu. Basis-basis itu diperlukan, karena vektor-vektor yang tidak bebas linear dalam ruang itu merupakan kelipatan linear dari basis-basis yang dimaksud.

Kenyataan dari geometri ruang dimensi tiga menunjukkan bahwa didalamnya terdapat tiga basis yang bebas satu sama lain, dengan demikian, jika pokok pikiran itu dikembangkan untuk ruang abstrak berdimensi-n, maka didalamnya juga akan terdapat n buah basis; bahkan ini dapat dikembangkan menjadi tak berhingga banyak basis untuk ruang yang berdimensi tak hingga pula. Jadi jika dalam suatu ruang berdimensi-n kita mempunyai himpunan basis-basis $\{f_i\}$, maka suatu vektor V yang bergantungan linear terhadap basis-basis ini akan dapat dinyatakan sebagai,

$$V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |f_i\rangle \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

dengan $\{\alpha_i\}$ merupakan himpunan skalar yang berperan sebagai faktor kelipatan linear yang bersangkutan.

Sekarang, terhadap adanya besaran skalar itu, maka dalam uraian berikut ini perlu didefinisikan mengenai pengertian <u>perkalian skalar</u> (skalar product) antara dua buah vektor dan Norm suatu vektor. Untuk keperluan ini pertama kali kita kenalkan lambang vektor bra dan vektor ket Dirac. Dalam hal ini misalkan terdapat vektor V dan W dalam ruang berdimensi-n; yang berarti V dan W mempunyai maksimum n komponen, maka ke dua vektor tersebut dinyatakan dalam lambang vektor ket Dirac akan diberikan oleh

$$|V\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \quad , \quad |W\rangle = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

Adapun dual bagi $|V\rangle$ dan $|W\rangle$ disajikan sebagai vektor bra Dirac yang diberikan oleh

$$\langle V| = (v_1 \;\; v_2 \cdots\cdots \;\; v_n)$$
$$\langle W| = (w_1 \;\; w_2 \cdots\cdots \;\; w_n) \qquad (2.10a)$$

dalam hal $\langle V|$ dan $\langle W|$ bersifat nyata (real), sedang bila bersifat kompleks akan disajikan oleh

$$\langle V| = (v_1^* \;\; v_2^* \cdots\cdots \;\; v_n^*) \; ,$$
$$\langle W| = (w_1^* \;\; w_2^* \cdots\cdots \;\; w_n^*) \; . \qquad (2.10b)$$

di mana tanda * menyatakan sekawan kompleks(komplx conjugate).

Dengan diperkenalkannya lambang vektor ket dan bra Dirac. Maka perkalian skalar antara vektor $|V\rangle$ dan $|W\rangle$ dalam ruang kompleks (untuk keperluan generalisasi) akan ditentukan berdasarkan definisi :

$$S = \langle V \mid W \rangle = (V_1^* \;\; v_2^* \;\ldots\ldots\ldots v_n^*) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$= v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + \ldots\ldots\ldots + v_n^* w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i^* w_i \quad (2.11)$$

di mana S menyatakan sebagai hasil kali skalar antara $| V \rangle$ dan $| W \rangle$.

Selanjutnya kita definisikan pula apa yang dinamakan Norm suatu vektor; misalkan vektor yang kita tinjau ialah V. Dalam hal ini norm V didefinisikan berdasarkan sangkutan

$$N(V) = |\langle V \mid V \rangle^{\frac{1}{2}}| < \infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.12)$$

Berdasarkan pengenalan-konsep-konsep diatas, (2.8) dapat dinyatakan dalam lambang vektor ket Dirac akan dapat di - tuliskan sebagai

$$| V \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i | f_i \rangle \; ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.13)$$

di mana $| f_i \rangle$ merupakan vektor basis dengan lambang vektor ket. Berdasarkan pengertian (2.13) ini, kitapun dapat mengekspansikan $| W \rangle$ sebagai,

$$| W \rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_j | f_j \rangle \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.14)$$

perkalian skalar antara V dan W sekarang dapat dinyatakan sebagai,

$$\langle V \mid W \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle f_i \mid f_j \rangle . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.15)$$

Berdasarkan hasil (2.11), jelas (2.15) akan lenyap jika $i \neq j$. Dalam hubungan ini adalah lebih menguntungkan jika $\{ | f_i \rangle \}$ dipilih sebagai basis ortonormal (yaitu satu sama lain ortogonal dengan norm 1(satu)). Ini berarti

$$\langle f_i \mid f_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{bila } i=j \\ 0 & \text{bila } i \neq j \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.16)$$

yang dikenal sebagai lambang Kronecker berdasarkan (2.16) maka segera diperoleh bahwa

$$\langle V \mid W \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \beta_i . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.17)$$

Dengan membandingkan antara hasil (2.11) dan (2.17) maka segera ditandai bahwa $\{\alpha_i\} = \{v_i\}$ dan $\{\beta_i\} = \{w_i\}$. ini berarti bahwa α_i pada (2.13) dan β_j pada (2,14) tiada lain dari pada menyatakan sebagai komponen-komponen dari $| V \rangle$ dan $| W \rangle$ yang bersangkutan ke arah komponen basis yang membentang ruang.

Langkah berikutnya, akan dibahas kenyataan bahwa dalam suatu ruang, suatu vektor dapat saja dinyatakan dalam berbagai himpunan basis tanpa mengubah norm-nya. Sebagai contoh, vektor V misalnya yang kita batasi sebagai vektor nyata, dapat saja disajikan [illegible]ombinasi linear vektor basis $|f_i\rangle$ atau vektor basis $|f_i'\rangle$ tanpa mengubah norm bagi v. Secara matematis hal ini dapat dituliskan sebagai

$$V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |f_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j' |f_i\rangle ; \qquad \ldots\ldots(2.18)$$

di mana $\{|f_i\rangle\}$ dan $\{|f_i'\rangle\}$ adalah masing-masing merupakan dua himpunan basis yang berbeda. Sudah barang tentu α_i dan α_i' juga berbeda. Yang menjadi pertanyaan ialah, bagaimana sifat faktor penghubung antara himpunan basis $\{|f_i\rangle\}$ dan himpunan basis $\{|f_i'\rangle\}$?. Misalkan faktor penghubung antara kedua himpunan basis itu ditandai melalui persamaan

$$|f_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} \, |f_i'\rangle \quad , \qquad \ldots\ldots\ldots(2.19a)$$

$$|f_j'\rangle = \sum_{k=1}^{n} R_{jk} \, |f_k\rangle \qquad \ldots\ldots\ldots(2.19b)$$

maka

$$|f_i\rangle = \sum_j \sum_k R_{ij}' \, R_{jk} \, |f_k\rangle = \sum_k \Big(\sum_j R_{ij}' R_{jk} \Big) |f_k\rangle$$

$$= \sum_k \delta_{ik} |f_k\rangle \ ,$$

sehingga kita peroleh

$$\sum_j R_{ij}' R_{jk} = \delta_{ik}, \qquad \ldots\ldots\ldots(2.20a)$$

yang merupakan persyaratan bagi faktor transformasi R_{ij}' dan R_{jk} dan ternyata merupakan matriks. Sekali lagi, jika (2.20a) dihilangkan indeksnya, maka dapat pula dituliskan sebagai

$$R'R = I \qquad \text{.....................(2.20b)}$$

sehingga $R' = R^{-1}$ di mana I menyatakan matriks identitas.

Berikutnya, dengan mengambil kuadrat (2,12) yang selanjutnya dijadikan sebagai definisi baru mengenai norm suatu vektor untuk menyesuaikan dengan konvensi yang lazim digunakan dalam mekanika kuantum, kita dapatkan setelah vektor ket $|V\rangle$ diekspansikan dalam himpunan basis $|f_i\rangle$:

$$N(V) = \langle V|V\rangle = (\sum_j \alpha_j \langle f_j|) \sum_i \alpha_i |f_i\rangle$$

$$= \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \langle f_j|f_i\rangle = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \delta_{ij}$$

$$= \sum \alpha_{ij}^2 \qquad \text{................(2.21)}$$

yang dalam hal ini V dibatasi sebagai vektor nyata sebagaimana telah disebutkan sebelumnya. Norm ini dinyatakan dalam himpunan basis $\{|f_i'\rangle\}$ akan diberikan oleh

$$N(V) = \langle V|V\rangle = (\sum \alpha_k' \langle f_k'|)(\sum \alpha_l' |f_l'\rangle)$$

$$= \sum_k \sum_l \alpha_k' \alpha_l' \langle f_k'|f_l'\rangle = \sum_k \sum_l \alpha_k \alpha_l \delta_{kl}$$

$$= \sum_k \alpha_k'^2$$

menurut (2.12), jelas

$$N(V) = \sum_i \alpha_i^2 = \sum_k \alpha_k'^2 < \infty \qquad \text{.............(2.22)}$$

sebagai konsekuensi sangkutan terakhir ini

$$\sum_i \alpha_i^2 = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \langle f_i | f_j \rangle =$$

$$= \sum_i \sum_j \left(\sum_k \langle R'_{ik} f'_k |\right)\left(\sum_l | R'_{jk} f'_k \rangle\right) \alpha_i \alpha_j$$

$$= \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \sum_k \sum_l R'_{ik} R'_{jk} \langle f'_k | f'_k \rangle$$

$$= \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \sum R'_{ik} R'_{jk}$$

pernyataan $\sum R'_{ik} R'_{jk}$ bukanlah perkalian matriks yang betul mengingat indeks yang sepihak tidak terletak pada kedudukan indeks yang tepat. Untuk menempatkannya pada kedudukan yang sesuai sehingga akan merupakan perkalian matriks, maka dengan melakukan transposisi elemen-ele - men matriks yang bersangkutan ; kita dapatkan

$$\sum_i \alpha_i^2 = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \sum_k R'_{ik} R_{kj} = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \delta_{ij}$$

sehingga akhirnya diperoleh

$$\sum R'_{ik} \tilde{R}'_{kj} = \delta_{ij} \text{ ; atau } R' \tilde{R'} = I \text{ atau } R\tilde{R} = I$$

jadi ternyata $\tilde{R} = R^{-1}$

yang menunjukkan kalau matriks R bersifat sebagai matrik ortogonal.

Sampai di siniuraian kita baru terbatas dengan vektor yang diskrit (deskrete) dan belum merupakan sebagai fungsi, jika pengertian perkalian skalar yang dikemukakan sebelumnya tidak diadakan pendefinisian kembali maka hal itu hanya akan terbatas dengan sebuah titik fungsi yang bersangkutan, pada hal fungsi itu berubah terhadap perubahan kedudukan dalam ruang. Untuk mengatasi masalah tersebut hingga meliputi semua titik dalam batas peninjauan fungsi, maka integrasi harus dilakukan. Tanpa mengurangi generalitas, di sini cukup ditinjau fungsi yang hanya berubah ke arah satu dimensi dalam ruang dengan batas $a \leq x \leq b$; di mana x menyatakan perubah fungsi, sedang a dan b masing-masing sebagai batas bawah dan atas fungsi yang ditinjau.

Sekarang misalkan terdapat fungsi $\phi = \phi(x)$ dan $y=y(x)$ maka sajiannya sebagai vektor ket dan bra menurut lambang Dirac akan diberikan masing-masing sebagai :

$|\phi(x)\rangle$ dan $|y(x)\rangle$ sebagai vektor ket, dan

$\langle\phi(x)| = (|\phi(x)\rangle)^+$ dan $\langle y(x)| = (|y(x)\rangle)^+$ sebagai vektor bra; di mana tanda + menyatakan lambang operasi dual; yaitu operasi transpose yang diikuti oleh operasi konjugasi kompleks. Perkalian skalar antara $|\phi(x)\rangle$ dan $|y(x)\rangle$ didefinisikan menurut sangkutan

$$\langle\phi(x)|y(x)\rangle = \int_a^b \phi(x) y(x)\, dx \quad \text{........(2.23)}$$

selanjutnya norm bagi $|\phi(x)\rangle$ di definisikan menurut sangkutan

$$N(\phi) = \langle\phi(x)|\phi(x)\rangle = \int_a^b \phi^+(x)\, \phi(x)\, dx < \infty \quad (2.24a)$$

yang dalam hal ini merupakan sajian integral lebesgue. Patut dicatat disini bahwa batas a dan b dapat saja berubah secara sekehendak; tergantung pada syarat batas fungsi yang ditinjau.

Dengan definisi ini dapat pula diperkenalkan adanya basis ortonormal himpunan basis $\{|f_i(x)\rangle\}$, sedemikian suatu fungsi $\emptyset(x)$ dapat diekspansikan sebagai kombinasi linear himpunan basis yang disebutkan menurut pernyataan :

$$|\emptyset(x)\rangle = \sum_i \emptyset_i |f_i(x)\rangle \qquad \text{..............(2.25)}$$

dengan memanfaatkan sifat

$$\langle f_i(x)|f_j(x)\rangle = \int f_i^+ f_j(x)dx = \delta_{ij} \qquad \text{...........(2.26)}$$

maka komponen $\emptyset(x)$ dapat diproyeksikan keluar sebagai

$$|\emptyset_i\rangle = \; f_i(x)|\emptyset(x)\rangle \qquad \text{..............(2.27)}$$

Adapun sistem dengan basis berindeks malar, dalam uraian ini belum dapat disajikan, karena untuk keperluan uraian kita selanjutnya hal itu belum diperlukan.

Dengan sajian (2.23),(2.24) dan (2.25) , maka telah dikenalkan apa yang dinamakan konsep ruang Hilbert. Dalam hal ini ruang Hilbert tiada lain dari pada ruang yang dibentang dengan basis-basis merupakan fungsi yang dilukiskan menurut (2.24) dan norm menurut (2.24a).

Seperti halnya dengan himpunan basis yang diskrit, maka untuk basis dalam ruang Hilbert, juga kita dapat berpindah dari suatu himpunan basis yang satu kehimpunan basis yang lainnya. Akan tetapi karena secara umum basis berupa fungsi itu dapat merupakan fungsi yang kompleks, maka matriks transformasi yang bersangkutan adalah merupakan matriks unitari. Misalkan terdapat himpunan basis $\{|f(x)\rangle\}$ dan $\{|g(x)\rangle\}$, maka matriks yang menghubungkan antara keduanya akan diberikan oleh

$$|g(x)\rangle = U\,|f(x)\rangle , \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.28)$$

di mana indeks komponen basis telah dihilangkan. Karena kedua himpunan basis ini bersifat ortonormal, maka jelas

$$U^{+}U = I \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.29)$$

yang menunjukkan bahwa U merupakan matriks unitari. Secara umum matriks U akan dapat diparameterisasikan sebagai

$$U = \exp\,(i\,\alpha_n A)\ ; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.30)$$

di mana α_n menyatakan parameter yang bersifat nyata (real) dan A sebagai generator transformasi. Karena syarat (2.29) maka jelas,

$$A^{+} = A\ ; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.31)$$

yang menunjukkan bahwa A haruslah merupakan operator yang adjoin sendiri (self-adjoint) dan kalau memperoleh sajian sebagai matriks, ia haruslah merupakan matriks yang Hermitian. Hal ini akan dibahas secara mendalam implikasinya pada uraian-uraian selanjutnya.

II.2. Nilai Pribadi Operator Adjoin sendiri

Setelah kita memperoleh pengertian mengenai konsep ruang vektor linear; khususnya tentang pengertian ruang Hilbert, maka dalam uraian ini akan dibahas pe - ngertian operator yang bersifat adjoin-sendiri (self-adjoin) yang bekerja dalam ruang Hilbert. Untuk keperluan itu, maka terlebih dahulu kita definisikan apa yang dinamakan operator.

Definisi 4.– Operator ialah suatu pernyataan matematis yang dapat memetakan setiap anggota vektor dari suatu ruang ke ruang lain.

Karena peninjauan dibatasi dengan vektor dalam ruang Hilbert, maka operator yang bersangkutan ialah operator yang dapat memetakan himpunan fungsi ke himpunan fungsi yang lain yang memenuhi (2.23) dan (2.24).
Misalkan kita batasi dengan fungsi yang perubahnya hanya satu dimensi yang ditandai dengan $\phi(x)$ sebagai suatu anggota dari ruang Hilbert R_h, dan misalkan operator yang bersangkutan ditandai dengan H, maka sebagai akibat operasi H terhadap $\phi(x)$ menjadi $y(x)$ yang merupakan anggota ruang Hilbert lain R_h'. Secara matematis persamaan operasi itu akan dapat dinyatakan sebagai

$$H\,\emptyset(x) = y(x)\ ; \qquad \text{............(2.32)}$$

Sudah barang tentu antara R_h dan R_h' haruslah memiliki elemen identitas yang sama demi terpenuhinya aksioma ruang vektor. Selain itu, supaya persamaan (2.32) mempunyai penyelesaian, maka haruslah H memiliki <u>kebalikan</u> (inverse); yaitu det.H $\neq$ O.

Selanjutnya dalam uraian ini dibatasi dengan sistem operator yang memenuhi sifat menurut definisi di bawah ini.

Definisi 5. Suatu operator H dikatakan linear jika terdapat skalar A dan B yang tetap tapi sembarang , sedemikian dipenuhi syarat

$$H(A\emptyset(x) + By(x)\ ) = A\ H\emptyset(x) + B\ Hy(x) \qquad \text{..............(2.33)}$$

Berikutnya, secara umum ruang Hilbert R_h dan R_h' yang disebutkan diatas tidak sama. Namun demikian, ada kemungkinan terdapat suatu operator H sedemikian rupa pemetaan yang dihasilkannya tidak menyebabkan perubahan ruang Hilbert; yakni dipenuhi $R_h = R_h'$. Dalam hal yang disebutkan terakhir ini terpenuhi, maka dapat ditemukan parameter λ sedemikian

$$H\emptyset(x) = \lambda\emptyset(x) \qquad \text{..............(2.34a)}$$

Andaikan persamaan (2.34a) memiliki suatu penyelesaian $\emptyset_m$ di mana dipenuhi,

$$H\emptyset_m(x) = \lambda_m\emptyset_m(x) \qquad \text{..............(2.34b)}$$

dan memenuhi syarat tertentu, maka $\varnothing_m(x)$ dinamakan fungsi pribadi operator H dengan λ_m menyatakan sebagai nilai pribadinya.

Kemudian dari pada itu, suatu operator O dikatakan adjoin dari H bila dipenuhi syarat,

$$\int (\varnothing^{+} H\, y - y\, O^{+}\varnothing^{+})\, dx = 0 \qquad \text{..........(2.35a)}$$

atau secara lambang dalam notasi bra dan ket Dirac akan dapat dituliskan sebagai

$$\langle \varnothing \,|\, H\, y \rangle - \langle O\, \varnothing \,|\, y \rangle = 0 \qquad \text{..........(2.35b)}$$

Bila O = H, maka H dikatakan adjoin-sendiri, sehingga syarat (2.35a) akan menjadi

$$\int (\varnothing^{+} H\, y - y\, H^{+}\varnothing^{+}) dx = 0. \qquad \text{..........(2.35c)}$$

Sekarang andaikan H merupakan operator yang adjoin sendiri dengan fungsi pribadi yang bersangkutan $\varnothing_m$ memenuhi persamaan $H\, \varnothing_m = \lambda_m \varnothing_m$ dan $H^{+}\varnothing_m^{+} = \lambda_m^{*}\varnothing_m^{+}$, maka dengan memasukkan kedua persamaan ini ke dalam persamaan (2.35c) kita dapatkan,

$$(\lambda_m - \lambda_n^{*}) \int \varnothing_m^{+}\, \varnothing_n dx = 0; \qquad \text{...........(2.36)}$$

di mana $\varnothing_m$ sebagai substitusi bagi y dan $\varnothing_n^{+}$ bagi $\varnothing^{+}$.

Dengan persamaan ini kita meninjau kemungkinan-kemungkinan konsekuensinya. Yang pertama untuk m=n jelas dipe -

nuhi,

$$\int \phi_n^+ \phi_n dx \neq 0,$$

maka $\lambda_n = \lambda_n^*$, yang menegaskan bahwa nilaipribadi suatu operator adjoin-sendiri haruslah nyata(real), yang kedua setelah diketahui bahwa nilai pribadi suatu operator yang adjoin-sendiri haruslah nyata, maka dalam hal $\lambda_m \neq \lambda_n$, sehingga sudah tentu $\int \phi_m^+ \phi_n \, dx = 0$, yang berarti ϕ_m ortogonal terhadap ϕ_n. Jika hal ini dipenuhi, maka $\{\phi_n\}$ merupakan himpunan basis dalam ruang Hilbert. Kemungkinan yang ketiga ialah, ada kemungkinan $\lambda_m \neq \lambda_n$ untuk $m \neq n$, sehingga $\int \phi_m^+ \phi_n \neq 0$. Dalam hal ini terjadi, maka ϕ_m dan ϕ_n dikatakan mengalami degenerasi(degenerate). Jelas untuk keadaan terdegenerasi ini, $\{\phi_n\}$ bukanlah merupakan basis, karena mereka satu sama lain bergantungan secara linear mengingat kenyataan $\int \phi_m^+ \phi_n dx \neq 0$; sekalipun $m \neq n$. Sehubungan dengan keadaan terdegenerasi itu, sekalipun $\{\phi_n\}$ bukan basis, namun demikian dapat diadakan kombinasi linear di antara anggota-anggotanya sedemikian hasil kombinasi yang dimaksud sudah merupakan himpunan basis yang ortogonal. Metoda ini dikenal sebagai <u>proses ortogonalisasi Gram-Scmidt</u>.

Dalam hubungan ini, andaikan himpunan basis $\{\phi_n\}$ merupakan fungsi pribadi yang terdegenerasi. Yang menjadi permasalahan ialah membangun himpunan basis $\{|y_i\rangle\}$ dengan menggunakan kombinasi linear di antara $|\phi_i\rangle$. Untuk keperluan menyingkat pernyataan integral, digunakan lambang ket dan bra Dirac. Sebagai langkah pertama, kita pilih $|y_1\rangle = |\phi_1\rangle$ dan mengandaikan $|y_2\rangle$ hanya tersusun oleh $|\phi_1\rangle$ dan $|\phi_2\rangle$ berdasarkan kombinasi linear

$$|y_2\rangle = |\phi_2\rangle + a_1 |\phi_1\rangle \; ; \qquad \text{...........(2.37a)}$$

di mana koefisien bagi $|\phi_2\rangle$ dipilih angka 1(satu) tanpa mengurangi generalitas. Karena disyaratkan bahwa $|y_1\rangle = |\phi_1\rangle$ dan harus ortogonal terhadap $|y_2\rangle$, maka jelas,

$$\langle y_1 | y_2\rangle = 0 = \langle y_1|\phi_2\rangle + a_1 \langle y_1 | y_1\rangle, \text{ atau}$$

$$a_1 = -\frac{\langle y_1 | \phi_2\rangle}{\langle y_1 | y_1\rangle} .$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$|y_2\rangle = |\phi_2\rangle - \frac{\langle y_1|\phi_2\rangle}{\langle y_1|y_1\rangle}|\phi_1\rangle \qquad \text{..........(2.37b)}$$

Kalau cara ini terus dijalankan, maka pada akhirnya diperoleh semua $|y_i\rangle$ saling ortogonal. Dalam hubungan ini berdasarkan pola (2.37b), maka secara induksi dapat ditunjukkan bahwa

$$|y_n\rangle = |\phi_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle y_i|\phi_n\rangle}{\langle y_i|y_i\rangle} |y_i\rangle \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.37c)$$

Sajian (2.37) inilah yang dinamakan proses ortogonalisasi Gram-Scmidt; di mana $|y_i\rangle$ sudah merupakan himpunan basis ortogonal.

Sampai di sini belum ditunjukkan kaitan antara operator dan matriks. Hal ini penting, karena matriks pada dasarnya adalah juga operator, mengingat ia dapat pula memetakan himpunan vektor dari suatu ruang ke ruang lain yang mempunyai penyelesaian bila matriks yang bersangkutan memiliki kebalikan (invers). Namun demikian secara umum suatu operator tidaklah selalu merupakan operator yang bersajian matriks, karena dapat berupa operator differensial atau integral dan lain-lain sajian matematik. Yang menjadi pertanyaan, apa kaitan antara sajian operator pada umumnya dan sajian suatu matriks ? Dapatkah suatu operator memperoleh sajian sebagai matrik?.

Untuk menjawab pertanyaan ini, misalkan pada persamaan (2.34a), baik ϕ maupun y keduanya adalah anggota ruang Hilbert R_h, tetapi bukan basis. Oleh karena itu baik ϕ maupun y dapat di-ekspansikan dalam himpunan basis. Kalau himpunan basis itu ditandai dengan $f_m(x)$ yang untuk mudahnya dipilih sebagai basis ortonormal, maka $|\phi(x)\rangle$ dan $|y(x)\rangle$ keduanya dapat dinyatakan sebagai,

$$\emptyset(x) = \sum_m A_m f_m(x), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.38a)$$

$$y(x) = \sum_m B_m f_m(x), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.38b)$$

dengan A_m dan B_m masing-masing menyatakan sebagai komponen $\emptyset(x)$ dan $y(x)$ terhadap basis $f_m(x)$.

Sekarang andaikan pula hasil operator H terhadap basis $f_m(x)$ dapat dituliskan sebagai,

$$H\, f_n(x) = \sum_m H_{mn} f_m(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.39)$$

di mana indeks ganda pada H_{mn} melukiskan faktor trans - formasi yang menghubungkan antara komponen ke-n dan ke-m basis-basis dalam R_h terhadap operator H. Kalau sangku- tan-sangkutan di atas dimasukkan ke dalam (2.34a), akan diperoleh

$$H\, \emptyset(x) = \sum_n A_n H\, f_n\ (x) = \sum_n \sum_m A_n H_{mn} f_m(x)$$

$$= \sum_m B_m f_m(x), \text{ atau } \ B_m = \sum_n H_{mn} A_n \ \ldots\ldots (2.40)$$

Persamaan (2.40) ini tidak lain adalah persamaan linear yang melukiskan transformasi komponen A_n menjadi B_m yang dihubungkan oleh koefisien H_{mn} yang ber-indeks ganda. Keofisien itu tiada lain merupakan elemen dari suatu matriks. Karena sistem diharapkan mempunyai penyelesaian kalau H mempunyai invers, jelas sajian matriks bagi H_{mn} adalah matriks bujur sangkar; yakni matriks yang jumlah baris dan lajur sama. Tinggal sekarang mencari sajian bagi H_{mn} dinyatakan dalam operator H. Untuk keperluan tersebut (2.40) di kalikan dengan $f_1(x)$ dari kiri dan menyatakannya dalam lambang bra dan ket, maka diperoleh

$$\langle f_1(x)|H|f_n(x)\rangle = \sum H_{mn}\langle f_1(x)|f_n(x)\rangle, \text{atau}$$

$$H_{1n} = \langle f_1(x)|H|f_n(x)\rangle$$

$$= \int f_1^+(x) H f_n(x) dx \qquad \text{...........(2.41)}$$

di mana telah dimanfaatkan sifat ortonormalitas $f_1(x)$. $f_n(x) = \delta_{1n}$. Kita melihat sekarang operator H telah memperoleh sajian dalam bentuk matriks. Selain itu, menurut uraian di atas hanya operator yang tidak mengubah basis ruang ke ruang lain yang dapat memperoleh sajian sebagai matriks.

II.3. Sajian operator dalam Mekanika kuantum.

Dalam upaya memberikan sajian operator bagi suatu besaran fisis dalam mekanika kuantum, maka sebelumnya perlu diketahui sajian besaran yang bersangkutan dalam mekanika klasik. Untuk keperluan bahasan kita disini, cukup dibatasi dengan mekanika <u>nir-relatifistik</u> (non-relatifistik), karena hal ini lebih bersifat dasar kearah perumusan yang <u>relatifistik</u> (yaitu proses gerak dengan kecepatan tinggi) itu sendiri. Dalam hubungan ini , dari teori mekanika klasik kita mengetahui ada tiga besaran fisis yang penting; yaitu <u>momentum</u> yang dilambangkan dengan p, <u>momentum sudut</u> (angular momentum) yang dilambangkan dengan L dan besaran tenaga total yang dilambangkan dengan E. Diantara ketiga besaran ini hanya E yang bersifat sebagai skalar, sedang p dan L adalah besaran vektor. Bahwa ketiga besaran ini penting, karena membawa sifat hukum kekekalan. Dalam hal ini secara umum, suatu besaran dikatakan kekal jika tak berubah dibawah suatu proses fisis tertentu. Secara matematis suatu proses ditandai dengan adanya suatu transformasi dari suatu keadaan ke keadaan lain. Adapun hukum kekekalan itu ternyata bersangkutan erat dengan sifat simetri, karena suatu sistem dikatakan simetri, bila terhadap suatu operasi sistem tidak berubah.

Sebagai gambaran operasi simetri, tinjaulah hablur berbentuk tetrahedron yang sudut-sudutnya ditempati oleh suatu jenis atom, jika dikenakan operasi putar dengan sudut-sudut 60-120-180 terhadap sumbu yang melewati pusatnya dan tegak lurus pada salah satu sumbunya, akan ditemukan bentuk yang sama sebelum diputar yakni hablur yang berbentuk tetrahedron, dan karena sudut-sudut yang menghasilkan sifat tetap adalah terbatas (di sini hanya ada-3) dan bersifat sebagai titik-titik nilainya, maka sistem simetri yang demikian bersangkutan dengan sistem simetri yang diskrit (deskrete) hal lain jika banyaknya titik yang menghasilkan sifat simetri tak berhingga banyak dan bersifat malar disebut simetri yang kontinu.

Hal penting yang ingin diketengahkan dengan contoh tersebut, adalah memang terdapat operasi yang membuat sesuatu tidak mengalami perubahan. Secara abstrak suatu objek yang memiliki sifat simetri terhadap suatu operasi, akan sesuai dengan kerangka matematis dibalik itu, dalam hal ini perwujudan matematis dari suatu operasi yang menghasilkan simetri ialah struktur matematika yang dinamakan grup. Hal ini dapat dipahami berdasarkan aksioma yang melandasi apa yang dinamakan grup.

Definisi 6. Suatu himpunan R yang tidak kosong dengan operasi tertutup (*) adalah grup jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1) Jika $a,b \in R$ maka $a*b \in R$ (tertutup)

2) $\exists_1 e \in R \ni \forall a \in R$ berlaku $a*e=e*a = a$

3) $\forall a,b,c \in R$ maka $a*(b*c) =(a*b)*c$

4) $\forall a \in R \exists a^{-1} \in R \ni a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

a^{-1} dinamai invers dari a.

Dalam hubungan ini, dengan sifat (1) di atas sudah jelas menunjukkan bahwa dengan suatu operasi komposisi tertentu hasil operasinya tetap merupakan anggota grup; hal mana menunjukkan sifat simetri yang dimaksud. Patut dicatat disini bahwa elemen-elemen suatu ruang vektor juga memenuhi keempat aksioma grup, akan tetapi elemen-elemen ruang vektor bersifat komutatip terhadap operasi komposisi penjumlahan; dan karena itu ia disebut grup Abelian. Adapun dalam uraian kita nanti, grup yang bersangkutan dengan operasi simetri yang ditinjau hanya yang berdasarkan komposisi perkalian langsung dan secara umum tidak komutatip.

Selanjutnya suatu grup dikatakan malar (continue) jika elemen-elemen-nya dapat ditandai oleh satu atau lebih parameter yang berubah secara malar pula. Grup yang dimaksud dikatakan tersambung secara malar (continously-connected) bila parameter-parameter grup berubah secara malar dari satu elemen ke-elemen lainnya. Sebagai contoh, operasi sembarang adalah merupakan grup;

yakni contoh, operasi rotasi yang sembarang adalah merupakan grup; yakni memenuhi aksioma-aksioma grup, karena dapat dituliskan elemen umum himpunannya sebagai R (α) di mana sudut α sebagai sudut putarnya berperan selaku parameter grup, sementara itu R(-α) adalah inversnya dan R(O) sebagai identitas. Karena α sembarang dan dapat berubah secara malar, maka cacah elemen R(α) tak berhingga dan tak terbilang; dan karena itu mereka tersambung secara malar. Tentu saja grup yang ditinjau ini tidak sama dengan grup simetri pada hablur. Berikutnya, suatu grup malar dikatakan kompak (Compact), jika setiap tak berhingga jajaran (secuence) elemen-elemen grup, akan mempunyai elemen limit yang juga merupakan anggota grup. Dua buah grup dikatakan isomorfik (isomorphic) satu sama lain, bila terdapat hubungan satu-satu yang unik (unique) diantara elemen-elemen grup. Jika suatu grup isomorfik terhadap suatu grup lain yang elemen-elemennya adalah merupakan matriks-matriks, maka yang disebut terakhir adalah sajian matriks dari pada yang disebut pertama.

Setelah diberikan uraian singkat hubungan antara sifat operasi simetri dan gagasan grup, maka marilah kita menguraikan hubungan antara sifat operasi simetri tertentu dan sajian operator besaran fisis tenaga total, momentum dan momentum sudut. Sebelum hal ini dibahas perlu dikemukakan bahwa dalam mekanika kuantum, Hamiltonian sebagai besaran tenaga total suatu sistem merupakan operator yang hanya mempunyai makna bila beroperasi pada fungsi gelombang; yang dalam hal ini dilukiskan sebagai vektor dalam ruang Hilbert. Kalau diadakan operasi-operasi tertentu seperti yang telah kita lakukan diatas, maka baik fungsi gelombang yang berperan sebagai vektor-vektor dalam ruang Hilbert, maupun Hamiltonian H, akan mengalami pengaruh. Dalam hubungan ini, vektor-vektor itu akan mengalami transformasi sebagai

$$y' = U\,y$$

di mana U adalah merupakan suatu operator yang berperan memutar y menjadi y'. Dengan demikian, persamaan

$$Hy = Ey \quad \text{menjadi}$$

$$U(Hy) = E\,Uy, \text{ atau } UHU^{-1}Uy = EUy.$$

Persamaan terakhir setelah Uy di dalamnya digantikan dengan y', kita dapatkan persamaan $H'y' = Ey'$; di mana $H' = U\,H\,U^{-1}$. Kita melihat bahwa nilai pribadi E tidak berubah dibawah transformasi U ini, dan ini sejalan dengan contoh-contoh uraian kita sebelumnya bahwa nilai pribadi suatu operator sebagai besaran terukur tidak bergantung pada sajian fungsi gelombang sistem. Selain itu karena norm suatu vektor dalam ruang Hilbert haruslah kekal; yakni $\langle y|y\rangle = \langle Uy|Uy\rangle = 1$, kita akan dapatkan sangkutan $\langle Uy|Uy\rangle = \langle y|U^{+}U\,y\rangle = \langle y|y\rangle$, sehingga haruslah dipenuhi syarat, tesimal hingga orde satu saja, kita dapat menuliskan

$$\delta H = i\alpha[A,H] = 0 \quad \text{atau} \quad [A,H] = 0$$

mengingat $\delta H = 0$ untuk sembarang α yang infinitesimal . Dari hasil ini tampak bahwa sifat invariant suatu sistem terhadap suatu transformasi atau operasi simetri, ternyata secara kuantum ditandai oleh lenyapnya komutator antara generator transformasi (yaitu A) dan Hamiltonian H sistem, sebaliknya dapat dikemukakan bahwa lenyapnya komutator antara generator transformasi dan Hamiltonian sistem, adalah menunjukkan bahwa sistem bersifat invariant terhadap operasi simetri yang dilukiskan oleh transformasi tersebut.

Uraian berikutnya, tinjaulah kembali translasi waktu sepanjang selang waktu τ yang infinitesimal; di mana t berubah menjadi $t' = t + \tau$. Karena translasi waktu itu, maka fungsi gelombang $y(\vec{r}_i,t)$ akan bertransformasi menjadi

$$y' = y(\vec{r}_i,t') = y(\vec{r}_i,t+\tau) = y + \frac{\partial y}{\partial t}\delta t \approx y + \frac{\partial y}{\partial t}\tau$$

$$= (1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}).$$

Dengan menuliskan $\delta t = \tau$, segera dapat diketahui bahwa generator transformasi infinitesimal yang bersangkutan adalah

$$A \equiv -i\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{-H}{\hbar} \; .$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

kita dapatkan bahwa [illegible] sehingga dengan me- ngambil $\vec{a} = i\hbar$ [illegible], kita peroleh generator infinitesimal

$$\hat{K} = -i\hbar \sum_{i=1}^{N} \nabla_i = \sum_{i=1}^{N} \hat{p}_i$$

yang harus memenuhi $[\hat{H}, \hat{K}] = 0$, apabila sistem yang ber - sangkutan invariant terhadap operasi simetri yang dite - rapkan oleh

$$U = (1 + \vec{a} \cdot \sum_{i=1}^{N} \nabla_i).$$

Akhirnya kita tinjau rotasi infinitesimal sekitar sudut $\delta\vec{\alpha}$ sehingga $\vec{r}_i$ berubah menjadi $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \delta\vec{\alpha} \times \vec{r}_i$, se- mentara itu $y(\vec{r}_i, t)$ akan berubah menjadi $y' = y(\vec{r}_i', t) = [1 + \delta\vec{\alpha} \times (\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \nabla_i)] y(\vec{r}_i, t) = Uy$, sehingga segera ditandai bahwa

$$U = 1 + \delta\vec{\alpha} \times (\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \nabla_i) = [1 + \delta\vec{\alpha} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \nabla_i]$$

[illegible] operasi infinitesimal yang berangkutan adalah

$$A = -i \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \times \nabla_i = \sum_{i=1}^{3} r_i \times \frac{\vec{p}_i}{\hbar} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{L}_i}{\hbar} ,$$

yang memenuhi $[A,H]= 0$, apabila sistem yang kita tinjau invariant terhadap operasi simetri tersebut.

Hal yang mendasar yang dapat ditarik dari uraian -uraian diatas, dengan mempostulatkan berlakunya hukum kekekalan tenaga, momentum dan momentum sudut, dan menerima adanya fungsi gelombang yang berperan sebagai vektor-vektor ternormalisasi dalam ruang Hilbert, operator-operator yang bersangkutan akan segera dapat diperoleh bila diadakan transformasi unitari dalam ruang Hilbert disajikan sebagai

$$U = \text{eksp}(i\alpha \frac{G}{\hbar}); \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.1b)$$

dengan generator G dihubungkan dengan A sebagai $A= \frac{G}{\hbar}$, sementara itu parameter bersifat infinitesimal.

Marilah kita selanjutnya menyelidiki apa arti persamaan (2.3.1) untuk itu kita tinjau persamaan Scrodinger

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.2)$$

persamaan ini melukiskan kelakuan lengkap sistem yang kita hadapi. Dalam hal ini, fungsi gelombang yang kita peroleh dengan mengintegralkan persamaan(2.3.2) ialah

$$\psi(t) = \text{eksp}(-i/\hbar \int_0^t H dt')\psi(0),$$

di mana $y(0) = y(t{=}0)$. Kita melihat bahwa operator

$$U(t)=\text{eksp}\left(\frac{-i}{\hbar}\int_0^t H\,dt'\right)$$

membawa $y(0)$ menjadi $y(t)$. Untuk meyakinkan kita bahwa $U(t)$ dapat diperoleh dari transformasi infinitesimal translasi waktu $U(t)=(1 - itH/\hbar)$, dengan mengoperasikan operator ini secara berturut-turut, maka diperoleh

$$U(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{itH}{\hbar n}\right)^n = \text{eksp}\left(- \frac{itH}{\hbar}\right),$$

yang bila H bergantung secara eksplisit pada waktu t, akan segera dapat dituliskan sebagai,

$$U(t)= \text{eksp}\left(\frac{-i}{\hbar}\int_0^t H\,dt'\right).$$

Dengan demikian dapat disimpulkan, menurut pelukisan Scrodinger, fungsi gelombang $y(t)$ dapat diperoleh dari $y_0 = y(0)$ dengan bantuan operator $U(t)$, sehingga

$$y_s(t) = U(t)\, y_0 = \text{eksp}\left(\frac{-i}{\hbar}\int_0^t H\,dt'\right)y_0 .$$

Dalam pelukisan Scrodinger ini, operator-operator yang berhubungan besaran-besaran fisis yang terukur, pada umumnya tidak bergantung pada waktu, sementara itu, yang berubah terhadap waktu ialah fungsi gelombang $y_s(t)$ di mana indeks s menyatakan pelukisan menurut Schrodinger. Ini berarti perubahan terhadap waktu bagi suatu sistem dibebankan pada fungsi gelombangnya.

Bila sekarang suatu operator kita menyatakan sebagai $A(t) = U^{-1}A_oU(t)$, maka operator $A(t)$ ini berubah terhadap waktu t. Persamaan ini bukanlah pelukisan operator menurut Scrodinger, melainkan hal ini merupakan pelukisan menurut Heisenberg. Sebaliknya, keadaan suatu sistem menurut pelukisan Heisenberg, tidak dilukiskan dengan suatu fungsi gelombang yang berubah terhadap waktu, melainkan oleh

$$y_H = y_o = U^{-1}y_s.$$

Akhirnya dengan mengenakan operasi differensial terhadap $A(t) = A_H = U^{-1}A_s\,U$; dengan U diberikan oleh (2.3.1), akan diperoleh

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial U^{-1}}{\partial t}A_s\,U + U^{-1}A_s\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}H(U^{-1}A_sU) + U^{-1}A_sU \cdot \left(\frac{-i}{\hbar}H\right) = \frac{i}{\hbar}(HA - AH) = \frac{i}{\hbar}\left[H, A\right] \ldots\ldots (2.3.2)$$

Kalau seandainya A_s mengandung perubah waktu, segera dapat ditambahkan $\frac{\partial A}{\partial t}$ pada ruas kanan persamaan (2.3.2). Akan tetapi karena operator dalam sajian Schrodinger tak bergantung pada waktu secara explisit, maka penambahan itu tak perlu. Persamaan (2.3.2) ini dikenal dalam literatur sebagai <u>persamaan gerak Heisenberg</u>. Sekali lagi kita melihat bahwa apabila $[H,A] = 0$ pada persamaan (2.3.2), maka $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, sehingga perubah dinamik A akan merupakan tetapan gerak sistem. Dengan demikian, nyatalah apabila suatu sistem invariant terhadap suatu operasi simetri maka generator transformasi infinitesimal yang bersangkutan yakni;;A akan berkomutasi dengan Hamiltonian sistem, yang juga berarti bahwa besaran fisis yang dinyatakan oleh A yang bersifat adjoin-sendiri itu adalah merupakan besaran kekal.

Sampai disini kita melihat bahwa dengan asas operasi simetri, baik dengan cara mekanika klasik maupun dengan cara mekanika kuantum, ternyata adanya besaran-besaran kekal sebagai konsekuensi sifat simetri itu, telah berhasil ditunjukkan. Yang menjadi pertanyaan sekarang di mana letak pertautan antara persamaan-persamaan dalam mekanika kuantum dan persamaan mekanika klasik ?. Untuk keperluan uraian ini, perlu diingatkan kembali bahwa secara mekanika kuantum, suatu besaran terukur adalah merupakan harga harap besaran tersebut yang setara dengan harga rata-ratanya secara mekanika klasik. Jadi jika diketahui persamaan gelombang sistem y(r,t) dan operator dari besaran fisis, maka kita dapatkan sangkutan sebagai berikut,

1) **Letak** $\langle r \rangle = \int y^+(\vec{r},t)\ \vec{r}\ y(\vec{r},t)\ d\tau$

2) **Tenaga** $\langle E \rangle = \int y^+(\vec{r},t)\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ y(\vec{r},t)\ d\tau$

3) **Momentum** $\langle p \rangle = \int y^+(\vec{r},t)(-i\hbar\nabla)\ y(\vec{r},t)\ d\tau$

II.4. Rotasi, Momentum dan grup unitari

Pada uraian pendahuluan, telah dibicarakan me - ngenai ritasi dalam ruang dimensi-3 menurut persamaan

$$\vec{r}\,' = R(\vec{\emptyset})\ \vec{r}, \qquad \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.1)$$

di mana $\vec{\emptyset}$ menyatakan sudut rotasi yang berperan sebagai parameter matriks transformasi $R(\vec{\emptyset})$. Karena ruang bers- sifat nyata, maka $R(\vec{\emptyset})$ bersifat ortogonal; dalam artian dipenuhi syarat $R(\vec{\emptyset})\widetilde{R}(\vec{\emptyset}) = I$, yang berarti $\widetilde{R}(\vec{\emptyset}) = R^{-1}(\vec{\emptyset})$. Berdasarkan atas kenyataan ini, jelas matriks R ini de- terminannya $\pm$ 1. Dalam uraian ini kita hanya akan menin- jau R dengan detrminan +1 yang dikenal sebagai <u>rotasi</u> - <u>sesungguhnya</u> (proper rotation). Karena sifat simetri elemen R_{ij}, maka diantara kesembilan elemennya maka ada tiga yang bebas yang dapat dinyatakan dalam parame- ter yang dapat berubah secara <u>malar</u> (continue). Karena parameternya berubah secara malar, maka cacah R tak berhingga. Diantara elemen-elemen itu dapat ditunjukkan kalau akan memenuhi aksioma grup. Dengan demikian, mat- riks-matriks R membentuk suatu grup tersambung yang memi- liki tiga parameter dan bersifat kompak. Dalam litera- tur grup yang bersangkutan ditandai dengan O(3); yakni sebagai grup ortogonal dalam ruang dimensi tiga yang me- rupakan himpunan matriks 3x3 yang <u>nyata</u> (real) dan orto- normal dengan determinan +1; yaitu sebagai keadaan khusus dari pada $R(\vec{\emptyset})$.

Sehubungan dengan uraian ini, suatu grup malar yang tersambung; yaitu parameter-parameter dari hasil kali antara dua buah elemen malar dan merupakan fungsi yang terdeferensiabel terhadap parameter-parameternya, dinamakan grup <u>Lie</u>. Dalam hubungan ini, grup O(3) adalah grup Lie yang Kompak. Adapun translasi ruang dan waktu, adalah grup Lie tidak kompak, karena tidak mempunyai elemen limit. Demikian pula grup Lorentz terdapat tiga parameter yang bersangkutan dengan rotasi, sementara itu tiga parameter lainnya berhubungan dengan perubahan kecepatan. Dengan demikian, grup Lorentz adalah merupakan grup Lie dengan enam parameter yang bersifat tidak kompak, seperti halnya grup translasi ruang-waku. Ini dapat dipahami, karena seperti halnya para - meter grup translasi maka parameter kecepatan dalam perubahannya tidak akan menghasilkan elemen limit dalam grup. Sebaliknya, terhadap parameter sudut nyata, setiap kali kita berputar penuh satu kali, kita akan kembali pada keadaan semula sehingga grup yang bersangkutan dengan parameter sudut nyata itu bersifat kompak, dengan catatan bahwa disini kita pakai teori kompak barisan karena dengan kompak selimut (covering) terdapat hubu - ngan timbal balik dengan kompak barisan.

Sekarang kita tinjau gambaran isomorfik gr O(3) yang ditandai dengan elemen-elemen $R(\vec{\emptyset})$. Dalam h sajian bagi R diperankan oleh $\vec{\varnothing}$ yang arahnya terhadap sumpu putar diandaikan putar kanan bila dipandang dari pusat keluar yang besarnya dinyatakan dalam radian. Secara vektor, titik ujung $\vec{\varnothing}$ dapat dipandang sebagai menyajikan kemungkinan semua rotasi yang mengisi suatu bola dengan jari-jari π radian; di mana secara berlawanan pada permukaan bola tersebut, semua titik berpasangan satu sama lain. Karena perputaran sudut rotasi ini bersifat tertutup, maka titik-titik dalam permukaan bola yang jari-jarinya π itu juga membentuk grup Isomorfik terhadap grup O(3). Gambaran isomorfisma ini sesungguhnya tidaklah bersifat hubungan sederhana (simple-connected) melainkan hubungan ganda (multiple-connected) Ini dapat dipahami, karena kita dapat mencapai titik yang sama dalam permukaan bola yang disebutkan itu dengan jalan arah putaran lain yang berlawanan terhadap sumbu yang sama.

Berikutnya kita tinjau rotasi infinitesimal dalam ruang dimensi-3; yaitu rotasi secara infinitesimal ini mendekati elemen identitas I dari himpunan elemen-elemen dalam grup. Dalam hal ini bila $\vec{\varnothing}$ hanya bersifat infinitesimal, maka cukup ditinjau ekspansi hingga orde pangkat satu saja seperti telah disajikan pada uraian yang baru lalu; di mana kita dapat menuliskan,

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{\varnothing} \times \vec{r}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.2)$$

Hubungan antara ([illegible]) dan ([illegible]) maka dapat ditunjukkan bahwa sajian $R(\phi)$ akan dapat dituliskan sebagai

$$R \approx \begin{pmatrix} 1 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 1 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 1 \end{pmatrix},$$

yang dalam hal ini peninjauan putaran dilakukan terhadap sumbu z. Sebagai akibat rotasi tersebut, maka fungsi gelombang $y(\vec{r},t)$ akan menjadi $y(\vec{r}\,',t)$. Karena matriks rotasi yang mentransformasikan $\vec{r}$ menjadi $\vec{r}\,'$ mempunyai invers, maka kita dapat menuliskan $y(\vec{r}\,',t) = y(R^{-1}\vec{r},t)$. Matriks unitari yang bersangkutan adalah $U(\vec{\phi})$, di mana dipenuhi

$$y(\vec{r}\,',t) = U(\phi)\, y(\vec{r},t),$$

sehingga secara infinitesimal kita dapatkan persamaan,

$$\begin{aligned} U(\phi)\, y(\vec{r},t) &= y(R^{-1}\vec{r},t) \approx y(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r},t) \\ &\approx y(\vec{r},t) - (\vec{\phi}\times\vec{r}).\nabla y(\vec{r},t) \\ &\approx y(\vec{r},t) - \tfrac{i}{\hbar}(\vec{\phi}\times\vec{r}).p\; y(\vec{r},t); \end{aligned}$$

yang merupakan sajian ekspansi deret tailor hingga orde pertama. Dengan demikian kita dapatkan transformasi unitari infinitesimal

$$U(\phi) = 1 - \tfrac{i}{\hbar}\,\vec{\phi}.(\vec{r}\times\vec{p}) = 1 - \tfrac{i}{\hbar}\,\vec{\phi}.\vec{L}$$

[illegible] ditunjukkan untuk keadaan tidak

Gabungan antara (2.4.1) dan (2.4.2) segera dapat ditunjukkan bahwa sajian $R(\emptyset)$ akan dapat dituliskan sebagai

$$R \approx \begin{pmatrix} 1 & -\emptyset_z & \emptyset_y \\ \emptyset_z & 1 & -\emptyset_x \\ -\emptyset_y & \emptyset_x & 1 \end{pmatrix},$$

yang dalam hal ini peninjauan putaran dilakukan terhadap sumbu z. Sebagai akibat rotasi tersebut, maka fungsi gelombang $y(\vec{r},t)$ akan menjadi $y(\vec{r}\,',t)$. Karena matriks rotasi yang mentransformasikan $\vec{r}$ menjadi $\vec{r}\,'$ mempunyai invers, maka kita dapat menuliskan $y(\vec{r}\,',t) = y(R^{-1}\vec{r},t)$. Matriks unitari yang bersangkutan adalah $U(\vec{\emptyset})$, di mana dipenuhi

$y(\vec{r}\,',t) = U(\emptyset)\, y(\vec{r},t)$, sehingga secara infinitesimal kita dapatkan persamaan,

$$\begin{aligned} U(\emptyset)\, y(\vec{r},t) &= y(R^{-1}\vec{r},t) \approx y(\vec{r} - \vec{\emptyset}x\vec{r},t) \\ &\approx y(\vec{r},t) - (\vec{\emptyset}x\vec{r}).\nabla y(\vec{r},t) \\ &\approx y(\vec{r},t) - \frac{i}{\hbar}(\vec{\emptyset}x\vec{r}).p\, y(\vec{r},t); \end{aligned}$$

yang merupakan sajian ekspansi deret tailor hingga orde pertama. Dengan demikian kita dapatkan transformasi unitari infinitesimal

$$U(\emptyset) \approx 1 - \frac{i}{\hbar}(\vec{\emptyset}x\vec{r}).\vec{p} = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\emptyset}.(\vec{r}x\vec{p}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\emptyset}.\vec{L}$$

yang dengan mudah dapat ditunjukkan untuk keadaan tidak infinitesimal $U(\vec{\emptyset}) = \text{eksp}\left(\frac{-i\vec{\emptyset}.\vec{L}}{\hbar}\right)$; di mana,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \, ,$$

menyatakan sebagai momentum sudut orbital dan berperan sebagai generator grup O(3).

Dari banyaknya parameter yang bebas maka diperoleh bahwa L tersusun atas tiga generator masing-masing L_1, L_2, L_3 yang memenuhi sangkutan komutasi,

$$[L_1, L_2] = \hbar \epsilon_{123} L_3 \cdot i$$

atau secara umum

$$[L_x, L_y] = i\hbar \, \epsilon_{xyz} L_z \quad .$$

di mana ϵ_{xyz} menyatakan lambang permutasi biasa, dalam hal ini disebut juga tetapan Lie dari sangkutan komutasinya.

III. BEBERAPA PERSOALAN MENCARI OPERATOR DAN NILAI PRIBADI

3 .1. Mencari nilai pribadi dan sajian operator momentum sudut.

Jika L sebagai operator yang membawa fungsi gelombang invariant maka L juga invariant terhadap operasi transformasi.

$$L\psi = \varepsilon\psi$$

misalkan $L\psi$ mengalami operasi rotasi dengan matriks uni - tari yang sesuai adalah U, maka,

$$UL\psi = \varepsilon U\psi$$

$$ULU^{-1}U\psi = \varepsilon U\psi$$

Jika $U\psi$ vektor pribadi yang baru maka,

$U\ L\ U^{-1}$ invariant ditandai dengan tetapnya nilai pribadinya.

$$\vec{U}\ \vec{L}\ \vec{U}^{-1} = \vec{L}'$$

$$\vec{L}' = \vec{U}(\emptyset)\ \vec{L}\ \vec{U}(\emptyset)^{-1}$$

$$\vec{L} + \vec{\emptyset} \times \vec{L} = \left(1 - \frac{i}{\hbar}\ \vec{\emptyset}.\vec{L}\right)\vec{L}\left(1 + \frac{i}{\hbar}\ \vec{\emptyset}.\vec{L}\right.$$

$$= \vec{L} - \frac{i}{\hbar}\ \vec{\emptyset}.\vec{L}.\vec{L} + \frac{i}{\hbar}\ \vec{L}.\vec{\emptyset}.\vec{L}\ +$$

$$\frac{i}{\hbar}\left(\vec{\emptyset}.\vec{L}\right)\vec{L}\left(\vec{\emptyset}.\vec{L}\right).$$

$$= \vec{L} - \frac{i}{\hbar}\ \vec{\emptyset}.\vec{L}.\vec{L} + \frac{i}{\hbar}\ .\vec{L}.\vec{\emptyset}.\vec{L}$$

maka $\vec{\emptyset} \times \vec{L} = -\frac{i}{\hbar}\left(\vec{\emptyset}.\vec{L}.\vec{L} = \vec{L}.\vec{\emptyset}.\vec{L}\right)$

dengan memasukkan lambang $\epsilon_{i,jk}$

$$\epsilon_{ijk}\, \emptyset_j L_k = -\frac{i}{\hbar} (\emptyset_j L_i \, L_j - L_j \emptyset_j . L_i)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} (L_i . L_j - L_j . L_i) \emptyset_j$$

karena $\emptyset_j$ sembarang maka,

$$i\hbar\, \epsilon_{ijk}\, L_k = (L_i . L_j - L_j . L_i)$$

Ruas kanan memperlihatkan pada kita bahwa L_i, L_j membentuk Grup yang anti simetri dengan aljabar lie yang diberikan oleh $\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar\, \vec{L}$ dan ketiga elemennya tidak komutatip.

Selanjutnya karena adanya sarrah yang momentumnya tidak bergantung pada $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ melainkan bebas dari perubah ruang $\vec{r}$ dan momentum p momentum sudut tersebut disebut Spin. Sehingga matriks unitari sebagai sajian rotasi tidak lagi sebagai,

$U(\emptyset) \propto (1 - \frac{i}{\hbar} . \vec{\emptyset} . \vec{L})$ tapi dengan tambahan pada generatornya Spin S

$$U(\emptyset) \approx 1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\emptyset} . (\vec{L} + \vec{S}) = 1 - \frac{i}{h} \vec{\emptyset} . \vec{J} .$$

dengan $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

sehingga J juga mengikuti aturan komutasi sebagai L.

$$\vec{J} \times \vec{J} = i\, \hbar\, \vec{J}$$

bentuk komutasi ketiga komponen - segera dapat diturunkan nya,

$$[J_x , J_y] = i\hbar\, J_z$$

$$[J_y , J_z] = i\hbar\, J_x$$

$$[J_z , J_x] = i\hbar\, J_y$$

Yang menyatakan ketiga komponen dari J tidak satupun yang komutatip.

Kini kita definisikan operator momentum sudut total J^2.

$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ dan operator momentum sudut spin J_z, selanjutnya karena J^2 dan J_z komutatip maka J_z tidak tidak bergantung pada J^2 sehingga dapat dicari nilai pribadinya.

Selanjutnya didefinisikan Operator non-Hermitian.

$J\pm = J_x \pm iJ_y$ maka dapat dilakukan perhitungan sebagai berikut :

1). $J\pm\, J_z = \left[J\pm\, ,\, J_z\right] + J_z\, J\pm\; = \mp \hbar\, J\pm\; \pm J_z\, J\pm$

2). $\left[J\pm\, ,\, J^2\right] = J_x\left[J_x \pm iJ_y\, ,\, J_x\right] + \left[J_x + iJ_y\, ,\, J_x\right]J_x$

$+ J_y\left[J_x \pm iJ_y\, ,\, J_y\right] + \left[J_x \pm iJ_y\, ,\, J_y\right]J_y +$

$J_z\left[J_x \pm iJ_y\, ,\, J_z\right] + \left[J_x \pm iJ_y\, ,\, J_y\right]J_z$

$= 0$ (J^2 dan J_z komutatip)

3). $J{+}J{-} = (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 - iJ_xJy + iJ_yJ_x$

$= J^2 - J_z^2 + i\,(J_yJ_x - J_xJ_y) = J^2 - J_z^2 + i(-\cancel{i}\hbar J_z)$

$= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$

4). $J_-J_+ = (J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 + iJ_xJ_y - iJ_yJ_x$

$= J^2 - J_z^2 + i(J_xJ_y - J_yJ_x) = J^2 - J_z^2 + i(i\hbar\, J_z)$

$= J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$

Sekarang misalkan vektor ket pribadi yang melukiskan ke - adaan lengkap sistim dituliskan dengan λ dan μ masing - masing nilai pribadi J^2 dan J_z maka berlaku,

$$J^2|\lambda,\mu\rangle = \lambda|\lambda,\mu\rangle \quad .....5)$$
$$J_z|\lambda,\mu\rangle = \mu|\lambda,\mu\rangle \quad .....6)$$

kalikan persamaan 1) dengan $J\pm$ dari kiri diperoleh,

$J\pm\ J^2|\lambda,\mu\rangle = \lambda J\pm|\lambda,\mu\rangle$ karena J^2 dan $J\pm$ ko - mutatip maka,

$J^2J\pm|\lambda,\mu\rangle = \lambda J\pm|\lambda,\mu\rangle$ yang menyatakan bahwa nilai pribadi J^2 tidak berubah terhadap operator $J\pm$ ke - mudian kalikan persamaan 6) dari kiri oleh $J\pm$ sehingga,

$J\pm\ J_z|\lambda,\mu\rangle = \mu J\pm|\lambda,\mu\rangle$ dari persamaan 4) da - pat dibuat,

$$J\pm J_z|\lambda,\mu\rangle = (J_zJ\pm \mp \hbar\ J_\pm|\lambda,\mu\rangle = \mu J\pm|\lambda,\mu\rangle$$
$$= J_zJ\pm|\lambda,\mu\rangle \mp \hbar\ J\pm|\lambda,\mu\rangle = \mu J\pm|\lambda,\mu\rangle$$

maka $J_zJ\pm|\lambda,\mu\rangle = \mu J\pm|\lambda,\mu\rangle \pm \hbar\ J\pm|\lambda,\mu\rangle$

$$= (\mu \pm \hbar)\ J\pm|\lambda,\mu\rangle$$

maka $J_zJ_+|\lambda,\mu\rangle = (\mu + \hbar)\ J_+|\lambda,\mu\rangle$

$$J_zJ_-|\lambda,\mu\rangle = (\mu - \hbar)\ J_-|\lambda,\mu\rangle$$

sekarang operasi kedua dari J_+ dan J_- dari persamaan ter- sebut diatas,

$$J_+(J_+\ J_z)|\lambda,\mu\rangle \mp J_+\hbar\ J_+|\lambda,\mu\rangle = \mu J_+^2|\lambda,\mu\rangle$$

$$J_+J_zJ_+|\lambda,\mu\rangle = (\mu + \hbar)\, J_+^2|\lambda,\mu\rangle$$

$$(J_z J_+^2 - \hbar J_+^2)|\lambda,\mu\rangle = (\mu + \hbar)\, J_+^2|\lambda,\mu\rangle$$

maka $J_z J_+^2|\lambda,\mu\rangle = \hbar J_+^2|\lambda,\mu\rangle + (\mu + \hbar) J_+^2|\lambda,\mu\rangle$

$$J_z J_+^2|\lambda,\mu\rangle = (\mu + 2\hbar)\, J_+^2|\lambda,\mu\rangle$$

Demikian pula J_- akan mempunyai pola yang sama sebagai,

$$J_z J_-^2|\lambda,\mu\rangle = (\mu - 2\hbar)\, J_+^2|\lambda,\mu\rangle$$

yang menggambarkan bahwa operator $J_\pm$ bersifat operasi me - naikkan (menurunkan) nilai pribadi bagi J_z dengan keli- patan $\hbar$ (Operator eskalator naik dan turun)

Kemudian kalau vektor pribadi bersifat ortonormal maka harga harap operator J^2 sesuai pada bab II .

$$\langle\lambda,\mu|J^2|\lambda,\mu\rangle = \langle\lambda,\mu|J_x^2|\lambda,\mu\rangle + \langle\lambda,\mu|J_y^2|\lambda,\mu\rangle$$
$$+ \langle\lambda,\mu|J_z^2|\lambda,\mu\rangle$$

$$\lambda = \langle\lambda,\mu|J_x^2|\lambda,\mu\rangle + \langle\lambda,\mu|J_y^2|\lambda,\mu\rangle + \mu^2$$

sehingga $\lambda \geq \mu^2$ maka $-\sqrt{\lambda} = \mu = \sqrt{\lambda}$

yang menyatakan bahwa μ mempunyai harga batas. Untuk mencapai harga tersebut kita gunakan operator eskalator berturut-berturut sampai akhirnya mencapai nilai maximum dan minimum yang memenuhi,

$$J_+|\lambda,\mu_{max}\rangle = 0 \qquad J_-|\lambda,\mu_{min}\rangle = 0 \quad ......7)$$

Jika eskalasi kita mulai dengan μ_0 maka dapat dipahami sebagai akibat eskalasi itu, maka :

$$\mu_{max} = \mu_0 + k\hbar$$

$$\underline{\mu_{min} = \mu_0 - l\hbar} \quad (-)$$

$$\mu_{max} - \mu_{min} = (k + l)\hbar \quad \text{maka } (k + l) \in I$$

kemudian kalau ditandai

$$\mu_{max} = J\hbar \text{ dan } \mu_{min} = j'\hbar$$

$$\text{maka } (j - J')\hbar = (K + l)\hbar$$

Selanjutnya dengan menggunakan sangkutan 4) dan persamaan 7) diperoleh,

$$J_- J_+ |\lambda, jh\rangle = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z)_{max} |\lambda, j\hbar\rangle = 0$$

$$= \lambda - (j\hbar)^2 - \hbar j\hbar |\lambda, j\hbar\rangle = 0$$

karena $|\lambda, j\hbar\rangle \neq 0$ maka,

$$\lambda = (j\hbar)^2 + j\hbar^2 = j(j + 1)\hbar^2 \quad .....8)$$

$$\text{dan } J_+ J_- |\lambda, j'\hbar\rangle = (J^2 - J_z^2 + \hbar J_z)_{min} |\lambda, j'\hbar\rangle = 0$$

$$= (\lambda - (j'\hbar)^2 + j\hbar^2) |\lambda, j'\hbar\rangle = 0$$

karena $|\lambda, j'h\rangle \neq 0$ maka,

$$\lambda = (j'\hbar)^2 - j'\hbar^2 = j'(j'-1)\hbar^2 \quad .....9)$$

gabungan antara 8) dan 9),

$$j(j+1) = j'(j' - 1)$$

$$(j')^2 - j' - j^2 - j = 0$$

$$\text{maka } j'_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(j+\tfrac{1}{2})^2} = \tfrac{1}{2} \pm (j + \tfrac{1}{2})$$

$j' = j + 1$ tidak mungkin karena $j > j'$

maka $j' = -j$

sehingga $\mu_{min} = -j\hbar$ dan $\mu_{max} = j\hbar$

selanjutnya karena

$(k + 1) \in I$ dan $(j - j') = 2j$ maka

$j \in I/2$

$\ni \mu = m\hbar$

untuk mencari sajian bagi J_+ dan J_- yang masing-masing ditandai dengan $a_+(j,m)$ dan $a_-(j,m)$. Dari sifat J_+ se - bagai operator eskalator naik dan J_- sebagai operator eskalator turun.

$$J_- | j,m + 1 \rangle = a_-(j,m + 1) | j,m \rangle$$

$$J_+ | j,m \rangle = a_+(j,m) | j,m + 1 \rangle$$

$a_-(j,m + 1)$ karena j tidak berubah oleh $J_\pm$ dan yang bereskalasi hanya m

$$\langle j,m + 1 | J_+ | j,m \rangle = \langle j,m + 1 | a_+(j,m) | j,m + 1 \rangle = a_+(j,m)$$

$$\langle j,m - 1 | J_- | j,m \rangle = \langle j,m - 1 | a_-(j,m + 1) | j,m \rangle = a_-(j,m + 1)$$

dari hasil ini dan sangkutan 4) diperoleh,

$$J_-J_+ | j,m \rangle = J_-a_+(j,m) | j,m \rangle$$

$$(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) | j,m \rangle = a_-(j,m + 1)\, a_+(j,m) | j,m \rangle = |a_+(j,m)|^2 | j,m \rangle$$

$$= \{ j(j + 1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2 \} | j,m \rangle$$

$$= \{ (j-m)(j+m+1)\hbar^2 \} | j,m \rangle$$

maka $a_m(j,m) = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\hbar$

$J_+J_-|j,m\rangle = J_+a_-(j,m)|j,m-1\rangle$

$(J^2-J_z^2+\hbar J_z)|j,m\rangle = \{j(j+1)\hbar^2-m^2\hbar^2+m\hbar^2\}|j,m\rangle$

$= a_+(j,m-1)\,a_-(j,m)|j,m\rangle$

$|a_-(j,m)|^2|j,m\rangle = \{(j+m)(j-m+1)\hbar^2\}|j,m\rangle$

maka $a_-(j,m) = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\hbar$

$\ni\langle J\pm\rangle = \langle j',m'|J\pm|j,m\rangle =$

$= \hbar\sqrt{(j\pm m)(j\pm m+1)}\langle j',m'|j,m\pm 1\rangle$

$= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\delta_{j,j'}\cdot\delta_{m,m'\mp 1} = \langle J_x \pm iJ_y\rangle$

$\ni\langle J_x\rangle = \frac{1}{2}\{\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,\delta_{j,j'}\delta_{m,m'-1}$

$+\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,\delta_{j,j'}\delta_{m,m'+1}\}$

$\langle J_y\rangle = \frac{1}{2i}\{\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,\delta_{j,j'}\delta_{m,m'-1}$

$-\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,\delta_{j,j'}\delta_{m,m'+1}\}$

3.2. Petala Tenaga Atom Hidrogen

Sebelum membicarakan masalah atom hidrogen, kita tinjau dahulu masalah Kepler sebab setiap benda atau Zarrah elementer yang mengorbit atau berosilasi berkaitan dengan masalah Kepler.

Kita mulai dengan meninjau Hamiltonian untuk masalah Kepler yang diberikan oleh :

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{K}{r} = \mathcal{E}$$

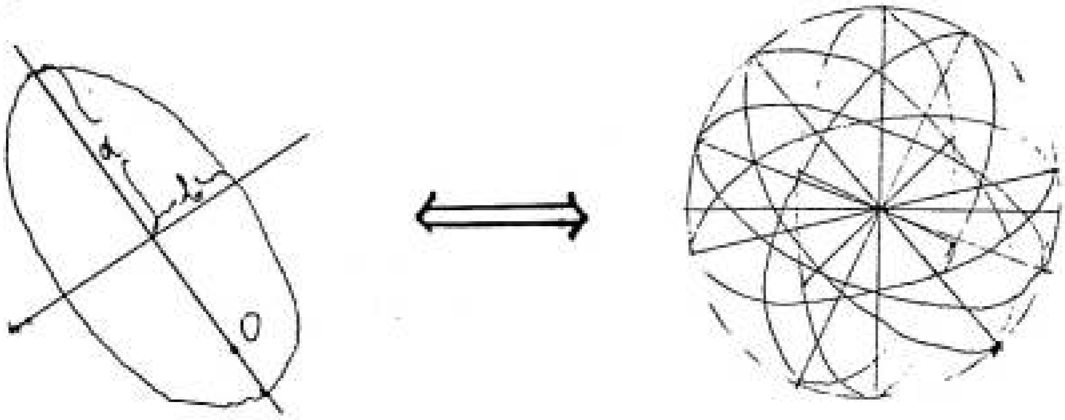
...

μ = massa tereduksi

K = tetapan dan

r = jarak.

Untuk suatu atom yang sederhana seperti Hidrogen, karena penyelesaian klasik lintasan elektronnya berbentuk elips, maka kita dapat menganalisa bahwa karena H tak bergantung pada waktu, maka H merupakan tetapan gerak yang besarnya diberikan oleh $E = -\frac{K}{2a}$ dimana a = sumbu semi mayor dari elips.



Sifat simetri H terhadap rotasi menyebabkan bidang lintasan melalui titik O, tetapi ini belum menjamin bahwa orbit itu tertutup mengingat sumbu elips tersebut dapat mengalami perubahan, oleh karena itu mestilah terdapat besaran lain dari pada H dan L yang merupakan juga tetapan gerak yang bersangkutan dengan orientasi sumbu utama bidang Orbit.

Besaran yang kita cari itu disajikan oleh :

$$M = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{\mu} - \frac{K}{r}\vec{r}$$

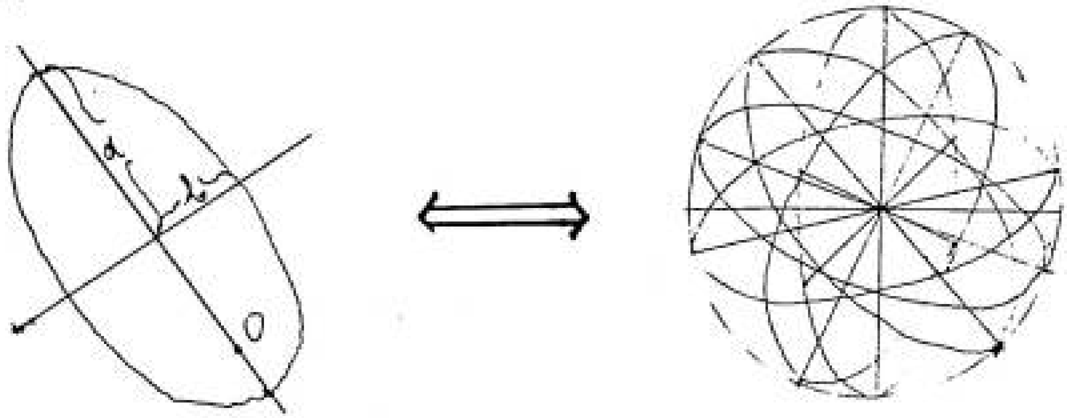
yang didefinisikan oleh C. Runge dan W. Lenz.

μ = massa tereduksi

K = tetapan dan

r = jarak.

Untuk suatu atom yang sederhana seperti Hidrogen, karena penyelesaian klasik lintasan elektronnya berbentuk elips, maka kita dapat menganalisa bahwa karena H tak bergantung pada waktu, maka H merupakan tetapan gerak yang besarnya diberikan oleh $E = -\frac{K}{2a}$ dimana a = sumbu semi mayor dari elips.



Sifat simetri H terhadap rotasi menyebabkan bidang lin - tasan melalui titik O, tetapi ini belum menjamin bahwa orbit itu tertutup mengingat sumbu elips tersebut dapat mengalami perubahan, oleh karena itu mestilah terdapat besaran lain dari pada H dan L yang merupakan juga teta- pan gerak yang bersangkutan dengan orientasi sumbu utama bidang Orbit.

Besaran yang kita cari itu disajikan oleh :

$$M = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{\mu} - \frac{K}{r}\vec{r}$$

yang didefinisikan oleh C. Runge dan W. Lenz.

Karena $L = r \times p$ maka L tegak lurus pada r dan L tegak lurus pada p maka $p \times L$ sejajar dengan r, akibatnya M pada persamaan diatas juga sejajar dengan r sebab seorien - tasi dengan r. Maka M tegak lurus pada L maka $M.L = 0$. Karena M sejajar dengan r maka M juga tetapan gerak, sehingga H dan M komutatip atau $\left[H , M \right] = 0$

Selanjutnya jika M kita kuadratkan diperoleh,

$$M^2 = \frac{(\vec{P} \times \vec{L})^2}{\mu^2} - \frac{2K\,(\vec{P} \times \vec{L}).\vec{r}}{\mu r} + K^2$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\left\{\vec{P} \times (r \times p)\right\}^2 - \frac{2K}{\mu r}\left[\vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p}).\vec{r}\right\} + K^2$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\left\{p^2\vec{r} - (\vec{p}.\vec{r})\vec{p}\right\}^2 - \frac{2k}{\mu r}\left\{p^2r^2 - (\vec{p}.\vec{r})\right\} + K^2$$

$$= \frac{1}{u^2}\left\{p^4r^2 - 2\,(\vec{p}.\vec{r})(\vec{p}.\vec{r})p^2 + p^2\,(\vec{p}.\vec{r})^2\right\} - \frac{2K}{\mu r}\left\{p^2r^2 - (\vec{p}.\vec{r})^2\right\} + K^2$$

$$= \frac{p^2}{\mu^2}\left\{p^2r^2 - (\vec{p}.\vec{r})^2\right\} - \frac{2K}{\mu r}\left\{p^2r^2 - (\vec{p}.\vec{r})^2\right\} + K^2$$

$$= \left[p^2r^2 - (\vec{p}.\vec{r})^2\right]\left(\frac{p^2}{\mu^2} - \frac{2K}{\mu r}\right) + K^2$$

$$M^2 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{2K}{r}\right) L^2 + K^2 = \frac{2H}{\mu} L^2 + K^2$$

besaran-besaran tersebut masih disajikan dalam bentuk kla-
sik belum bersifat operator dalam hal L dan P sudah bersi-
fat operator (lihat 3-1) untuk tujuan tersebut dibuat
... M dalam bentuk perata-rataan,

Karena $L = r \times p$ maka L tegak lurus pada r dan L tegak lurus pada p maka $p \times L$ sejajar dengan r, akibatnya M pada persamaan diatas juga sejajar dengan r sebab seorientasi dengan r. Maka M tegak lurus pada L maka $M.L = 0$. Karena M sejajar dengan r maka M juga tetapan gerak, sehingga H dan M komutatip atau $\left[H , M\right] = 0$

Selanjutnya jika M kita kuadratkan diperoleh,

$$M^2 = \frac{(\vec{P} \times \vec{L})^2}{\mu^2} - \frac{2K\,(\vec{P} \times \vec{L}).\vec{r}}{\mu r} + K^2$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\left\{\vec{P} \times (r \times p)\right\}^2 - \frac{2K}{\mu r}\left[\vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p}).\vec{r}\right\} + K^2$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\left\{p^2\vec{r} - (\vec{p}.\vec{r})\vec{p}\right\}^2 - \frac{2k}{\mu r}\left\{p^2 r^2 - (\vec{p}.\vec{r})\right\} + K^2$$

$$= \frac{1}{u^2}\left\{p^4 r^2 - 2\,(\vec{p}.\vec{r})(\vec{p}.\vec{r})p^2 + p^2\,(\vec{p}.\vec{r})^2\right\} - \frac{2K}{\mu r}\left\{p^2 r^2 - (\vec{p}.\vec{r})^2\right\} + K^2$$

$$= \frac{p^2}{\mu^2}\left\{p^2 r^2 - (\vec{p}.\vec{r})^2\right\} - \frac{2K}{\mu r}\left\{p^2 r^2 - (\vec{p}.\vec{r})^2\right\} + K^2$$

$$= \left[p^2 r^2 - (\vec{p}.\vec{r})^2\right]\left(\frac{p^2}{\mu^2} - \frac{2K}{\mu r}\right) + K^2$$

$$M^2 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{2K}{r}\right) L^2 + K^2 = \frac{2H}{\mu} L^2 + K^2$$

besaran-besaran tersebut masih disajikan dalam bentuk klasik belum bersifat operator dalam hal L dan P sudah bersifat operator (lihat 3-1) untuk tujuan tersebut dibuat definisi vektor M dalam bentuk perata-rataan,

$$M = \frac{1}{2\mu}(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{P}) - \frac{K}{r}\hat{r}$$ yang telah Hermitian

jadi kita dapatkan ada 6 generator yakni tiga dari L = rxp yang komutasinya diberikan oleh,

$$\left[L_i , L_j\right] = \epsilon_{ijk}\, i\hbar\, L_k$$

yang mengikuti aturan permutasi, antara M dan L akan mengikuti aturan permutasi

$$\left[M_i , L_j\right] = \epsilon_{ijk}\, i\hbar\, M_k$$

kemudian dari sini kita buat definisi

sebagai

$$\vec{M}' = \left(-\frac{\mu}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \vec{M}$$

sangkutan komutasinya diberikan oleh,

$$\left[M_i' , M_j'\right] = \epsilon_{ijk}\, i\hbar L_k$$

Kita telah melihat bahwa antara M dan L sudah membentuk aljabar yang tertutup.

Selanjutnya dapat dipahami karena p^2 adalah skalar maka M dan H komutatip atau $\left[M , H\right] = 0$, $\vec{L}.\vec{M} = \vec{M}.\vec{L} = 0$.

Sekarang karena ada enam generator maka $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ dimana komponen $r = (r_i, r_j, r_k)$ dan $p = (p_i, p_j, p_k)$ oleh karena keberadaan M maka komponen r dan P diperluas indeks menjadi $i, j = i, 2, 3, 4$ komponen jarak keempat dan momentum keempat sedemikian, jadi komponen

$$M_i' = L_{14}, \quad M_j' = L_{24}, \quad M_k' = L_{34}$$

$$M = \frac{1}{2\mu}(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{P}) - \frac{K}{r}\hat{r}$$ yang telah Hermitian

jadi kita dapatkan ada 6 generator yakni tiga dari L = rxp yang komutasinya diberikan oleh,

$$\left[L_i , L_j\right] = \epsilon_{ijk} \, i\hbar \, L_k$$

yang mengikuti aturan permutasi, antara M dan L akan mengikuti aturan permutasi

$$\left[M_i , L_j\right] = \epsilon_{ijk} \, i\hbar \, M_k$$

kemudian dari sini kita buat definisi

sebagai

$$\vec{M}' = \left(- \frac{\mu}{2\mathcal{E}}\right)^{\frac{1}{2}} \vec{M}$$

sangkutan komutasinya diberikan oleh,

$$\left[M_i' , M_j'\right] = \epsilon_{ijk} \, i\hbar L_k$$

Kita telah melihat bahwa antara M dan L sudah membentuk aljabar yang tertutup.

Selanjutnya dapat dipahami karena p^2 adalah skalar maka M dan H komutatip atau $\left[M , H\right] = 0$, $\vec{L}.\vec{M} = \vec{M}.\vec{L} = 0$.

Sekarang karena ada enam generator maka $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ dimana komponen $r = (\, r_i, r_j, r_k \,)$ dan $p = (\, p_i, p_j, p_k \,)$ oleh karena keberadaan M maka komponen r dan P diperluas indeks menjadi i, j = i, 2, 3, 4 komponen jarak keempat dan momentum keempat sedemikian, jadi komponen

$$M_i' = L_{14}, \quad M_j' = L_{24}, \quad M_k' = L_{34}$$

$\hat{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ disajikan sebagai matriks 4 x 4 yakni jika di - tinjau dari semua generatornya diberikan oleh

$$L_{12}, L_{13}, L_{23}, L_{14}, L_{24}, L_{34}$$

dengan mengganti $L_{14} = N_1$, $L_{24} = N_2$, $L_{34} = N_3$

$$L_{23} = M_1 \ , \ L_{13} = M_2 \ , \ L_{12} = M_3$$

maka $\left[M_i , M_j\right] = i\hbar \epsilon_{ijk} M_k$

$$\left[N_i , N_j\right] = i\hbar \epsilon_{ijk} M_k$$

$$\left[M_i , N_j\right] = i\hbar \epsilon_{ijk} N_k$$

Petala Tenaga Atom Hidrogen

Untuk mencari Tenaga Atom Hidrogen cukup didefini- sikan,

$$\vec{I} = \tfrac{1}{2} (\vec{L} + \vec{M}') \ , \quad \vec{K} = \tfrac{1}{2} (\vec{L} - \vec{M}')$$

yang dapat ditunjukkan

$$\left[I_i , I_j\right] = i\hbar I_k$$

$$\left[K_i , K_j\right] = i\hbar K_k$$

$$\left[I , K\right] = 0$$

$$\left[I , H\right] = \left[K , H\right] = 0$$

Kita lihat bahwa I dan K masing-masing sub Grup dari O (4) atau I dan K menggenerasikan Grup O (4), pada Bab 3- 1 diperoleh :

$$I^2 = i\ (i + 1)\hbar^2, \ K^2 = k\ (k + 1)\ \hbar^2$$

$$i,k = 1,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

adi kita menandai bahwa terdapat dua Operator yakni I^2

an K^2 yang disebut operator kasimir yakni :

$$I^2 = \tfrac{1}{4}\,(\,\overline{L} + \overline{M}'\,)^2 \text{ dan } K = \tfrac{1}{4}\,(\,\overline{L} - \overline{M}'\,)^2$$

ilihan lain melukiskan operator kasimir adalah :

$$C = I^2 + K^2 = \tfrac{1}{2}\,(\,L^2 + M'^2)$$

$$C' = I^2 - K^2 = \vec{L}.\vec{M}$$

karena $\vec{L} \,.\, \vec{M} = 0$ maka $I^2 = K^2$ maka

$C = I^2 + I^2 = 2\,I^2$ dan nilai pribadi bagi

$$C = k\,(k + 1)\hbar^2 + k\,(k + 1)\hbar^2$$

$$= 2k\,(k + 1)\hbar^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

dengan $k = 0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2} \ldots\ldots$

ekarang dengan memasukkan $M^2 = \frac{2H}{\mu}\,(\,L^2 + \hbar^2\,) + K^2$

an mengaitkannya dengan $M' = (-\,\frac{u}{2})^{\frac{1}{2}}\,\vec{M}$ kedalam C, kita

eroleh ,

$$C = \tfrac{1}{2}\,(L^2 - \frac{u}{2\varepsilon}\,M^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(L^2 - \frac{u}{2\varepsilon}\,(\frac{2\varepsilon}{\mu})(L^2 + \hbar^2) - \frac{\mu K^2}{2\varepsilon}\right)$$

$$= -\,\frac{\mu K}{4\varepsilon} - \tfrac{1}{2}\hbar^2$$

engan menyamakan pernyataan ini dengan C pada 1 diatas

aka :

$$2k\,(k + 1)\,\hbar^2 = -\,\frac{\mu k}{4\varepsilon} - \tfrac{1}{2}\,\hbar^2$$

$$2k\,(k + 1)\,\hbar^2 + \tfrac{1}{2}\hbar^2 = -\,\frac{\mu k}{4\varepsilon}$$

$$4\,\mathcal{E} = -\frac{\mu\, K^2}{2k\,(k+1)\hbar^2+\frac{1}{2}\hbar^2}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu\, k}{4\,(2k^2+2k+\frac{1}{2})\hbar^2}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu\, k}{2\,(4k^2+4k+1)\hbar^2}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu\, k}{2\hbar^2(2k+1)^2}$$

inilah petala atom hidrogen dari Bohr.

3.3. Petala Tenaga Oscilator Sederhana

Energi Kinetik dari benda yang beroscilasi adalah:

$E_k = \frac{1}{2}\, m\dot{q}^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$ dan energi potensialnya,

$$E_p = \frac{1}{2m}\cdot m^2w^2q^2$$

maka Hamiltoniannya adalah Energi total yakni,

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2w^2q^2)$$

Jika P dan Q matriks maka Halmitoniannya,

$$H = \frac{1}{2m}(P^2 + m^2w^2Q^2)$$

Kemudian didefinisikan Operator

$D = \frac{1}{(2m)^{1/2}}$ (P - imwQ) dan

$D^+ = \frac{1}{(2m)^{1/2}}$ (P + imwQ) maka bentuk Komutasi

D dan D^+ adalah :

$$[D.D^+] = \frac{1}{2m}\ [(p - imwQ),(p + imwQ)]$$

$$= \frac{1}{2m}\Big((p - imwQ)(p + imwQ) - (p + imwQ)(p - imwQ)\Big)$$

$$= \frac{1}{2m}\Big(p^2 + impwQ - imwQP + m^2w^2Q^2 - p^2 - imwQP + imwPQ$$

$$- m^2w^2Q^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2m}\Big(2\,(imwpQ - imwQP^2)\Big)$$

$$= iw\,(PQ - QP)$$

$$= iw\,(-i\hbar) = w\hbar$$

$$D^+D = \frac{1}{2m}\,(P + imwQ)(P - imwQ)$$

$$= \frac{1}{2m}\Big(p^2 - imwPQ + imwQP + m^2w^2Q^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2m}\,(P^2 + m^2w^2Q^2) + \frac{iw}{2}\,(QP - P\,Q)$$

$$= H + \frac{iw}{2}\,(i\hbar) = H - \tfrac{1}{2}\,w\hbar.$$

$$DD^+ = D^+D + w\hbar$$

$$= H - \tfrac{1}{2}w\hbar + w\hbar = H + \tfrac{1}{2}w\hbar.$$

jika $\Omega(j)$ vektor pribadi dari H dengan nilai pribadi w_j diperoleh :

$$\langle j\,|\,H - \tfrac{1}{2}\,\hbar w\,|\,j\rangle = \Big(\Omega(j), H - \tfrac{1}{2}\,\hbar w\,\Omega(j)\Big)$$

$$= w_j - \tfrac{1}{2}\,\hbar W \geq 0$$

Karena $D\,(AD) = (DA)D$

maka $D\,(H - \tfrac{1}{2}\,\hbar w) = (H + \tfrac{1}{2}\hbar w)D$

maka $HD = D(H - \hbar w)$

Jika Ω_k Vektor Pribadi dari H dengan nilai pribadi W_k

dan bentuk vektor $D\Omega(k)$, karena

$$H\left(D\Omega(k)\right) = (HD)\,\Omega(k)$$

dan dari $HD = D(H - \hbar w)$ maka

$$\begin{aligned} H\left(D\Omega(k)\right) &= D\,(H - \hbar w)\,\Omega(k) \\ &= D\,(W_k - \hbar w)\,\Omega(k) \\ &= (W_k - \hbar w)\,D\Omega(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H\left(D^2\Omega(k)\right) &= HD\left(D\Omega(k)\right) \\ &= D\,(H - \hbar w)\left(D\Omega(k)\right) \\ &= DH - D\hbar w\left(D\Omega(k)\right) \\ &= HD - \hbar wD - \hbar wD\left(D\Omega(k)\right) \\ &= (H - 2\hbar w)\,D\left(D\Omega(k)\right) \\ &= (H - 2\hbar w)\left(D^2\Omega(k)\right) \\ &= (W_k - 2\hbar w)\left(D^2\Omega(k)\right) \end{aligned}$$

dan seterusnya : $H\left(D^n\Omega(k)\right) = (W_k - n\hbar w)\left(D^n\Omega(k)\right)$

jika pada saat terendah dari Oscilator kita tulis D^{k+1}

yang memenuhi

$$D^{k+1}\Omega(k) = 0 \quad \text{maka}$$

$$D^+D^{k+1}\Omega(k) = 0$$

$$(D^+D)\,D^k\Omega(k) = 0$$

$$(H - \tfrac{1}{2}\hbar w)\left(D^k\Omega(k)\right) = 0$$

$$H\left(D^k\Omega(k)\right) = \tfrac{1}{2}\hbar w\left(D^k\Omega(k)\right) \Rightarrow \tilde{W}_u = \tfrac{1}{2}\hbar\omega.$$

Juga karena $W_k = kw\hbar$ nilai pribadi dari H

KAJIAN PUSTAKA

1. L.I. Schiff, Quantum Mechanics, Mc. Graw-Hill, Co.

2. Muslim, Pemakaian ruang Hilbert dalam formulasi umum Mekanika Kuantum - paper.

3. Silaban Ph.D. " Teori Grup dalam Fisika" penerbit angkasa Bandung.

4. George L. Trigg, Ph.D. "Quantum Mechanics" (An weast-west edition) D van Nostrand Company, inc, New-Delhi, 1963.

5. Gofmann, C, Pedrick,G. " First Course in fungtional analisis".

6. Kursunoglu,B. " Modern Quantum Teory" W.H. Freeman and Company, 1962.

7. Neal H. Mc Coy. "Introduction to Modern Algebra" (Revised Edition) Allin and Bacon Inc-Boston, Ed. 1969.